Research in Logic, **Institute for Humanities and Cultural Studies (IHCS)**
Biannual Journal, Vol. 12, No. 1, Spring and Summer 2021, 1-24
Doi: 10.30465/lsj.2021.35927.1349

Non-classical Comparative Logic I: Standard Categorical Logic – from SL_e to IFL_e

Amer Amikhteh*

Seyed Ahmad MirSanee**

Abstract

In this paper, a non-classical axiomatic system was introduced to classify all moods of Aristotelian syllogisms, in addition to the axiom "Every a is an a" and the bilateral rules of obversion of E and O propositions. This system consists of only 2 definitions, 2 axioms, 1 rule of a premise, and moods of Barbara and Datisi. By adding first-degree propositional negation to this system, we prove that the square of opposition holds without using many of the other rules of classical logic (including double negation elimination). We then show that the Propositional Substructural Logic SL_e is the best logic to study Aristotelian Syllogisms. Also, based on the IFL_e square of opposition, the rules of conversation and the rules of negation are completely proved in Muzaffar's logic. For this purpose, we used the monadic first-order logic with the same standard deductive apparatus of quantifiers in classical logic, plus the axioms of "some a is an a" and "some not-a is a not-a". Finally, to show that there is no existential commitment to general terms in categorical logic, the Strong Four-Valued Relevant-classical Logic KR4 was used. With the same existential interpretation of the quantifiers and the standard translation of the quarter quantified.

Keywords: Categorical logic, Aristotelian syllogism, non-classical logic, Substructural logic, Axiomatic method.

---

* PhD in Logic, Tarbiat Modares University (Corresponding Author), amer.amikhteh@modares.ac.ir.

** PhD student in Philosophy, Logic, Tarbiat Modares University, sa.mir@modares.ac.ir.

Date received:24/05/2021 , Date of acceptance:24/08/2021

منطق‌پژوهی، پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
دوفصل‌نامهٔ علمی (مقالهٔ علمی ـ پژوهشی)، سال دوازدهم، شمارهٔ اول، بهار و تابستان ۱۴۰۰، ۳ – ۲۴

منطق تطبیقی غیرکلاسیک ۱:
منطق حملی استاندارد - از SL_e تا IFL_e

عامر آمیخته*

سیداحمد میرصانعی**

چکیده

در این مقاله برای اصل‌بندی تمام ضرب‌های قیاس‌های ارسطویی به علاوه اصل «هر الف الف است» و قواعد دوطرفه‌ی نقض محمول سالبه‌ها، یک سیستم اصل موضوعی غیرکلاسیک معرفی شد. این سیستم تنها شامل ۲ تعریف، ۲ اصل، ۱ قاعده‌ی یک مقدمه‌ای و ضرب‌های Barbara و Datisi است. با افزودن نقض گزاره‌ای درجه اول به این سیستم، اثبات کردیم که مربع تقابل بدون استفاده از بسیاری از قواعد منطق کلاسیک (از جمله حذف نقض مضاعف) برقرار است. سپس نشان دادیم که منطق گزاره‌های زیرساختاری SLe برای قیاس‌های ارسطویی کافی است. همچنین بر پایه‌ی IFLe مربع تقابل، قواعد عکس و قواعد نقض در منطق مظفر به طور کامل ثابت می‌شوند. برای این منظور از منطق مرتبه اول یک موضعی دقیقاً با همان دستگاه استنتاجی استاندارد سورها در منطق کلاسیک به علاوه اصول «بعضی الف الف است» و «بعضی غیرالف غیرالف است» بهره بردیم. در نهایت، برای نشان‌دادن عدم تعهد وجودی نسبت به نام‌های عام در منطق حملی با همان تعبیر وجودی از سورها و ترجمه‌ی استاندارد محصورات اربعه از منطق چهار-ارزشی ربط-کلاسیک قوی KR_4 استفاده شد.

کلیدواژه‌ها: منطق حملی، قیاس ارسطویی، منطق غیرکلاسیک، منطق زیرساختاری، روش اصل موضوعی.

* دکترای فلسفه، گرایش منطق، دانشگاه تربیت مدرس (نویسندهٔ مسئول)، amer.amikhteh@modares.ac.ir

** دانشجوی دکتری فلسفه، گرایش منطق، دانشگاه تربیت مدرس، sa.mir@modares.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۳/۰۳، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۶/۰۲

۱. مقدمه

در تحلیل منطق قدیم (سنتی) توسط منطق جدید رویکرد غالب این است که اولاً از منطق مرتبه اول کلاسیک (= فرگه) و نیز منطق‌های توسعه یافته‌ی موجهات و زمان استفاده می‌شود، ثانیاً در تحلیل نحوی (نظریه برهانی) از روش استنتاج طبیعی استفاده می‌شود.

گرچه ابزار منطق کلاسیک بسیار کارآمد است. اما با ظهور طیف گسترده‌ای از منطق‌های غیرکلاسیک بالاخص «منطق‌های زیرساختاری» (substructural logics) که امروزه داریم، منطق فرگه بسیار قوی است و پیامدهای فلسفی سنگینی برای ما خواهد داشت.

به عنوان مثال شکل استاندارد «برهان خلف» در تعداد قابل توجهی از منطق‌های غیرکلاسیک مانند منطق شهودی و حتی منطق ربط R پذیرفته نیست. ما نشان خواهیم داد که برای اثبات «قیاس‌های حملی ارسطویی» (Aristotelian categorical syllogisms) نه نیازی به برهان خلف و نه نیازی به قاعده‌ی $\sim\sim\varphi \vdash \varphi$ داریم.

به علاوه ازین رهگذر یعنی بهره‌گیری از منطق‌های غیرکلاسیک به عنوان یک نتیجه‌ی فلسفی اصلی ما ثابت خواهیم کرد که منطق حملی ارسطویی با همان تعبیر وجودی از سورها مانند منطق فرگه، نسبت به نام‌های عام تعهد وجودی ندارد.

همانطور که می‌دانیم گرچه روش استنتاج طبیعی در مقام کاربرد به ویژه در عرصه‌ی آموزش بسیار حائز اهمیت است؛ اما در مقام تاسیس، بحث‌های نظری و تخصصی‌تر، مناسب‌تر است که از روش اصل موضوعی استفاده کنیم.

در تعریف استاندارد در «منطق جبری مجرد» (abstract algebraic logic)، هر منطق مجموعه‌ای از استدلال‌ها (consecutions) در یک زبان خاص با ویژگی‌های خاص است. ما این مجموعه را می‌توانیم از طریق روش‌های مختلف نحوی و معنایی متعین کنیم. در این مقاله AL را یک سیستم اصل موضوعی برای منطق L می‌گیریم اگر و تنها اگر تنها توسط زیر مجموعه‌ای از L متعین شود. بنابراین در AL نه خبری از فرض، برهانک و سطرهای ابتناء است و نه خبری از فراقواعدی مانند $\frac{\vdash_{AL}\varphi_x}{\therefore \vdash_{AL}\forall x\varphi_x}$ است.

در بخش اول مقاله ابتدا سیستم‌های اصل موضوعی C2، C4، C6 و C8 که فاقد قواعد «حذف نقض مضاعف» (double-negation elimination) و «برهان خلف» هستند را برای قیاس‌های ارسطویی معرفی می‌کنیم. سپس با افزودن حذف نقض مضاعف و

نقض گزاره‌ای درجه اول سیستم‌های اصل موضوعی قوی‌تری معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که «مربع تقابل» (square of opposition) بدون حذف نقض مضاعف مانند قبل (در منطق ارسطویی) پابرجا است. در نهایت C14 که شامل منطق مظفر (به بیان (فلاحی ۱۳۸۹)) و قوی‌ترین منطق حملی این مقاله است را معرفی می‌کنیم.

در بخش دوم ابتدا نشان می‌دهیم که C8 تنها با استفاده از منطق مرتبه اول یک موضعی غیرآزاد بر پایه‌ی منطق گزاره‌ای زیرساختاری جابه‌جایی یگانه نتیجه‌ی (single-conclusion) SLe که فاقد قواعد ساختاری شرکت‌پذیری (associativity)، انقباض (contraction) و تضعیف (weakening) است، بدست می‌آید. در ادامه نیز C14 را با منطق زیرساختاری جابه‌جایی شرکت‌پذیر چندگانه نتیجه‌ی (multiple-conclusion) IFLe اثبات می‌کنیم.

در نهایت توسط نسخه‌ی ۴ ارزشی منطق ربط $KR = R+(\varphi\wedge\sim\varphi)\rightarrow\psi$، عدم‌تعهد وجودی نسبت به نام‌های عام در منطق حملی ارسطویی را نشان می‌دهیم. این ادعا را با همان «تعبیر وجودی از سورها»، «تعهد وجودی نسبت به نام‌های خاص» و «ترجمه‌ی استاندارد محصورات اربعه» در منطق فرگه ثابت خواهیم کرد.

۲. روش‌شناسی و پیشینهٔ تحقیق

در (فلاحی ۱۳۸۹) به خوبی توضیح داده شده است که منطق حملی قدیم منحصر در یک سیستم منطقی نمی‌شود. بنابراین قبل از پرداختن به مباحث منطق تطبیقی ابتدا باید مشخص شود که موضوع بحث دقیقاً در مورد کدام سیستم از منطق قدیم است.

از طرفی هر کدام از سیستم‌های منطق جدید دارای ویژگی‌های اساسی زیر است:

۱. زبان صوری دقیق و در نتیجه دستگاه استنتاجی دقیق و بدون ابهام دارد.

۲. تمایز نحو و معنا در آن رعایت می‌شود.

بنابراین قبل از آغاز مباحث تطبیقی می‌بایست سیستم منطقی مورد بحث در حوزه‌ی منطق قدیم با معیارهای صوری منطق جدید تطابق پیدا کند. و تنها پس از آن است که این دو نظام منطقی را می‌توانیم به شکل اصولی با هم مقایسه کنیم.

$CL\forall^*$ را «منطق مرتبه اول فرگه» به علاوه‌ی اصل‌نمای زیر بگیرید:

- اگر φ یک محمول‌نشانه باشد، آنگاه $\exists x\varphi x$ و $\exists x\sim\varphi x$ اصل موضوع هستند.

به عنوان مثال در (فلاحی ۱۳۸۷) به درستی بیان می‌شود که در $CL\forall^*$ با ترجمه‌ی استاندارد محصورات اربعه، تمام قیاس‌های ارسطویی، مربع تقابل، قواعد عکس و نقض در منطق مظفر برای محمول‌های بسیط و نقیضشان به طور کامل به دست می‌آیند.

سپس اشکال می‌شود که:

“اگر محصورات اربع را با محمول‌های مرکب، که معادل محمول‌نشانه‌ها نیستند، به‌کار ببریم همهٔ اشکالات برمی‌گردد زیرا اصول موضوعهٔ منطق وحید تنها برای محمول‌نشانه‌ها برقرار است و محمول‌های مرکب را شامل نمی‌شود”

به عنوان مثال: $\forall x[(Ax \wedge Bx) \rightarrow Cx] \nvdash_{CL\forall^*} \exists x[(Ax \wedge Bx) \wedge Cx]$

بنابراین قاعده‌ی تداخل برای گزاره‌هایی مانند «هر سیب زرد خوشمزه است» (S) از دست می‌رود. اما این اشکال دقیقاً برمی‌گردد به استفاده از «زبان طبیعی» به جای «زبان صوری». گرچه در مبحث الفاظ ترکیب وصفی «سیب زرد» لفظ مرکب ناقص محسوب می‌شود اما این ترکیب در سیستم منطقی نمود پیدا نکرده است. به عنوان مثال استدلال زیر به دلیل عدم تکرار حد وسط در منطق قدیم منتج نیست:

بعضی میوه‌ها سیب زرد هستند.	$\exists x[Ax \wedge (Bx \wedge Cx)]$
هر سیب خوشمزه است.	$\forall x(Bx \rightarrow Dx)$
بنابراین: بعضی میوه‌ها خوشمزه‌اند.	$\therefore \exists x(Ax \wedge Dx)$

اگر منطق حملی مظفر به صورت کاملاً صوری بیان شود، می‌بایست S با نمادهایی مانند AaB صوری شود که A محمول «سیب زرد» باشد. اما اگر بخواهیم S را به‌صورت (AB)aC صوری کنیم، مثلاً باید قاعده‌هایی مانند قاعده‌ی زیر در سیستم خود داشته باشیم:

هر سیب خوشمزه است.	AaC
بنابراین هر سیب زرد خوشمزه است.	∴(AB)aC

در غیراینصورت در واقع عملاً «سیب زرد» را باید یک محمول بسیط تلقی کرد نه مرکب. این در حالی است که چنین قاعده‌ای در منطق حملی مظفر وجود ندارد. حتی در قاعده‌ی بدیهی منطقی هم کلمه به هر دو طرف گزاره افزوده می‌شود. ازین رو در منطق جدید نیز S باید به صورت $\forall x(Ax \rightarrow Bx)$ نمادین شود.

بنابراین صوری‌سازی منطق قـدیم بـا معیـار منطـق جدیـد از ملزومـات مباحـث منطـق تطبیقی است. فقدان این صوری‌سازی یکی از مهم‌ترین ضعف‌های پژوهش‌های انجـام شـده در ایران در حوزه‌ی «منطق تطبیقی» است.

این در حالی است که در جهان می‌توان موارد زیادی از ایـن رویکـرد یافـت. بـه عنـوان مثال لوکاسیه‌ویـچ در کتـاب معـروف (Lukasiewicz 1957) یـک سیسـتم کـاملاً صـوری از منطق حملی ارسـطو ارائـه مـی‌دهـد. بعضـی سیسـتم‌هـای اصـل موضـوعی دیگـر نیـز در (Kulicki 2020) گزارش داده شده‌اند.

منطق حملی لوکاسیه‌ویچ که در (حیدری ۱۳۸۹) نیز معرفی شـده اسـت بـر پایـه منطـق گزاره‌های فرگه است. در حالت کلی قرار دادن یک منطق زمینه، آن هـم منطـق گـزاره‌هـای فرگه و نسبت دادن آن به منطق‌دانان قدیم توجیه‌پذیر نیست.

بنابراین اگر بخواهیم نگاه دقیق‌تری به نظام منطق قدیم و جدیـد داشـته باشـیم، مباحـث منطق تطبیقی را می‌بایست در دو مرحله‌ی اصلی زیر پی‌گیری کنیم:

۱. مرحله‌ی اول (سیستم‌سازی): معرفی یک سیستم صوری بـا معیارهـای منطـق جدیـد مانند S_{TL} از نظام منطق قدیم مورد نظر بدون منطق زمینه.

۲. مرحله‌ی دوم (تطبیق سیستم قدیم و جدید):

- a. انتخاب یکی از سیستم‌های منطق جدید مانند S_{ML}
- b. ترجمه‌ی زبان صوری S_{TL} به زبان صوری S_{ML}
- c. بررسی تبعات منطقی این ترجمه

فیلسوفان در این که S_{TL} تا چه حد با سیستم‌های منطق قدیم تطابق دارد، می‌توانند با هـم وارد گفتگو شوند. اما ما ترجیح می‌دهیم بدون اینکه متعهد به یک منطـق خـاص شـویم، بـه مباحث منطق تطبیقی بپردازیم. به عبارتی مباحث را با رویکـرد فرامنطقـی امـا صـوری و نـه فلسفی دنبال می‌کنیم.

۳. منطق حملی

۱.۳ زبان صوری

۱.۱.۳ واژگان

a. شماراتا محمول نشانه: $A, B, C, \ldots$

مجموعه‌ی همه‌ی محمول نشانه‌ها را با $\mathcal{P}$ نشان می‌دهیم.

b. نشانه‌های حملی: a, i, e, o

c. ادات سلب: $'$

۲.۱.۳ قواعد ساخت

a. اگر π یک محمول نشانه باشد آنگاه π یک محمول است.

b. اگر π یک محمول باشد آنگاه π' یک محمول است.

مجموعه‌ی همه‌ی محمول‌ها را با $\mathcal{P}'$ نشان می‌دهیم.

c. اگر π و ρ یک محمول باشند آنگاه $\pi a \rho$، $\pi i \rho$، $\pi e \rho$ و $\pi o \rho$ یک فرمول و یک گزاره‌ی حملی هستند.

مجموعه‌ی همه‌ی فرمول‌های این زبان صوری را با Fm_C نشان خواهیم داد.

جدول ۱.۳. نشانه‌گذاری قرون وسطایی در گزاره‌های حملی ارسطو

نوع حمل	نماد	گزاره‌ی حملی	نشانه گذاری
موجبه کلیه	A	هر الف ب است	AaB
سالبه کلیه	E	هیچ الف ب نیست	AeB
موجبه جزئیه	I	بعضی الف ب است	AiB
سالبه جزئیه	O	بعضی الف ب نیست	AoB

جدول ۲.۳. قیاس‌های حملی ارسطویی

شکل اول

Barbara	(A_1):	παρ	,	ρασ	⊢	πασ
Barbari	(A^*_1):	παρ	,	ρασ	⊢	πισ
Celarent	(A_2):	παρ	,	ρεσ	⊢	πεσ
Celaront	(A^*_2):	παρ	,	ρεσ	⊢	ποσ
Darii	(A_9)	πιρ	,	ρασ	⊢	πισ
Ferio	(A_{10}):	πιρ	,	ρεσ	⊢	ποσ

شکل دوم

Cesare	(B_2):	παρ	,	σερ	⊢	Πες
Cesaro	(B^*_2):	παρ	,	σερ	⊢	Πος
Camestres	(B_5):	περ	,	σαρ	⊢	Πες
Camestrop	(B^*_5):	περ	,	σαρ	⊢	Πος
Festino	(B_{10}):	πιρ	,	σερ	⊢	Πος
Baroco	(B_{13}):	πορ	,	σαρ	⊢	Πος

شکل سوم

Darapti	(C^*_1):	ραπ	,	ρασ	⊢	πισ
Felapton	(C^*_2):	ραπ	,	ρεσ	⊢	ποσ
Disamis	(C_3):	ραπ	,	ρισ	⊢	πισ
Bocardo	(C_4):	ραπ	,	ροσ	⊢	ποσ
Datisi	(C_9):	ριπ	,	ρασ	⊢	πισ
Ferison	(C_{10}):	ριπ	,	ρεσ	⊢	ποσ

شکل چهارم

Bramantip	(D^*_1):	ραπ	,	σαρ	⊢	Πις
Fesapo	(D^*_2):	ραπ	,	σερ	⊢	Πος
Dimaris	(D_3):	ραπ	,	σιρ	⊢	Πις
Camenes	(D_5):	ρεπ	,	σαρ	⊢	πεσ
Camenop	(D^*_5):	ρεπ	,	σαρ	⊢	ποσ
Fresison	(D_{10}):	ριπ	,	σερ	⊢	ποσ

۲.۳ سیستم اصل موضوعی منطق‌های حملی پایه

- $C1 =_{df} (A_1) + (A_2) + (A_9) + (A_{10}) + (B_{13}) + (C_4) +$
  (SC_1): σεπ⊢πεσ + (SC_2): σιπ⊢πισ
- $C2 =_{df} C1 + (Su_1)$: πασ⊢πισ + (Su_2): πεσ⊢ποσ

در جدول زیر برهان بقیه‌ی ضرب‌های ۲۴ گانه‌ی ارسطویی را به طور خلاصه آوردیم:

جدول ۳.۳. اثبات دیگر ضروب در C1 و C2

	3.	4.	5.
A^*_1	1,2, A_1	3, Su_1	
A^*_2	1,2, A_2	3, Su_2	
B_2	2, SC_1	1,3, A_2	
B_5	1, SC_1	2,3, A_2	4, SC_1
B_{10}	2, SC_1	1,3, A_{10}	
B^*_2	1,2, B_2	3, Su_2	
B^*_5	1,2, B_5	3, Su_2	
C_3	2, SC_2	1,3, A_9	4, SC_2
C_9	1, SC_2	2,3, A_9	

	3.	4.	5.
C_{10}	1, SC_2	2, SC_1	3,4, B_{10}
C^*_1	1, Su_1	2,3, C_9	
C^*_2	2, Su_2	1,3, C_4	
D_3	1,2, A_9	3, SC_2	
D_5	1,2 A_2	3, SC_1	
D_{10}	1, SC_2	2, SC_1	3,4, A_{10}
D^*_1	2, Su_1	1,3, D_3	
D^*_2	1, Su_1	2,3, D_{10}	
D^*_5	1,2, D_5	3, Su_2	

۳.۳ افزودن نقض محمول E و O

در ترجمه‌ی استاندارد محصورات اربعه به منطق جدید جمله‌های به فرم «– غیرب است» و «– ب نیست» یک گزاره هستند. بنابراین از آنجا که در این مقاله ترجمه‌ی استاندارد را مدنظر داریم، زبان صوریمان را با BNF زیر اصلاح می‌کنیم:

- $\pi ::= A \mid \pi'$ $\qquad$ $\varphi ::= \pi a \sigma \mid \pi i \sigma$
- (D_1): $\pi e \sigma =_{df} \pi a \sigma'$ $\qquad$ (D_2): $\pi o \sigma =_{df} \pi i \sigma'$

در این زبان صوری با توجه به تعریف‌های (D_1) و (D_2) قواعد A_2, A_{10}, C_4, Su_2 به‌ترتیب دقیقاً همان قواعد A_1, A_9, C_3, Su_1 هستند. بنابراین در این زبان زاید هستند و به دو سیستم اصل موضوعی اکیداً قوی‌تر زیر می‌رسیم:

- $C3 =_{df} (A_1) + (A_9) + (B_{13}) + (SC_1) + (SC_2)$
- $C4 =_{df} C3 + (Su_1)$

۴.۳ افزودن عکس نقیض A

- $C5 =_{df} (A_1) + (A_9) + (SC_1) + (SC_2) + (NC_1)$: $\sigma a \pi \vdash \pi' a \sigma'$
- $C6 =_{df} C5 + (Su_1)$

قاعده‌ی B_{13} به ترتیب تنها با قواعد NC_1 و A_9 بدست می‌آید.

۵.۳ افزودن اصل «هر الف الف است»

- $C7 =_{df} (A_1) + (C_9) + (SC_1) + (Id)$: $\pi a \pi$
- $C8 =_{df} C7 + (Id^*)$: $\pi i \pi$

توجه کنید که (Id^*) تنها با اعمال قاعده Su_1 بر روی اصل Id بدست می‌آید. بنابراین درواقع ما به سیستم‌های قبل فقط Id را افزوده‌ایم.

جدول ۴.۳. اثبات قواعد A_9, SC_2, NC_1, Su_1 در C7 و C8

(A_9): $\pi i \rho, \rho a \sigma \vdash_{C7} \pi i \sigma$		
1.	$\pi i \rho$	Pre
2.	$\rho a \sigma$	Pre
3.	$\rho i \pi$	1, SC_2
4.	$\pi i \sigma$	2,3, C_9

(NC_1): $\sigma a \pi \vdash_{C7} \pi' a \sigma'$		
1.	$\sigma a \pi$	Pre
2.	$\pi' a \pi'$	Id
3.	$\pi a \pi''$	2, SC_1
4.	$\sigma a \pi''$	1,3, A_1
5.	$\pi' a \sigma'$	4, SC_1

(SC_2): $\sigma i \pi \vdash_{C7} \pi i \sigma$		
1.	$\sigma i \pi$	Pre
2.	$\sigma a \sigma$	Id
3.	$\pi i \sigma$	1,2, C_9

(Su_1): $\sigma a \pi \vdash_{C8} \sigma i \pi$		
1.	$\sigma a \pi$	Pre
2.	$\pi i \pi$	Id*
3.	$\sigma i \pi$	1,2, A_9

اگر بخواهیم فقط از ضروب شکل اول استفاده کنیم، تنها کافی است که به جای ضرب Datisi ضرب Darii و قاعده عکس مستوی SC_2 را جایگزین کنیم.

تا اینجا نشان دادیم که C8 یک سیستم اصل موضوعی برای قیاس‌های ارسطویی به‌علاوه اصل (Id) و تعریف E و O بر مبنای قواعد دوطرفه‌ی نقض محمول است. به‌عبارتی نشان دادیم که قیاس‌های ارسطویی تنها با «۲ تعریف»، «۲ اصل»، «۱ قاعده‌ی یک مقدمه‌ای» و «۲ قاعده‌ی دو مقدمه‌ای» قابل صورتبندی است. در ادامه منطق‌های قوی‌تری معرفی می‌کنیم که برای اثبات قیاس‌های ارسطویی به آن‌ها نیازی نداریم.

۶.۳ منطق‌های حملی برگشتی

- $Ci{+}2 =_{df} Ci + (Inv){:}\ \pi'' a \pi \qquad i \in \{7,8\}$

توجه کنید که اصل Inv نقض محمول اصل Id به فرم $\pi'' e \pi'$ است.

جدول ۵.۳. وضعیت قواعد عکس و نقض

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">عکس مستوی</th><th colspan="2">عکس نقیض موافق</th><th colspan="2">عکس نقیض مخالف</th><th colspan="2">نقض محمول</th><th colspan="2">نقض موضوع</th><th colspan="2">نقض تام</th></tr>
<tr><td>رفت / برگشت:</td><td>←</td><td>→</td><td>←</td><td>→</td><td>←</td><td>→</td><td>←</td><td>→</td><td>←</td><td>→</td><td>←</td><td>→</td></tr>
<tr><td>هر الف ب است</td><td>C2</td><td>×</td><td>C5</td><td>C9</td><td>C5</td><td>C9</td><td>C7</td><td>C9</td><td>C6</td><td>×</td><td>C6</td><td>×</td></tr>
<tr><td>هیچ الف ب نیست</td><td colspan="2">C1</td><td>C8</td><td>×</td><td>C8</td><td>×</td><td colspan="2">C3</td><td>C4</td><td>×</td><td>C8</td><td>×</td></tr>
<tr><td>بعضی الف ب است</td><td colspan="2">C1</td><td colspan="2">×</td><td colspan="2">×</td><td>C7</td><td>C9</td><td colspan="2">×</td><td colspan="2">×</td></tr>
<tr><td>بعضی الف ب نیست</td><td colspan="2">×</td><td>C7</td><td>C9</td><td>C7</td><td>C9</td><td colspan="2">C3</td><td colspan="2">×</td><td colspan="2">×</td></tr>
</table>

٤. افزودن نقض گزاره‌ای درجه اول به منطق حملی

۱.۴ زبان صوری

زبان صوری قبل را با واژه ~ و قاعده‌ی ساخت زیر بسط می‌دهیم:

- اگر φ یک گزاره‌ی حملی باشد، آنگاه $\sim\varphi$ یک فرمول است.

مجموعه‌ی همه فرمول‌های این زبان صوری را با Fm_C نشان می‌دهیم.

۲.۴ سیستم اصل موضوعی

جدول۱.۴. قواعد نقض گزاره‌ای

(A_{17}):	$\pi a\rho,\sim\pi a\sigma\vdash\sim\rho a\sigma$	(A_{18}):	$\sim\pi a\sigma,\rho a\sigma\vdash\sim\pi a\rho$
(QN_1):	$\sim\pi i\rho\vdash\pi e\rho$	(QN_2):	$\pi e\rho\vdash\sim\pi i\rho$
(QN_3):	$\pi a\rho\vdash\sim\pi o\rho$	(SC_3):	$\sim\pi e\sigma\vdash\sim\sigma e\pi$
(QN_4):	$\pi o\rho\vdash\sim\pi a\rho$	(QN_5):	$\pi i\rho\vdash\sim\pi e\rho$
(QN_6):	$\sim\pi o\rho\vdash\pi a\rho$	(QN_7):	$\sim\pi a\rho\vdash\pi o\rho$
(QN_8):	$\sim\pi e\rho\vdash\pi i\rho$		

- $Ci{+}4 \quad =_{df} \quad Ci + (QN_{1,2,4}) + (A_{17,18}) + (SC_3); \qquad i\in\{7,8\}$
- $Ci{+}4 \quad =_{df} \quad Ci + (QN_{1,2,4,7}); \qquad i\in\{9,10\}$

قضیه ۱: C13 و C14 به ترتیب گسترش‌های C11 و C12 هستند.

جدول ۲.۴. استدلال‌های اثبات‌پذیر در C11 و C13

(QN_6): $\sim\pi o\rho\vdash_{C13}\pi a\rho$		
1.	$\sim\pi i\rho'$	Pre
2.	$\pi a\rho''$	1, QN_1
3.	$\rho''a\rho$	Inv
4.	$\pi a\rho$	2,3, A_1

(QN_8): $\sim\pi e\rho\vdash_{C13}\pi i\rho$		
1.	$\sim\pi a\rho'$	Pre
2.	$\pi i\rho''$	1, QN_7
3.	$\rho''a\rho$	Inv
4.	$\pi i\rho$	2,3, A_9

(QN_3): $\pi a\rho\vdash_{C11}\sim\pi o\rho$		
1.	$\pi a\rho$	Pre
2.	$\rho' a\rho'$	Id
3.	$\pi a\rho''$	1,2, B_2
4.	$\sim\pi i\rho'$	2, QN_2

(QN_5): $\pi i\rho\vdash_{C11}\sim\pi e\rho$		
1.	$\pi i\rho$	Pre
2.	$\rho' a\rho'$	Id
3.	$\pi i\rho''$	1,2, B_{10}
4.	$\sim\pi a\rho'$	3, QN_4

(SC_3): $\sim\pi e\sigma\vdash_{C13}\sim\sigma e\pi$		
1.	$\sim\pi e\sigma$	Pre
2.	$\pi i\sigma$	1, QN_8

(A_{17}): $\pi a\rho,\sim\pi a\sigma\vdash_{A13}\sim\rho a\sigma$		
1.	$\pi a\rho$	Pre
2.	$\sim\pi a\sigma$	Pre
3.	$\pi a\sigma'$	2, QN_7
4.	$\rho i\sigma'$	1,3, C_3
5.	$\sim\rho a\sigma$	4, QN_4

(A_{18}): $\sim\pi a\sigma,\rho a\sigma\vdash_{C13}\sim\pi a\rho$		
1.	$\sim\pi a\sigma$	Pre
2.	$\rho a\sigma$	Pre
3.	$\pi i\sigma'$	1, QN_7
4.	$\pi i\rho'$	2,3, B_{13}
5.	$\sim\pi a\rho$	4, QN_4

3. $\sigma i \pi$ 2, SC_2
4. $\sim\sigma e \pi$ 3, QN_5

C14 ضعیف‌تر از سیستم استنتاج طبیعی معرفی شده در (نبـوی ۱۳۷۶) و (نبـوی ۱۳۸۵, ۹۱–۱۰۱) است. دستگاه استنتاجی ارائه شده شامل ۲۰ قاعده زیر است:

۱. ضرب Ferio
۲. دو قاعده تداخل
۳. هشت قاعده نقض‌المحمول
۴. هشت قاعده نقض سور
۵. قاعده برهان خلف

به عنوان مثال، در سیستم نبوی: $(EFQ): AiB, BeA \vdash CaD$

مسئله باز ۱: آیا $C14 + \varphi,\sim\varphi \vdash \psi$ یک سیستم اصل موضوعی برای سیستم نبوی است؟

۳.۴ مربع تقابل

مربع تقابل در منطق L را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

- تداخل: $\varphi \vdash_L \psi$ or $\psi \vdash_L \varphi$
- تضاد: $\exists\chi: \varphi,\psi \vdash_L \chi,\sim\chi$
- داخل در تضاد: $\exists\chi: \sim\varphi,\sim\psi \vdash_L \chi,\sim\chi$
- تناقض = تضاد + داخل در تضاد

جدول ۳.۴. مربع تقابل

φ	ψ	تداخل	تضاد	داخل در تضاد	تناقض
περ	πιρ	×	C11	C11	C11
παρ	πορ	×	C11	C11	C11
παρ	περ	×	C12	×	×
πιρ	πορ	×	×	C12	×
παρ	πιρ	C2	×	×	×
περ	πορ	C2	×	×	×

$\sim\pi a\rho,\sim\pi o\rho \vdash_{C11} \rho a\rho,\sim\rho' a\rho'$
1. $\sim\pi a\rho$ Pre
2. $\sim\pi i\rho'$ Pre
3. $\pi a\rho''$ 3, QN_1
4. $\sim\rho a\rho''$ 1,3, A_{17}
5. $\sim\rho' a\rho'$ 4, SC_3

۵. منطق گزاره‌ها

۱.۵ سیستم اصل موضوعی

$\varphi ::= p \mid t \mid f \mid \varphi\to\psi \mid \varphi\&\psi$ $\qquad\qquad$ $\sim\varphi =_{df} \varphi\to f$

جدول ۱.۵. دستگاه استنتاجی $SL^{\circ}e$

(I):	$\varphi\to\varphi$
(R_t):	$\varphi\dashv\vdash t\to\varphi$
(T):	$\varphi\to\psi,\psi\to\chi\vdash\varphi\to\chi$

(Res):	$\varphi\to(\psi\to\chi)\dashv\vdash(\varphi\&\psi)\to\chi$
(E):	$\varphi\to(\psi\to\chi)\vdash\psi\to(\varphi\to\chi)$

SL معرفی شده در (Galatos and Ono 2010)، ضعیف‌ترین «منطق زیرساختاری» است که تا کنون پیدا شده است. SL از حذف قواعد ساختاری تضعیف، انقباض، جابه‌جایی و شرکت‌پذیری از حساب رشته‌های منطق شهودی بدست می‌آید. SLe (SL + exchange) همان SL به علاوه‌ی ویژگی جابه‌جایی برای & است. SL به علاوه شرکت‌پذیری نیز همان منطق «لمبک کامل» (Full Lambek) $FL_{\perp}$ معرفی شده در (Galatos et al. 2007) است.

$SL^{\circ}e$ در واقع پاره‌ی ضربی SL (یعنی بدون ادات‌های شبکه $\wedge,\vee,\perp,T$) است. به عبارت دیگر $SL^{\circ}e$ ضعیف‌ترین منطق زیرساختاری جابه‌جایی در این زبان است.

- $FL^{\circ}e =_{df} SL^{\circ}e + (a)$: $[\varphi\&(\psi\&\chi)]\to[(\varphi\&\psi)\&\chi]$
- $IL =_{df} L + (INV)$: $\sim\sim\varphi\to\varphi$; $\qquad$ $L\in\{SL^{\circ}e, FL^{\circ}e\}$

IFLe در واقع همان منطق ربط RW بدون اصل پخش‌پذیری است.

جدول ۲.۵. اثبات بعضی از قواعد در سیستم اصل موضوعی FLe

(MP): $\varphi,\varphi\to\psi\vdash_{SL^{\circ}e}\psi$		
1.	φ	Pre
2.	$\varphi\to\psi$	Pre
3.	$t\to\varphi$	1, R_t
4.	$t\to\psi$	2,3, T
5.	ψ	4, R_t

(e): $\vdash_{SL^{\circ}e}(\varphi\&\psi)\to(\psi\&\varphi)$		
1.	$(\psi\&\varphi)\to(\psi\&\varphi)$	I
2.	$\psi\to[\varphi\to(\psi\&\varphi)]$	1, Res
3.	$\varphi\to[\psi\to(\psi\&\varphi)]$	2, E
4.	$(\varphi\&\psi)\to(\psi\&\varphi)$	3, Res

(M): $\varphi\to\psi\vdash_{SL^{\circ}e}(\chi\&\varphi)\to(\chi\&\psi)$		
1.	$\varphi\to\psi$	Pre

(N_1): $\vdash_{FL^{\circ}e}\sim(\varphi\&\psi)\to(\varphi\to\sim\psi)$		
1.	$\sim(\varphi\&\psi)\to\sim(\varphi\&\psi)$	I
2.	$\sim[(\sim(\varphi\&\psi))\&(\varphi\&\psi)]$	1, Res
3.	$[[\sim(\varphi\&\psi)\&\varphi]\&\psi]\to[\sim(\varphi\&\psi)\&(\varphi\&\psi)]$	a′
4.	$\sim[[\sim(\varphi\&\psi)\&\varphi]\&\psi]$	2,3, T
5.	$[\sim(\varphi\&\psi)\&\varphi]\to\sim\psi$	4, Res
6.	$\sim(\varphi\&\psi)\to(\varphi\to\sim\psi)$	5, Res

(N_2): $\vdash_{FL^{\circ}e}(\varphi\to\sim\psi)\to\sim(\varphi\&\psi)$		
1.	$(\varphi\to\sim\psi)\to(\varphi\to\sim\psi)$	I
2.	$[(\varphi\to\sim\psi)\&\varphi]\to\sim\psi$	1, Res
3.	$\sim[[(\varphi\to\sim\psi)\&\varphi]\&\psi]$	2, Res
4.	$[(\varphi\to\sim\psi)\&(\varphi\&\psi)]\to[[(\varphi\to\sim\psi)\&\varphi]\&\psi]$	a
5.	$\sim[(\varphi\to\sim\psi)\&(\varphi\&\psi)]$	3,4, T

2.	$(\psi\&\chi)\to(\chi\&\psi)$	e
3.	$\psi\to[\chi\to(\chi\&\psi)]$	2, Res
4.	$\varphi\to[\chi\to(\chi\&\psi)]$	1,3 , T
5.	$\chi\to[\varphi\to(\chi\&\psi)]$	4, E
6.	$(\chi\&\varphi)\to(\chi\&\psi)$	5, Res

	(Sf): $\varphi\to\psi\vdash_{SL^{\circ}e}(\psi\to\chi)\to(\varphi\to\chi)$	
1.	$\varphi\to\psi$	Pre
2.	$(\psi\to\chi)\to(\psi\to\chi)$	I
3.	$\psi\to[(\psi\to\chi)\to\chi]$	2, E
4.	$\varphi\to[(\psi\to\chi)\to\chi]$	1,3, T
5.	$(\psi\to\chi)\to(\varphi\to\chi)$	4, E

	(Pf): $\varphi\to\psi\vdash_{SL^{\circ}e}(\chi\to\varphi)\to(\chi\to\psi)$	
1.	$\varphi\to\psi$	Pre
2.	$(\chi\to\varphi)\to(\chi\to\varphi)$	I
3.	$[(\chi\to\varphi)\&\chi]\to\varphi$	2, Res
4.	$[(\chi\to\varphi)\&\chi]\to\psi$	1,3, T
5.	$(\chi\to\varphi)\to(\chi\to\psi)$	4, Res

	(a′): $\vdash_{FL^{\circ}e}[(\varphi\&\psi)\&\chi]\to[\varphi\&(\psi\&\chi)]$	
1.	$[(\varphi\&\psi)\&\chi]\to[\chi\&(\varphi\&\psi)]$	e
2.	$(\varphi\&\psi)\to(\psi\&\varphi)$	e
3.	$[\chi\&(\varphi\&\psi)]\to[\chi\&(\psi\&\varphi)]$	2, M
4.	$[\chi\&(\psi\&\varphi)]\to[(\chi\&\psi)\&\varphi]$	a
5.	$[(\chi\&\psi)\&\varphi]\to[\varphi\&(\chi\&\psi)]$	e
6.	$(\chi\&\psi)\to(\psi\&\chi)$	e
7.	$[\varphi\&(\chi\&\psi)]\to[\varphi\&(\psi\&\chi)]$	6, M
8.	$[(\varphi\&\psi)\&\chi]\to[\varphi\&(\psi\&\chi)]$	1,3,4, 5,7, T^4

6.	$(\varphi\to\sim\psi)\to\sim(\varphi\&\psi)$	5, Res

	(C): $\vdash_{FL^{\circ}e}(\psi\to\sim\varphi)\to(\varphi\to\sim\psi)$	
1.	$(\psi\to\sim\varphi)\to\sim(\psi\&\varphi)$	N_2
2.	$(\varphi\&\psi)\to(\psi\&\varphi)$	e
3.	$\sim(\psi\&\varphi)\to\sim(\varphi\&\psi)$	2, Sf
4.	$(\psi\to\sim\varphi)\to\sim(\varphi\&\psi)$	1,3, T
5.	$\sim[(\psi\to\sim\varphi)\&(\varphi\&\psi)]$	4, Res
6.	$[[(\psi\to\sim\varphi)\&\varphi]\&\psi]\to$ $[(\psi\to\sim\varphi)\&(\varphi\&\psi)]$	a′
7.	$\sim[[(\psi\to\sim\varphi)\&\varphi]\&\psi]$	5,6, T
9.	$(\psi\to\sim\varphi)\to(\varphi\to\sim\psi)$	7, Res^2

	(SC_3): $\sim(\varphi\to\sim\psi)\vdash_{FL^{\circ}e}\sim(\psi\to\sim\varphi)$	
1.	$\sim(\varphi\to\sim\psi)$	Pre
2.	$(\psi\to\sim\varphi)\to(\varphi\to\sim\psi)$	C
3.	$\sim(\psi\to\sim\varphi)$	1,2, T

	(N_4): $\vdash_{FL^{\circ}e}(\varphi\&\sim\psi)\to\sim(\varphi\to\psi)$	
1.	$(\varphi\to\sim\psi)\to\sim(\varphi\&\psi)$	N_2
2.	$(\varphi\&\psi)\to\sim(\varphi\to\sim\psi)$	1, E

	(N_7): $\vdash_{IFL^{\circ}e}\sim(\varphi\to\psi)\to(\varphi\&\sim\psi)$	
1.	$\sim(\varphi\&\sim\psi)\to(\varphi\to\sim\sim\psi)$	N_1
2.	$[\sim(\varphi\&\sim\psi)\&\varphi]\to\sim\sim\psi$	1, Res
3.	$\sim\sim\psi\to\psi$	INV
4.	$[\sim(\varphi\&\sim\psi)\&\varphi]\to\psi$	2,3, T
5.	$\sim(\varphi\&\sim\psi)\to(\varphi\to\psi)$	4, Res
6.	$\sim(\varphi\to\psi)\to\sim\sim(\varphi\&\sim\psi)$	5, Sf
7.	$\sim\sim(\varphi\&\sim\psi)\to(\varphi\&\sim\psi)$	INV
8.	$\sim(\varphi\to\psi)\to(\varphi\&\sim\psi)$	6,7, T

۲.۵ معناشناسی جبری مرتب جزئی

یک «گروه‌وار مرتب جزئی مانده‌ای جابه‌جایی نقطه‌دار با یکه» (pointed commutative residuated partially ordered groupoid with unit) یا به طور خلاصه یک $SL^{\circ}e$–ساختار یک ۶–تایی مرتب $\mathcal{A}=\langle A,\leq,\&,\to,f,t\rangle$ است، به طوری که $f\in A$ و

- $\langle A,\leq\rangle$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی است.
- $\langle A,\&,t\rangle$ یک گروه‌وار یکه‌دار جابه‌جایی است.
- مانده‌یابی (residuation): $x\leq y\to z \Leftrightarrow x\&y\leq z$

یک $SL^{\circ}e$–مدل دو تایی $\mathfrak{M}=\langle\mathcal{A},I\rangle$ است به طوری که $\mathcal{A}$ یک $SL^{\circ}e$–ساختار و I یک تابع از مجموعه‌ی متغیرها (جمله‌نشانه‌ها) به A است.

برای هر SL°e–مدل $\mathfrak{M}$ یک SL°e–ارزشدهی یک تابع مثل $V_{\mathfrak{M}}$ از مجموعه‌ی فرمول‌ها به A است به طوری که:

- $V_{\mathfrak{M}}(p)=I(p)$ $\quad p\in Var$
- $V_{\mathfrak{M}}(c)=c$ $\quad c\in\{f,t\}$
- $V_{\mathfrak{M}}(\varphi\star\psi)=V_{\mathfrak{M}}(\varphi)\star V_{\mathfrak{M}}(\psi)$ $\quad \star\in\{\to,\&\}$

و در آخر تعریف استدلال معتبر:

- $\mathfrak{M}\vDash\varphi \iff_{df} t\leq V_{\mathfrak{M}}(\varphi)$ (صدق در مدل)
- $\Psi\vDash\varphi \iff_{df} \forall\mathfrak{M}: \forall\psi\in\Psi, \mathfrak{M}\vDash\psi \Rightarrow \mathfrak{M}\vDash\varphi$

به علاوه SL°e–ساختار $\mathcal{A}$ یک

- FL°e–ساختار است اگر و تنها اگر & شرکت‌پذیر باشد.
- ISL°e–ساختار است اگر و تنها اگر $\sim\sim x\leq x$.
- IFL°e–ساختار است اگر و تنها اگر FL°e–ساختار و ISL°e–ساختار باشد.

قضیه ۲: برای هر $L\in\{SL°e,FL°e,ISL°e,IFL°e\}$: $\quad \Gamma\vDash_L\varphi \iff \Gamma\vdash_L\varphi$

سمت راست به چپ (صحت قوی) به سادگی به صورت استاندارد یعنی از طریق استقراء قوی با اثبات معتبر بودن اصول موضوعه و صدق نگه‌داری قواعد بدست می‌آید. سمت چپ به راست (تمامیت جبری قوی) نیز به شکل استاندارد از طریق جبر لیندون‌باوم (Lindenbaum algebra) با تعریف زیر اثبات می‌شود:

- $[\varphi]^L_\Gamma=_{df}\{\psi\in Fm\mid\Gamma\vdash_L\varphi\to\psi,\Gamma\vdash_L\psi\to\varphi\}$
- $L_\Gamma=_{df}\{[\varphi]^L_\Gamma\mid\varphi\in Fm\}$, $\quad [\varphi]^L_\Gamma\leq^L_\Gamma[\psi]^L_\Gamma \iff_{df} \Gamma\vdash_L\varphi\to\psi$
- $c^L_\Gamma=_{df}[c]^L_\Gamma$; $c\in\{f,t\}$, $\quad \star^L_\Gamma([\varphi]^L_\Gamma,[\psi]^L_\Gamma)=_{df}[\varphi\star\psi)]^L_\Gamma$; $\star\in\{\to,\&\}$
- $LN^L_\Gamma=_{df}\langle L^L_\Gamma,\leq^L_\Gamma,\&^L_\Gamma,\to^L_\Gamma,f^L_\Gamma,t^L_\Gamma\rangle$

البته در نتیجه فلسفی که در نهایت خواهیم گرفت، فراقضیه صحت قوی برای ما کفایت می‌کند و نیازی به تمامیت نداریم. (برای نشان دادن استدلال‌های اثبات‌ناپذیر)

٦. منطق محمولات مرتبه اول یک موضعی

زبان صوری منطق‌های این قسمت همان زبان صوری استاندارد «منطق مرتبه اول یک موضعی» بر پایه زبان صوری منطق‌های گزاره‌ای قبل است. $\mathcal{C}$ و $\mathcal{X}$ را به ترتیب مجموعه‌های ناتهی شمارا از ثابت‌های فردی و متغیرهای فردی بگیرید.

- $\varphi ::= f \mid t \mid Aa \mid Ax \mid \varphi\&\psi \mid \varphi\to\psi \mid \forall\alpha\varphi_\alpha \mid \exists\alpha\varphi_\alpha;$ $\qquad a\in\mathcal{C},\ x,\alpha\in\mathcal{X},\ A\in\mathcal{P}$

اگر ψ فاقد مورد آزاد α باشد، می‌نویسیم $\alpha\notin\psi$. مجموعه‌ی همه‌ی این فرمول‌ها را با Fm_Q نشان می‌دهیم.

جدول ۱.۶. ترجمه استاندارد گزاره‌های حملی

AaB	=	$\forall x(Ax\to Bx)$	AiB	=	$\exists x(Ax\&Bx)$
AeB	=	$\forall x(Ax\to\sim Bx)$	AoB	=	$\exists x(Ax\&\sim Bx)$

۱.۶ سیستم اصل موضوعی

- $LQ =_{df} L + (\forall 1)\text{: } \forall\alpha\varphi_\alpha\to\varphi_\beta + (\exists 1)\text{: } \varphi_\beta\to\exists\alpha\varphi_\alpha + (\forall I)\text{: } \varphi\vdash\forall\alpha\varphi_\alpha +$
$(\forall 2)\text{: } \forall\alpha(\psi\to\varphi_\alpha)\to(\psi\to\forall\alpha\varphi_\alpha) + (\exists 2)\text{: } \forall\alpha(\varphi_\alpha\to\psi)\to(\exists\alpha\varphi_\alpha\to\psi);$ $\qquad \alpha\notin\psi$
- $LQ^* =_{df} LQ + (I^*)\text{: } \exists\alpha(\varphi\alpha\&\varphi\alpha) + (I^{**})\text{: } \exists\alpha(\sim\varphi\alpha\&\sim\varphi\alpha);$ $\qquad \varphi\in\mathcal{P}$

Q7	$=_{df}$	SL°eQ	Q8	$=_{df}$	SL°eQ*	Q9	$=_{df}$	ISL°eQ	Q10	$=_{df}$	ISL°eQ*
Q11	$=_{df}$	FL°eQ	Q12	$=_{df}$	FL°eQ*	Q13	$=_{df}$	IFL°eQ	Q14	$=_{df}$	IFL°eQ*

جدول ۲.۶. اثبات بعضی از قواعد در Q5

$(M\forall)\text{: } \varphi\to\psi\vdash_{Q7}\forall\alpha\varphi\to\forall\alpha\psi$		
1.	$\varphi_\beta\to\psi_\alpha$	Pre
2.	$\forall\alpha\varphi_\alpha\to\varphi_\beta$	∀1
3.	$\forall\alpha\varphi_\alpha\to\psi_\alpha$	1,2, T
4.	$\forall\alpha(\forall\alpha\varphi_\alpha\to\psi_\alpha)$	3, ∀I
5.	$\forall\alpha(\forall\alpha\varphi_\alpha\to\psi_\alpha)\to(\forall\alpha\varphi_\alpha\to\forall\alpha\psi_\alpha)$	∀2
6.	$\forall\alpha\varphi_\alpha\to\forall\alpha\psi_\alpha$	4,5, MP

$(M\exists)\text{: } \varphi\to\psi\vdash_{Q7}\exists\alpha\varphi\to\exists\alpha\psi$		
1.	$\varphi_\alpha\to\psi_\beta$	Pre
2.	$\psi_\beta\to\exists\alpha\psi_\alpha$	∀1
3.	$\varphi_\alpha\to\exists\alpha\psi_\alpha$	1,2, T
4.	$\forall\alpha(\varphi_\alpha\to\exists\alpha\psi_\alpha)$	3, ∀I
5.	$\forall\alpha(\varphi_\alpha\to\exists\alpha\psi_\alpha)\to(\exists\alpha\varphi_\alpha\to\exists\alpha\psi_\alpha)$	∀2
6.	$\exists\alpha\varphi_\alpha\to\exists\alpha\psi_\alpha$	4,5, MP

$(\exists 3)\text{: } \varphi_\alpha\to\psi\vdash_{Q7}\exists\alpha\varphi_\alpha\to\psi;\ \alpha\notin\psi$		
1.	$\varphi_\alpha\to\psi$	Pre
2.	$\forall\alpha(\varphi_\alpha\to\psi)$	1, ∀I
3.	$\forall\alpha(\varphi_\alpha\to\psi)\to(\exists\alpha\varphi_\alpha\to\psi)$	∃2
4.	$\exists\alpha\varphi_\alpha\to\psi$	2,3, MP

$(\exists 4)\text{: } \sim\varphi_\alpha\vdash_{Q7}\sim\exists\alpha\varphi_\alpha$		
1.	$\sim\varphi_\alpha$	Pre
2.	$\forall\alpha\sim\varphi_\alpha\to\sim\varphi_\alpha$	∀1
3.	$\varphi_\alpha\to\sim\forall\alpha\sim\varphi_\alpha$	2, E
4.	$\exists\alpha\varphi_\alpha\to\sim\forall\alpha\sim\varphi_\alpha$	3, ∃3
5.	$\forall\alpha\sim\varphi_\alpha\to\sim\exists\alpha\varphi_\alpha$	3, E
6.	$\forall\alpha\sim\varphi_\alpha$	1, ∀I
7.	$\sim\exists\alpha\varphi_\alpha$	5,6, MP

$(\forall E)\text{: } \forall\alpha\varphi_\alpha\vdash_{Q7}\varphi_\beta$		
1.	$\forall\alpha\varphi_\alpha$	Pre

2.	$\forall\alpha\varphi_\alpha\rightarrow\varphi_\beta$	∀1
3.	φ_β	1,2, MP

(∃I): $\varphi_\beta\vdash_{Q7}\exists\alpha\varphi_\alpha$		
1.	φ_β	Pre
2.	$\varphi_\beta\rightarrow\exists\alpha\varphi_\alpha$	∃1
3.	$\exists\alpha\varphi_\alpha$	1,2, MP

(∃5): $\exists\alpha{\sim}\varphi_\alpha\vdash_{Q7}{\sim}\forall\alpha\varphi_\alpha$		
1.	$\exists\alpha{\sim}\varphi_\alpha$	Pre
2.	$\forall\alpha\varphi_\alpha\rightarrow\varphi_\alpha$	∀1
3.	${\sim}\varphi_\alpha\rightarrow{\sim}\forall\alpha\varphi_\alpha$	2, Sf
4.	$\exists\alpha{\sim}\varphi_\alpha\rightarrow{\sim}\forall\alpha\varphi_\alpha$	3, ∃3
5.	${\sim}\forall\alpha\varphi_\alpha$	1,4, MP

۲.۶ اثبات منطق حملی در منطق محمولات یک موضعی

S را یک تابع از $\mathcal{X}\times\mathcal{P}'$ به Fm_Q با ضابطه‌ی زیر بگیرید:

$$S_x\varphi =_{df} S(x,\varphi) \qquad S_x\varphi = \varphi x;\ \varphi\in\mathcal{P} \qquad S_x\pi' = {\sim}S_x\pi$$

T را یک تابع از Fm_C به Fm_Q با ضابطه‌ی زیر بگیرید:

$$T(\pi a\rho) = \forall x(S_x\pi\rightarrow S_x\rho) \qquad T(\pi e\rho) = \forall x(S_x\pi\rightarrow{\sim}S_x\rho)$$

$$T(\pi i\rho) = \forall x(S_x\pi\& S_x\rho) \qquad T(\pi o\rho) = \forall x(S_x\pi\&{\sim}S_x\rho)$$

$$T({\sim}\varphi) = {\sim}T(\varphi)$$

قضیه ۳: برای هر $i\in\{7,\ldots,14\}$ و $\Psi\cup\{\varphi\}\subseteq Fm_C$: $\Psi\vdash_{Ci}\varphi \Longrightarrow \{T(\psi)|\psi\in\Psi\}\vdash_{Qi}T(\varphi)$

با استقراء تنها کافی است که تمام اصول و قواعد در Ci در Qi اثبات شوند.

جدول ۳.۶ اثبات قواعد اصلی منطق حملی

		1	2	3	4	5	6
Q7	$\forall x(Ax\rightarrow Ax)$	I	1,∀I				
Q7	$\forall x(Ax\rightarrow Bx),\forall x(Bx\rightarrow Cx)\vdash\forall x(Ax\rightarrow Cx)$	Pre	Pre	1,∀E	2,∀E	3,4,T	5,∀I
Q7	$\forall x(Ax\rightarrow{\sim}Bx)\vdash\forall x(Bx\rightarrow{\sim}Ax)$	Pre	1,∀E	2,E	3,∀I		
Q7	$\exists x(Ax\& Bx),\forall x(Bx\rightarrow Cx)\vdash\exists x(Ax\& Cx)$	Pre	Pre	1,∀E	3,M	4,M∃	1,5, MP
Q9	$\forall x({\sim}{\sim}Ax\rightarrow Ax)$	I	1,∀I				
Q7	$\forall x(Bx\rightarrow Ax),{\sim}\forall x(Bx\rightarrow Cx)\vdash{\sim}\forall x(Ax\rightarrow Cx)$	Pre	Pre	1,∀E	3,Sf	4,M∀	5,T
Q7	${\sim}\forall x(Ax\rightarrow Bx),\forall x(Cx\rightarrow Bx)\vdash{\sim}\forall x(Ax\rightarrow Cx)$	Pre	Pre	1,∀E	3,Pf	4,M∀	5,T
Q7	${\sim}\exists x(Ax\& Bx)\vdash\forall x(Ax\rightarrow{\sim}Bx)$	Pre	∃I	1,2,T	3,Res	4,∀I	
Q7	$\forall x(Ax\rightarrow{\sim}Bx)\vdash{\sim}\exists x(Ax\& Bx)$	Pre	1,∀E	2,Res	3,∃4		
Q11	${\sim}\forall x(Ax\rightarrow{\sim}Bx)\vdash{\sim}\forall x(Bx\rightarrow{\sim}Ax)$	Pre	C	2,M∀	1,3,T		

Q11	$\exists x(Ax\&\sim Bx)\vdash\sim\forall x(Ax\rightarrow Bx)$	Pre	N_4	2,M∃	1,3,MP	4,∃5
Q13	$\sim\forall x(Ax\rightarrow Bx)\vdash\exists x(Ax\&\sim Bx)$	Pre	1,∀E	N_7	2,3,MP	∃I

تا اینجا حکم را برای Q7,Q9,Q11,Q13 ثابت کردیم. حالا بـرای بقیـه سیسـتم‌هـا کـافی است که فراقضیه‌ی زیر را ثابت کنیم:

(I^*_n): $\vdash_{Q8}\exists\alpha(\sim^n A\alpha\&\sim^n A\alpha)$; $\quad \sim^0\varphi =_{df} \varphi, \quad \sim^{n+1}\varphi =_{df} \sim\sim^n\varphi$

بـا اسـتقراء روی 2n و 2n+1 ثابـت مـی‌کنـیم. گـام‌هـای بنیـادین از اصـول (I*) و (I**) بدست می‌آید. برای گام‌های استقراء نیز تنها کافی است که قاعده‌ی زیر ثابت شود:

$\exists\alpha(\varphi_\alpha\&\varphi_\alpha)\vdash_{Q8}\exists\alpha(\sim\sim\varphi_\alpha\&\sim\sim\varphi_\alpha)$

برای این منظور با (MP) و (M∃) کافی است که ثابت شود که:

$\vdash_{SL^\circ e}(p\&p)\rightarrow(\sim\sim p\&\sim\sim p)$

اثبات ساده است. ابتدا با اعمال (E) روی $\sim p\rightarrow\sim p$ به $p\rightarrow\sim\sim p$ می‌رسیم. سپس بـا (M) بـه $(p\&p)\rightarrow(p\&\sim\sim p)$ مـی‌رسـیم. از طـرف دیگـر بـا (T), (e), (M) بـه $(p\&\sim\sim p)\rightarrow(\sim\sim p\&\sim\sim p)$ می‌رسیم. در نهایت با (T) فرمول مزبور اثبات می‌شود.

مسئله باز ۲: آیا Ciها پاره‌ای از Qiها هستند؟

۳.۶ معناشناسی فرگه‌ای

یک LQ–مدل یک ۴–تایی مرتب $\mathfrak{M}=<\mathcal{A},D,P,I>$ است به طوری که

- $\mathcal{A}$ یک L–ساختار است به شرطی که $<A,\leq>$ کامل (complete) باشد. (یعنی: $\forall B\subseteq A: supB\in A \ \& \ infB\in A$)
- D یک مجموعه‌ی ناتهی به نام دامنه است.
- P یک مجموعه از «توابع از D به A» است.
- I یک تابع به صورت زیر است:

$I: \mathcal{C}\rightarrow D \qquad\qquad I: \mathcal{P}\rightarrow P$

برای هر LQ–مدل $\mathfrak{M}$، تابع $[]_{\mathfrak{M}}: \mathcal{C}\cup\{\bar{o}|o\in D\}\rightarrow D$ را با ضابطه‌ی زیر بگیرید:

$$[\bar{o}]_{\mathfrak{M}} = \begin{cases} I(\bar{o}), & \bar{o}\in\mathcal{C} \\ o, & \bar{o}\notin\mathcal{C}\end{cases}$$

$\mathcal{P}$ را مجموعه‌ی همه‌ی گزاره‌ها (فرمول‌های بدون متغیر آزاد) در Fm_Q بگیرید، تنها با این تفاوت که $\mathcal{C}\cup\{\bar{o}|o\in D\}$ جایگزین $\mathcal{C}$ شود.

برای هر LQ-مدل $\mathfrak{M}$ یک LQ-ارزشدهی یک تابع $V_{\mathfrak{M}}: \mathcal{P}\rightarrow A$ است به طوری که:

- $V_{\mathfrak{M}}(c)=c; \quad c\in\{t,f\} \qquad V_{\mathfrak{M}}(\varphi\star\psi)=V_{\mathfrak{M}}(\varphi)\star V_{\mathfrak{M}}(\psi); \quad \star\in\{\rightarrow,\&\}$
- $V_{\mathfrak{M}}(\varphi\bar{o})=I(\varphi)([\bar{o}]_{\mathfrak{M}})$
- $V_{\mathfrak{M}}(\forall\alpha\varphi_\alpha)=\inf\{V_{\mathfrak{M}}(\varphi_{\bar{o}}) \mid o=[\bar{o}]_M, o\in D\}$
- $V_{\mathfrak{M}}(\exists\alpha\varphi_\alpha)=\sup\{V_{\mathfrak{M}}(\varphi_{\bar{o}}) \mid o=[\bar{o}]_M, o\in D\}$

فرض کنید فرمول φ دقیقاً شامل متغیرهای فردی $\alpha_1,...,\alpha_n$ باشد به طوری که φ شامل هیچ $\forall\alpha_i$ و $\exists\alpha_j$ نباشد. $Cl(\varphi) =_{df} \forall\alpha_1...\forall\alpha_n\varphi$

در نهایت تعریف استدلال معتبر:

- $\mathfrak{M}\vDash\varphi \iff_{df} t\leq V_{\mathfrak{M}}(Cl(\varphi))$ (صدق در مدل)
- $\Psi\vDash\varphi \iff_{df} \forall\mathfrak{M}: \forall\psi\in\Psi, \mathfrak{M}\vDash\psi \Rightarrow \mathfrak{M}\vDash\varphi$

یک LQ-مدل یک LQa-مدل است اگر و تنها اگر دارای دو ویژگی زیر باشد:

(R_{I*}): $t\leq\sup\{p(o)\&p(o) \mid p\in P, o\in D\}$

(R_{I**}): $t\leq\sup\{\sim p(o)\&\sim p(o) \mid p\in P, o\in D\}$

توجه کنید که اگر A متناهی باشد، این دو ویژگی به صورت زیر ساده می‌شوند:

$\forall p\in P\exists o\in D: \quad t\leq p(o)\&p(o),\ t\leq\sim p(o)\&\sim p(o)$

قضیه ۴: برای هر $L\in\{Q7,\ldots,Q14\}$: $\Gamma\vdash_{AL}\varphi \Rightarrow \Gamma\vDash_L\varphi$
به سادگی به صورت استاندارد ثابت خواهد شد و نکته‌ی فنی خاصی ندارد.

۴.۶ عدم‌تعهد وجودی به نام‌های عام در C14

ابتدا یک Q14-مدل معرفی می‌کنیم. D را مجموعه‌ی همه‌ی موجودات بگیرید. بنابراین در این مدل نسب به اسامی خاص تعهد وجودی داریم. اما نشان می‌دهیم که در این مدل هم‌چنان تعهد وجودی نسبت به نام‌های عام نداریم. توجه کنید که تعبیر سورها وجودی است. مانند منطق کلاسیک و نه منطق آزاد.

$\mathcal{A}$ را ساختار حاصل از معناشناسی چهارارزشی منطق ربط KR (معناشناسی چرچ) بگیرید. (فلاحی ۱۳۹۱, ۲۴۹-۲۵۳)

$$A=\{\bot,f,t,\top\},\ \bot\leq f\leq\top,\ \bot\leq t\leq\top$$

	~
⊥	T
f	t
t	f
T	⊥

→	⊥	f	t	T
⊥	T	T	T	T
f	⊥	t	⊥	T
t	⊥	f	t	T
T	⊥	⊥	⊥	T

&	⊥	f	t	T
⊥	⊥	⊥	⊥	⊥
f	⊥	T	f	T
t	⊥	f	t	T
T	⊥	T	T	T

توجه کنید که $t\leq f\&f=\top$ است اما $t\leq f$ نیست.

A، B و a را به ترتیب محمول‌های «انسان»، «دیو» و نام «عامر» بگیرید. بنابراین $\exists xBx$ شهوداً تعبیر می‌شود که «دیو وجود دارد». حالا قرار دهید:

- $I(A)=\mathbb{A}\ I(a)=\mathbb{a}$ $\qquad I(B)=\mathbb{B}$
- $\mathbb{A}(o)=\begin{cases}\top, & o\in\{\text{Humans}\}\\ \bot, & o\notin\{\text{Humans}\}\end{cases}$ $\qquad \mathbb{B}(o)=\begin{cases}f, & o=\mathbb{a}\\ \bot, & o\neq\mathbb{a}\end{cases}$

در این مدل $V_{\mathfrak{M}}(\exists xBx)=f\nless t$. بنابراین در این مدل:

- گزاره‌های «بعضی دیوها دیو هستند» و «بعضی دیوها انسان هستند» ارزش صدق T می‌گیرند. در حالی که
- گزاره‌های «دیو وجود دارد» و «عامر دیو است» ارزش کذب f می‌گیرند.

مسئله باز ۳: دقیقاً چند منطق ۴ ارزشی $IFL^{\circ}e\subseteq L$ با زبان $\{\rightarrow,\&,f,t\}$ وجود دارد که $\nvdash_{ALQa}\exists xAx$؟

۵.۶ افزودن محمول وجود مرتبه اول

!E را یک محمول نشانه‌ی خاص بگیرید. یعنی قرار دهید $E!\in\mathcal{P}$. !E را شهوداً محمول وجود تعبیر کنید. بنابراین جمله‌های مهمله‌ی «انسان وجود دارد» و «انسان موجود است» را به یکی از دو صورت زیر می‌توان ترجمه کرد:

۱. هر انسان موجود است: $AaE!,\ \forall x(Ax\rightarrow E!x)$

۲. بعضی انسان‌ها موجود هستند: $AiE!,\ \exists x(Ax\&E!x)$

حالا اصل «هر چیزی (شی‌ای) موجود است» را به صورت زیر اضافه می‌کنیم:

- $AQ15 =_{df} AQ14 + (E!): \forall\alpha E!\alpha$

- یک Q14-مدل یک Q15-مدل است اگر و تنها اگر $\forall o\in D: t\leq E!o$

بنابراین در Q15 ما صریحاً نسبت به نام‌های خاص تعهد وجودی داریم. حالا برای این‌که نشان دهیم C14 فاقد تعهد وجودی نسبت به نام‌های عام است، کافی است که نشان دهیم: $\nvdash_{Q15}\exists x(Bx\&E!x)$

همان مدل زیرقسمت قبل را در نظر بگیرید به علاوه اینکه:

- $I(E!)=\mathbb{E}$, $\quad \mathbb{E}(o)=\begin{cases} t, & o=\mathbb{a} \\ \top, & o\neq \mathbb{a}\end{cases}$

داریم: $\sup\{\bot\&\top, f\&t\}=f$. بنابراین $\exists x(Bx\&E!x)$ در Q15 اثبات‌ناپذیر است.

۶.۶ عدم‌تعهد به عدم‌نام‌های عام

در مدل گفته شده برای Q15، هر دو فرمول $\exists x{\sim}E!x$ و $\exists x({\sim}E!x\&E!x)$ ارزش کذب f دارند. بنابراین تمام سیستم‌های گفته شده در این مقاله نه به وجود نام‌های عام و نه به عدم‌وجود نام‌های عام تعهد دارند.

۷.۶ منطق‌های نیمه‌خطی

مهم‌ترین ویژگی منطق‌های فازی «نیمه‌خطی» (semilinear) بودن آن است. یک منطق را نیمه‌خطی می‌نامند اگر و تنها اگر نسبت به یک زنجیر (chain) به طور قوی صحیح و تمام باشد. در هر زنجیر $<A,\leq>$ داریم: $\forall x\in A: (x\leq y \text{ or } y\leq x)$

قضیه ۵: L را یک گسترش نیمه‌خطی از Q8 بگیرید: $\vdash_L\exists xAx$

در (Cintula and Noguera 2010) ثابت شده است که L دارای ویژگی زیر است:

$$(SLP): \Gamma,\varphi\to\psi\vdash_L\chi \text{ and } \Gamma,\psi\to\varphi\vdash_L\chi \;\Rightarrow\; \Gamma\vdash_L\chi$$

بنابراین تنها کافی است ثابت شود که: $\exists xAx\to t\vdash_L\exists xAx$

1.	$\exists xAx\to t$	Pre	7.	$Ax\to(t\to Ax)$	6, E
2.	$Ax\to\exists xAx$	∃1	8.	$(Ax\&t)\to Ax$	7, Res
3.	$(\exists xAx\to t)\to(Ax\to t)$	2, Sf	9.	$(Ax\&Ax)\to Ax$	5,8, T
4.	$Ax\to t$	1,3, MP	10.	$\exists x(Ax\&Ax)\to\exists xAx$	9, M∃
5.	$(Ax\&Ax)\to(Ax\&t)$	4, M	11.	$\exists x(Ax\&Ax)$	I*
6.	$t\to(Ax\to Ax)$	I, R_t	12.	$\exists xAx$	10,11, MP

بنابراین هر کدام از گسترش‌های نیمه‌خطی Q8 به نام‌های عام تعهد وجودی دارند.

۷. نتیجه‌گیری

بعضی از منطق‌های غیرکلاسیک برای بررسی و تحلیل منطق سنتی و قیاسات ارسطویی نسبت به منطق کلاسیک کارآمدتر هستند. ضمن اینکه دیگر نیازی به بسیاری از قواعد کلاسیک که تبعات فلسفی فراوانی در نحو و معناشناسی دارند، نخواهیم داشت. به عنوان مثال نشان دادیم که برای اثبات قیاس‌های حملی ارسطویی نه نیازی به برهان خلف، نه نیازی به قواعد $\sim\sim\varphi\vdash\varphi$ و $\varphi,\sim\varphi\vdash\psi$، و نه نیازی به قواعد فرض داریم.

در این مقاله، سیستم اصل موضوعی C8 برای تمام ۲۴ ضرب قوی و ضعیف قیاس‌های ارسطویی به علاوه اصل «هر الف الف است.» و قواعد نقض‌المحمول سالبه‌ها معرفی شد. C8 تنها شامل ضروب Barbara و Datisi بوده و صرفاً با «۲ اصل» و «۵ قاعده‌ی یک مقدمه‌ای» اصل‌بندی شد. نشان دادیم که C10 به طور کامل شامل تمام قواعد عکس و نقض در منطق مظفر و C12 شامل مربع تقابل اما فاقد حذف نقض مضاعف است. قوی‌ترین منطق حملی این مقاله یعنی C14 نیز، فاقد قواعد غیرربطی منطق کلاسیک است.

در نهایت، با بهره‌گیری از منطق گزاره‌های IFLe و معناشناسی ۴ ارزشی منطق ربطی–کلاسیک قوی KR، عدم تعهد وجودی نسبت به نام‌های عام در C14 نشان داده شد. این ادعا با همان «تعبیر وجودی از سورها»، «تعهد وجودی نسبت به نام‌های خاص» و «ترجمه‌ی استاندارد محصورات اربعه» در منطق فرگه ثابت شد.

در مقاله‌ی بعدی با استفاده از

۱. منطق مرتبه اول بر پایه IFLe بدون اصول (I*) و (I**) و

۲. تعمیم ترجمه‌های غیراستاندارد محصورات اربعه در (فلاحی ۱۳۸۹)

بعضی توانایی‌های دیگر IFLe را برای تحلیل منطق حملی نشان می‌دهیم.

کتاب‌نامه

حیدری, داود. ۱۳۸۹. "نظریهٔ قیاس ارسطویی از دیدگاه لوکاسیه‌ویچ." مجله پژوهش های فلسفی دانشگاه تبریز ۴ (۲۱۶): ۱–۲۹. https://philosophy.tabrizu.ac.ir/article_360.html.

فلاحی, اسدالله. ۱۳۸۷. "قاعدهٔ فرعیه در منطق جدید،گزارشی انتقادی از نزاع پنجاه سالهٔ منطق قدیم و جدید دربارهٔ پیش‌فرض وجودی در ایران." آینه معرفت, no. 15: 41–66.

فلاحی, اسدالله. ۱۳۸۹. "منطق‌های مبتنی بر عکس نقیض و نقض محمول." منطق‌پژوهی ۱ (۱): ۱۱۳–۱۴۲.

فلاحی, اسدالله. ۱۳۹۱. آشنایی با منطق ربط. تهران: موسسه پژوهشی حکمت و فلسفه ایران.

نبوی, لطف الله. ۱۳۷۶. "منطق حملی بر اساس ضرب Ferio." مدرس علوم انسانی, no. 5.

نبوی, لطف الله. ۱۳۸۵. تراز اندیشه. تهران: انتشارات بصیرت.

Cintula, Petr, and Carles Noguera. 2010. "Implicational (Semilinear) Logics I: A New Hierarchy." Archive for Mathematical Logic 49 (4): 417–46. https://doi.org/10.1007/s00153-010-0178-7.

Galatos, Nikolaos, Peter Jipsen, Tomasz Kowalski, and Hiroakira Ono. 2007. Residuated Lattices: An Algebraic Glimpse at Substructural Logics. Vol. 151. Elsevier.

Galatos, Nikolaos, and Hiroakira Ono. 2010. "Cut Elimination and Strong Separation for Substructural Logics: An Algebraic Approach." Annals of Pure and Applied Logic 161 (9): 1097–1133. https://doi.org/10.1016/j.apal.2010.01.003.

Kulicki, Piotr. 2020. "Aristotle's Syllogistic as a Deductive System." Axioms 9 (2): 56. https://doi.org/10.3390/AXIOMS9020056.

Lukasiewicz, J. 1957. Aristotle's Syllogistic from the Standpoint of Modern Formal Logic. 2nd ed. Oxford University Press. https://books.google.com/books?id=6PWXyQEACAAJ.