Research in Logic, **Institute for Humanities and Cultural Studies (IHCS)**
Biannual Journal, Vol. 12, No. 1, Spring and Summer 2021, 129-153
Doi: 10.30465/lsj.2021.35805.1348

A Note on Fixed Points in Quantified Logic of Proofs and the Surprise Test Paradox

Meghdad Ghari*

Abstract

In this note, we study the effect of adding fixed points to justification logics. By making use of the fixed point operators (or diagonal operators) introduced by Smorynski in his Diagonalization Operator Logic, we introduce fixed point extensions of Fitting's quantified logic of proofs QLP. We then formalize the Knower Paradox and various self-reference versions of the Surprise Test Paradox in these fixed point extensions of QLP. By interpreting a surprise statement as a statement for which there is no justification or evidence, we propose a solution to the self-reference version of the Surprise Test paradox. We show that one of the axioms of QLP (the Uniform Barcan Formula) could be the reason for producing contradiction in these paradoxes, and thus by rejecting this axiom we can avoid contradiction in the aforementioned paradoxes. By introducing Mkrtychev models for the fixed point extensions of QLP, we further show that these fixed point extensions (without the Uniform Barcan Formula) are onsistent.

Keywords: Justification logic, Fixed point, Quantified logic of proofs, Surprise Test Paradox, Knower Paradox.

---

* Assistant Professor, Department of Philosophy, Faculty of Literature and Humanities, University of Isfahan, Mathematics Research Institute, Isfahan Branch of the Basic Sciences Research Institute, m.ghari@ltr.ui.ac.ir

Date received: 17/05/2021, Date of acceptance: 15/08/2021

منطق‌پژوهی، پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
دوفصل‌نامهٔ علمی (مقالهٔ علمی ـ پژوهشی)، سال دوازدهم، شمارهٔ اول، بهار و تابستان ۱۴۰۰، ۱۳۱ ـ ۱۵۳

یادداشتی دربارهٔ نقاط ثابت در منطق مسور اثبات‌ها و پارادوکس امتحان غیرمنتظره

مقداد قاری*

چکیده

در این مقاله قصد داریم تأثیر افزودن نقاط ثابت به منطق‌های توجیه را بررسی کنیم. به ویژه به مطالعه منطق مسور اثبات‌ها، که توسط فیتینگ معرفی شده است و گسترشی از منطق اثبات‌های آرتموف به یک منطق محمول‌ها می‌باشد، می‌پردازیم. ما گسترش‌های نقطه ثابتی از منطق مسور اثبات‌ها را ارایه می‌دهیم. این گسترش‌ها توسط افزودن عملگرهای نقطه ثابت (یا عمل‌گرهای قطری)، که توسط اسمورینسکی معرفی شده است، به زبان منطق مسور اثبات‌ها به دست می‌آیند. سپس پارادوکس دانا و نسخه‌های خودارجاعی از پارادوکس امتحان غیرمنتظره را در این گسترش‌های نقطه ثابت صورت‌بندی می‌کنیم. با تفسیر یک جمله غافل‌گیرانه به عنوان گزاره‌ای که هیچ توجیهی برای آن وجود ندارد، ما در منطق مسور اثبات‌ها، راه حلی برای نسخه خود ارجاع پارادوکس امتحان غیرمنتظره ارایه می‌دهیم. ما درواقع نشان می‌دهیم که یکی از اصول منطق مسور اثبات‌ها (که فیتینگ آن را فرمول بارکان یک‌نواخت نامیده است) می‌تواند عامل ایجاد تناقض در این پارادوکس‌ها باشد، و بنابراین با رد این اصل می‌توانیم از استنتاج تناقض در پارادوکس‌های ذکر شده در مقاله جلوگیری کنیم. هم‌چنین با معرفی مدل‌های مکرتیچف برای این گسترش‌های نقطه ثابت منطق مسور اثبات‌ها نشان می‌دهیم که این گسترش‌ها (بدون فرمول بارکان یکنواخت) سازگار هستند.

کلیدواژه‌ها: منطق توجیه، نقطه ثابت، منطق مسور اثبات‌ها، پارادوکس امتحان غیر منتظره، پارادوکس دانا.

---

* استادیار گروه فلسفه، دانشکدهٔ ادبیات و علوم انسانی، دانشگاه اصفهان، پژوهشکدهٔ ریاضیات، پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، شعبه اصفهان، m.ghari@ltr.ui.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۲/۲۷، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۵/۲۴

۱. مقدمه

منطق توجیه (Justification Logic) منطقی برای استدلال درباره اثبات‌های ریاضی و توجیهات معرفتی فراهم می‌کند. اولین منطق توجیهی که معرفی شده است منطقی به نام منطق اثبات‌ها LP (Logic of Proofs) می‌باشد که توسط آرتموف در [1, 2] ارائه شده است. فیتینگ در [3, 4] منطق مسور اثبات‌ها QLP (Quantified Logic of Proofs) را به عنوان گسترشی از منطق محمول‌ها معرفی کرد. منطق‌های توجیه گسترشی از منطق گزاره‌ها یا محمول‌ها هستند که با افزودن عبارت‌هایی به صورت $t{:}A$ به دست می‌آیند، که در آن A یک فرمول و t یک ترم توجیه می‌باشد. منطق‌های توجیه را می‌توان به عنوان منطق معرفتی (منطق دانش یا منطق باور) در نظر گرفت، که در این حالت عبارت $t{:}A$ را می‌توان به صورت "t یک توجیه (یا دلیل یا شاهد) برای معرفت به اینکه A صادق است" تعبیر کرد. برای برخی از منطق‌های توجیه قضیه تمامیت حسابی قابل اثبات است و در این منطق‌ها عبارت $t{:}A$ را می‌توان به صورت "t یک اثبات برای A است" تعبیر کرد.

از آن‌جایی که برخی از منطق‌های توجیه از قضیه تمامیت حسابی در حساب پئانو برخوردار هستند، طبیعی است که بپرسیم آیا توانایی ساخت گزاره‌های خود ارجاع در حساب پئانو می‌تواند در این منطق‌های توجیه شبیه‌سازی شود؟ در زبان طبیعی، عبارتی خود ارجاع است که به خود یا مرجع خود ارجاع دهد. در حساب پئانو (Peano Arithmetic) لم نقطه ثابت (Fixed Point Lemma) یا لم قطری (Diagonal Lemma) ما را قادر می‌سازد جملاتی در زبان منطق بسازیم که مانند جملات خود ارجاع رفتار کنند. چنین جملاتِ خود ارجاعی برای نشان دادن نتایج مهمی در حساب پئانو و همچنین طرح مسائل مهم فلسفی استفاده شده‌اند. برای مثال قضیه ناتمامیت گودل (با ساخت جمله‌ای که غیرقابل اثبات بودن خود را بیان می‌کند)، تعریف‌ناپذیری صدق تارسکی (با ساخت جمله‌ای که بیانگر کاذب بودن خود است، پارادوکس دروغگو)، و پارادوکس دانا (یا پارادوکس داننده) (the Knower Paradox) از کاپلان–مونتگیو (با ساخت جمله‌ای که معرفت‌ناپذیری صدق خود را بیان می‌کند) همگی نتایجی از لم نقطه ثابت هستند.

از آن جایی که هنوز هیچ منطق توجیهی که در آن قضیه‌های نقطه ثابت اثبات شوند معرفی نشده است، بنابراین ما گسترشهای نقطه ثابتی از منطق توجیه معرفی می‌کنیم. برای این کار از منطق عملگر قطری (Diagonalization Operator Logic) که توسط اسمورینسکی در [5] معرفی شده است استفاده می‌کنیم. زبان و اصول منطق مسور اثبات‌ها را به ترتیب با

فرمول‌های نقطه ثابت و اصول نقطه ثابت گسترش می‌دهیم. در این مقاله، ما هیچ معنا یا تعبیری برای این عملگرهای نقطه ثابت معرفی نمی‌کنیم. با این حال، سازگاری برخی از این گسترش‌ها را با استفاده از دلالت‌شناسی منطق مسور اثبات‌ها نشان می‌دهیم. سپس پارادوکس دانا و نسخه‌های خودارجاعی از پارادوکس امتحان غیرمنتظره (the Surprise Examination Paradox) را در این گسترش‌های نقطه ثابت از QLP صورت‌بندی کرده و پاسخی برای آنها ارایه می‌دهیم.

در ادامه به بیان صورتی از پارادوکس امتحان غیرمنتظره می‌پردازیم. این پارادوکس اولین بار توسط اوکُنُر [6] تحت عنوان "خاموشی کلاس A" منتشر شد. سپس صورت‌بندی دیگری از پارادوکس تحت عنوان "پارادوکس امتحان غیرمنتظره" توسط ویس [7] ارایه شد که اکنون بیشتر رایج است. در ادامه، صورت‌بندی از این پارادوکس را از [8] ارائه می‌دهیم.

نسخه دو روزه این پارادوکس به شرح زیر است:

"یک معلم اعلام می‌کند که دقیقاً دوشنبه یا چهارشنبه هفته آینده یک امتحان غیرمنتظره برگزار خواهد شد. دانشجویی اعتراض می‌کند که برگزاری این امتحان غیرممکن است. اگر امتحان چهارشنبه برگزار شود، آنگاه من سه‌شنبه می‌توانم آن را پیش‌بینی کنم و بنابراین امتحان در چهارشنبه غیرمنتظره نخواهد بود. از طرف دیگر دوشنبه نیز این امتحان برگزار نخواهد شد. زیرا در روز یک‌شنبه می‌دانم که امتحان چهارشنبه برگزار نمی‌شود (همان‌طور که در استدلال قبلی نشان داده شده است) و بنابراین می‌توانم پیش‌بینی کنم که امتحان روز دوشنبه برگزار می‌شود و بنابراین امتحان در دوشنبه غیرمنتظره نخواهد بود. بنابراین غیرممکن است که یک امتحان غیرمنتظره در روزهای دوشنبه یا چهارشنبه هفته آینده برگزار شود."

نسخه یک روزه این پارادوکس به شرح زیر است:

"شما فردا امتحانی خواهید داشت که شما را غافلگیر خواهد کرد (یعنی نمی‌توانید از قبل بدانید که چه روزی امتحان خواهید داشت!)."

همانطور که از صورت‌های فوق از پارادوکس مشخص است "غیرمنتظره بودن" تاریخ امتحان معمولا بر اساس "ندانستن" تاریخ امتحان تعریف می‌شود (مثلا [13–9] را ببینید). یک امتحان برای دانش‌آموز غیرمنتظره است اگر و فقط اگر دانش‌آموز نتواند از قبل بداند که در کدام روز امتحان برگزار می‌شود. به طور مشابه می‌توان نسخه‌ای n روزه از پارادوکس ارایه کرد که ما در این مقاله آن را بررسی نخواهیم کرد. تعبیرهای دیگری نیز

برای غیرمنتظره بودن در مقالات مختلف ارایه شده است که ما بـه آن‌هـا نخـواهیم پرداخـت (برای مثال [17–14] را ببینید). لازم بـه ذکـر اسـت کـه نسـخه‌هـای خـود ارجـاعی از ایـن پارادوکس وجود دارند که در بخش بعدی مقاله معرفی می‌شوند.

برای صورت‌بندی این پارادوکس در منطق مسور اثبات‌ها تعبیـری توجیـه–محـور بـرای غیرمنتظره بودن یک گزاره ارایه می‌دهیم. برای این منظور یک گزاره‌ی غیرمنتظره را به‌عنـوان گزاره‌ای که هیچ توجیهی (دلیلی یا شاهدی) برای معرفت به آن وجود ندارد تعبیر مـی‌کنـیم. به عبارت دیگر، یک امتحان برای دانش‌آموز غیرمنتظره است اگر و فقط اگـر دانـش‌آمـوز از قبل هیچ دلیلی (یا شاهدی) نداشته باشد که بر پایـه آن بدانـد در کـدام روز امتحـان برگـزار می‌شود. ما در منطق مسور اثبـات‌هـا راه حلـی بـرای نسـخه خـود ارجـاع یـک روزه ایـن پارادوکس ارائه می‌دهیم.

۲. نقاط ثابت در حساب پئانو

در این بخش برخی از نتایج شناخته شده از کاربرد لم نقطه ثابت را در گسترشـهای حسـاب پئانو PAیادآوری می‌کنیم. در این اینجا برای سادگی بین عدد طبیعی n و تـرم متنـاظر بـا آن یعنی $\bar{n}$ در زبان PA تفاوتی قایل نمی‌شویم. همچنین از نماد $\bar{A}$ برای عـدد گـودل فرمـول A استفاده می‌کنیم. صورت‌بندی زیر از لم نقطه ثابت از [18] گرفته شده است.

لـم نقطـه ثابـت. فـرض کنیـد T یـک گسـترش از PAباشـد. بـرای هـر فرمـول $A(x, y_1, \dots, y_n)$ بـا متغیرهـای آزاد $x, y_1, \dots, y_n$ فرمـول $D(y_1, \dots, y_n)$ وجـود دارد به‌طوری که

$$T \vdash D(y_1, \dots, y_n) \leftrightarrow A(\overline{D(y_1, \dots, y_n)}, y_1, \dots, y_n)$$

این لم ما را قادر می‌سازد جملات خود ارجاع را در زبان PA صورت‌بندی کنیم. گـودل از لم نقطه ثابت برای ساختن جمله‌ای که در PA بیان می‌کند

"من در PA قابل اثبات نیستم"

استفاده کرد. این جمله در PA به صورت زیر قابل بیان است:

$$G \leftrightarrow \neg Prov(\bar{G})$$

که در آن $Prov(x)$ محمول اثبات‌پذیری در PA است، یعنی $Prov(x)$ به این صورت خوانده می‌شود: x (عدد گودل فرمولی است که آن فرمول) در PA اثبات‌پذیر است. با استفاده از فرمول نقطه ثابت بالا گودل قضیه ناتمامیت خود را ثابت کرد.

قضیه ناتمامیت گودل. فرض کنید T یک گسترش به طور بازگشتی اصل‌پذیر و تمام از PA باشد. آنگاه T ناسازگار است.

تارسکی از لم نقطه ثابت برای ساختن جمله‌ای در PA که بیان می‌کند
"من کاذب هستم"
استفاده کرد و قضیه تعریف‌ناپذیری صدق را ثابت کرد. این جمله در PA به صورت زیر قابل بیان است:

$$D \leftrightarrow \neg Tr(\bar{D})$$

که در آن $Tr(x)$ یک محمول صدق (truth predicate) می‌باشد، یعنی یک محمول با یک متغیر آزاد x به گونه‌ای که برای هر جمله A فرمول زیر اثبات‌پذیر باشد:

$$A \leftrightarrow Tr(\bar{A})$$

$Tr(x)$ به این صورت خوانده می‌شود: x (عدد گودل فرمولی است که آن فرمول) صادق است. در واقع، جمله D در فرمول $D \leftrightarrow \neg Tr(\bar{D})$ با جمله دروغگو (این جمله نادرست است) مطابقت دارد و استدلال ارائه شده در اثبات قضیه تارسکی به عنوان پارادوکس دروغگو شناخته می‌شود.

قضیه تعریف‌ناپذیری صدق تارسکی. فرض کنید T یک گسترش از PA باشد و $Tr(x)$ یک محمول صدق باشد، یعنی یک محمول با یک متغیر آزاد x به گونه‌ای که برای هر جمله A داشته باشیم:

$$T \vdash A \leftrightarrow Tr(\bar{A})$$

در این صورت T ناسازگار است.

مونتگیو در [19] نتیجه‌ای مشابه اثبات کرد که در آن از یک محمول $N(x)$ با تعبیر "x (عدد گودل فرمولی است که آن فرمول) ضرورتا صادق است" استفاده کرد. همان‌طور که در [20] بیان شده است می‌توان به جای این تعبیر از یک تعبیر معرفتی استفاده کرد. محمول $K(x)$ یک محمول معرفت (knowledge predicate) نامیده می‌شود، یعنی یک محمول با یک متغیر آزاد x، هر گاه برای هر جمله A فرمول زیر اثبات‌پذیر باشد:

$$K(\bar{A}) \rightarrow A$$

$K(x)$ به این صورت خوانده می‌شود: مـی‌دانـیم x (عـدد گـودل فرمـولی اسـت کـه آن فرمول) صادق است.

قضـیه مونتگیـو. فـرض کنیـد T یـک گسـترش از PAباشـد و $K(x)$ یـک محمـول معرفت باشد که در شرایط زیر صدق کند. برای هر جمله A:

۱. $T \vdash K(\bar{A}) \to A$.

۲. اگر $T \vdash A$، آنگاه $T \vdash K(\bar{A})$.

در این صورت T ناسازگار است.

مشابه با قضیه تعریف‌ناپذیری صـدق تارسـکی، مـی‌تـوان قضـیه مونتگیـو را بـه عنـوان "قضیه تعریف‌ناپذیری معرفت" در نظر گرفت. یعنـی همـانطور کـه صـدقِ یـک فرمـول را نمی‌توان با استفاده از یک فرمول در حساب پئانو تعریف کرد، معرفـت را نیـز نمـی‌تـوان بـا استفاده از یک فرمول در حساب پئانو تعریف کرد. در ضمن دقت کنید کـه قضـیه مونتگیـو تعمیمی از قضیه تعریف‌ناپذیری صدق تارسکی است، زیرا هر محمول صدق یـک محمـول معرفت است.

پال اِگرِ در [20] اثباتی از قضیه مونتگیو ارایـه کـرده اسـت کـه در آن از لـم نقطـه ثابـت برای ساختن جمله‌ای در PA استفاده شده است که نسـخه خـود ارجـاع زیـر از پـارادوکس امتحان غیرمنتظره را بیان می‌کند:

"مگر اینکه شما بدانید این عبارت نادرست است، شما فردا یک امتحان خواهیـد داشـت اما شما نمی‌توانید از این عبارت بدانید که فردا یک امتحان خواهید داشت"[1]

نسخه بالا از پارادوکس اولین بار توسط کاپلان–مونتگیو در [21] ارایه شـد. پـال اِگـرِ در [20] این نسخه از پارادوکس را پارادوکس ممتحن (Examiner Paradox) نامیـده اسـت. ایـن جمله در PA به صورت زیر قابل بیان است:

$$D \leftrightarrow [K(\overline{\neg D}) \vee (E \wedge \neg K(\overline{D \to E}))]$$

اکنون ما نسخه صفر روزه پارادوکس امتحان غیرمنتظره را در نظر می‌گیـریم. ایـن نسـخه از پارادوکس به نام پارادوکس دانا شناخته شده است و به دو صورت زیر قابل بیان است:

"می‌دانیم که این جمله نادرست است" [2]

یا

"نمی‌دانیم که این جمله درست است." [3]

این دو جمله را می‌توان در PA به ترتیب به صورت‌های زیر صورت‌بندی کرد:

$D \leftrightarrow K(\overline{\neg D})$

$D \leftrightarrow \neg K(\bar{D})$

صورت اصلی پارادوکس دانا که توسط کاپلان و مونتگیو در [21] ارائه شده است، و اساساً نمونه معرفتی پارادوکس دروغگو است، به صورت زیر می‌باشد.

قضیه (پارادوکس دانا). فرض کنید T یک گسترش از PAباشد، $I(x,y)$ یک محمول بیان‌گر قابلیت استنتاج بین فرمول‌های T باشد و $K(x)$ یک محمول معرفت باشد که در شرایط زیر صدق می‌کند. برای هر جمله A و B:

۱. $T \vdash K(\bar{A}) \to A$.

۲. $T \vdash K(\overline{K(\bar{A})} \to A)$.

۳. $T \vdash K(\bar{A}) \wedge I(\bar{A},\bar{B}) \to K(\bar{B})$.

در این صورت T ناسازگار است.

در نهایت ما نسخه زیر از پارادوکس باورکننده (the Believer Paradox) را از [20] ارایه می‌دهیم.

قضیه (پارادوکس باورکننده). فرض کنید T یک گسترش از PAباشد و $B(x)$ یک محمول باشد که در شرایط زیر صدق کند. برای هر جمله F و G:

۱. $T \vdash B(\overline{F \to G}) \to (B(\bar{F}) \to B(\bar{G}))$

۲. $T \vdash B(\bar{F}) \to B(\overline{B(\bar{F})})$.

۳. $T \vdash B(\overline{\neg F}) \to \neg B(\bar{F})$.

۴. اگر $T \vdash F$، آنگاه $T \vdash B(\bar{F})$.

در این صورت T ناسازگار است.

اثبات همه قضیه‌های بیان شده در این فصل در [20] یا [22] یافت می‌شود.

۳. دستگاه اصل موضوعی QLP

در زیر منطق مسور اثبات‌ها QLP را یادآوری می‌کنیم. صورت‌های مختلفی از این منطق توسط فیتینگ ارایه شده است. ما در اینجا منطقی که در [3] معرفی شده است را مرجع

قرار می‌دهیم. در این بخش گسترشی نقطه ثابت از QLP معرفی می‌کنیم، و پارادوکس‌های دانا و امتحان غیرمنتظره را در این گسترش صورت‌بندی می‌کنیم.

ابتدا زبان QLP را توصیف می‌کنیم. در زبان منطق‌های توجیه معمول است که از ثابت‌های توجیه به عنوان دلایلی برای اصول منطقی استفاده شود. به جای ثابت‌های توجیهی، فیتینگ از ترم‌های اثبات اولیه (primitive proof term) استفاده می‌کند. در واقع، زبان QLP شامل مجموعه‌ای شمارا از نمادهای تابعی اولیه (primitive function symbols) با تعداد متغیرهای مختلف است. نمادهای تابعی اولیه ترم‌هایی به صورت $f(x_1, \dots, x_n)$ هستند که در آن f نمادی تابع اولیه است و $x_1, \dots, x_n$ متغیرهای توجیهی هستند. نمادهای تابعی اولیه صفر متغیره در واقع همان ثابت‌های توجیه هستند.

ترم‌ها و فرمول‌های توجیهی QLP توسط دستور زبان زیر ساخته می‌شوند:

$$t ::= x_i \left| f\left(x_1, \dots, x_n\right) \right| t \cdot t \mid t + t \mid !t \mid (t\forall x)$$

$$A ::= p \mid \bot \mid A \rightarrow A \mid (\forall x)A \mid (\exists x)A \mid t : A$$

توجه داشته باشید که در سورهای $\forall x, \exists x$ متغیر x یک متغیر توجیه می‌باشد. به علاوه زبان QLP به جای نمادهای محمولی از متغیرهای گزاره‌ای p به عنوان جملات اتمی استفاده می‌کند. تعریف رخدادهای آزاد و مقید متغیرها و جایگزینی متغیرها با ترم‌ها مانند منطق مرتبه اول است، با این تفاوت که در اینجا رخداد متغیر x در ترم $(t\forall x)$ مقید درنظر گرفته می‌شود. یک ترم توجیه را بسته نامیم هرگاه شامل هیچ متغیر آزادی نباشد. مجموعه متغیرهای آزاد فرمول A با نماد $FV(A)$ نشان داده می‌شود. اصول و قوانین QLP ترکیبی از اصول و قوانین منطق مرتبه اول و منطق اثبات‌ها (LP) است. به طور دقیق‌تر، اصول QLP عبارتند از:

۱. همه فرمول‌های معتبر منطق محمولها در زبان QLP

۲. (اصل jK) $s: (A \rightarrow B) \rightarrow (t: A \rightarrow (s \cdot t: B))$

۳. (اصل Sum) $s: A \rightarrow s + t: A, s: A \rightarrow t + s: A$

۴. (اصل jT) $t: A \rightarrow A$

۵. (اصل j4) $t: A \rightarrow !t: t: A$

۶. (اصل UBF) $(\forall x)t{:}A \to (t\forall x){:}(\forall x)A$، به شرطی که متغیر x در t آزاد رخ ندهد. (UBF مخفف Uniform Barcan Formula (فرمول بارکان یکنواخت) می‌باشد کـه همتـایی از فرمول بارکان در منطق موجهات مرتبه اول است.)

دقت کنید که هر یک از اصول QLP یک طرح یا قالـب اصـل (axiom scheme) هسـتند. منطق QLP دارای قواعد زیر است:

۱. قاعده وضع مقدم (MP): $\frac{A \to B,\ A}{B}$

۲. قاعده تعمیم (Gen): $\frac{A}{(\forall x)\ A}$

۳. قاعده ضرورت اصل (AN): $\frac{\boldsymbol{A\ is\ an\ axiom\ instance}}{\boldsymbol{f(x_1,\ldots,x_n){:}A}}$

که در قاعده AN فرمول A نمونه‌ای از یکی از اصول QLP است.

حـال بـه معرفـی زبـان و اصـول منطـق QLP^- کـه یـک زیـر دسـتگاه از QLP اسـت می‌پردازیم. زبان QLP^- شامل ترم‌های $(t\forall x)$ نمی‌باشد و همچنین QLP^- دارای اصـل UBF نمی‌باشد.

اگر قاعده AN را از منطق‌های QLP و QLP^- حذف کنیم، آنگاه منطـق‌هـایی بـه دسـت می‌آیند که آن‌ها را به ترتیـب بـا $\mathrm{QLP}_\emptyset$ و $QLP_\emptyset^-$ نشـان مـی‌دهـیم. لازم بـه ذکـر اسـت کـه قاعده AN برای اثبات یکی از مهم‌ترین خاصیت‌هـای منطـق‌هـای توجیـه، یعنـی خاصـیت درونـی‌سـازی (internalization property)، مـورد اسـتفاده قـرار مـی‌گیـرد. ایـن خاصـیت بیان می‌کند که اثبات هر قضیه از منطق توجیه را مـی‌تـوان در درون زبـان منطـق توجیـه بـا استفاده از ترم‌ها بیان کرد.

لم درونی‌سازی. اگر A قضیه‌ای از QLP باشـد، آنگـاه تـرم توجیـه بسـته t وجـود دارد به‌طوری که $t{:}A$ قضیه‌ای از QLP است.

اثبـات. اثبـات بـا اسـتقرا روی اثبـات فرمـول A انجـام مـی‌شـود. مـا تنهـا حـالتی را درنظر می‌گیریم که در آن A با استفاده از قاعده Gen به دسـت آمـده باشـد (بـرای جزییـات بیش‌تر [3] را ببینید).

فرض کنید $A = (\forall x)B$ که در آن $\vdash B$. بنـابر فـرض اسـتقرا، تـرم بسـته s وجـود دارد به‌طـوری کـه $\vdash s{:}B$. حـال بـا اسـتفاده از قاعـده Gen داریـم: $\vdash (\forall x)s{:}B$. بـا اسـتفاده از اصل UBF داریم: $\vdash (s\forall x){:}(\forall x)B$. کافی است قرار دهید $t = (s\forall x)$. □

حال می‌توان نشان داد قاعده زیر، که قاعـده ضـرورت مسـور (qNec) نامیـده مـی‌شـود، استنتاج‌پذیر است:

$$\frac{A}{(\exists x)x : A}$$

به شرطی که $x \notin FV(A)$. اثبات به صورت زیر است: اگـر $\vdash A$ ، آنگـاه بـا اسـتفاده از لم درونی‌سازی ترم بسته t وجود دارد به طوری که $\vdash t : A$، و در ایـن صـورت بـه وضـوح $\vdash (\exists x)x : A$. در بخش‌های بعـدی از قاعـده qNec در اثبـات پـارادوکس‌هـا بسـیار اسـتفاده خواهیم کرد.

۱.۳ گسترش‌های نقطه ثابت QLP

در ایـن بخـش بـه معرفـی گسـترش‌هـای نقطـه ثابـت QLP، کـه بـا $QLP(FP)$ نمـایش داده می‌شود، می‌پردازیم. متغیر گزاره‌ای p را $\exists$-موجه در فرمول $A(p, \bar{q})$ می‌نـامیم هـر گـاه همـه رخـدادهای p در فرمـول $A(p, \bar{q})$ در دامنـه ... $(\exists x)x:$، بـرای یـک متغیـر توجیـه x قرار گیرند.

به عنوان مثال، متغیر گزاره‌ای p در فرمول زیر $\exists$-موجه است:

$$A(p) = (\exists x)x : p \vee (\exists y)y : \neg p$$

دقـت کنیـد کـه فرمـول $(\exists x)x : A$ را مـی‌تـوان بـه صـورت $K\, A$ (یعنـی بـه گـزاره A معرفـت داریـم) ترجمـه کـرد (بـرای توضـیحات بیشـتر در مـورد ایـن ترجمـه بـه [4] مراجعه نمایید). حال زبان QLP را توسط عملگرهای نقطه ثابـت گسـترش مـی‌دهـیم. بـرای هر فرمول $A(p, \bar{q})$ که در آن متغیر گـزاره‌ای p $\exists$-موجـه اسـت، یـک عملگـر نقطـه ثابـت $\delta_A(\bar{q})$ به زبان اضافه می‌کنیم. دقت کنید که $\delta_A(\bar{q})$ یک فرمـول از منطـق $QLP(FP)$ اسـت. گسترش نقطه ثابت با اضافه کردن این عملگرهای نقطه ثابـت بـه زبـان QLP و اصـول زیـر به‌دست می‌آید:

$$\delta_A(\bar{B}) \leftrightarrow A(\delta_A(\bar{B}), \mathrm{B})$$

که در آن متغیـر گـزاره‌ای p $\exists$-موجـه اسـت و $\bar{B}$ دنبالـه‌ای از فرمـول‌هـای $QLP(FP)$ هستند.

در ادامه مقاله، ما معمولا منطق‌هایی بین QLP و $QLP(FP)$ را در نظر بگیریم. برای یـک فرمول مفروض $A(p, \bar{q})$ که در آن متغیر گـزاره‌ای p $\exists$-موجـه اسـت، ابتـدا زبـان QLP را توسط فقط یک عملگر نقطه ثابت $\delta_A(\bar{q})$ گسترش می‌دهیم. حال منطق

$QLP[\delta_A(\bar{B}) \leftrightarrow A(\delta_A(\bar{B}), \mathrm{B})]$

گسترشی از QLP است که با افزودن تنها یک اصل زیر به QLP به دست می‌آید:

$\delta_A(\bar{B}) \leftrightarrow A(\delta_A(\bar{B}), \mathrm{B})$

گسترشهای نقطه ثابت QLP^- به طور مشابه تعریف می‌شوند. همچنین منطق‌های $QLP(FP)_\emptyset$ و $QLP^-(FP)_\emptyset$ و $QLP[F]_\emptyset$ و $QLP^-[F]_\emptyset$، برای اصل نقطه ثابت F، منطق‌هایی هستند که در آنها قاعده AN حذف شده است. در بخشهای بعدی به صورت‌بندی پارادوکس دانا و پارادوکس امتحان غیرمنتظره در زیرمنطق‌هایی از $QLP(FP)$ و $QLP^-(FP)$ می‌پردازیم.

۲.۳ دلالت‌شناسی

فیتینگ در [3, 4] دلالت‌شناسی جهان‌های ممکن را به سبک مدل‌های کریپکی برای QLP ارائه داد. در این بخش، ما مدل هایی را برای QLP بر اساس مدل‌های مکرتیچف (Mkrtychev) معرفی می‌کنیم ([23] را ببینید). این مدل‌ها در واقع مدل‌های تک جهانی فیتینگ برای QLP هستند.

تعریف. یک مدل M برای QLP یک چهارتایی به شکل $M = (D, I, E, V)$ است به‌طوری که

۱. Dدامنه مدل، مجموعه‌ای غیر تهی (از توجیه‌ها، دلایل یا شواهد)، است.

۲. I یک تابع تعبیر است که به صورت زیر هرترم را به یک عملگر روی دامنه D می‌نگارد:

- I به هر نماد تابعی اولیه f با تعداد n متغیر یک عملگر n متغیره $f^I: D^n \to D$ نظیر می‌کند. به خصوص، I به هرنماد ثابت c یک عضو از D اختصاص می‌دهد.
- I به عملگرهای ترم‌ساز $\forall, !, +, \cdot$ عملگرهایی روی دامنه D به صورت زیر نظیر می‌کند:

$\cdot^{\mathrm{I}}: D \times D \to D, +^{\mathrm{I}}: D \times D \to D, !^{\mathrm{I}} : D \to D$,
$\forall^{\mathrm{I}}: D \times D \to D$

برای یک دامنه D ، یک نگاشت متغیری v به صورت تابعی از متغیرهای توجیه به D تعریف می‌شود. با استفاده از تعبیر I می‌توان نگاشت v را روی همه ترم‌ها به صورت زیر گسترش داد (ما از نماد t^v به جای $v\ (t)$ استفاده می‌کنیم):

- $x^v = v(x)$ برای متغیر توجیه x
- $f(t_1, \dots, t_n)^v = f^I(t_1^v, \dots, t_n^v)$، برای نماد تابعی اولیه n متغیره f.
- $(t \cdot s)^v = t^v \cdot^I s^v$.
- $(t + s)^v = t^v +^I s^v$.
- $(!\, t)^v = !^I\ (t^v)$.
- $(t\forall x)^v = \forall^I(t^v, x^v)$.

۳. E یک تابع شاهد است که به هر دلیل در دامنه D و به هر نگاشت متغیری v مجموعه‌ای از فرمول‌ها اختصاص می‌دهد. تابع شاهد باید در شرایط زیر صدق کند. برای همه فرمول‌های A و B و همه دلایل r و r' در D و همه نگاشت‌های متغیری v داریم:

۱. $A \in E(f(t_1, \dots, t_n)^v, v)$، برای اصل A.

۲. اگر $A \to B \in \mathrm{E}(r, v)$ و $A \in E(r', v)$، آنگاه $B \in \mathrm{E}(r \cdot^{\mathrm{I}} r', v)$.

۳. $\mathrm{E}(r, v) \cup \mathrm{E}(r', v) \subseteq \mathrm{E}(r +^{\mathrm{I}} r', v)$.

۴. اگر $A \in E(r, v)$، آنگاه $t{:}A \in E(!^I\, t^v, v)$.

۵. اگر $A \in E(t^{v(^x_r)}, v(^x_r))$ برای هر $r \in D$، آنگاه $(\forall x)A \in E((t\forall x)^v, v)$.

۴. تابع V یک تابع ارزش است که به هر متغیر گزاره‌ای یک ارزش $\{0,1\}$ نسبت می‌دهد.

تعریف. مدل‌های QLP^- مانند مدلهای QLP تعریف می‌شوند با این تفاوت که مدل نیاز نیست در شرایط مربوط به عملگر $t\forall x$، از جمله شرط (v)، صدق کند.

تعریف. نگاشت متغیری w یک x–گونه از نگاشت متغیری v است هرگاه v و w به جز احتمالا روی x یکسان باشند. نماد $v(^x_r)$ نشان‌دهنده x–گونه نگاشت v است که x را به عضو r از D می‌نگارد.

تعریـف. بـرای مـدل $M = (D, I, E, V)$ و نگاشــت متغیـری v روی D و فرمـول A، تعریف صدق فرمول A در مدل M تحت نگاشت v، که با نماد $M \Vdash_{\mathrm{v}} A$ نشان‌داده می‌شـود، به صورت استقرایی زیر بیان می‌شود:

- $M \nVdash_{\mathrm{v}} \bot$.
- $M \Vdash_{\mathrm{v}} p$ اگر و تنها اگر $V(p) = 1$ ، برای متغیر گزاره‌ای p.
- $M \Vdash_{\mathrm{v}} A \to B$ اگر و تنها اگر $M \nVdash_{\mathrm{v}} A$ یا $M \Vdash_{\mathrm{v}} B$.
- $M \Vdash_{\mathrm{v}} (\forall x) A$ اگر و تنها اگر $M \Vdash_{v(\frac{x}{r})} A$ برای هر $r \in D$.
- $M \Vdash_{\mathrm{v}} (\exists x) A$ اگر و تنها اگر $M \Vdash_{v(\frac{x}{r})} \mathrm{A}$ برای یک $r \in D$.
- $M \Vdash_{\mathrm{v}} t{:}A$ اگر و تنها اگر $A \in E(t^v, v)$ و $M \Vdash_{\mathrm{v}} A$.

فرمول A در مدل M معتبر است اگر برای هر نگاشت v داشته باشیم $M \Vdash_{\mathrm{v}} A$.

اثبات قضیه‌های سلامت (soundness) برای QLP و QLP^- بسیار ساده هستند و بنـابراین در اینجا حذف می‌شوند.

قضیه سلامت QLP^-. هر فرمول اثبات‌پذیر در QLP^- در هر مدل QLP^- معتبر است.

قضیه سلامت QLP. هر فرمول اثبات‌پذیر در QLP در هر مدل QLP معتبر است.

ما در ادامه معناشناسی پیش گفته از QLP^- را به $QLP^-(FP)$ گسترش می‌دهـیم. در ایـن مقاله برای سادگی فرض می‌کنیم که عملگرهای نقطـه ثابـت متغیرهـای گـزاره‌ای جدیـدی هستند و در واقع برای عملگرهای نقطه ثابت تعبیـری در مـدل‌هـا ارایـه نمـی‌دهـیم. اکنـون می‌توان قضیه سلامت را به راحتی برای $QLP^-(FP)$ اثبـات کـرد (اثبـات بسـیار سرراسـت است و بنابراین از ذکر آن خودداری می‌کنیم).

قضیه سلامت $QLP^-(FP)$. برای یک اصل نقطـه ثابـت F، اگـر فرمـول A در $QLP^-[F]$ قابل اثبات باشد، آنگاه در هر مدلی از QLP^- که فرمول F در آن معتبر اسـت فرمـول A نیـز در آن معتبر خواهد بود.

۳.۳ پارادوکس دانا در $QLP(FP)$

با استفاده از ایـن ایـده کـه معرفـت مبتنـی بـر شـواهد اسـت، پـارادوکس دانـا در [24–26] موردبررسی قـرار گرفتـه اسـت. مـا اثباتهـایی مشـابه بـرای ایـن پـارادوکس در $QLP(FP)$ صورت‌بندی می‌کنیم.

پارادوکس دانا، $D \leftrightarrow \neg K(D)$، در QLP با فرمول زیر قابل بیان است:

$D \leftrightarrow \neg (\exists x)\, x{:} D$

ما اثبات پارادوکس دانا را در یک گسترش نقطه ثابت QLP ارائه می‌دهیم.

قضیه (پارادوکس دانا در $QLP(FP)$). فرض کنید δ عملگر نقطه ثابت فرمول

$A(p) = \neg (\exists x)\, x{:} p$

باشد. در این صورت، گسترش

$QLP[\delta \leftrightarrow \neg(\exists x) x : \delta]_\emptyset$

ناسازگار است.

اثبات. به یاد بیاورید که منطق $QLP[\delta \leftrightarrow \neg(\exists x) x : \delta]_\emptyset$ دارای قاعده AN نیست. اثبات زیر ناسازگاری این منطق را نشان می‌دهد.

۱. $\delta \leftrightarrow \neg (\exists x)\, x{:} \delta$، اصل نقطه ثابت

۲. $\delta \rightarrow \neg (\exists x)\, x{:} \delta$، با استفاده از ۱ و استدلال در منطق گزاره‌ها

۳. $\neg\delta \rightarrow (\exists x)\, x{:} \delta$، با استفاده از ۱ و استدلال در منطق گزاره‌ها

۴. $x{:} \delta \rightarrow \delta$ نمونه ای از اصل jT

۵. $(\forall x)\, (x{:} \delta \rightarrow \delta)$، با استفاده از ۴ توسط قاعده Gen

۶. $(\forall x)(x{:} \delta \rightarrow \delta) \rightarrow ((\exists x) x{:} \delta \rightarrow \delta)$، نمونه‌ای از اصول منطق محمول‌ها

۷. $(\exists x)\, x{:} \delta \rightarrow \delta$، با استفاده از ۵ و ۶ توسط MP

۸. $\neg (\exists x)\, x{:} \delta$، با استفاده از ۳، ۷ و استدلال در منطق گزاره‌ها

۹. δ، با استفاده از ۲ و ۸ توسط MP

۱۰. $(\exists x)\, x{:} \delta$ ، با استفاده از ۹ توسط qNec

۱۱. $\bot$، با استفاده از ۸ و ۱۰. □

حال نتیجه زیر را می‌توان از قضیه بالا به دست آورد.

نتیجه. منطق $QLP(FP)_\emptyset$ (و در نتیجه منطق $QLP(FP)$) ناسازگار است.

به نظر می‌رسد که اثبات قضیه بالا را نمی‌توان در QLP^- انجام داد، زیرا در گام ۱۰ از قاعده qNec استفاده شده است. در واقع می‌توان قضیه زیر را ثابت کرد.

قضیه (پارادوکس دانا در $QLP^-(FP)$). منطق

$QLP^-[\delta \leftrightarrow \neg(\exists x) x{:} \delta]_\emptyset$

سازگار است.

اثبات. مدل $M = (D, I, \mathrm{E}, V)$ از QLP^- را به صورت زیر تعریف کنید:

۱. D یک مجموعه غیرتهی دلخواه است،

۲. I یک تعبیر دلخواه روی D است،

۳. برای هر $r \in D$ و هر نگاشت متغیری v قرار دهید $E(t^v, v) = \emptyset$،

۴. $V(\delta) = V(E) = 1$، ارزش بقیه متغیرهای گزاره‌ای مهم نیست.

به راحتی می‌توان نشان داد که M یک مدل از $QLP_{\emptyset}^-$ است و فرمول زیر در آن معتبر است:

$\delta \leftrightarrow \neg(\exists x)x{:}\delta$

پس، M یک مدل از $QLP^-[\delta \leftrightarrow \neg(\exists x)x{:}\delta]_{\emptyset}$ است. حال با استفاده از قضیه سلامت $QLP^-(FP)$، نتیجه می‌شود که منطق $QLP^-[\delta \leftrightarrow \neg(\exists x)x{:}\delta]_{\emptyset}$ سازگار است. □

دو قضیه بالا یک راه حل برای پارادوکس دانا ارائه می‌دهند. در واقع به نظر می‌رسد که آنچه باعث ایجاد تناقض در $QLP(FP)$ شده است، قاعده qNec (یا در واقع اصل UBF) می‌باشد.

دو قضیه بالا همچنین نشان می‌دهند که قاعده qNec قابل استنتاج در QLP^- نیست.

۴.۳ پارادوکس امتحان غیرمنتظره در $QLP(FP)$

همان‌طور که در مقدمه گفته شد یکی از روش‌هایی که می‌توان غیرمنتظره بودن یک گزاره را تعریف کرد این است که برای یک شخص گزاره‌ای غیرمنتظره است که آن شخص هیچ توجیهی (دلیلی یا شاهدی) برای درستی آن گزاره نداشته باشد. پس این که جمله A غیرمنتظره است را می‌توان در QLP به صورت فرمول زیر بیان کرد:

$\neg(\exists x)x{:}A$

ادعا نمی‌کنیم که تعریف فوق از غیرمنتظره بودن یک گزاره یک تعریفِ بدون استثنا برای همه‌ی گزاره‌های غافلگیرکننده در زندگی روزمره است؛ اما به نظر می‌رسد که در ارتباط با پارادوکس امتحان غیرمنتظره این تعریف طبیعی است. یعنی اگر یک امتحان برای دانش‌آموزی غیرمنتظره باشد، آنگاه او بر اساس هیچ شاهدی نمی‌تواند از تاریخ امتحان اطلاع یابد.

ابتدا به بررسی پارادوکس ممتحن می‌پردازیم:

"مگر اینکه شما بدانید این عبارت نادرست است، شما فردا یک امتحان خواهید داشت اما شما نمی‌توانید از این عبارت بدانید که فردا یک امتحان خواهید داشت."

جمله بالا در $QLP(FP)$ به صورت زیر قابل بیان است:

$\delta \leftrightarrow ((\exists x)x: \neg\delta \vee \left(E \wedge \neg(\exists x)x: (\delta \rightarrow E)\right))$

که در آن E جمله "شما فردا یک امتحان خواهید داشت" را نشان می‌دهد و $\delta = \delta_A(E)$ عملگر نقطه ثابت فرمول زیر است:

$A(p, E) = (\exists x)x: \neg p \vee (E \wedge \neg(\exists x)x: (p \rightarrow E))$

ما نشان می‌دهیم که پارادوکس ممتحن در $QLP(FP)$ منجر به تناقض می‌شود.

قضیه (پارادوکس ممتحن در $QLP(FP)$). منطق

$QLP\left[\delta \leftrightarrow ((\exists x)x: \neg\delta \vee \left(E \wedge \neg(\exists x)x: (\delta \rightarrow E)\right))\right]_{\emptyset}$

ناسازگار است.

اثبات. اثبات زیر ناسازگاری این منطق را نشان می‌دهد.

۱. $\delta \leftrightarrow ((\exists x)x: \neg\delta \vee \left(E \wedge \neg(\exists x)x: (\delta \rightarrow E)\right))$، اصل نقطه ثابت

۲. $x: \neg\delta \rightarrow \neg\delta$ نمونه‌ای از اصل jT

۳. $(\forall x)\ (x: \neg\delta \rightarrow \neg\delta)$، با استفاده از ۲ توسط قاعده Gen

۴ $(\forall x)\ (x: \neg\delta \rightarrow \neg\delta) \rightarrow ((\exists x)\ x: \neg\delta \rightarrow \neg\delta)$، نمونه ای از اصول منطق محمول‌ها

۵. $(\exists x)\ x: \neg\delta \rightarrow \neg\delta$، با استفاده از ۳ و ۴ توسط MP

۶. $\delta \rightarrow \neg\ (\exists x)\ x: \neg\delta$، با استفاده از ۵ و استدلال در منطق گزاره‌ها

۷. $\delta \rightarrow E \wedge \neg\ (\exists x)\ x: (\delta \rightarrow E)$، با استفاده از ۱، ۶ و استدلال در منطق گزاره‌ها

۸. $\delta \rightarrow E$، با استفاده از ۷ و استدلال در منطق گزاره‌ها

۹. $\delta \rightarrow \neg\ (\exists x)x: (\delta \rightarrow E)$، با استفاده از ۷ و استدلال در منطق گزاره‌ها

۱۰. $(\exists x)x: (\delta \rightarrow E) \rightarrow \neg\delta$، با استفاده از ۹ و استدلال در منطق گزاره‌ها

۱۱. $(\exists x)\ x: (\delta \rightarrow E)$، با استفاده از ۸ توسط qNec

۱۲. $\neg\delta$، با استفاده از ۱۰ و ۱۱ توسط MP

۱۳. $(\exists x)\ x: \neg\delta$، با استفاده از ۱۲ توسط qNec

۱۴. δ، با استفاده از ۱، ۱۳ و استدلال در منطق گزاره‌ها

۱۵. $\bot$، با استفاده از ۱۲ و ۱۴. □

توجه داشته باشید که اثبات فوق را نمی‌توان در $QLP^{-}(FP)$ انجام داد زیرا در مراحل ۱۱ و ۱۳ از قاعده qNec استفاده شده است. در واقع می‌توان قضیه زیر را ثابت کرد.

قضیه (پارادوکس ممتحن در $QLP^{-}(FP)$). منطق

$$QLP^{-}\left[\delta \leftrightarrow ((\exists x)x{:}\,\neg\delta \vee \left(E \wedge \neg(\exists x)x{:}\,(\delta \to E)\right))\right]_{\emptyset}$$

سازگار است.

اثبات. مدل $M = (D, I, \mathrm{E}, V)$ از QLP^{-} از اثبات قضیه پارادوکس دانا در $QLP^{-}(FP)$ را در نظر بگیرید. به راحتی می‌توان نشان داد که فرمول زیر در M معتبر است:

$$\delta \leftrightarrow ((\exists x)x{:}\,\neg\delta \vee \left(E \wedge \neg(\exists x)x{:}\,(\delta \to E)\right))$$

پس، با استفاده از قضیه سلامت $QLP^{-}(FP)$، منطق

$$QLP^{-}\left[\delta \leftrightarrow ((\exists x)x{:}\,\neg\delta \vee \left(E \wedge \neg(\exists x)x{:}\,(\delta \to E)\right))\right]_{\emptyset}$$

سازگار است. □

دو قضیه بالا یک راه حل برای پارادوکس ممتحن ارائه می‌دهند. مشابه با پارادوکس دانا به نظر می‌رسد که آنچه باعث ایجاد تناقض در $QLP(FP)$ شده است، قاعده qNec (یا درواقع اصل UBF) می‌باشد.

حال پارادوکس ساده‌تر زیر را در نظر بگیرید:

"شما فردا یک امتحان خواهید داشت، اما از این عبارت نمی‌توانید بدانید که فردا یک امتحان خواهید داشت." [۴]

این جمله را می توان در $QLP(FP)$ به صورت زیر بیان کرد:

$$\delta \leftrightarrow (E \wedge \neg(\exists x)x{:}\,(\delta \to E))$$

که در آن $\delta = \delta_A(E)$ عملگر نقطه ثابت فرمول زیر است:

$$A(p, E) = E \wedge \neg(\exists x)x{:}\,(p \to E)$$

ما نشان می‌دهیم که این گزاره‌ی بیان شده توسط معلم قابل تحقق نیست.

قضیه (پارادوکس امتحان غیرمنتظره خودارجاع در $QLP(FP)$).

$$QLP\ [\delta \leftrightarrow (E \wedge \neg\,(\exists x)x{:}\,(\delta \to E))]_{\emptyset} \vdash \neg\delta$$

اثبات. اثبات زیر را در نظر بگیرید.

۱. $\delta \leftrightarrow \left(E \wedge \neg(\exists x)x{:}\,(\delta \to E)\right)$، اصل نقطه ثابت

۲. $\delta \to E$، با استفاده از ۱ و استدلال در منطق گزاره‌ها

۳. $\delta \to \neg\, (\exists x)\, x{:}\, (\delta \to E)$، با استفاده از ۱ و استدلال در منطق گزاره‌ها

۴. $(\exists x) x{:}\, (\delta \to E) \to \neg\delta$، با استفاده از ۳ و استدلال در منطق گزاره‌ها

۵. $(\exists x)\, x{:}\, (\delta \to E)$، با استفاده از ۲ توسط qNec

۶. $\neg\delta$، با استفاده از ۴ و ۵ توسط MP . □

قضیه(پارادوکس امتحان غیرمنتظره خودارجاع **در** $QLP^{-}(FP)$**).**

$QLP^{-}\ [\delta\ \leftrightarrow (E \wedge \neg(\exists x)x{:}\, (\delta \to\ E))]_{\emptyset}\ \nvdash \neg\delta$

اثبات. مدل $M = (D, I, \mathrm{E}, V)$ از QLP^{-} را از اثبات قضیه پارادوکس ممتحن در $QLP^{-}(FP)$ در نظر بگیرید. به راحتی می‌توان نشان داد که فرمول زیر در M معتبر است:

$\delta\ \leftrightarrow (E \wedge \neg(\exists x)x{:}\, (\delta \to E))$

به علاوه فرمول δ نیز در M معتبر است. پس

$QLP^{-}\ [\delta\ \leftrightarrow (E \wedge \neg(\exists x)x{:}\, (\delta \to\ E))]_{\emptyset}\ \nVdash \neg\delta$

حال با استفاده از قضیه سلامت $QLP^{-}(FP)$ نتیجه مورد نظر به دست می‌آید. □

دو قضیه بالا یک راه حل برای نسخه یک روزه خود ارجاعی پارادوکس امتحان غیرمنتظره ارائه می‌دهند. نسخه n روزه پارادوکس به طور مشابه بررسی می‌شود. برای نمونه ما نسخه دو روزه این پارادوکس را در نظر می‌گیریم:

"یک معلم اعلام می کند که دقیقاً یک امتحان غیرمنتظره در روز دوشنبه یا چهارشنبه هفته آینده برگزار می‌شود، اما شما نمی‌توانید از این عبارت تاریخ امتحان را بدانید."

این جمله را می توان در $QLP(FP)$ به صورت زیر بیان کرد:

$\delta \leftrightarrow (E_1 \wedge \neg(\exists x)x{:}\, (\delta \to E_1)) \oplus (E_2 \wedge \neg(\exists x)x{:}\, (\delta \wedge \neg E_1 \to E_2))$

که در آن $\oplus$ نشان‌دهنده فصلی حقیقی و E_1 و E_2 نشان‌دهنده جملات "شما دوشنبه امتحان خواهید داشت" و "شما چهارشنبه امتحان خواهید داشت" و $\delta\ =\ \delta_A(E_1, E_2)$ عملگر نقطه ثابت فرمول زیر است:

$A(p, E_1, E_2) = \big(\mathrm{E}_1 \wedge \neg(\exists \mathrm{x})\mathrm{x}{:}\, (\mathrm{p} \to \mathrm{E}_1)\big) \oplus \big(\mathrm{E}_2 \wedge \neg(\exists \mathrm{x})\mathrm{x}{:}\, (\mathrm{p} \wedge \neg \mathrm{E}_1 \to \mathrm{E}_2)\big)$

ما نشان می دهیم که این گزاره بیان شده توسط معلم قابل تحقق نیست.

قضیه (نسخه دو روزه پارادوکس امتحان غیرمنتظره در $QLP(FP)$).

$QLP\big[\big(E_1 \wedge \neg(\exists x)x{:}\, (p \to E_1)\big) \oplus \big(E_2 \wedge \neg(\exists x)x{:}\, (p \wedge \neg E_1 \to E_2)\big)\big]_{\emptyset} \vdash\ \neg\delta$

اثبات.

۱. $\delta \leftrightarrow (E_1 \wedge \neg(\exists x)x: (\delta \rightarrow E_1)) \oplus (E_2 \wedge \neg(\exists x)x: (\delta \wedge \neg E_1 \rightarrow E_2))$
اصل نقطه ثابت

۲. $\delta \wedge \neg E_1 \rightarrow E_2$، با استفاده از ۱ و استدلال در منطق گزاره‌ها

۳. $(\exists x)x: (\delta \wedge \neg E_1 \rightarrow E_2)$، با استفاده از ۲ توسط qNec

۴. $\delta \rightarrow E_1$، با استفاده از ۱، ۳ و استدلال در منطق گزاره‌ها

۵. $(\exists x)x: (\delta \rightarrow E_1)$، با استفاده از ۴ توسط qNec

۶. $\neg\delta$، با استفاده از ۱، ۵ و استدلال در منطق گزاره‌ها.□

قضیه (نسخه دو روزه پارادوکس امتحان غیرمنتظره در $QLP^-(FP)$).

$$QLP^-\left[\left(E_1 \wedge \neg(\exists x)x: (p \rightarrow E_1)\right) \oplus \left(E_2 \wedge \neg(\exists x)x: (p \wedge \neg E_1 \rightarrow E_2)\right)\right]_\emptyset \nvdash \neg\delta$$

اثبات. مدل $M = (D, I, \mathrm{E}, V)$ از QLP^- را از اثبات قضیه پارادوکس ممتحن در $QLP^-(FP)$ در نظر بگیرید و فرض کنید $V(\delta) = V(E_1) = 1$ و $V(E_2) = 0$. به راحتی می‌توان نشان داد که M یک مدل از QLP^- است و فرمول زیر در آن معتبر است:

$$\delta \leftrightarrow (E_1 \wedge \neg(\exists x)x: (\delta \rightarrow E_1)) \oplus (E_2 \wedge \neg(\exists x)x: (\delta \wedge \neg E_1 \rightarrow E_2))$$

به علاوه فرمول δ نیز در M معتبر است. پس

$$QLP^-\left[\left(E_1 \wedge \neg(\exists x)x: (p \rightarrow E_1)\right) \oplus \left(E_2 \wedge \neg(\exists x)x: (p \wedge \neg E_1 \rightarrow E_2)\right)\right]_\emptyset \not\Vdash \neg\delta$$

حال با استفاده از قضیه سلامت $QLP^-(FP)$ نتیجه مورد نظر به دست می‌آید. □

دو قضیه بالا یک راه حل برای نسخه دو روزه خود ارجاعی پارادوکس امتحان غیرمنتظره ارائه می‌دهند. در نهایت نسخه یک روزه غیر خود ارجاع پارادوکس را به شرح زیر در نظر بگیرید:

"شما فردا امتحانی خواهید داشت که شما را غافلگیر خواهد کرد (یعنی نمی‌توانید تاریخ آن را از قبل بدانید)."

همانطور که سورنسن در [8] پیشنهاد کرده است، عبارت فوق یک نقطه کور معرفتی (blindspot) برای دانشجویان است.[۵] یک گزاره A یک نقطه کور معرفتی برای یک فرد است اگر و فقط اگر A درست باشد اما فرد به درستی آن معرفت نداشته باشد، یعنی

$$A \wedge \neg K\, A.$$

پارادوکس بالا را می توان در QLP به صورت زیر نوشت:

$$E \wedge \neg(\exists x)\ x: E$$

ما در QLP^- (و در نتیجه در QLP) نشان می‌دهیم که دانش‌آموزان دلیلی برای درستی اعلامیه معلم ندارند.

قضیه.

$QLP^- \vdash \neg(\exists y)y{:}(E \wedge \neg(\exists x)x{:}E)$

اثبات. فرض کنید $F = E \wedge \neg(\exists x)x{:}E$. نشان می‌دهیم که $\neg(\exists y)y{:}F$ در QLP^- قابل‌اثبات است.

۱. $F \to E$، یک راستگو از منطق گزاره‌ها

۲. $c{:}(F \to E)$، با استفاده از ۱ توسط AN

۳. $c{:}(F \to E) \to (y{:}F \to c \cdot y{:}E)$، نمونه ای از اصل jK

۴. $y{:}F \to c \cdot y{:}E$، با استفاده از ۲ و ۳ توسط MP

۵. $c \cdot y{:}E \to (\exists x)x{:}E$، نمونه ای از اصول منطق محمول‌ها

۶. $y{:}F \to (\exists x)\, x{:}E$، با استفاده از ۴، ۵ و استدلال در منطق گزاره‌ها

۷. $F \to \neg(\exists x)x{:}s\,E$، یک راستگو از منطق گزاره‌ها

۸. $y{:}F \to F$، نمونه ای از اصل jT

۹. $y{:}F \to \neg(\exists x)x{:}E$، با استفاده از ۷، ۸ و استدلال در منطق گزاره‌ها

۱۰. $\neg y{:}F$، با استفاده از ۶، ۹ و استدلال در منطق گزاره‌ها

۱۱. $(\forall y)\ \neg y{:}F$، با استفاده از ۱۰ توسط Gen

۱۲. $\neg(\exists y)y{:}F$، با استفاده از ۱۱ و استدلال در منطق مرتبه اول.□

نتیجه بالا با راه‌حلی که کواین [9] (و بسیاری از نویسندگان دیگر) برای این پارادوکس ارایه داده‌اند مطابق است.

٤. نتیجه‌گیری

ما گسترش‌های نقطه ثابتی از منطق مسور اثبات‌ها ارایه کردیم. سپس پارادوکس دانا و نسخه‌هایی از پارادوکس امتحان غیرمنتظره را در این گسترش‌های نقطه ثابت صورت‌بندی کردیم و راه حلی برای این پارادوکس‌ها ارایه دادیم. راه‌حل‌های ارایه شده بر پایه چند پیش فرض بودند. اول اینکه تفسیر ما از دانش تفسیری مبتنی بر شواهد و توجیه‌ها بود، یعنی دانش از یک گزاره به این معنی است که شواهدی برای این گزاره وجود دارد. به علاوه

تفسیر ما از یک جمله غافلگیرانه به عنوان جمله‌ای بود که هیچ توجیهی برای آن وجود ندارد. با توجه به این نکات می‌توان این پارادوکس‌ها را در گسترش‌های نقطه ثابت QLP^-حل کرد، در حالی که صورت‌بندی این پارادوکس‌ها در گسترش‌های نقطه ثابت QLP منجر به تناقض می‌شوند.

بنابراین، به نظر می‌رسد که عامل تناقض می‌تواند اصل UBF باشد. با استفاده از این اصل توانستیم قاعده qNec را به دست آوریم. این قاعده وقتی برای یک عامل انسانی صورت‌بندی می‌شود بیان می‌کند که: اگر A یک قضیه باشد، آنگاه شخص برای معرفت به A دلیلی دارد. پس این قاعده به این معنی است که شخص همه‌ی قضیه‌ها را می‌داند و توجیهی برای درستی آن‌ها دارد. در واقع، عامل‌هایی که توسط منطق QLP صورت‌بندی می‌شوند از نظر منطقی دانای کل هستند. از این رو، قاعده qNec فقط برای عامل‌های ایده‌آل یک قاعده قابل قبول است. این مساله در منطق‌های معرفتی به مساله همه‌چیزدانی منطقی (Logical Omniscience Problem) معروف است (برای اطلاعات بیشتر به [27] مراجعه کنید). بنابراین، یک راه ممکن برای جلوگیری از پارادوکس رد اصل UBF است. این مشاهدات همچنین با تحلیل دین-کوروکاوا در [25] موافق است. در واقع، فرمول UBF، یعنی $(\forall x)t{:}A \to (t\forall x){:}(\forall x)A$، بیان می‌کند که اگر بدانیم که ترم t اثبات یا دلیلی برای هر نمونه از A باشد، آنگاه $(t\forall x)$ دلیلی برای گزاره کلی $(\forall x)A$ خواهد بود. این اصل به وضوح غیر قابل قبول است و به نظر شامل نوعی استقرای ضمنی و نهفته می‌باشد. با تکذیب این اصل از QLP و پذیرفتن منطق QLP^- می‌توان از تناقض در پارادوکس‌های مطرح شده در این مقاله اجتناب کرد.

پی‌نوشت‌ها

۱. صورت اصلی پارادوکس به صورت زیر است:

Unless you know this statement to be false, you will have a test tomorrow, but you can't know from this statement that you will have a test tomorrow.

۲. صورت اصلی پارادوکس به صورت زیر است:

This statement is known to be false

۳. صورت اصلی پارادوکس به صورت زیر است:

Nobody knows this statement to be true

۴. صورت اصلی پارادوکس به صورت زیر است:

You will have a test tomorrow, but you can't know from this statement that you will have a test tomorrow

۵. بینکلی در [28] تحلیلی مشابه ارائه داده است و نتیجه گرفته است که پارادوکس امتحان غیرمنتظره از همان خانواده پارادوکس مور (Moore's Paradox) است. برای بحث مرتبط، به استدلال کواین در [9] نیز مراجعه کنید.

کتاب‌نامه

Artemov, S.N.: Operational modal logic. (1995.(

Artemov, S.N.: Explicit Provability and Constructive Semantics. Bull. Symb. Log. 7, 1–36 (2001.(

Fitting, M.: A Quantified Logic of Evidence. Electron. Notes Theor. Comput. Sci. 143, 59–71 (2006). https://doi.org/10.1016/j.entcs.2005.04.038.

Fitting, M.: A quantified logic of evidence. Ann. Pure Appl. Log. 152, 67–83 (2008). https://doi.org/10.1016/j.apal.2007.11.003.

Smoryński, C.: Self-Reference and Modal Logic. Springer New York, New York, NY (1985). https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8601-8.

O'Connor, D.J.: Pragmatic paradoxes. Mind. 57, 358–359 (1948). https://doi.org/10.1093/mind/lvii.227.358.

Weiss, P.: The Prediction Paradox. Mind. 61, 265–269 (1952). https://doi.org/10.1093/mind/lxi.242.265.

Sorensen, R.: Epistemic Paradoxes, https://plato.stanford.edu/entries/epistemic-paradoxes/, last accessed 2021/04/18.

Quine, W. V.: ON A So-Called Paradox. Mind. 62, 65–67 (1953). https://doi.org/10.1093/mind/lxii.245.65.

Kripke, S.A.: On Two Paradoxes of Knowledge. In: Philosophical Troubles: Collected Papers. Oxford University Press (2011). https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199730155.003.0002.

Chow, T.Y.: The Surprise Examination or Unexpected Hanging Paradox. Am. Math. Mon. 105, 41–51 (1998). https://doi.org/10.1080/00029890.1998.12004847.

Cheung, L.K.C.: On Two Versions of "the Surprise Examination Paradox." Philos. (United States). 41, 159–170 (2013). https://doi.org/10.1007/s11406-013-9416-7.

Gerbrandy, J.: The surprise examination in dynamic epistemic logic. Synthese. 155, 21–33 (2007). https://doi.org/10.1007/s11229-005-2211-7.

Shaw, R.: The paradox of the unexpected examination. Mind. 67, 382–384 (1958). https://doi.org/10.1093/mind/lxvii.267.382.

Fitch, F.B.: A Goedelized Formulation of the Prediction Paradox. Am. Philos. Q. 1, (1964.(

Kritchman, S., Raz, R.: The surprise examination paradox and the second incompleteness theorem. Not. AMS. 57, 1454–1458 (2010.(

Ardeshir, M., Ramezanian, R.: A solution to the surprise exam paradox in constructive mathematics. Rev. Symb. Log. 5, 679–686 (2012). https://doi.org/10.1017/S1755020312000160.

Boolos, G.: The logic of provability. Cambridge university press (1995.(

Montague, R.: Syntactical Treatment of Modality with Corrollaries on Reflexion Principles and Finite Axiomatizability. Acta Filosophica Fenn. 16, 153–165 (1963.(

Égré, P.: The Knower Paradox in the Light of Provability Interpretations of Modal Logic. J. Logic, Lang. Inf. 14, 13–48 (2005.(

Kaplan, D., Montague, R.: A paradox regained. Notre Dame J. Form. Log. 1, 79–90 (1960.(

Ghari, M.: A Note on Fixed Points in Justification Logics and the Surprise Test Paradox. ArXiv e-prints. (2014.(

Mkrtychev, A.: Models for the Logic of Proofs. In: Adian, S. and Nerode, A. (eds.) Logical Foundations of Computer Science, 4th International Symposium, LFCS'97, Yaroslavl, Russia, July 6--12, 1997, Proceedings. pp. 266–275. Springer (1997). https://doi.org/10.1007/3-540-63045-7_27.

Arló-Costa, H., Kishida, K.: Three Proofs and the Knower in the Quantified Logic of Proofs. In: Online Proceedings of Sixth Annual Formal Epistemology Workshop (FEW 2009). , Carnegie Mellon University, Pittsburg, PA, USA (2009.(

Dean, W., Kurokawa, H.: The Paradox of the Knower revisited. Ann. Pure Appl. Log. 165, 199–224 (2014). https://doi.org/10.1016/j.apal.2013.07.010.

Dean, W.: Montague's paradox, informal provability, and explicit modal logic. Notre Dame J. Form. Log. 55, 157–196 (2014). https://doi.org/10.1215/00294527-2420636.

Fagin, R., Y. Halpern, J., Moses, Y., Y. Vardi, M.: Reasoning about Knowledge. MIT Press (1995.(

Binkley, R.: The Surprise Examination in Modal Logic. J. Philos. 65, 127–136 (1968). https://doi.org/10.2307/2024556.