

تاریخ علم، دوره ۱۹، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۴۰۰، ص ۱۳۵-۱۵۶

تعیین خط نصف‌النهار

بر اساس کتاب منتهی الإدراک فی تقاسیم الأفلاک نوشته عبدالجبار خرقی (سده ۶/ق ۱۲ م)

حنیف قلندری

استادیار، پژوهشکده تاریخ علم

دانشکده الهیات و معارف اسلامی، دانشگاه تهران

hanif.ghalandari@ut.ac.ir

(دریافت: ۱۴۰۰/۰۴/۲۴، پذیرش: ۱۴۰۰/۰۵/۱۹)

چکیده

نصف‌النهار از دایره‌های عظیمه مشهور است که هم روی کره آسمانی و هم روی کره زمین تصور می‌شود. روی کره آسمانی حداکثر ارتفاع اجرام آسمانی در یک شبانه‌روز در مختصات مرجع افق نسبت به نصف‌النهار سنجیده می‌شود و روی کره زمین این دایره به منظور تعیین طول جغرافیایی یک موضع به کار می‌رود، که به تعیین یک نصف‌النهار مبدأ نیاز دارد. موضوع تعیین نصف‌النهار مبدأ و اندازه‌گیری اختلاف طول جغرافیایی مواضع مختلف زمین نسبت به آن مربوط به جغرافیای ریاضی است و در آثار نجومی دوره اسلامی، کتاب‌های هیئت و زیج‌ها، به آن اشاره می‌شده است. در رصد اجرام آسمانی روی نصف‌النهار ابزار رصدی می‌بایست روی خط نصف‌النهار موضع رصد قرار داده شود و از این رو تعیین خط نصف‌النهار مقدم بر امر رصد است. به همین دلیل روش عملی به دست آوردن خط نصف‌النهار در آثار نجومی می‌آمده است. در آثار هیئت دوره اسلامی فصلی با عنوان «تعیین خط نصف‌النهار» به بخش جغرافیای ریاضی افزوده شده است. بطلمیوس در مجسطی در باره تعیین خط نصف‌النهار سخنی نگفته است، پس می‌توان این را نیز از افزوده‌های دانشمندان اسلامی به آثار نجومیشان به حساب آورد. در بیشتر این آثار به روش‌های عملی تعیین خط نصف‌النهار اشاره می‌شده است که مشهورترین آنها «دایره هندی» است. در این مقاله فصل «تعیین خط نصف‌النهار» از کتاب منتهی الإدراک فی تقاسیم الأفلاک نوشته عبدالجبار خرقی در سده ششم هجری که یکی از نخستین آثار جامع هیئت است، معرفی و بررسی شده است. خرقی چهار روش برای تعیین خط نصف‌النهار می‌آورد و ضمن توصیف این روش‌ها در باره دقت هر یک از آنها توضیح می‌دهد. تقریباً در هیچ اثر دیگری از سنت هیئت این تعداد روش و نیز بررسی این چنین نیامده است. این مقاله تلاش می‌کند در باره منبع احتمالی

۱۳۶ / تاریخ علم، دوره ۱۹، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۴۰۰

این بخش از کتاب خرقی نیز شواهدی عرضه کند. این بخش از کتاب خرقی را با روش‌های تعیین خط نصف‌النهار در افراد المقال فی أمر الظلال و قانون مسعودی بیرونی (در گذشته ۴۴۰ق) مقایسه کرده‌ایم و نتیجه این مقایسه نشان می‌دهد که بیرونی از منابع خرقی در نوشتن این مبحث بوده است.

کلیدواژه‌ها: افراد المقال فی أمر الظلال، بیرونی، خط نصف‌النهار، دایره نصف‌النهار، روش دایره هندی، عبدالجبار خرقی، قانون مسعودی، منتهی الإدراک فی تقاسیم الأفلاک.



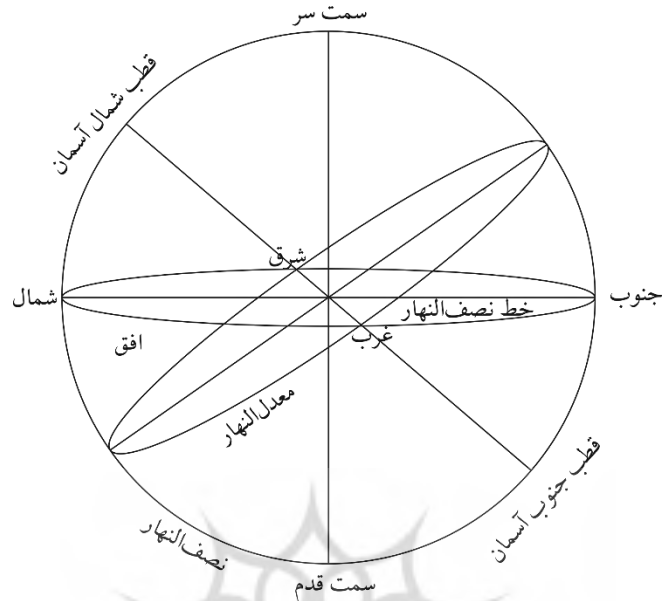
پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

مقدمه

در نجوم کروی به منظور مشخص کردن مختصات اجرام آسمانی از سه مرجع مختصات استفاده می‌شود: مختصات استوایی با مرجع استوای آسمان (معدل‌النهار)، مختصات دایرة البروجی با مرجع دایرة البروج و مختصات افقی با مرجع دایرة افق. هر کدام از دایره‌های معدل‌النهار، دایرة البروج و افق را در آثار نجومی دوره اسلامی از جمله دایره‌های عظیمه مشهور برشمرده‌اند و در برخی آثار نجوم دوره اسلامی آنها را «اصول» نامیده‌اند (کوشیار، ۹۴ پ؛ خرقی، ۱۱۱، بند ۱۹۸). به این سه دایره به‌طور معمول دایرة عظیمه نصف‌النهار نیز اضافه می‌شود که اصل چهارم است.^۱ در تعریف دایرة نصف‌النهار چنین نوشته‌اند: دایرة عظیمه‌ای که از قطب‌های معدل‌النهار (قطب شمال و جنوب کره آسمان) و افق (سمت سر و سمت قدم) می‌گذرد و سطح ظاهر از معدل‌النهار را به دو نیم می‌کند، یعنی قوس حرکت روزانه (یا شبانه) اجرام سماوی را نصف می‌کند. این دایره بر افق عمود است و قطب‌های آن جهت‌های مشرق و مغرب را نشان می‌دهند، که همان نقاط تقاطع دایرة افق با معدل‌النهار هستند.^۲ بیشترین ارتفاع خورشید و دیگر اجرام آسمانی روی دایرة نصف‌النهار اندازه گرفته می‌شود و از اتصال فصل مشترک این دایره و دایرة افق، که نقاط شمال و جنوب هستند، خط نصف‌النهار به دست می‌آید (کوشیار، ۹۴ پ؛ خرقی، ۱۱۳-۱۱۴، بند ۲۰۳؛ طوسی، التذکره...، ۱۱۹، بند ۱۳؛ همو، الرسالة المعینیه، ۴۹، بند ۱۳). در وجه تسمیه این دایره نیز گفته‌اند چون خورشید در حرکت روزانه به این دایره برسد روز به میانه می‌رسد و از این رو آن را «نصف‌النهار» یا «نیم‌روزان» گفته‌اند (خرقی، ۱۱۴، بند ۲۰۳؛ بیرونی، التفهیم، ۶۳؛ نیز شکل ۱).

۱. کوشیار می‌نویسد که این چهار دایره «اصول» هستند و پنج دایرة دیگر بر اقطاب این دوایر می‌گذرند که عبارتند از دایرة ماره باقطاب اربعه، دایرة میل، دایرة عرض، دایرة ارتفاع و دایرة اول سموت (۹۴ پ). خرقی همه دایره‌ها را «اصول» می‌نامد و می‌نویسد: «در اینجا در پی آن هستیم که آن‌هایی را یاد کنیم که نسبت به دیگران مانند اصل هستند» (خرقی، ۱۱۱، بند ۱۹۸).

۲. گاهی به جای مشرق و مغرب مطلع دو اعتدال نوشته‌اند، تأکید بر مطلع دو اعتدال از آن روست که تنها در دو روز اعتدال خورشید از مشرق حقیقی طلوع می‌کند و در مغرب حقیقی غروب می‌کند، یعنی مدار روزانه خورشید بر معدل‌النهار منطبق می‌شود. در روزهای دیگر خورشید از شرق حقیقی فاصله دارد که این قوس فاصله را در متون دوره اسلامی سعت مشرق می‌نامند و در متون نجومی در باره سعت مشرق و اندازه‌گیری آن سخن گفته شده است (برای نمونه نک: بطلمیوس، ۷۶-۷۷؛ خرقی، ۲۱۱-۲۱۴). در این عبارت که قطب‌های نصف‌النهار مشرق و مغرب را نشان می‌دهند منظور مشرق و مغرب حقیقی است و از این رو گاهی مطلع اعتدالین را به جای مشرق و مغرب نوشته‌اند.



شکل ۱

در جغرافیای ریاضی نصف النهار در تعیین طول جغرافیایی مواضع روی زمین به کار می‌آید. البته اطلاعات مربوط به طول جغرافیایی در همه آثار نجومی دوره اسلامی دیده نمی‌شود، با این حال تعیین مبدأ طول جغرافیایی یا همان نصف النهار مبدأ را در آثار دوره اسلامی می‌توان جستجو کرد (برای گزارش کاملی در باره مبادی طول جغرافیایی در دوره اسلامی نک: مرسیه، سراسر مقاله؛ کندی،^۱ «جغرافیای ریاضی»،^۲ ۱۸۸-۱۸۹؛ کرم‌زاده و دیگران، ۱۵۹-۱۶۱). دایره نصف النهار در نجوم ریاضی و رصدی نیز به کار می‌آید که مهم‌ترین آن رصد بیشترین ارتفاع اجرام آسمانی است که هنگام عبور آنها از نصف النهار محل رصد رخ می‌دهد. برای این کار باید ارتفاع یک جرم آسمانی را روی نصف النهار موضع رصد نسبت به افق آن محل رصد کنیم، بر این اساس تعیین خط نصف النهار موضع رصد مهم می‌شود. بطلمیوس در گزارش ابزارهایی که در تعیین میل دایره البروج از معدل النهار (میل کلی) به کار برده است، یعنی حلقه تعیین میل دایره البروج و ربع، به نصب آنها روی خط نصف النهار یا در امتداد شمال و جنوب

1. Kennedy
2. Mathematical Geography

تعیین خط نصف‌النهار.../ ۱۳۹

اشاره کرده است (بطلمیوس، ۶۲۱-۶۳)، با این حال بطلمیوس نمی‌گوید که چطور باید خط نصف‌النهار را به دست آورد.^۲

حداقل یک متن یونانی می‌شناسیم که در آن روشی برای تعیین خط نصف‌النهار یک موضع گزارش شده است. رساله آنالما^۳ از دیدروس اسکندرانی^۴ (سده اول میلادی) که به دست ما نرسیده است اما از قرار معلوم دانشمندان اسلامی با آن آشنا بوده‌اند.^۵ در این روش که یک روش ترسیمی است، خط نصف‌النهار یک نقطه دلخواه روی زمین از طریق استقرار یک شاخص قائم و مشاهده سایه آن در سه وقت از روز تعیین می‌شود (کندی، «روش ترسیمی بیرونی...»^۶، ۲۵۲-۲۵۵؛ نویگباور، ۸۴۱/۲-۸۴۳). ابوریحان بیرونی در فصل بیستم از رساله افراد المقال فی أمر الظلال این روش را گزارش کرده است و از رساله آنالما دیدروس نام برده است (بیرونی، افراد المقال، ۱۱۶؛ البیرونی، ۱۶۲/۱^۷؛ کندی، «روش ترسیمی بیرونی...»^۸، ۲۵۴-۲۵۵).

در بیشتر آثار نجومی دوره اسلامی، به ویژه کتاب‌های هیئت، از روش دیگری یاد شده است که آن را «دایره هندی» می‌نامند. بیرونی در افراد المقال (۱۰۶) در باره این نام می‌نویسد:

1. Ptolemy

۲. تومر در این باره می‌نویسد که «بطلمیوس فرض می‌کند که می‌توان نصف‌النهار را رسم کرد بدون اینکه چگونگی آن را توضیح دهد» (بطلمیوس، ۶۲، یادداشت ۷۲).

3. Analemma

4. Diodorus of Alexandria

۵. در باره گزارش این روش در منابع دوره اسلامی نک:

Schoy, C. (1922). "Abhandlung über die Ziehung der Mittagslinie, dem Buche über das Analemma entnommen, samt dem Beweis dazu von Abû Sa'îd ad-darîr." *Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie*. Vol. 50. Hamburg/Berlin. pp. 265-271. [Reprinted in *Islamic Geography*, vol. 18. Edited by Fuat Sezgin. Frankfurt, 1992. pp. 209-215];

Kennedy, E.S. (1959). "Bîrûnî's Graphical Determination of the Local Meridian." *Scripta Mathematica*, vol. 24, pp. 251-255. [Reprinted in *Studies in the Islamic Exact Sciences*, American University of Beirut, 1983, pp. 613-617];

Neugebauer, O. (1975). *A History of Ancient Mathematical Astronomy*, 3 vols. New York: Springer-Verlag. vol. 2/pp 841-842

6. Bîrûnî's Grphical Determination...

7. Al-Bîrûnî

[این روش] به ایشان منسوب است چون در زیج ارکند و زیج‌های هندی و محاسبات ایشان آمده است و این‌ها نخستین چیزهایی هستند که به مملکت اسلام راه پیدا کرده‌اند.^۱

در این روش نیز از سایه شاخص قائم استفاده می‌شود با این تفاوت که به جای رصد سه سایه به دو سایه، یکی صبح‌گاهی و دیگری عصرگاهی، بسنده شده است و در ادامه با به‌کار گرفتن یک ترسیم ساده، یعنی رسم نیمساز یک زاویه، خط نصف‌النهار به دست می‌آید (نک: دنباله مقاله)، البته روش‌های دیگری نیز در کنار این روش معرفی می‌شوند که صورت کلی آن‌ها از همین دست است. می‌توان گفت همه این روش‌ها ترکیبی از یک رصد ساده و ترسیم‌های ساده هندسی هستند.

در ادامه روش‌های تعیین خط نصف‌النهار را در یکی از کتاب‌های هیئت بررسی می‌کند. منتهی الإدراک فی تقاسیم الأفلاک نوشته عبدالجبار خرقی در سده ششم هجری که می‌توان آن را نخستین نمونه آثار جامع هیئت دانست. در این کتاب فصل تعیین نصف‌النهار به مقاله جغرافیای ریاضی (هیئة الأرض) افزوده شده است و احتمالاً نویسندگان بعدی آثار هیئت به پیروی از خرقی این فصل را در آثار خود آورده‌اند (در باره تأثیرپذیری آثار هیئت بعد از خرقی از او نک: خرقی، مقدمه مصحح، ۱۲۳-۱۲۸). خرقی در منتهی الإدراک از چهار روش در ترسیم خط نصف‌النهار یاد کرده است و حداقل در دو مورد آن‌چه دقیق نبودن روش را موجب می‌شود توضیح داده است. این در حالی است که او در دو اثر دیگر خود در هیئت، التبصرة فی علم الهیئة و عمدة خوارزمشاهی، تنها از یک روش - دایره هندی - نام برده است. همچنین بر این اساس که خرقی در مواضع دیگری از کتاب خود متأثر از آثار بیرونی است، مطالب این فصل نیز با نوشته‌های بیرونی، به‌ویژه در افراد المقال و قانون مسعودی مقایسه شده‌اند و نتایج را نشانه دیگری از تأثیرپذیری خرقی از نوشته‌های بیرونی و به تبع آن تأثیر نوشته‌های بیرونی بر آثار هیئت می‌توان دانست.

۱. وإنما نسبت إليهم لأنها في زيج الأركند وزيجات الهند وحساباتهم أول ما وقع إلى مملكة الإسلام من أمثالها

روش‌های خرقی برای تعیین خط نصف‌النهار

در فصل سیزدهم از مقاله دوم کتاب منتهی الإدراک فی تقاسیم الأفلاک (خرقی، ۲۱۶-۲۲۰، بندهای ۳۸۴-۳۹۰)

دایره هندی

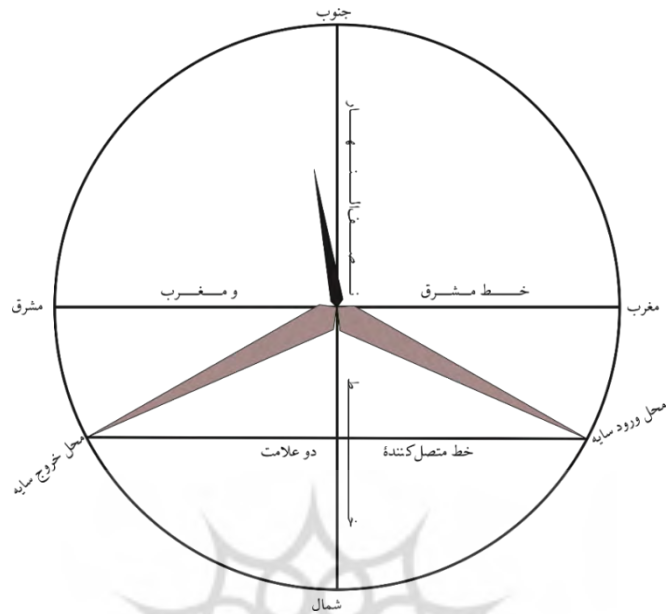
این روش از مشهورترین روش‌های تعیین خط نصف‌النهار در متن‌های نجومی، به‌ویژه آثار هیئت است. در سطحی صاف که هیچ ناهمواری نداشته باشد دایره‌ای رسم می‌کنیم. در آزمودن همواری این سطح خرقی از هیچ ابزاری نام نمی‌برد بلکه یک طور روش عملی عرضه می‌کند. او می‌نویسد:

... اگر آب یا مایع دیگری روی آن [سطح] بریزیم، سرگردان شود و به هر طرف جاری شود یا اگر جسم گردی مانند گلوله را در محل آن بیندازیم سر جایش ثابت بماند و به جهتی مایل نشود^۱ (خرقی، ۲۱۶، بند ۳۸۴).

بیرونی (افراد المقال...، ۹۹) نیز در باره آزمودن همواری سطحی موازی افق از همین روش‌ها یاد می‌کند و می‌گوید که این مختص به «گل‌کاری و گچ‌کاری»^۲ است. بر این اساس با آزمودنی مرتبط با حرفه‌های بنایی سر و کار داریم و نه روش‌های هندسی.

در ادامه شاخصی عمود را در مرکز این دایره نصب می‌کنیم. خرقی اندازه طول شاخص را نصف دهانه پرگار، یعنی نصف شعاع دایره یا یک چهارم قطر گفته است. سپس سایه شاخص را پیش از ظهر رصد می‌کنیم تا آن زمان که طول سایه به محیط دایره برسد و در آن زمان نقطه تقاطع را علامت‌گذاری می‌کنیم. همین کار را در طرف مقابل نیز انجام می‌دهیم، یعنی طول سایه را بعد از ظهر رصد می‌کنیم تا زمانی که سایه از محیط دایره خارج شود و آنجا را نیز علامت‌گذاری می‌کنیم. سپس این دو نقطه را به یکدیگر وصل می‌کنیم و عمود منصف خط را رسم می‌کنیم. خط عمود منصف را به مرکز دایره وصل می‌کنیم و به دو طرف امتداد می‌دهیم، این خط نصف‌النهار است (شکل ۲).

۱. حتی لو صبَّ فيه ماء أو مایع آخر تحیرَ وسال من کل وجه أو ألقى فی موضع منه شیء مُتَدَحرج کالبندقة وقف مهترأ مُرتدعاً لا یمیل إلى جهة ما
۲. فأمر یختص بصناعة التظین و التخصیص



شکل ۲

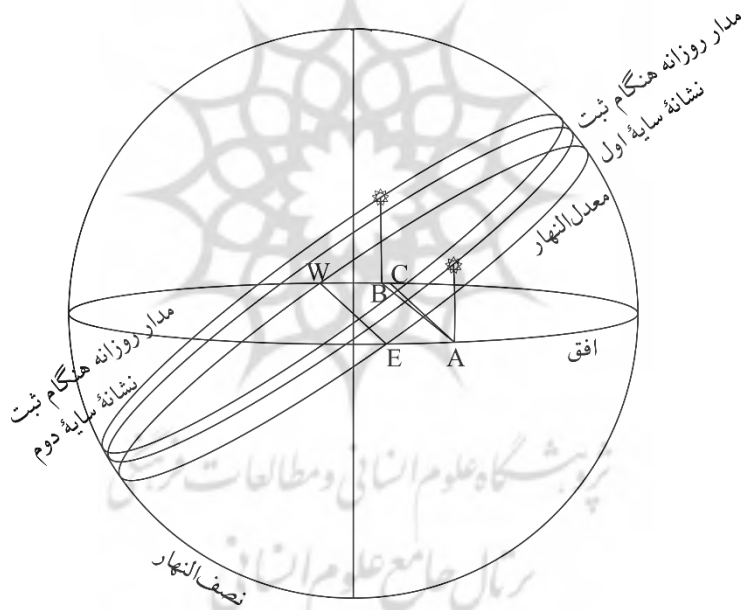
خرقی می‌نویسد این روش تقریبی است چون بر پایه ترازوی همیشگی مدار روزانه خورشید با معدل النهار گذاشته شده است و این شرط در «نظر دقیق» رعایت نمی‌شود یعنی مدار حرکت روزانه خورشید کاملاً موازی معدل النهار باقی نمی‌ماند، پس فصل مشترک مدار حرکت روزانه و دایره افق دقیقاً موازی خط اعتدال (یعنی خطی که نقطه‌های مشرق و مغرب حقیقی را به یکدیگر متصل می‌کند) باقی نمی‌ماند و در نتیجه خط نصف النهار حاصل دقیق نیست.

حرکتی که موجب می‌شود خورشید در طول روز دقیقاً روی یک مدار موازی با معدل النهار باقی نماند همان حرکت فلک خارج مرکز خورشید است. به عبارت ساده خورشید علاوه بر حرکت روزانه از شرق به غرب، حرکتی سالانه از غرب به شرق - یعنی خلاف جهت حرکت روزانه - دارد که به سبب حرکت فلک خارج مرکز آن است و مقدار آن در هر روز به اندازه ۵۹ دقیقه است. این حرکت در نیمه‌ای از سال رو به شمال و در نیمه دیگر رو به جنوب است و موجب می‌شود که در طول روز خورشید روی یک مدار روزانه باقی نماند و اندکی به مدار بالاتر یا پایین‌تر منتقل شود، در اینجا چون فاصله اندازه‌گیری نزدیک به نصف روز یا بیشتر از آن است پس مدار روزانه‌ای که سایه

تعیین خط نصف‌النهار.../۱۴۳

صبح‌گاهی را ایجاد می‌کند با مدار روزانه‌ای که سایه عصرگاهی را ایجاد می‌کند اندکی با یکدیگر اختلاف دارند و در نتیجه مسیر حرکت خورشید مدارهای روزانه را قطع می‌کند و موازی معدل‌النهار باقی نمی‌ماند (شکل ۳).

خرقی می‌نویسد برای حل این مشکل باید تفاضل سمت^۱ خورشید را نسبت به مختصات افقی در دو نقطه به دست بیاوریم. خطی که نقطه‌های ورود و خروج سایه را به دایره هندی به یکدیگر متصل می‌کند فصل مشترک مدار روزانه خورشید و دایره افق در موضع رصد است و باید با خط مشرق و مغرب (خط WE در شکل ۳) که حاصل اتصال فصل مشترک تقاطع معدل‌النهار و افق در همان موضع است موازی باشد اما چون مدار خورشید در هنگام رصد سایه صبح‌گاهی با سایه عصرگاهی یکسان نیست خط واصل میان دو نقطه (خط AB در شکل ۳) موازی با خط مشرق و مغرب نمی‌ماند.



شکل ۳

۱. در مختصات افقی مؤلفه طولی را سمت می‌نامند و آن فاصله طولی جرم آسمانی از مبدأ مختصات افق است که در متون کهن معمولاً آن را محل طلوع اعتدال بهاری در نظر می‌گرفته‌اند. بر این اساس آسمان به دو نیمه شرقی و غربی نسبت به مطلع نقطه اعتدال بهاری تقسیم می‌شود و فاصله طولی جرم آسمانی تا آن نقطه بر اساس قوسی روی دایره افق اندازه‌گیری می‌شود.

خرقی می‌نویسد که باید مقدار تفاضل سمت دو نقطه را (قوس BC در شکل ۳) به موضع عصرگاهی سایه به سمت شمال یا جنوب اضافه کنیم تا خط موازی با خط مشرق و مغرب به دست آید. در نیمه‌ای از سال که خورشید از جنوب به شمال حرکت می‌کند، یعنی قوس میان انقلاب زمستانی و انقلاب تابستانی این مقدار به سمت جنوب اضافه می‌شود و در نیمه دیگر به سمت شمال. به این ترتیب خط AC حاصل می‌شود که موازی خط مشرق و مغرب است. همان‌طور که می‌توان حدس زد مقدار این تقریب بسیار اندک است.

رصد بیشترین ارتفاع روزانه خورشید

بیشترین ارتفاع روزانه خورشید را در یک روز رصد می‌کنیم، یعنی زمانی که خورشید روی کره سماوی به دایره نصف النهار موضع رصد می‌رسد. در آن لحظه پایین شاخص («اصل مقیاس») را به میانه سایه وصل می‌کنیم (مثلاً با چیزی مثل یک نخ). سپس از پای شاخص خطی روی سایه آن می‌کشیم، این خط را در دو سو امتداد می‌دهیم، این خط نصف النهار است (شکل ۴).



شکل ۴

حداکثر ارتفاع خورشید یا هر جسم آسمانی دیگر از افق ناظر روی دایره نصف النهار رخ می‌دهد بنا بر این این رصد باید زمانی انجام بشود که خورشید دقیقاً روی نصف النهار است اما خرقی می‌نویسد که اختلاف ارتفاع در حوالی دایره نصف النهار اندک است و

آن را به حس نمی‌توان دریافت. پس ممکن است خورشید هنوز به دایره نصف‌النهار نرسیده باشد یا اندکی از آن پیش رفته باشد و از این بابت مؤلفه سمت آن اندکی تغییر کند، در نتیجه امتداد سایه شاخص بر نصف‌النهار مطابق نخواهد شد پس در اینجا نیز کم‌دقتی در رصد برآمده از تغییرات مؤلفه سمت در طول رصد است.

رصد سایه شاخصی با اندازه معین

خرقی می‌نویسد که «[طول] سایه را از ارتفاعی که سمت ندارد در روز مفروض مشخص کنیم»^۱ (خرقی، ۲۱۹، بند ۳۸۹). منظور از «ارتفاعی که سمت ندارد» یکی دیگر از دایره‌های عظیمه مشهور است که آن را دایره اول سموت می‌نامند. این دایره همچون دایره نصف‌النهار از قطب‌های دایره افق می‌گذرد و افق را در محل طلوع و غروب اعتدالین، یعنی شرق و غرب حقیقی، قطع می‌کند. این دایره را «دایره‌ای که سمت ندارد» یا «ارتفاعی که سمت ندارد» می‌نامند چون برخلاف دیگر دایره‌های ارتفاع نسبت به دایره افق اختلاف عرض، یعنی همان سمت، ندارد (خرقی، ۱۱۵، بند ۲۰۶) زیرا دقیقاً از نقطه مرجع مؤلفه سمت، یعنی مطلع اعتدال می‌گذرد. در شکل ۵ حالتی تصویر شده است که اعتدال بهاری در حال طلوع از افق است و دایره اول سموت نشان داده شده است.

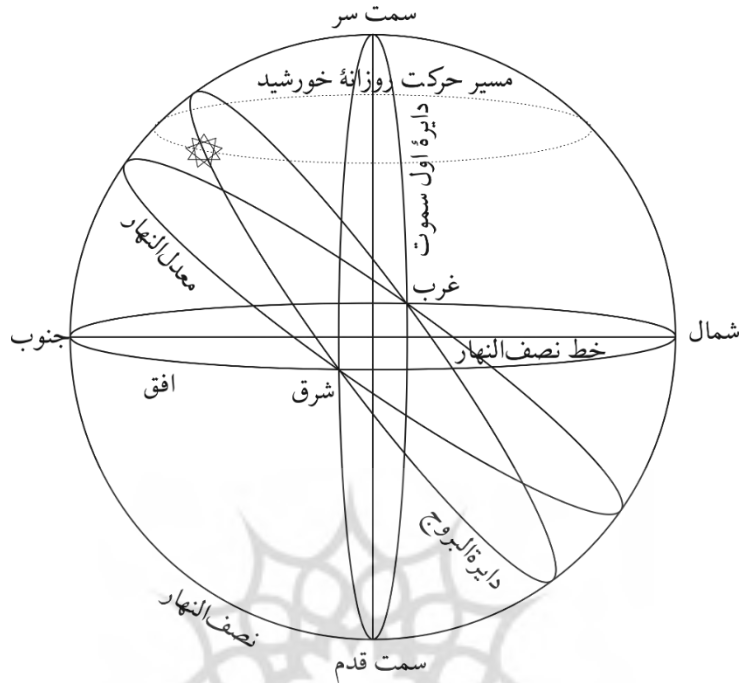
حال می‌توان سخن خرقی را این‌طور تعبیر کرد که مقدار ظل (تانژانت) زاویه ارتفاع خورشید^۲ را در روز مفروض روی دایره اول سموت مشخص می‌کنیم.^۳ این کار از طریق جدول ظل در زیج‌ها و حتی جدول‌هایی که گاه در پشت صفيحة اسطرلاب نقش می‌شده است ممکن است. سپس شاخصی را به اندازه مقدار تانژانت در نظر می‌گیریم.^۴

۱. «أن تعرف الظل من الارتفاع الذي لا سمت له في يوم مفروض»

۲. اگر فرض کنیم شاخصی به طول g در مرکز دایره‌ای به شعاع دایره مثلثاتی معیار باشد و خورشید با زاویه α بتابد، که α مقدار ارتفاع خورشید نسبت به افق نیز است، آن‌گاه طول شاخص برابر با $tg(\alpha)$ و طول سایه برابر با $ctg(\alpha)$ است.

۳. زاویه ارتفاع خورشید را با استفاده از ابزارهای رصدی مانند ربع (یا سدس) و حتی عضاده اسطرلاب می‌توانسته‌اند به‌دست آورند.

۴. مقدار تابع ظل را معمولاً بر اساس دو مقياس «أصابع» و «أقدام» می‌نوشته‌اند. این تقسیم بر این اساس است که طول سایه یک شاخص معین را به ۱۲ قسمت یا هفت قسمت (در بعضی متون شش و نیم قسمت) تقسیم می‌کرده‌اند. همچنین در محاسبات نجومی از تقسیم‌بندی شست جزئی شاخص نیز یاد کرده‌اند (نک: خرقی، ۲۲۱، بند ۳۹۳).



شکل ۵

دایره‌ای نیز به شعاع همین مقدار رسم می‌کنیم و این شاخص را در مرکز آن قرار می‌دهیم. حال لحظه مماس شدن سایه این شاخص را بر محیط دایره رصد می‌کنیم، هر گاه طول سایه به اندازه شعاع این دایره باشد یعنی خورشید در مسیر روزانه خود به دایره اول سموت رسیده است پس نقطه اعتدال در حال طلوع است و اگر آن محل را روی دایره نشانه‌گذاری کنیم محل اعتدال را مشخص کرده‌ایم. همین کار را در غروب نقطه اعتدال نیز انجام می‌دهیم و دو نقطه را به یکدیگر وصل می‌کنیم. این کار خط اعتدال، یعنی خط میان مشرق و مغرب حقیقی را به دست می‌دهد و عمود منصف خط اعتدال نصف النهار (خط شمال و جنوب) است. خرقی این روش را بهتر از روش دایره هندی می‌داند چون زمان رصد در این روش کوتاه‌تر است.

اندازه‌گیری سعت مشرق

در این روش نیز مانند روش قبل ابتدا خط اعتدال مشخص می‌شود و نصف النهار به دنبال آن با رسم عمود منصف خط اعتدال به دست می‌آید. در اینجا ابتدا باید بدانیم در روز رصد سعت مشرق یا مغرب خورشید چقدر است یعنی خورشید چقدر از شرق حقیقی

یا غرب حقیقی که همان مطلع یا مغیب خورشید در روزهای اعتدال هستند فاصله دارد. محاسبه مقدار سعت مشرق (یا مغرب) برای یک عرض جغرافیایی با به‌کار بردن قواعد مثلثاتی از محاسبات معمول در نجوم گذشته است. در ادامه دایره‌ای به موازات سطح افق رسم می‌شود و خرقی توصیه می‌کند که بهتر است موضع رصد در اینجا چنان باشد که چیزی مانع رصد خورشید هنگام طلوع یا غروب آن نشود. شاخصی را نیز در مرکز دایره می‌گذاریم و سایه آن را هنگام طلوع یا غروب خورشید، وقتی که نیمی از جرم خورشید بالای خط افق است رصد می‌کنیم. برای قید بالا بودن نیمی از جرم خورشید دو احتمال می‌توان در نظر گرفت: اول افزودن دقت رصد است یعنی جرم خورشید به حدی از افق بالا آمده باشد (یا از آن پایین رفته باشد) که موضع آن تغییری نکرده باشد و نیز سایه شاخص به سبب شعاع خورشید ایجاد شود؛ دوم آن‌که جرم خورشید را نقطه‌ای در نظر گرفته باشند و محاسبه قوس سعت مشرق را برای نقطه مرکز انجام داده باشند بدون در نظر گرفتن قطر ظاهری خورشید. هر کدام از این دو احتمال ممکن است و البته هر دو دقت اندازه‌گیری را تضمین می‌کنند. حال قطری را از دایره که سایه روی آن قرار دارد رسم می‌کنیم و به اندازه سعت مشرق یا مغرب در خلاف جهت روی اجزاء دایره حرکت می‌کنیم تا شرق و غرب حقیقی به دست آید. روشن است که اگر چنین رصدی در روزهای اعتدال انجام شود لازم نیست این مرحله انجام بشود. با این کار خط اعتدال به دست می‌آید، عمود منصف این خط نصف‌النهار است.

همان‌طور که پیش‌تر آمد خرقی این مطالب را در بخش هیئت‌الارض از منتهی الإدراک آورده است. در باره منبع مطالب کتاب‌های هیئت، به‌ویژه مطالب بخش هیئت‌الارض نمی‌توان به‌طور دقیق اظهار نظر کرد. بیشتر مطالب این بخش مربوط به جغرافیای ریاضی و توصیف مطالع مستقیم و مایل^۱ یعنی توصیف پدیداری آسمان در عرض‌های مختلف جغرافیایی است که آنها را می‌توان خلاصه‌ای از مطالب و محاسبات بطلمیوس در بخش پایانی مقاله اول و تمام مقاله دوم مجسطی دانست. با این حال همان‌طور که پیش‌تر گفته شد بطلمیوس در باره تعیین خط نصف‌النهار یک موضع در مجسطی و دیگر آثار نجومی مشهور خود سخنی نگفته است و این مطلب یا از منابع

۱. منظور از «مطلع» یافتن قوس‌هایی از معدل‌النهار است که هم‌زمان با قوس‌های مشخصی از دایره‌البروج طلوع می‌کنند، یعنی یافتن زمان‌های پدیداری و پنهانی اجرام آسمانی که حسب عرض‌های جغرافیایی روی زمین متفاوت می‌شوند. منظور از «مطالع مستقیم» یا «مطالع کره منتصبه» یافتن وضع پدیداری آسمان در افق استوای زمین است و منظور از «مطالع مایل» یافتن وضع پدیداری آسمان در عرض‌های جغرافیایی دیگر روی زمین است.

دیگر به متن‌های دوره اسلامی راه یافته است یا نویسندگان آثار نجومی، به‌ویژه نویسندگان آثار هیئت از سده ششم هجری به بعد، به‌ضرورت آن را به آثار خود افزوده‌اند.

شواهدی در منتهی الإدراک خرقی می‌توان یافت که نشانه‌آشنایی او با آثار بیرونی است. او در مواضع متعددی از کتاب خود از ابوریحان یاد می‌کند (خرقی، ۲۳۵، ۱۹۲، ۲۸۴، ۳۱۶، ۳۵۲)، نیز مقایسه مقاله تاریخ از کتاب منتهی الإدراک با آثار الباقیه بیرونی نشان می‌دهد که خرقی تا چه اندازه در آن بخش وام‌دار بیرونی است (نک: خرقی، مقدمه مصحح، ۱۴۴-۱۵۴). از این رو جست‌ن مطالب مشابه با نوشته‌های خرقی در موضوع تعیین خط نصف‌النهار در برخی آثار بیرونی می‌تواند شواهدی بر این مدعا باشد که خرقی در آوردن این مطالب نیز متأثر از بیرونی بوده است. همچنین از آنجا که در باره تأثیر خرقی بر نوشته‌های بعدی هیأت شواهد بیشتری در دست داریم می‌توان خرقی را واسطه تأثیر بیرونی در آثار بعدی هیئت بدانیم.

بیرونی و ترسیم خط نصف‌النهار

تعیین جهت‌های اصلی و رسم خط نصف‌النهار در سه اثر نجومی بیرونی آمده است: در قانون مسعودی (۴۴۵-۴۵۱) و افراد المقال فی أمر الظلال (۹۹-۱۲۰) به تفصیل و در التفهیم مختصر و منحصر به یک روش. بیرونی در التفهیم در بخش‌های ابتدایی باب سوم، در باره «حال‌های آسمان و زمین»، در دو بخش از سوهای عالم و چگونگی دانستن آنها نوشته است. بیرونی در بخش دوم از این دو در باره روش یافتن خط نصف‌النهار از روش دایره هندی یاد کرده است اما نام «دایره هندی» را نمی‌آورد و تنها چگونگی انجام کار را به روش مشهور توضیح می‌دهد (۶۴-۶۵).

باب‌های هجدهم تا بیستم از افراد المقال به تعیین خط نصف‌النهار اختصاص دارد. در اینجا بیرونی بیش از دو اثر دیگر با به‌کارگیری صورتی هندسی به سراغ این موضوع رفته است. به عبارت دیگر در افراد المقال در موضوع تعیین و تدقیق محل خط نصف‌النهار بیشتر به عرضه برهان‌های هندسی توجه شده است.

مقاله هجدهم از افراد المقال با اثبات مسأله‌ای آغاز می‌شود که می‌توان آن را به مثابه یک اصل در ترسیم خط نصف‌النهار دانست. این‌که محل خط نصف‌النهار در میان دو سمت برابر یا دو سایه برابر است یا همان‌که خط نصف‌النهار نیمساز زاویه میان دو سایه با طول برابر است یا خط واصل میان دو سمت برابر را نصف می‌کند. بیرونی تلاش

تعیین خط نصف‌النهار.../۱۴۹

می‌کند این اصل را با استفاده از قواعد هندسی ثابت کند (برای این اثبات نک: بیرونی، أفراد المقال، ۹۹-۱۰۱؛ ترجمه انگلیسی و شرح کندی در البيروني، ۱۴۴/۱-۱۴۶؛ ۷۸/۲-۷۹؛ نیز نک: شرح رجب بر التذكرة در طوسی، التذكرة...، ۴۹۶/۲). او همچنین می‌نویسد که رصد دو ارتفاع برابر در اینجا سودی ندارد مگر با دانستن سمت یا ظل آنها (بیرونی، أفراد المقال، ۱۰۵) که می‌توان آنها را از طریق سایه یک شاخص یا نگاه کردن در جدول‌های موجود در زیج‌ها به دست آورد و در آن صورت می‌توان از طریق رصد دو ارتفاع برابر نیز خط نصف‌النهار را رسم کرد.

پس از این بیرونی روش دایره هندی را توصیف کرده است (۱۰۶-۱۰۷). بیرونی به جز اشاره به وجه تسمیه این روش به «دایره هندی» (۱۰۶؛ نیز نک: شرح کندی در البيروني، ۸۱/۲) در اینجا در باره اندازه شاخص در دایره هندی به طور مفصل سخن گفته است، همان که خرقی در توصیف روش دایره هندی گفته بود که بهتر است اندازه آن برابر با نصف شعاع دایره باشد. شاید بهترین حالت آن باشد که دایره را آن قدر بزرگ در نظر بگیریم که اندازه‌گیری با رصد بلندترین سایه ممکن در نیم‌کره شمالی (بخش مسکون زمین)، یعنی سایه روز اول زمستان در شمالی‌ترین بخش ربع مسکون، ممکن شود (نک: البيروني، شرح کندی، ۸۱/۲). بیرونی می‌نویسد که بطلمیوس حد شمالی ربع مسکون را عرض ۶۳ درجه شمالی در نظر گرفته است (بطلمیوس، ۸۹) که متمم آن ۲۷ درجه است. اگر این مقدار را از میل کلی که بیرونی آن را ۲۳؛۳۵ در نظر می‌گیرد کم کنیم حداکثر ارتفاع خورشید در روز اول انقلاب زمستانی ۳؛۲۵ به دست می‌آید. اگر طول سایه این ارتفاع را در جدول بینیم به عدد ۳؛۲۱؛۱۵ به ارقام شصت‌گانی (۲۰۱/۴) در مقیاس اصبع دست پیدا می‌کنیم و این ۱۶۳/۴ برابر طول شاخص معیاری است که طول آن ۱۲ اصبع باشد و در نتیجه دایره بسیار بزرگی خواهیم داشت که رسم آن و کار کردن با آن بسیار دشوار است. بیرونی در ادامه می‌نویسد: «و ما می‌گوییم امت‌هایی که نشانه‌ای از انسانیت (تمدن) نزد آنان می‌توان یافت که به آن فضیلت دین داشتن را دریابند یا به سبب تلاش در علم شاد شوند»^۱ در عرض‌های بالاتر از ۴۸ درجه شمالی زندگی نمی‌کنند و اگر همان مراحل قبلی را دوباره طی کنیم به دست می‌آید که سایه مقیاس در آنجا بیش از سه برابر طول سایه معیار نخواهد بود (بیرونی، أفراد المقال،

۱. ولکننا نقول إن الأمم الذين نجد فيهم من الأنسانية ما يمكن معه تبهمهم لفضيلة ما من أخذ شريعة أو اهتزاز لعلم بهمة...

۱۰۷-۱۰۸؛ نیز نک: البیرونی، شرح کندی، ۸۱/۲-۸۲؛ شرح رجب بر التذکره در طوسی، التذکره...، ۴۹۶/۲-۴۹۷) و بیرونی رسم چنین دایره‌ای را ممکن می‌داند. بیرونی در این بخش در باره دقیق نبودن روش دایره هندى سخن نگفته است اما تمام مقاله نوزدهم را به این مسأله اختصاص داده است (افراد المقال...، ۱۱۲-۱۱۵؛ نیز البیرونی، شرح کندی، ۸۴/۲-۹۰).

بیرونی در پایان فصل هجدهم دو ابزار تراز مانند برای تعیین خط نصف‌النهار معرفی کرده است و روش کار با آنها را توضیح می‌دهد. در اینجا نیز تعیین خط نصف‌النهار ترکیبی از یک رصد با ابزار و یک ترسیم هندسی است. او در پایان می‌گوید که این‌ها همه به منظور تسهیل کار است و همه این موارد در دایره هندى جمع آمده است (بیرونی، افراد المقال، ۱۱۱). کندی در شرح خود بر افراد المقال ابزار نخست را شبیه به ابزار دیوپترا منسوب به هرون اسکنداری دانسته است. و در باره ابزار دوم هرچند می‌نویسد که توصیف آن دشواری‌هایی دارد اما در شرحی ساده آن نیز نوعی تراز است (البیرونی، شرح کندی، ۸۲/۲-۸۳).

تعیین خط نصف‌النهار در قانون مسعودی

روش‌هایی که خرقی در منتهی الإدراک آورده است بیش از دو اثر قبلی با توصیف روش‌ها و عبارات بیرونی در قانون مسعودی مشابهت دارد. بیرونی در باب پانزدهم از مقاله چهارم در باره روش‌های تعیین خط نصف‌النهار سخن گفته است. او در آغاز این فصل می‌نویسد که دانستن جهات در شناختن وقت‌ها ضروری است و سپس می‌نویسد که اگر نصف‌النهار و خط اعتدال را به دست بیاوریم همه جهات حاصل می‌شوند چون خط نصف‌النهار شمال و جنوب را و خط اعتدال مشرق و مغرب را نشان می‌دهد.

بیرونی پنج روش در تعیین خط نصف‌النهار آورده است که به ترتیب از این قرارند:

- ۱- حداکثر ارتفاع خورشید
- ۲- رصد سایه شاخصی با اندازه معین
- ۳- اندازه‌گیری ساعت مشرق
- ۴- دانستن ارتفاع یا ظل آن (تائزانت زاویه ارتفاع) در یک روز مشخص
- ۵- دایره هندى

از این میان توصیف روش‌های اول، سوم و پنجم و ایراداتی که بر دقت آنها وارد است همان است که خرقی در منتهی الإدراک گزارش کرده است. البته بیرونی در اینجا نیز در توصیف دایره هندی قدری بیشتر در باره اندازه شاخص بحث می‌کند و اشاره می‌کند که کافی است مقیاس طوری ساخته شود که در کوتاه‌ترین حالت سایه، یعنی سایه روز اول تابستان در بخش آباد زمین (یعنی نیم‌کره شمالی) نیز سایه به محیط دایره برسد و این به عرض جغرافیایی محلی وابسته است که می‌خواهند خط نصف‌النهار آن را رسم کنند. او می‌نویسد:

رسم بر آن است که [اندازه مقیاس] مساوی با ربع قطر دایره باشد و این ضروری نیست^۱ (قانون مسعودی، ۱/۴۴۷-۴۴۸)

در باره رصد سایه شاخصی با اندازه معین بیرونی دو راهکار پیشنهاد کرده است. روش نخست که در گزارش خرقی نیست آن است که شاخص را به ۱۲ قسمت مساوی تقسیم کنیم که این از تقسیمات مشهور شاخص بوده است. سپس سایه نصف‌النهار، یعنی سایه شاخص را هنگام ظهر رصد کنیم و به شعاع طول این سایه و مرکز شاخص دایره‌ای رسم کنیم. سپس از نقطه تماس سایه و محیط دایره به مرکز دایره خطی وصل کنیم و این خط را در سوی دیگر امتداد دهیم. این همان خط شمال و جنوب یا نصف‌النهار است. بیرونی می‌نویسد که این روش نیز دقیق نیست و برای آن دو دلیل می‌آورد: یکی مشابه ایرادی که به روش نخست گرفته بود یعنی آن که اختلاف ارتفاع در بیشینه آن محسوس نیست و ممکن است که تغییرات سمت در تعیین نصف‌النهار وارد شود. اشکال دوم آن است که نقطه تماس شدن سایه بر دایره به حس در یک نقطه نیست و این تماس بودن زمانی به درازا می‌کشد که این نیز موجب اختلاف در سمت خواهد شد و در نتیجه خط نصف‌النهار دقیق به دست نمی‌آید.

راهکار دوم همان است که در گزارش خرقی آمده بود (رصد سایه شاخصی با اندازه معین) با این تفاوت که بیرونی محدود بودن دفعات انجام روش را به یک بار آفت آن می‌داند اما خرقی این روش را به سبب سرعت حرکت سایه و همین محدود بودن دفعات تکرار بهتر از روش‌های قبلی می‌داند

۱. جری الرسم بتصییره مساویاً لربع قطر الدائرة و لیس ذلک بضروری فیه...

روش چهارم بیرونی را که خرقی در میان روش‌های خود نیاورده است می‌توان مشابه روش سوم، به‌ویژه همان راهکار دوم دانست و چه بسا به همین دلیل خرقی خود را از اشاره به آن بی‌نیاز دانسته است. در این روش ارتفاع خورشید یا ظل آن (تائزات زاویه ارتفاع یا عکس طول سایه) در یک روز مشخص و زمانی معین استخراج می‌شود. این کار را می‌توان بر اساس جداول ارتفاع و ظل که در زیج‌ها می‌آمده‌اند یا از طریق محاسبه انجام داد. سپس موضع خورشید رصد می‌شود تا بدان ارتفاع برسد یا اندازه سایه به مقدار مفروض برسد، در این لحظه از وسط سایه خطی رسم می‌کنیم که افق را قطع کند. مقدار سمت را از محل تقاطع آن خط و افق کم می‌کنیم و قطر گذرنده از آن نقطه را رسم می‌کنیم، این قطر خط اعتدال است و عمود منصف آن نصف‌النهار است. بیرونی ادامه می‌دهد که آفت این کار محدود بودن زمان انجام آن است، یعنی آن زمانی که باید خورشید در ارتفاع مفروض رصد شود. بیرونی می‌نویسد که مثلاً عوارض جوی ممکن است موجب تعویق در انجام کار شوند یا اینکه انجام این کار ممکن است به محاسباتی نیاز داشته باشد که ترتیب مراحل کار را به تعویق بیندازند و این دقت را کاهش می‌دهد.

بیرونی در پایان این بخش تلاش می‌کند تا یک روش ترسیم کلی برای ترسیم خط نصف‌النهار عرضه کند که کمترین وابستگی را به رصد یا محاسبات داشته باشد که آفت روش‌های پیشین بودند. بیرونی می‌گوید که در این روش فقط با استفاده از رصد یک سایه در هر وقت روز می‌توان خط نصف‌النهار را رسم کرد. به این ترتیب این روش ترسیم به نوعی ناقص اصلی است که بیرونی در ابتدای افراد المقال ثابت کرده بود که بر اساس آن به منظور تعیین خط نصف‌النهار رصد دو سایه یا سمت لازم بود.^۱ در اینجا این ترسیم را بر اساس عبارت‌های بیرونی آورده‌ایم.

AE طول سایه شاخص EB در یک روز دلخواه است. خط AB را رسم می‌کنیم و EG را موازی و مساوی با آن رسم می‌کنیم. به مرکز E و شعاع طول سایه (AE) یک دایره رسم می‌کنیم که نقاط A، T و G روی آن باشند. در این دایره AT به اندازه عرض جغرافیایی موضع رصد جدا شده است و قوس ZT به اندازه متمم میل خورشید در آن

۱. این روش پیش‌تر توسط کندی در مقاله‌ای با عنوان «[رأی] بیرونی در تعیین نصف‌النهار» (Al-Bīrūnī on determining the Meridian) توصیف شده است و کندی معتقد است که در این ترسیم می‌توان کاربرد هم‌زمان توابع مثلثاتی و روش‌های ترسیمی را دنبال کرد.

نتیجه

تعیین خط نصف النهار از کارهای مقدماتی امر رصد بوده است و از این رو عرضه روش یا روش‌هایی در چگونگی تعیین آن حائز اهمیت است. بطلمیوس در مجسطی در این باره سخنی نگفته است هر چند در سنت یونانی حداقل یک رساله در این موضوع در دست است و دانشمندان اسلامی نیز با آن آشنا بوده‌اند. نویسندگان آثار نجومی دوره اسلامی نیز در همه آثار خود در این باره سخن نگفته‌اند و دست کم از آغاز سنت نگارش آثار هیئت در سده ششم فصلی در تعیین خط نصف النهار به بخش جغرافیای ریاضی آثار هیئت افزوده شده است. منتهی الإدراک خرقی نخستین اثر جامع هیئت است که در سده ششم هجری نوشته شده است و کامل‌ترین فصل بندی را تا زمان خود در موضوع جغرافیایی ریاضی دارد به طوری که آن را منبع آثار بعدی هیئت به ویژه آثار هیئت سده هفتم هجری می‌توان دانست. خرقی در این کتاب از چهار روش به دست آوردن خط نصف النهار یاد کرده است در حالی که بسیاری از نویسندگان بعدی آثار هیئت تنها به روش دایره هندی بسنده کرده‌اند.

روش‌های خرقی همگی ترکیبی از رصد ارتفاع خورشید یا سایه یک شاخص و یک ترسیم ساده هندسی هستند، این ترسیم گاهی در روش دایره هندی رسم نیمساز یک زاویه است و گاهی در روش رصد سایه شاخصی با اندازه معین رسم عمود منصف یک خط. خرقی در هر مورد از احتمال وجود خطا یا کم‌دقتی در روش‌ها یاد می‌کند. بیشتر این کم‌دقتی‌ها از بخش رصدی عملیات برمی‌آیند و مقدار خطایی که پیش می‌آورند بسیار اندک است با این حال خرقی به آنها و روش‌های برطرف کردنشان توجه کرده است.

از مقایسه مطالب خرقی با آثار یکی از مهم‌ترین پیشینیان او، یعنی ابوریحان بیرونی، در می‌یابیم که آثار بیرونی منبع مهمی در آوردن این مطالب است. شواهد دیگری وجود دارند که نشان می‌دهند خرقی با آثار بیرونی آشنا بوده و از آنها تأثیر پذیرفته است و حال شواهد مربوط به این بخش را نیز می‌توان به آنها افزود. از مقایسه مطالب خرقی با آثار بیرونی، به ویژه قانون مسعودی، برمی‌آید که خرقی از این اثر استفاده کرده است هر چند در برخی جزئیات تفاوت‌های اندکی می‌توان یافت. در یک اظهار نظر موسع می‌توان گفت که آثار نجومی بیرونی در حوزه خراسان در سده ششم هجری شناخته شده بوده است. به این ترتیب می‌توان مدعی شد که نویسندگان این حوزه و بیش از همه خرقی که

تعیین خط نصف النهار.../ ۱۵۵

نویسندگان بعدی از آثار او بسیار استفاده کرده‌اند، عامل ارتباط ایشان و انتقال نوشته‌های نجومی بیرونی به عنوان یکی از مهم‌ترین آثار نجومی دوره اسلامی بوده است.

منابع

بیرونی، ابوریحان. (۱۳۶۷ق/۱۹۴۸م). أفراد المقال في أمر الظلال. حیدرآباد دکن: مطبعة دائرة المعارف العثمانية.

_____ (۱۳۶۷ش). التفهيم لأوائل صناعة التنجيم. به تصحيح جلال الدين همایی. تهران: مؤسسه نشرهما. چاپ چهارم.

_____ (۱۳۷۳ق/۱۹۵۴م). القانون المسعودی. ۳ جلد. حیدرآباد دکن: مطبعة دائرة المعارف العثمانية.

خرقی، عبدالجبار. (۱۳۹۹ش)، منتهی الإدراک فی تقاسیم الأفلاک. تصحیح، ترجمه و پژوهش حنیف قلندری. زیر نظر حسین معصومی همدانی. تهران: میراث مکتوب.

کرم‌زاده، فرشاد و حنیف قلندری و غلامحسین رحیمی. (۱۳۹۸ش). «تعیین طول جغرافیایی مواضع زمین بر اساس ماه‌گرفتگی در کتاب تحدید نهايات الأماكن بیرونی». پژوهشنامه تاریخ تمدن اسلامی، سال ۵۲، شماره ۱. ص ۱۵۷-۱۷۲.

کوشیار گیلانی. زیچ جامع. نسخه شماره ۳۴۱۸ کتابخانه فاتح، استانبول. طوسی، خواجه نصیرالدین. (۱۹۹۳م). التذکرة فی علم الهيئة. تحقیق و تصحیح جمیل رجب. نیویورک: اشپرینگر.

_____ (۱۳۹۹ش). الرسالة المعینة و حل مشکلات معینة. تحقیق سجاد نیک‌فهم خوب‌روان و فاطمه سوادی. تهران: میراث مکتوب.

Al-Bīrūnī. (1976). *The Exhaustive Treatise on Shadows*. Translation and Commentary by E.S. Kennedy. 2 vols. Aleppo: Institute for the History of Arabic Science.

Kennedy, E.S. (1959). "Bīrūnī's Graphical Determination of the Local Meridian." *Scripta Mathematica*, vol. 24, pp. 251-255. [Reprinted in *Studies in the Islamic Exact Sciences*, American University of Beirut, 1983, pp. 613-617].

- . (1963). “al-Bīrūnī’s on Determining the Meridian.” *The Mathematics Teacher*, vol. 66, pp. 635-667. [Reprinted in *Studies in the Islamic Exact Sciences*, American University of Beirut, 1983, pp. 618-620].
- . (1996). “Mathematical Geography.” *Encyclopedia of the History of Arabic Science*, 3 vols. Newyork. pp. 185-201
- Mercier, E. (2020). “Meridians of Reference and Mathematical Geography in the Medieval Muslim West (9th-16th centuries).” *e-Perimetron*, 15 (2). pp. 98-113.
- Neugebauer, O. (1975). *A History of Ancient Mathematical Astronomy*, 3 vols. New York: Springer-Verlag.
- Ptolemy. (1984). *Almagest*. Translated and Annotated by G.J. Toomer. London.

