Journal of Financial Management Strategy\ Vol. 9, No. 33, Summer 2021\ pp. 108-134

Application of Finite Difference Method in Computing of Risk Sensitivity Parameters for European Option (A Case Study of Tehran Stock Exchange)

Research Paper

Abbas Ebrahimi[1], Rafi Hasani Moghadam[2], Javad Ghasemian[3]

Received: 2019/28/12 Accepted: 2020/17/06

Abstract

The purpose of this study is to calculate the risk sensitivity parameters (Greeks) for the European Option by using finite difference method. There are several ways to quantify these risks, each of which is of its own advantages and disadvantages. The most important of these methods are: 1-Analytical method (solving Black Scholes partial differential equation) 2-Monte Carlo simulation method 3-Network methods 4-Finite difference method, calculating the risk sensitivity parameters in finite difference method. The complexity is less complex and the computation time is relatively low, and as the sample increases and the oscillation increases, the parameters are not disturbed. In this study, while introducing finite difference method, 10 top stock companies in 2019 were selected and the value of European trading authority and its risk sensitivity parameters were calculated by MATLAB software. Finally, numerical methods show that the results of finite difference method for calculating Option value and risk sensitivity parameters are approximations of these variables obtained from analytical method (exact method).

Keywords: Sensitivity Parameters, Finite Difference, European Option, Analytical Method, Option Value

JEL Classification: C02, G12, G32

1. M.A Student in Financial Mathematics, Faculty of Mathematics and Computer Science, Damghan University, Iran, Abbasebrahimi1374@gmail.com

2. Assistant Professor of Economics, Faculty of Humanities, Damghan University, Iran, (Corresponding Author), hmoghadam@du.ac.ir.

3. Assistant Professor of Statistics, Faculty of Mathematics and Computer Science, Damghan University, Iran, ghasemian@du.ac.ir.

DOI: 10.22051/jfm.2020.29582.2285

فصلنامه راهبرد مدیریت مالی/ سال نهم، شماره سی و سوم، تابستان ۱۴۰۰/ صفحات ۱۳۴-۱۰۸

کاربرد روش تفاضلات متناهی در محاسبه پارامترهای حساسیت ریسک برای قرارداد اختیار معامله اروپایی

مقاله پژوهشی

عباس ابراهیمی[۱]، رفیع حسنی مقدم[۲]، جواد قاسمیان[۳]

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۰/۰۷ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۳/۲۸

چکیده

این پژوهش با هدف محاسبه پارامترهای حساسیت ریسک (یونانی‌ها)، برای قرارداد اختیار معامله اروپایی انجام شده است. با این توضیح که منظور از پارامترهای حساسیت ریسک، حساسیت قیمتی اختیار معامله نسبت به پارامترهای اثرگذار بر قیمت سهام است که روش‌های مختلفی جهت کمی کردن آنها ارائه شده و مورد استفاده قرار گرفته که هر یک از آنها مزایا و معایبی دارد. در این تحقیق از روش تفاضلات متناهی برای این منظور استفاده شده که نسبت به روش‌های دیگر از پیچیدگی کمتری برخوردار است و زمان محاسبه آن به نسبت کم می‌باشد. همچنین، با افزایش نمونه و افزایش نوسان، پارامترها دچار اختلال نمی‌شوند. علاوه‌بر این، ۱۰ شرکت برتر بورسی در سال ۱۳۹۷ انتخاب و ارزش اختیار معامله اروپایی و پارامترهای حساسیت ریسک مربوط به آنها توسط نرم افزار MATLAB محاسبه شده است. نتایج نشان داد محاسبه ارزش اختیار معامله و پارامترهای حساسیت ریسک با روش تفاضلات متناهی تقریب مناسبی از آنها به‌دست می‌دهد.

واژگان کلیدی: پارامترهای حساسیت ریسک، اختیار معامله اروپایی، روش تفاضلات متناهی.

طبقه‌بندی موضوعی: G32 ،G12 ،C02.

---

۱. دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی مالی، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه دامغان، ایران.
Abbasebrahimi1374@gmail.com
۲. استادیار اقتصاد، دانشکده علوم انسانی، دانشگاه دامغان، ایران. (نویسنده مسئول).
hmoghadam@du.ac.ir
۳. استادیار آمار، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه دامغان، ایران.
ghasemian@du.ac.ir

DOI: 10.22051/jfm.2020.29582.2285

مقدمه

طی چند سال اخیر کاربرد ابزارهای مشتقه در بازار اوراق بهادار ایران افزایش یافته و یکی از مهم‌ترین آنها، قرارداد اختیار معامله[1] سهام است. هرچند قرارداد اختیار معامله در بازار سرمایه کاربردهای وسیعی دارد. لیکن با ریسک‌هایی نیز مواجه است که مدیریت آن را ضروری ساخته است. در این بین، پارامترهای حسایت ریسک یا یونانی‌ها[2] یکی از مهم‌ترین روش‌های پوشش ریسک و زمان خرید و فروش اختیار معامله است که اطلاعات مهمی درباره ریسک‌های قرارداد اختیار معامله ارائه می‌دهد (احمدی چهره برق، ۱۳۹۷). بنابراین، برای اتخاذ یک موقعیت مناسب در اختیار معامله، لازم است تمام متغیرهای موثر بر قیمت درنظر گرفته شود و با توجه به میزان حساسیت اختیار معامله به هر یک از متغیرها، راهبرد مناسبی برای پوشش ریسک اتخاذ شود. مخصوصاً، در بازارهایی که نوسان‌پذیری قیمت در آنها زیاد است و ارزش اختیارات به سرعت در حال تغییر است، مدیران ریسک باید ارزش اختیار معامله را به‌طور منظم بازنگری و راهبردهای خود را با ملاحظه این تغییرات به روز کنند. زیرا ممکن است اختیار معامله‌ای که زمانی بسیار سودآور است در وقت دیگری زیان‌ده باشد (پیش بهار و همکاران، ۱۳۹۷). در این راستا، روش‌های مختلفی نیز برای کمی کردن ریسک‌ها ارائه شده که مهم‌ترین آنها عبارتند از:

۱. روش تحلیلی[3] (حل معادله دیفرانسیل جزئی بلک–شولز[4] و محاسبه پارامترهای حساسیت ریسک از روی آن): این روش در برخی از مدل‌ها بسیار زمان‌بر و پیچیده است.

۲. روش شبیه‌سازی مونت کارلو[5]: این روش در محاسبه پارامترهای حساسیت ریسک زمانی که تعداد نمونه بسیار زیاد باشد یا در مدل‌های غیرخطی پیچیده مالی همراه با خطا و نوفه[6] است.

۳. روش‌های شبکه‌ای[7]: هرچند محاسبه ارزش اختیار معامله و پارامترهای حساسیت ریسک در این روش ارائه شده است. اما چالش عمده این روش آن است که با افزایش نوسان، نتایج دچار اختلال و خطای در محاسبه می‌شوند.

۴. روش تفاضلات متناهی[8]: محاسبه پارامترهای حساسیت ریسک در این روش نسبت به روش‌های دیگر از پیچیدگی کمتری برخوردار است و زمان محاسبه آن به نسبت کم می‌باشد. همچنین با افزایش نمونه و افزایش نوسان، پارامترها دچار اختلال نمی‌شوند.

بنابراین، با توجه این‌که پژوهش حاضر به دنبال ارائه یک روش کم هزینه و نسبتاً سریع جهت محاسبه پارامترهای حساسیت ریسک اختیار معامله اروپایی برای بازار اوراق بهادار ایران است. از سویی، در مطالعات

---

1. Option
2. Greeks
3. Analytic Models
4. Black-Scholes
5. Monte – Carlo Simulation
6. Noise
7. Lattice Models
8. Finite Difference Method

داخلی از روش تفاضلات متناهی که از چنین مزایایی برخوردار است استفاده نشده است. در این تحقیق، ۱۰ شرکت برتر بورسی سال ۱۳۹۷ انتخاب و از روش تفاضلات متناهی برای محاسبه پارامترهای حساسیت ریسک قرارداد اختیار معامله اروپایی آنها استفاده شده است. برای این منظور، در ادامه، پارامترهای حساسیت ریسک برای اختیار معامله اروپایی (شامل دلتا، گاما، تتا و وگا) معرفی و کاربردهای آنها بیان شده است. سپس، این پارامترها برای شرکت‌های مذکور محاسبه و در نهایت ضمن تحلیل مالی این پارامترها، مشخص می‌شود که نتایج به‌دست آمده از روش تفاضلات متناهی جهت محاسبه ارزش اختیار معامله و پارامترهای حساسیت ریسک تقریب مناسب‌تری از متغیرهای مذکور به‌دست آمده از روش تحلیلی (حل معادله بلک-شولز) ارائه داده است.

مبانی نظری

قرارداد اختیار معامله یکی از ابزارهای مشتقه مالی است که در کنترل و مدیریت ریسک بنگاه‌های مالی و اقتصادی اهمیت بسزایی دارد. منظور از قرارداد اختیار معامله نیز قراردادی بین دو طرف یعنی خریدار و فروشنده است که خریدار اختیار معامله حق خرید یا فروش دارایی پایه قرارداد را به قیمت معین (قیمت توافقی) در زمان مشخص در آینده (سررسید یا تاریخ انقضا) از فروشنده خریداری می‌کند. دارنده یک اختیار معامله حق دارد در صورت لزوم قرارداد را به اجرا بگذارد یا از آن صرف‌نظر نماید. در قرارداد اختیار معامله نیز مانند سایر قراردادها، هر طرف امتیازی به طرف مقابل اعطا می‌کند. خریدار به فروشنده مبلغی با عنوان حق صرف پرداخت می‌کند که در واقع همان قیمت اختیار معامله است. فروشنده نیز حق خرید یا فروش دارایی مذکور را به قیمتی معین به خریدار اعطا می‌نماید (کواک[1]، ۲۰۱۵). مهم‌ترین نکته در بازار اختیارات این است که دارنده اختیار معامله، حق اجرای قرارداد را دارد (ملزم نیست)؛ اما اگر وضعیت بازار چنان باشد که اجرا نکردن قرارداد به نفع خریدار باشد، خریدار هیچ تعهدی به اجرای معامله ندارد و می‌تواند قرارداد را نادیده بگیرد. در این صورت تنها زیان خریدار به مبلغی برمی‌گردد که بابت قیمت اختیار معامله پرداخت کرده است (کوسوفسکی و نفتکی[2]، ۲۰۱۵). به‌طور کلی، حق اختیار معامله را از نظر نوع قرارداد می‌توان به دو دسته تقسیم کرد:

۱. اختیار معامله خرید[3]: در واقع این حق (و نه الزام) را به دارنده اختیار معامله خرید آن می‌دهد که دارایی موضوع قرارداد را با قیمت معین و در تاریخ مشخص یا قبل از آن بخرد.
۲. اختیار معامله فروش[4]: یک اختیار معامله فروش به دارنده آن حق می‌دهد که دارایی موضوع قرارداد را با قیمت معین و در تاریخ مشخصی و یا قبل از آن بفروشد. قیمتی را که در قرارداد ذکر

---

1. Kwok
2. Kosowski & Neftci
3. Call Option
4. Put Option

می‌شود، قیمت توافقی یا قیمت اعمال و تاریخ ذکر شده در قرارداد را اصطلاحاً تاریخ انقضا یا سررسید اختیار معامله می‌گویند (بلایس[1]، ۲۰۱۴). اختیار معامله خرید یا اختیار معامله فروش از منظر سبک اعمال، هر کدام به دو حالت اروپایی و آمریکایی تقسیم می‌شوند. در قرارداد اختیار اروپایی، دارنده اختیار تنها می‌تواند از حق خود مبنی بر خرید یا فروش دارایی موضوع قرارداد در تاریخ انقضای قرارداد استفاده کند. در حالی که در قراداد اختیار معامله آمریکایی دارنده اختیار می‌تواند در هر زمان تا زمان سررسید از حق خود استفاده نماید (هال[2]، ۱۳۸۴).

قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله یکی از مباحث چالش برانگیز و اساسی علوم محاسباتی است و برای آن روش‌های مختلفی مطرح شده که متداول‌ترین آنها عبارتند از:

۱. مدل‌های تحلیلی که شامل حل یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی با شرایط مرزی است. رایج‌ترین این مدل‌ها، مدل بلک–شولز است که یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی سهموی است. اما، هرچند روش تحلیلی روش دقیقی است و پارامترها را به صورت دقیق محاسبه می‌کند، ولی حل این معادلات با پیچیدگی‌های زیاد و زمان محاسبه بالایی همراه است (کواک، ۲۰۱۵).

۲. مدل‌های شبکه‌ای که شامل مدل قیمت‌گذاری دو جمله‌ای[3] و سه جمله‌ای[4] است. این مدل‌ها به‌صورت شاخه‌های یک درخت هستند و مسیرهای مختلفی که سهام در طی عمر اختیار معامله احتمال دارد طی کند را نشان می‌دهند. نقطه آغازین مدل شبکه‌ای، قیمت دارایی پایه در زمان صفر است، هرچند قیمت‌گذاری به روش مدل‌های شبکه‌ای سریع و از پیچیدگی کمی برخوردار است. اما با افزایش نوسان (σ)، فاصله نقاط در درخت چند جمله‌ای افزایش می‌یابد. این ویژگی هنگامی که یک بازار سهام دامنه نوسانات بالایی داشته باشد نتایج را با اختلال مواجه می‌کند (آچینگر و بیندر[5]، ۲۰۱۳)

۳. شبیه‌سازی مونت-کارلو که یک الگوریتم محاسباتی است که از نمونه‌گیری تصادفی برای نتایج استفاده می‌کند. این روش در مطالعه سیستم‌هایی که در آن تعداد زیادی متغیر وجود دارد مفید است. در این روش قیمت‌های ممکن سهام در آینده شبیه‌سازی شده و به‌وسیله آنها ارزش اختیار معامله تعیین می‌شود. یکی از معایب این روش عدم استفاده برای مدل‌های غیرخطی است (ویلموت[6]، ۲۰۰۷).

۴. تفضلات متناهی که در آن مشتق توابع با تفاضلات معادل آنها تقریب زده می‌شود. روش مذکور با استفاده از سری تیلور[7] به حل عددی معادله دیفرانسیل بلک–شولز می‌پردازد.

---

[1]. Blyth
[2]. Hall
[3]. Binomial Models
[4]. Trinomial Models
[5]. Aichinger & Binder
[6]. Wilmott
[7]. Taylor Series

مدل بلک–شولز در نحوه قیمت‌گذاری و پوشش ریسک اختیار معامله در مهندسی مالی نقش اساسی و محوری دارد. اساس مدل بلک–شولز این است که نوسانات قیمت سهام در طول زمان‌های آتی چگونه خواهد بود. فرض اساسی مدل نیز این است که قیمت سهام از گام تصادفی[1] پیروی می‌کند و تغییرات قیمت سهام در یک دوره زمانی کوتاه‌مدت دارای توزیع لاگ نرمال[2] می‌باشد. در مدل بلک–شولز فرایند تغییرات قیمت دارایی پایه (سهام) از مدل حرکت براونی هندسی[3] تبعیت می‌کند. حرکت براونی فاقد حافظه است و گذشته خود را فراموش می‌کند، به همین دلیل مدل بلک–شولز با رفتار بازارهای مالی ایده‌آل مطابقت دارد (کواک، ۲۰۱۵). معادله دیفرانسیل جزئی بلک–شولز به‌صورت زیر است:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+rS\frac{\partial V}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2 s^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}-rV=0 \qquad \text{(۱) رابطه}$$

که در آن: V ارزش اختیار معامله، t زمان، σ مقدار نوسانات، S ارزش دارایی پایه (سهام) و r نرخ بهره بدون ریسک است (ویلموت، ۲۰۰۷)

با تعیین شرایط مرزی متناسب با اختیار فروش و خرید اروپایی می‌توان معادله بلک–شولز را به‌صورت تحلیلی حل نمود که جواب آن برای هر یک از اختیارهای خرید و فروش به صورت زیر است:

$$\mathbf{C=SN(d_1)-K_e{}^{-rT}N(d_2)} \qquad \text{(۲) رابطه}$$

$$\mathbf{P=K_e{}^{-rT}N(d_2)-SN(-d_1)} \qquad \text{(۳) رابطه}$$

$$\mathbf{d_1}=\frac{ln\left[\frac{S}{K}\right]+\left[r\frac{\sigma^2}{2}\right]\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \qquad \text{(۴) رابطه}$$

$$\mathbf{d_2}=\frac{ln\left[\frac{S}{K}\right]+\left[r-\frac{\sigma^2}{2}\right]\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}=\mathbf{d_1}-\sigma\sqrt{\tau} \qquad \text{(۵) رابطه}$$

که در آن τ=T-t و N(0) تابع چگالی تجمعی توزیع نرمال است (بلایس، ۲۰۱۴).

همان‌طور که بیان شد پارامترهای حساسیت ریسک یا یونانی‌ها عبارت از حساسیت قیمتی یا ارزشی اختیار معامله نسبت به پارامترهای اثرگذار بر قیمت دارایی پایه (سهام) (ویلموت، ۲۰۰۷) که این پارامترها در ادبیات مالی عبارتند از دلتا (Δ)، گاما (Γ)، وگا (υ)، تتا (θ) و رو (ρ) که در ادامه یکایک آنها به اختصار تشریح شده‌اند.

دلتا: یک اختیار معامله به‌عنوان نرخ تغییرات ارزش اختیار معامله به میزان تغییرات ارزش دارایی پایه تعریف می‌شود.

$$\boldsymbol{\Delta}=\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{S}} \qquad \text{(۶) رابطه}$$

که در آن V ارزش اختیار معامله و S ارزش دارایی پایه است. دلتا عدد ثابتی نیست. بلکه با تغییر در هر یک از عوامل تأثیرگذار اختیار معامله و یا نزدیک شدن به زمان سررسید، دلتا تغییر می‌کند. به‌عبارتی دلتا یعنی با تغییر در ارزش دارایی پایه، ارزش اختیار چقدر تغییر خواهد کرد. دلتای اختیار خرید عددی

---
[1]. Random Walk
[2]. Log-Normal Distribution
[3]. Geometric Brownian Motion

بین ۰ و ۱ است. زیرا ارزش اختیار خرید و ارزش دارایی پایه رابطه مستقیم دارند. یعنی با افزایش ارزش دارایی پایه ارزش اختیار خرید افزایش می‌یابد و برعکس. دلتای اختیار فروش عددی بین ۰ و ۱- است. زیرا اختیار فروش با ارزش دارایی پایه رابطه عکس دارند. با استفاده از دلتا می‌توان به پوشش ریسک پرداخت. به این صورت که تعداد اختیار معامله‌های لازم برای پوشش ریسک یک موقعیت تحت آن اختیار معامله را تعیین نمود (چودری[1]، ۲۰۱۳). دلتای اختیارهای معامله به روش تحلیلی به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\boldsymbol{\Delta_C = N(d_1)}$$ رابطه (۷)

$$\boldsymbol{\Delta_P = N(d_1) - 1}$$ رابطه (۸)

گاما: یک اختیار معامله به عنوان نرخ تغییر دلتا نسبت به نرخ تغییر قیمت دارایی پایه تعریف می‌شود.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \Gamma$$ رابطه (۹)

که در آن V ارزش اختیار معامله و S ارزش دارایی پایه است. گاما معیاری برای محاسبه افزایش یا کاهش دلتا به ازای یک واحد تغییر در قیمت دارایی پایه با فرض ثابت بودن دیگر عوامل است. گاما این امکان را فراهم می‌کند که تخمین دقیقی از قیمت اختیار معامله داده شود. زمانی که قیمت دارایی پایه افزایش یا کاهش می‌یابد (ویلموت، ۲۰۰۷). در واقع گاما حساسیت دلتا را نسبت به تغییرات در ارزش دارایی پایه بررسی می‌کند. پوشش ریسک با استفاده از پارامتر دلتا زمانی مناسب است که تغییرات در ارزش دارایی پایه بزرگ نباشد. اما وقتی تغییرات ارزش دارایی پایه بزرگ باشد، پوشش ریسک با استفاده از پارامتر گاما مناسب است. مقدار گاما همواره مثبت است و با نزدیک شدن ارزش دارایی پایه به قیمت اعمال، گاما افزایش می‌یابد و با دور شدن ارزش دارایی پایه از قیمت اعمال گاما کاهش می‌یابد (چودری، ۲۰۱۳). گامای اختیار خرید و فروش برابرند و از روش تحلیلی به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\boldsymbol{\tau = \frac{1}{S\sigma\sqrt{\tau}} \acute{N}(d_1)}$$ رابطه (۱۰)

تتا: یک اختیار معامله به عنوان نرخ تغییر ارزش اختیار معامله نسبت به گذشت زمان تا سررسید اختیار معامله تعریف می‌شود. به‌عبارت دیگر، تتا معیاری برای محاسبه حساسیت قیمت اختیار معامله نسبت به تغییر مدت زمان باقی‌مانده تا سررسید اختیار معامله است.

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \theta$$ رابطه (۱۱)

که در آن V ارزش اختیار معامله و t نشان‌دهنده گذر زمان است. مقدار تتا برای اختیارهای خرید و فروش با دارایی پایه یکسان، قیمت توافقی و سررسید یکسان، متفاوت است؛ چون اختیارهای خرید و فروش ارزش زمانی متفاوتی دارند. مقدار تتا برای اختیارهای خرید منفی است. اما علامت تتا برای اختیارهای فروش چندان مشخص نیست (هال، ۱۳۸۴). به بیان دیگر، به موازات افزایش مقدار زمان باقی‌مانده تا سررسید، واریانس بازده دارایی پایه افزایش می‌یابد و این موضوع موجب خواهد شد که قیمت اختیار فروش و قیمت اختیار خرید بیشتر شود. دوم آن که به موازات افزایش مدت زمان باقی‌مانده تا سررسید، هزینه

[1]. Choudhry

اجرای اختیارات، یعنی ارزش فعلی قیمت توافق کاهش می‌یابد. لذا قیمت اختیار خرید افزایش و قیمت اختیار فروش کاهش خواهد یافت (نیسی و سلمانی قرائی، ۱۳۹۷). تتای اختیارهای معامله از روش تحلیلی به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\theta_C = -\frac{S\sigma}{2\sqrt{\tau}}\acute{N}(d_1) - rK_e{}^{-rT}N(d_2)$$ رابطه (۱۲)

$$\theta_P = -\frac{S\sigma}{2\sqrt{\tau}}\acute{N}(d_1) + rK_e{}^{-rT}N(-d_2)$$ رابطه (۱۳)

وگا: یک اختیار معامله به‌عنوان نرخ تغییر ارزش اختیار معامله نسبت به نوسانات قیمت سهام تعریف می‌شود. در مدل بلک–شولز، نوسان‌پذیری قیمت دارایی پایه ثابت درنظر گرفته می‌شود. اما در واقعیت نوسان دارایی پایه در طول زمان تغییر می‌کند. برخی اوقات ممکن است دانستن چگونگی واکنش قیمت اختیار به تغییرات مقدار نوسان‌پذیری دارای اهمیت باشد. وگا معیاری برای محاسبه حساسیت قیمت اختیارات نسبت به تغییر در نوسانات قیمت قیمت‌ها در بازار است (هال، ۱۳۸۴).

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} = \boldsymbol{v}$$ رابطه (۱۴)

که در آن V ارزش اختیار معامله و σ نوسانات ارزش دارایی پایه است. به بیان دیگر، وگا بیانگر این است که در اثر یک افزایش یا کاهش در سطح نوسانات، ارزش اختیار معامله چه مقدار افزایش یا کاهش خواهد داشت. اگر میزان وگا زیاد باشد، ارزش اختیار معامله به کوچکترین تغییر در نوسانات حساس می‌باشد. اما اگر وگا مقداری کوچک باشد، تغییر در نوسانات تأثیر کمی بر ارزش اختیار معامله خواهد داشت. وگای اختیار معامله همواره مثبت است و با نزدیک شدن ارزش دارایی پایه به قیمت اعمال، وگا افزایش و با دور شدن از قیمت اعمال کاهش می‌یابد (هال، ۱۳۸۴). وگا اختیار و فروش برابرند و از روش تحلیلی به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$v = S\sqrt{\tau}.\acute{N}(d_1)$$ رابطه (۱۵)

رو: یک اختیار معامله به عنوان نرخ تغییر ارزش اختیار معامله نسبت به نرخ بهره تعریف می‌شود.

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \rho$$ رابطه (۱۶)

که در آن V ارزش اختیار معامله و r نرخ بهره بدون رسیک است. مقدار رو برای اختیارهای خرید مثبت است. زیرا هرگاه نرخ بهره افزایش یابد ارزش فعلی قیمت توافقی، یعنی هزینه اجرای اختیار خرید، کاهش می‌یابد. لذا قیمت اختیار خرید افزایش خواهد یافت. همچنین مقدار رو برای اختیارهای فروش منفی است. زیرا هرگاه نرخ بهره افزایش پیدا کند، ارزش فعلی قیمت توافقی که در سررسید دریافت خواهد شد (البته به شرط سودآوری اختیار) کاهش می‌یابد و لذا قیمت اختیار فروش کاهش خواهد یافت (هال، ۱۳۸۴). به عبارت دیگر، رو معیای برای اندازه‌گیری حساسیت قیمت اخیار معامله به ازای یک واحد تغییر در نرخ بهره است. رو اختیارهای معامله از روش تحلیلی به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\rho_C = K\tau.e^{-r\tau}N(d_2)$$ رابطه (۱۷)

$$\rho_P = K\tau.e^{-r\tau}N(d_2)$$ رابطه (۱۸)

محاسبه پارامترهای حساسیت ریسک با روش تحلیلی هر چند دقیق است. اما پیچیده و زمان‌بر است. از این رو در پژوهش حاضر از روش تفاضلات متناهی جهت محاسبه این پارامترها استفاده شده که نسبت به روش تحلیلی ساده‌تر و زمان محاسبه کمتری نیاز دارد.

مروری بر پیشینه پژوهش

در ادامه، برخی از پژوهش‌های انجام شده درباره روش‌های محاسبه و کمی‌سازی پارامترهای حساسیت ریسک و همچنین، کاربرد روش تفاضلات متناهی در مدل‌های مالی مورد اشاره قرار گرفته است. اما، جستجوی نگارندگان نشان داد در پژوهش‌های داخلی از روش تفاضلات متناهی برای محاسبه پارامترهای حساسیت ریسک استفاده نشده است. گراچینتی[۱] (۲۰۱۸) با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت کارلو به محاسبه یونانی‌ها پرداخته‌اند. همچنین، در قالب یک الگوریتم خاص و تکنیک‌های کاهش واریانس و استفاده از روش تفاضلات متناهی به تخمین پارامترهای حساسیت ریسک و ارزش اختیار معامله پرداخته‌اند. اندرسون[۲] (۲۰۱۸) یک روش تفاضلات متناهی برای محاسبه پارامترهای حساسیت قابل اجرا برای یک کلاس گسترده از مدل‌های زنجیره مارکف زمان پیوسته ارائه کرده‌اند. موروی و سودا[۳] (۲۰۱۷) یک الگوریتم کارآمد برای محاسبه ارزش اختیار معامله اروپایی و آمریکایی و پارامترهای حساسیت ریسک اختیار معامله‌های مذکور ارائه داده‌اند. همچنین، نشان دادند که پارامترهای حساسیت ریسک برای اختیار معامله اروپایی به طور مجانبی برابر با پارامترهای حساسیت ریسک مالیوانی[۴] است. جونگ و همکاران[۵] (۲۰۱۷) یک روش تفاضلات متناهی برای حل معادله دیفرانسیل جزئی بلک–شولز و قیمت‌گذاری اختیار معامله بدون نیاز به شرایط مرزی ارائه داده‌اند. ابرلین و همکاران[۶] (۲۰۱۶) در مقاله‌ای پارامترهای حساسیت ریسک برای مدل‌هایی که نرخ بهره از فرآیندهای لوی[۷] پیروی می‌کنند، به روش تفاضلات متناهی محاسبه نمودند. ژانگ و همکاران[۸] (۲۰۱۵) در مقاله‌ای با عنوان "الگوریتم عددی برای دلتای اختیار معامله آسیایی" یک فرم از جواب اختیار معامله آسیایی هندسی ارائه داده‌اند و از این فرم برای محاسبه عددی دلتای اختیار معامله آسیایی استفاده کرده‌اند. جونگ و همکاران[۹] (۲۰۱۵) با استفاده از روش تفاضلات متناهی و یک الگوی ابتکاری، پارامترهای حساسیت ریسک را برای مدل پرش-انتشار مرتون محاسبه و نشان دادند روش تفاضلات متناهی دارای کارایی بیشتری نسبت به روش‌های مشابه موجود برای محاسبه پارامترهای

---

1. Gracianti et al
2. Anderson
3. Muroi & Suda
4. Mallivan Greeks
5. Jeong et al
6. Eberlein et al
7. Levi's Process
8. Zhang et al
9. Jeong et al

حساسیت ریسک است. پانویک[1] (۲۰۱۴) مدیریت ریسک بازار را از منظر معامله‌گر اختیارهای معامله مورد بررسی قرار داده و با استفاده از پارامترهای حساسیت ریسک و ایجاد یک سبد سهام نسبت به رفع ریسک اختیار معامله اروپایی اقدام کرده‌اند.

از مطالعات داخلی مرتبط با پژوهش نیز به موارد زیر می‌توان اشاره کرد:

پیش‌بهار و همکاران (۱۳۹۷) با مطالعه کاربرد درخت دوجمله‌ای در تعیین قیمت اختیار معامله آسیایی و محاسبه پارامترهای حساسیت ریسک به این نتیجه رسیده‌اند که برای اتخاذ یک موقعیت مناسب در اختیار معامله، تمام متغیرهای مؤثر بر قیمت باید در نظر گرفته شوند و با توجه به میزان حساسیت اختیار معامله به هر یک از این متغیرها، راهبرد مناسبی برای پوشش ریسک اتخاذ شود. بنابراین، مدیران ریسک باید به‌طور منظم ارزش اختیار معامله را بازنگری و راهبردهای خود را با ملاحظه این تغییرات به روز کنند. احمدی چهره برق (۱۳۹۷) به کارگیری پارامترهای حساسیت یونانی در بورس تهران با هدف کنترل قیمت اختیار خرید را امکان‌سنجی کرده‌اند. نبوی و قاسمی (۱۳۹۳) ارزش اختیار معامله و پارامترهای حساسیت ریسک را با روش درخت دو جمله‌ای بررسی و محاسبه کرده‌اند. جلوداری ممقانی و پیکر (۱۳۹۱) با استفاده از روش مونت کارلوی نوسانی، ارزش اختیار معامله و حساسیت‌های آن را محاسبه نموده‌اند. خضری پورقرایی و ستاردباغی (۱۳۹۱) در مطالعه خود یک روش عددی مبتنی بر تفاضلات متناهی صریح برای حل معادله غیرخطی بلک-شولز ارائه داده‌اند که نتایج نشان داد برای موارد غیرخطی، یعنی ارزش‌گذاری اختیار معامله با وجود تغییر قیمت، روش عددی تفاضلات متناهی صریح، جواب عددی قابل‌قبولی را فراهم می‌آورد. بر این اساس، نتیجه گرفتند که در ارزش‌گذاری اختیار معاملات باید اثر بازارهای غیرنقدی در نظر گرفته شود. زیرا منجر به افزایش قابل توجه‌ای در ارزش اختیار معامله می‌شود.

فرضیه‌های پژوهش

فرضیه اول: نتایج به‌دست آمده از روش تفاضلات متناهی جهت محاسبه ارزش اختیار معامله تقریب مناسبی از متغیر مذکور به‌دست آمده از روش تحلیلی (حل معادله بلک-شولز) است.

فرضیه دوم: نتایج به‌دست آمده از روش تفاضلات متناهی جهت محاسبه پارامترهای حساسیت ریسک تقریب مناسبی از متغیر مذکور به‌دست آمده از روش تحلیلی (حل معادله بلک-شولز) است.

روش شناسی پژوهش

برای حل معادلات دیفرانسیل پیچیده که به‌دست آوردن جواب تحلیلی بسیار سخت یا حتی غیر ممکن است، تکنیک‌های حل عددی راهگشا خواهد بود. یکی از مهم‌ترین تکنیک‌های حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی، روش حل تفاضلات متناهی است. در واقع، در این روش مشتق توابع با تفاضلات معادل آنها تقریب زده می‌شود. به عبارت دیگر، روش FDM، معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی را به سیستمی

[1]. Paunović

از معادلات تبدیل می‌کند که از تکنیک‌های جبری بتوان آن را حل نمود. مزیت FDM این است که به منظور محاسبه مشتقات جزئی، محیط و دنیای پیوسته را به محیط گسسته تبدیل می‌کند (ویلموت، ۲۰۰۷)

اساس این روش برای حل معادلات، استفاده از تقریب تابع با بسط تیلور[1] است. فرض کنید تابع f خوش رفتار و دارای بسط تیلور باشد، در این صورت طبق قضیه تیلور برای هر $n\epsilon N$ خواهیم داشت:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2_i}h^2+\ ....+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n_i}h^n+R_n(x) \qquad \text{رابطه (۱۹)}$$

که در آن $R_n(x)$ مانده سری تیلور است که نشان‌دهنده اختلاف $f(x_0+h)$ و مقدار چندجمله‌ای تیلور $f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+\ ....\ +\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n$ از درجه n است. هرگاه h به سمت صفر میل کند، مقدار مانده $R_n(x)$ نیز به صفر میل خواهد کرد (کاسون و مینگام[2]، ۲۰۱۰).

در چند جمله‌ای تیلور برای $n=1$ داریم:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+R_1(x) \qquad \text{رابطه (۲۰)}$$

با مرتب‌سازی معادله فوق، معادله زیر به‌دست می‌آید:

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\frac{R_1(x)}{h} \qquad \text{رابطه (۲۱)}$$

بنابراین معادله زیر برای تقریب مشتق اول هنگامی که h به صفر نزدیک می‌شود بدست می‌آید:

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+o(h) \qquad \text{رابطه (۲۲)}$$

بدین ترتیب، برای هر عدد مثبت یا منفی h، مقدار $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ تقریبی برای $f'(x)$ است. دقت داریم که $f'(x)$ شیب خط مماس بر منحنی $y=f(x)$ در نقطه $(x,f(x))$ و مقدار $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ شیب خط قاطع منحنی است که از دو نقطه $(x,f(x))$ و $(x+h,f(x))$ می‌گذرد.

چنانچه h نماد یک عدد مثبت باشد، دو مقدار $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ و $\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$ و درنتیجه مقدار $\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ تقریب‌هایی برای $f'(x)$ هستند (کاسون و مینگام، ۲۰۱۰).

بنابراین سه نوع تقریب متفاوت برای مقدار مشتق مرتبه اول وجود دارد که عبارتند از:

۱ـ تقریب پیش رو[3]:

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \text{رابطه (۲۳)}$$

۲ـ تقریب پس رو[4]:

$$f'(x)=\frac{f(x)-f(x-h)}{h} \qquad \text{رابطه (۲۴)}$$

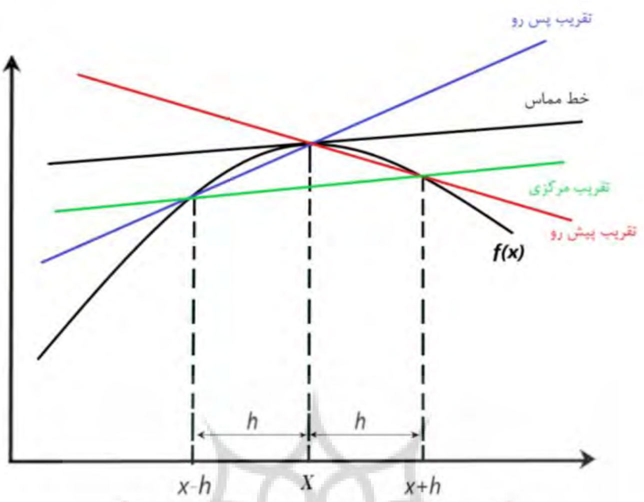
۳ـ تقریب مرکزی[5]:

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \qquad \text{رابطه (۲۵)}$$

---

1. Taylor Polynomial
2. Causon & Mingham
3. Forward Approximation
4. Backward Approximation
5. Central Approximation

در شکل۱، تحلیل نموداری از سه تقریب بالا ارائه شده است.



شکل ۱. تحلیل نموداری تقریب های مشتق اولیه

همچنین معادلات دیفرانسیل بلک-شولز دارای یک مشتق مرتبه دوم نیز می‌باشد که با کمک چندجمله‌ای تیلور تقریب زده می‌شود. با توجه به بسط تیلور می‌توان نوشت:

$$f(x+h) = f(x) - hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(x) - \dots$$ رابطه (۲۶)

و

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(x) - \dots$$ رابطه (۲۷)

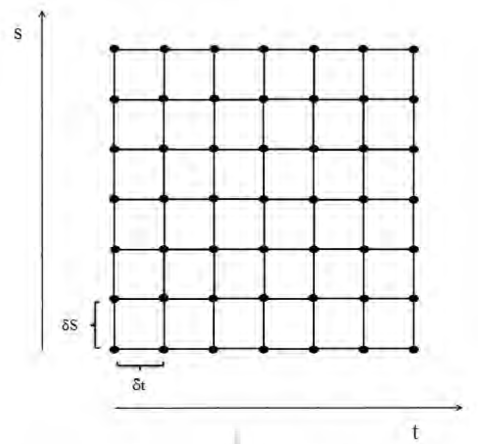
از مجموع طرفین معادله‌های بالا خواهیم داشت:

$$f(x+h) + f(x-h) = \left[f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f(x) + ..\right] + \left[f(x) - hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f'(x) - \cdots\right]$$ رابطه (۲۸)

بنابراین خواهیم داشت:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$ رابطه (۲۹)

برای محاسبه ارزش اختیار معامله به روش تفاضلات متناهی، باید یک شبکه زمان-قیمت سهام مانند شکل۲ در نظر گرفت. محور عمودی در شبکه نشانگر قیمت سهام و محور افقی نشانگر زمان است. هرنقطه در شبکه دارای یک شاخص عمودی i و افقی j می‌باشد؛ و هر نقطه در شبکه یک ارزش اختیار معامله برای یک زمان و قیمت سهام خاص می‌باشد که با $V_{i,j}$ نشان داده می‌شود. فاصله دو نقطه در محور قیمت سهام را با δs و در محور زمان را با δt درنظر گرفته می‌شود. بنابراین برای هر نقطه روی شبکه، $i\delta s$ نشانگر قیمت سهام در آن نقطه و $j\delta t$ نشانگر زمان در نقطه مورد نظر می‌باشد (ویلموت، ۲۰۰۷).



شکل ۲. شبکه در تفاضلات متناهی

پیاده‌سازی تقریب‌های روش تفاضلات متناهی بر مشتقات معادلات دیفرانسیل جزئی بلک-شولز در شبکه زمان- قیمت سهام، تقریب‌های زیر را می‌دهد:

تقریب پیش رو :

رابطه (۳۰)
$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j}}{\delta t}$$

تقریب پس رو :

رابطه (۳۱)
$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{V_{i,j} - V_{i,j-1}}{\delta t}$$

تقریب مرکزی :

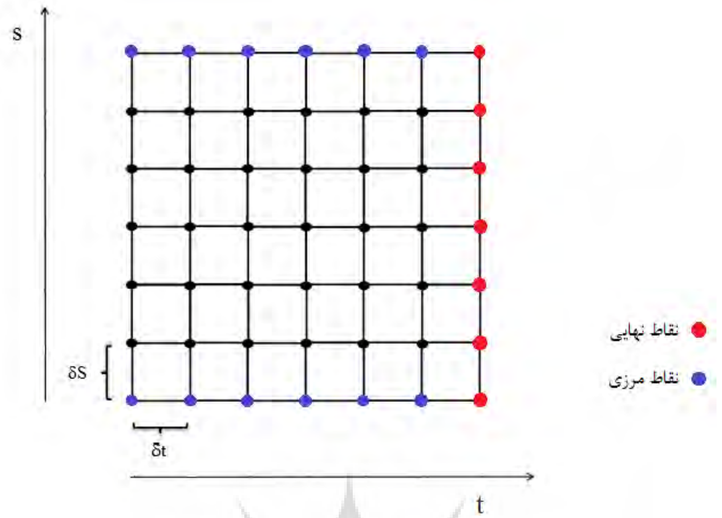
رابطه (۳۲)
$$\frac{\partial V}{\partial s} = \frac{V_{i+1,j} - V_{i-1,j}}{2\delta s}$$

رابطه (۳۳)
$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j-1}}{2\delta t}$$

تقریب مشتق مرتبه دوم:

رابطه (۳۴)
$$\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = \frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{(\delta s)^2}$$

برای حل معادله دیفرانسیل بلک-شولز به روش تفاضلات متناهی در ابتدا باید مقدار ارزش اختیار معامله را در نقاط نهایی و مرزی شبکه مشخص کرد.



شکل ۳. نقاط نهایی و مرزی در شبکه

مقدار ارزشی اختیار معامله در تاریخ سررسید در واقع همان مقدار تابع بازده‌ای[1] می‌باشد. پس شرایط نهایی اختیار خرید اروپایی برابر است با:

$$V_{i,j} = \text{Payoff}(i\delta S = \max(i\delta S - k, 0)$$ رابطه(۳۵)

$i = 0,1,2,\ldots,I$

که K همان قیمت اعمال و S مقدار قیمت سهام را در هر طبقه از شبکه خواهد داد.

شرایط مرزی اختیار خرید اروپایی باید در دو حالت قیمت سهام برابر ۰ و برابر با مقدار خیلی زیاد بررسی شود. ارزش اختیار خرید اروپایی، زمانی که قیمت سهام برابر با ۰ باشد، برابر است با :

$$V_{0,j} = 0$$ رابطه (۳۶)

$j = 0,1,\ldots,J$

و زمانی که قیمت سهام خیلی زیاد شود برابر است با:

$$V_{i,j} = I\delta S - ke^{-r(T-t)}$$ رابطه (۳۷)

$j = 0,1,\ldots,J$

شرایط نهایی برای اختیار فروش اروپایی برابر است با:

$$V_{i,j} = \text{Payoff}(i\delta S) = \max(k - i\delta S, 0)$$ رابطه (۳۸)

$i = 0,1,2,\ldots,I$

و ارزش اختیار فروش، زمانی که قیمت سهام برابر ۰ باشد برابر است با:

$$V_{i,j} = i\delta S -= \max(k - i\delta S, 0)$$ رابطه (۳۹)

1. Payoff Function

$$V0, j = I\delta S - ke^{-r(T-t)}$$ رابطه (۴۰)
$j = 0,1,\ldots,J$

و زمانی که قیمت سهام خیلی زیاد شود برابر است با:

$$V_{i,j} = 0$$ رابطه (۴۱)
$j = 0,1,\ldots,J$

به طور معمول روش‌های تفاضلات متناهی برای حل معادلات دیفرانسیل عبارتند از:

الف) روش صریح[1]

ب) روش ضمنی[2]

ج) روش کرانک-نیکلسون[3]

تفاوت هر کدام از این روش‌ها در دقت، پایداری[4] و سرعت رسیدن به جواب‌ها است (آرچینگر و بیندر، ۲۰۱۳). روش صریح ساده‌ترین روش تفاضلات متناهی در پیاده‌سازی و دارای سریع‌ترین الگوریتم در انجام محاسبات است. این روش، ارزش اختیار معامله در هر گام زمانی را از مقادیر محاسبه شده در گام زمانی جلوتر محاسبه می‌کند. روش صریح از مقادیر به‌دست آمده استفاده می‌کند. بنابراین، برای به‌دست آوردن ارزش اختیار معامله در یک نقطه، فقط یک معادله خطی را حل می‌کند (ویلموت، ۲۰۰۷). روش صریح به‌دلیل ماهیت محاسبه مقادیر جدید از مقادیر معلوم، روشی سریع است. ولی پایدار بودن این روش برای حل معادلات دیفرانسیل باید مورد بررسی قرار گیرد. یک ویژگی مهم هر روش تقریبی، پایدار بودن آن است. منظور از خصوصیات پایداری یک روش تقریبی، تأثیر خطاهای کوچک در روش بر نتایج به‌دست آمده می‌باشد. اگر خطاهای کوچک بتوانند نوسان‌های بزرگ در نتایج ایجاد کنند، این روش از پایداری ضعیفی برخوردار می‌باشد (لانگتانکن و لینگ، ۲۰۱۶).

روش ضمنی نسبت به روش صریح به‌طور نسبی دارای پایداری بهتر، اما با محاسبات و الگوریتم طولانی‌تر است. این روش برای محاسبه ارزش اختیار معامله صرفاً به مقادیر در گام زمانی جلوتر بستگی ندارد و برای محاسبه ارزش اختیار معامله در هر گام زمانی، معادلات گام‌های زمانی قبل را در یک سیستم معادلاتی ترکیب می‌کند (لانگتانکن و لینگ، ۲۰۱۶).

روش کرانک-نیکلسون یک روش ضمنی است که بین روش صریح و ضمنی میانگین می‌گیرد. مزایای این روش پایداری و همگرایی بهتر آن است (لانگتانکن و لینگ، ۲۰۱۶).

با توجه به الگوریتم سریع و ساده‌ی روش صریح، در این پژوهش از روش مذکور برای محاسبه ارزش اختیار معامله استفاده شده است. اکنون معادله دیفرانسیل جزئی بلک-شولز با استفاده از روش صریح بازنویسی خواهد شد:

---
1. Explicit Method
2. Implicit Method
3. Crank-Nicholson
4. Stability

$$\frac{\partial V}{\partial t} = rs\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} - rV = 0 \qquad \text{رابطه (۴۲)}$$

حال در معادله بالا به‌جای s مقدار قیمت سهام در هر مرحله، که با $i\delta s$ محاسبه می‌شود، و به‌جای $\frac{\partial V}{\partial t}$ معادله ۳۱، به‌جای $\frac{\partial V}{\partial s}$ معادله ۳۲ و به‌جای $\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}$ معادله ۳۴ جایگذاری می‌شوند و معادله زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{V_{i,j} - V_{i,j-1}}{\delta t} = r\, i\delta s\, \frac{V_{i+1,j} - V_{i-1,j}}{2\delta s} + \frac{1}{2}\sigma^2 i^2 (\delta s)^2 \frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} - V_{i-1,j}}{(\delta s)^2} - rV_{i,j} = 0$$

رابطه (۴۳)

معادله بالا را می‌توان به صورت زیر ساده‌سازی کرد:

$$V_{i,j-1} = \left[\frac{1}{2}\delta t(\sigma^2 i^2 - ri)\right] V_{i-1,j} + [1 - \delta t(\sigma^2 i^2 + r)]V_{i,j} + \left[\frac{1}{2}\delta t(\sigma^2 i^2 + ri)\right] V_{i+1,j}$$

رابطه (۴۴)

ضرایب مقابل $V_{i-1,j}$ و $V_{i,j}$ و $V_{i+1,j}$ به‌صورت زیر درنظر گرفته می‌شوند:

$$a(i) = \frac{1}{2}\delta t(\sigma^2 i^2 - ri) \qquad \text{رابطه (۴۵)}$$

$$b(i) = 1 - \delta t(\sigma^2 i^2 + r) \qquad \text{رابطه (۴۶)}$$

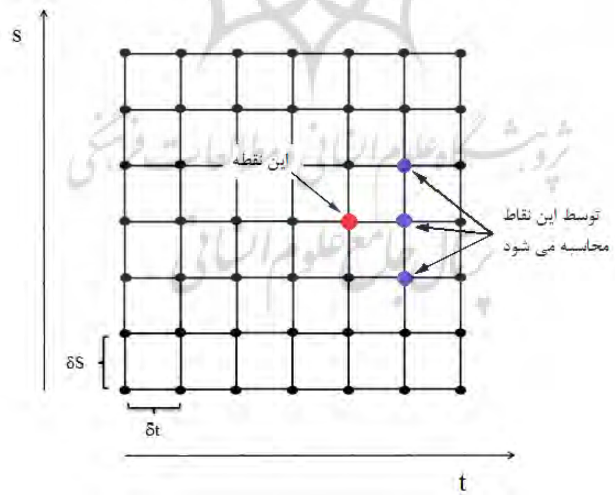
$$c(i) = \frac{1}{2}\delta t(\sigma^2 i^2 + ri) \qquad \text{رابطه (۴۷)}$$

بنابراین معادله روش صریح برای محاسبه ارزش اختیار معامله در شبکه زمان ـ قیمت سهام به‌صورت زیر است:

$$V_{i,j-1} = a(i)V_{i-j,1} + b(i)V_{i-j,1} + c(i)V_{i+j,1} \qquad \text{رابطه (۴۸)}$$

$i=1,2,\ldots,I-1 \;,\; j=0,1,\ldots,J-1$

در شکل۴ الگوریتم روش صریح در محاسبه ارزش اختیار معامله نشان داده شده است.



شکل ۴. روش صریح در محاسبه ارزش اختیار معامله

روش تفاضلات متناهی صریح با داشتن شرط زیر می‌تواند پایدار باشد:

$$0 < \frac{\delta t}{(\delta s)^2} \leq \frac{1}{2}$$ رابطه (۴۹)

از قبل می‌دانیم که دلتا و تتا و گاما یک اختیار معامله اروپایی را به ترتیب به صورت $\frac{\partial V}{\partial s}$ و $\frac{\partial V}{\partial t}$ و $\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}$ تعریف می‌کنند. اکنون باید یک روش تقریب برای محاسبه این پارامترها در شبکه زمان-قیمت سهام به‌دست آوریم.

برای محاسبه دلتای اختیار معامله در شبکه زمان-قیمت سهام کافی است معادله ۳۳ اعمال گردد:

$$\Delta(s,t) = \frac{V_{i+1,j} - V_{i-1,j}}{2\delta s}$$ رابطه (۵۰)

برای محاسبه تتای اختیار معامله در شبکه زمان-قیمت سهام کافی است معادله ۳۱ اعمال گردد:

$$\theta(s,t) = \frac{V_{i,j} - V_{i,j-1}}{\delta t}$$ رابطه (۵۱)

برای محاسبه گامای اختیار معامله در شبکه زمان-قیمت سهام کافی است معادله ۳۴ اعمال گردد:

$$\Gamma(s,t) = \frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j}V_{i-1,j}}{(\delta s)^2}$$ رابطه (۵۲)

یافته‌های پژوهش

در این قسمت با استفاده از روش تفاضلات متناهی، ارزش اختیار معامله اروپایی و پارامترهای حساسیت ریسک (Δ و Γ و θ و v) آن برای ۱۰ شرکت برتر بورسی در سال ۹۷ محاسبه شده است. بدین منظور فرض شده یک قرارداد اختیار معامله اروپایی به تاریخ انقضای[1] ۶ ماهه برای هرکدام از این شرکت‌ها به‌فروش رسد. فرض نمودیم قیمت اعمال[2] برای قراردادهای مذکور به‌صورت ATM[3] باشد. اکنون جهت محاسبه ارزش اختیار معامله و پارامترهای حساسیت ریسک نیاز به پارامترهای نوسان[4](σ)، نرخ بهره بدون ریسک[5] (r) و قیمت پایه سهام (S_0) هرکدام از شرکت‌ها است که در ادامه به نحوی محاسبه هرکدام از پارامترها پرداخته شده است.

متداول‌ترین روش برای محاسبه نوسان‌پذیری شاخص سهام، نوسان‌پذیری سالانه[6] است که از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)^2 - \frac{1}{n(n-1)}\left[\sum_{i=1}^{n} \ln(\frac{S_i}{S_{i-1}})\right]^2}$$ رابطه (۵۳)

1. Exercise Date or Expiration Date
2. Exercise price
3. At The Money Option
4. Volatility
5. Interest Rate
6. Annual Volatility

که در رابطه بالا n تعداد مشاهدات و S_i ارزش سهام در زمان i ام می‌باشند. با توجه به این که دوره زمانی مورد نظر در این پژوهش ۶ ماهه است. جهت تبدیل نوسان‌پذیری سالانه به ۶ ماهه از رابطه زیر استفاده می‌شود (هاگ[1]، ۲۰۰۷):

$$\sigma_{6m} = \frac{\sigma_A}{\sqrt{2}} \qquad \text{رابطه (۵۴)}$$

برای محاسبه نرخ بهره بدون ریسک از معادله نرخ سود سپرده سالانه بانکی استفاده می‌شود. با توجه به بازه زمانی ۶ ماهه در این پژوهش از میانگین هندسی جهت تبدیل نرخ بهره بدون ریسک سالانه به ۶ ماهه از رابطه زیر استفاده شده است:

$$r_{6m} = (1 + \mathrm{r}_y)^{\frac{6}{12}} - 1 \qquad \text{رابطه (۵۵)}$$

که در رابطه بالا r_y نرخ بهره بدون رسیک سالانه است (محمدی و آسیما، ۱۳۹۸).

آخرین پارامتر مورد استفاده در این پژوهش، قیمت پایه سهام در زمان آغاز قرارداد اختیار معامله (S_0) است. بدین منظور قیمت سهام شرکت‌های مذکور در تاریخ ۶ آبان ۱۳۹۸ (شروع فرضی قرارداد اختیار معامله اروپایی) به‌عنوان قیمت پایه سهام در نظر گرفته شده است.

با توجه به مباحث قبل نتایج به‌دست آمده برای ارزش اختیارهای معامله برای ۱۰ شرکت مورد بررسی در جدول ۱ نمایش داده شده که S_0 قیمت سهام (دارایی پایه)، σ میزان نوسانات، VO_p-FD و VO_c-FD به ترتیب ارزش اختیار فروش و خرید محاسبه شده توسط روش تفاضلات متناهی، و VO_p-B و VO_c-B به ترتیب ارزش اختیار فروش و خرید به‌دست آمده توسط روش تحلیلی می‌باشند.

جدول ۱. ارزش اختیار معامله به‌دست آمده شرکت‌ها

نماد	σ	S_0	VO_p-FD	VO_p-B	VO_c-FD	VO_c-B
فملی	۰/۱۲۵۸۸	۵۳۸۲	۳۵/۴۷۹۰	۳۷/۳۳۲۰	۵۰۸/۴۰۳۵	۵۰۰/۵۵۴۴
ذوب	۰/۲۱۹۷۸	۱۸۴۰	۴۵/۷۸۳۰	۴۷/۶۱۴۸	۲۰۴/۰۰۵۰	۲۰۵/۹۸۵۰
وبملت	۰/۴۲۵۱۰	۵۸۲۰	۴۴۷/۹۶۸۵	۴۴۴/۲۸۱۵	۹۴۵/۰۷۵۰	۹۴۵/۲۰۲۰
پارس	۰/۶۴۱۹۲	۵۶۸۰۰	$۷/۵۵۴۹\times ۱۰^{۳}$	$۷/۵۰۲۴\times ۱۰^{۳}$	$۱/۲۴۲۸\times ۱۰^{۴}$	$۱/۲۳۹۱\times ۱۰^{۴}$
خودرو	۰/۲۰۵۲۱	۶۹۹۸	۱۵۷/۰۵۶۵	۱۵۸/۱۹۲۶	۷۷۶/۷۸۲	۷۶۰/۳۶۲۵
سهرمز	۰/۲۳۳۶۱	۷۱۶۰	۲۰۵/۳۵۴۵	۲۰۸/۰۳۲۰	۸۲۲/۴۵۷۹	۸۲۴/۲۸۴۷
شتران	۰/۱۹۵۶۱	۵۶۰۳	۱۱۳/۶۵۰۲	۱۱۴/۸۳۲۵	۵۹۵/۷۸۸۳	۵۹۷/۰۷۶۰
کساوه	۰/۲۹۴۱۰	۹۱۹۸	۴۰۴/۰۶۱۳	۴۰۰/۰۳۹۷	$۱/۱۸۴۸\times ۱۰^{۳}$	$۱/۱۹۱۷\times ۱۰^{۳}$
شرانل	۰/۲۵۹۵۲	۱۲۸۰۰	۴۴۳/۴۲۴	۴۴۹/۸۵۹۹	$۱/۵۶۰۹\times ۱۰^{۳}$	$۱/۵۵۱۵\times ۱۰^{۳}$
فخوز	۰/۱۳۶۴۰	۸۷۵۹	۷۴/۳۵۹۵	۷۶/۲۴۷۵۰	۸۳۱/۶۸۱۰	۸۳۰/۱۲۴۲

منبع: محاسبات پژوهش

[1]. Espen Gaarder Haug

نتایج به‌دست آمده برای دلتای اختیارهای معامله برای ۱۰ شرکت مورد بررسی در جدول ۲ نمایش داده شده است. Δ_P-FD و Δ_C-FD به ترتیب دلتای اختیار فروش و خرید محاسبه شده توسط روش تفاضلات متناهی، و Δ_P-B و Δ_C-B به ترتیب دلتای اختیار فروش و خرید به‌دست آمده توسط روش تحلیلی می‌باشند.

جدول ۲. دلتای اختیار معامله به‌دست آمده شرکت‌ها

نماد	Δ_P-FD	Δ_P-B	Δ_C-FD	Δ_C-B
فملی	-۰/۱۴۵۵	-۰/۱۴۵۶	۰/۸۵۴۰	۰/۸۵۴۴
ذوب	-۰/۲۵۵۵	-۰/۲۵۵۶	۰/۷۴۴۵	۰/۷۴۴۴
وبملت	-۰/۳۲۶۵	-۰/۳۲۶۵	۰/۶۷۳۷	۰/۶۷۳۵
پارس	-۰/۳۳۵۴	-۰/۳۳۵۳	۰/۶۴۷۴	۰/۶۴۴۷
خودرو	-۰/۲۴۴۳	-۰/۲۴۴۲	۰/۷۵۵۹	۰/۷۵۵۹
سهرمز	-۰/۲۶۵۲	-۰/۲۶۴۹	۰/۷۳۲۵	۰/۷۳۴۸
شتران	-۰/۲۳۵۸	-۰/۲۳۶۲	۰/۷۶۴۲	۰/۷۶۴۲
کساوه	-۰/۲۹۵۷	-۰/۲۹۵۷	۰/۷۰۴۵	۰/۷۰۴۳
شرانل	-۰/۲۸۰۲	-۰/۲۸۰۲	۰/۷۱۹۸	۰/۷۱۹۸
فخوز	-۰/۱۶۳۲	-۰/۱۶۳۲	۰/۸۳۶۷	۰/۸۳۶۸

منبع: محاسبات پژوهش

نتایج به‌دست آمده برای گامای اختیارهای معامله برای ۱۰ شرکت مورد بررسی در جدول ۳ نمایش داده شده است. Γ-FD گامای اختیار معامله محاسبه شده توسط روش تفاضلات متناهی و Γ-B گامای اختیار معامله به‌دست آمده توسط روش تحلیلی می‌باشند. به دلیل یکی بودن گاما اختیار خرید و فروش هر دو حالت در یک شکل نوشته شده است.

جدول ۳. گامای اختیار معامله به‌دست آمده شرکت‌ها

نماد	Γ-FD	Γ-B
فملی	۵×۴-۱۰	۴/۷۷۰۳×۴-۱۰
ذوب	۱۱×۴-۱۰	۱۰×۴-۱۰
وبملت	۲×۴-۱۰	۲/۰۶۱۱×۴-۱۰
پارس	۱/۴۲۸۶×۵-۱۰	۱/۴۱۳۶×۵-۱۰
خودرو	۳/۰۹۲۸×۴-۱۰	۳/۰۹۱۴×۴-۱۰
سهرمز	۲/۷۷۷۸×۴-۱۰	۲/۷۷۰۴×۴-۱۰
شتران	۳/۹۶۰۴×۴-۱۰	۳/۹۷۲۸×۴-۱۰
کساوه	۱/۸۱۸۲×۴-۱۰	۱/۸۰۵۸×۴-۱۰
شرانل	۱/۵۳۸۵×۴-۱۰	۱/۴۳۳۶×۴-۱۰
فخوز	۳×۴-۱۰	۲/۹۱۷۶×۴-۱۰

منبع: محاسبات پژوهش

نتایج به‌دست آمده برای تتا اختیارهای معامله برای ۱۰ شرکت مورد بررسی در جدول ۴ نمایش داده شده است. θ_P-FD و θ_C-FD به ترتیب تتای اختیار فروش و خرید محاسبه شده توسط روش تفاضلات متناهی، و θ_P-B و θ_P-B به ترتیب تتای اختیار فروش و خرید به‌دست آمده توسط روش تحلیلی می‌باشند.

جدول ۴. تتای اختیار معامله به‌دست آمده شرکت‌ها

نماد	θ_P-FD	θ_P-B	θ_C-FD	θ_C-B
فملی	۳۲/۶۴۲۴	۳۸/۲۶۶۴	-۸۵۱/۹۶۸۱	-۸۴۷/۱۱۳۵
ذوب	۲/۹۱۸۰	۱/۲۹۸۳	-۲۹۱/۶۲۵۲	-۳۰۱/۳۹۵۷
وبملت	-۱۸۹/۴۷۲۹	-۲۰۸/۸۳۲۳	-۱/۱۴۷۸×۱۰^{۳}	-۱/۱۶۶۳×۱۰^{۳}
پارس	-۴/۷۲۵۳×۱۰^{۳}	-۴/۶۱۷۵×۱۰^{۳}	-۱/۳۸۴۲×۱۰^{۴}	-۱/۳۹۶۱×۱۰^{۴}
خودرو	۱۷/۰۳۰۰	۱۷/۴۳۱۰	-۱/۱۳۱۲×۱۰^{۳}	-۱/۱۳۳۷×۱۰^{۳}
سهرمز	-۸/۹۹۴۹	-۸/۵۲۳۵	-۱/۱۸۳۸×۱۰^{۳}	-۱/۱۸۶۲×۱۰^{۳}
شتران	۲۰/۴۰۵۰	۲۰/۱۰۸۳	-۹۰۱/۳۵۰۲	-۹۰۱/۸۴۹۸
کساوه	-۱۰۲/۹۴۵۱	-۹۹/۱۱۶۷	-۱/۶۱۴۸×۱۰^{۳}	-۱/۶۱۲۳×۱۰^{۳}
شرانل	-۶۵/۵۷۲۱	-۶۴/۳۹۸۵	-۲/۱۶۸۴×۱۰^{۳}	-۲/۱۷۰۱×۱۰^{۳}
فخوز	۵۶/۶۶۱۸	۶۲/۸۱۴۸	-۱/۳۸۳۶×۱۰^{۳}	-۱/۳۷۸۱×۱۰^{۳}

منبع: محاسبات پژوهش

نتایج به‌دست آمده برای وگای اختیارهای معامله برای ۱۰ شرکت مورد بررسی در جدول ۵ نمایش داده شده است.

ویستراب[1] در مقاله‌ای یک رابطه کاربردی بین ν و Γ به‌صورت زیر ارائه نمود (هاگ، ۲۰۰۷):

$$v = \tau\sigma S^2 T \qquad \text{(56)}$$

در این پژوهش نیز با توجه به محاسبه Γ از روش تفاضلات متناهی، مقدار وگا از رابطه بالا محاسبه شده است. ν-FD وگای اختیار معامله محاسبه شده توسط روش تفاضلات متناهی و ν-B وگای اختیار معامله به‌دست آمده توسط روش تحلیلی می‌باشند. به دلیل یکی بودن وگای اختیار خرید و فروش هر دو حالت در یک شکل نوشته شده است.

جدول ۵. وگای اختیار معامله بدست آمده شرکت‌ها

نماد	ν-FD	ν-B
فملی	۹۱۱/۵۵۷۶	۸۶۹/۶۸۸۹
ذوب	۴۰۹/۲۴۷۹	۴۱۸/۳۴۲۰
وبملت	۱/۴۳۹۹×۱۰۳	۱/۴۸۳۹×۱۰۳
پارس	۱/۴۷۹۳×۱۰۴	۱/۴۶۳۸×۱۰۴
خودرو	۱/۵۵۴۱×۱۰۳	۱/۵۵۲۹×۱۰۳

[1]. Wystrub

سهرمز	۱/۶۶۳۴×۱۰۳	۱/۶۵۸۹×۱۰۳
شتران	۱/۲۱۶۰×۱۰۳	۱/۲۱۹۸×۱۰۳
کساوه	۲/۲۶۲۰×۱۰۳	۲/۲۴۶۶×۱۰۳
شرانل	۳/۲۷۰۸×۱۰۳	۳/۰۴۷۹×۱۰۳
فخوز	۱/۵۶۹۷×۱۰۳	۱/۵۲۶۶×۱۰۳

منبع: محاسبات پژوهش

اکنون باید بررسی شود که خروجی‌های به‌دست آمده از روش تفاضلات متناهی برای ارزش اختیار معامله و پارامترهای حساسیت ریسک تقریب مناسبی برای متغیرهای مذکور که از روش تحلیلی (معادله بلک - شولز) می‌باشد؟ به دیگر بیان خطای ناشی از محاسبه ارزش اختیار معامله و پارامترهای حساسیت ریسک قابل چشم‌پوشی است یا خیر؟ بدین منظور برای پاسخ به پرسش فوق از قضیه ذیل استفاده شده است.

قضیه ۱. اگر a تقریبی از A باشد و e_a خطای مطلق حدی a و $\delta(a)$ خطای نسبی a باشند، آنگاه a را یک تقریب مناسب از A گوییم هرگاه تساوی زیر برقرار باشد:

$$\delta(\mathrm{a}) \leq \frac{e_{\mathrm{a}}}{|\mathrm{a}|-e_{\mathrm{a}}}$$ رابطه (۵۷)

که در رابطه بالا:

$$e_{\mathrm{a}} = |A - \mathrm{a}|$$ و $$\delta(\mathrm{a}) = \frac{|A-\mathrm{a}|}{|A|}$$ رابطه (۵۸)

قضیه بالا برای تک تک متغیرهای محاسبه شده صدق کرده و در نتیجه روش تفاضلات متناهی تقریب مناسبی برای محاسبه ارزش اختیار معامله و پارامترهای حساسیت ریسک می‌باشد و خطای حاصل از تفاوت روش تحلیلی (معادله بلک-شولز) و روش تفاضلات متناهی قابل چشم‌پوشی است و این موضوع نشان دهنده عدم تفاوت معنی‌دار بین نتایج حاصل از روش تفاضلات متناهی و روش تحلیلی است. بنابراین هر دو فرضیه‌های پژوهش مورد تأیید قرار گرفتند.

اکنون به تجزیه و تحلیل مالی یافته‌های پژوهش می‌پردازیم. با توجه جدول ۲ مشخص است دلتای اختیار معامله خرید برای تمام شرکت‌ها مثبت است و این به معنی رابطه مستقیم بین اختیار خرید با قیمت سهام است. به‌عنوان مثال مقدار دلتای اختیار خرید شرکت پتروشیمی پارس از روش تفاضلات متناهی برابر با ۰/۶۴۷۴ می‌باشد، یعنی زمانی که قیمت سهام این شرکت ۱ درصد تغییر می‌کند، قیمت اختیار خرید ۰/۶۴۷۴ درصد تغییر می‌کند. اگر اختیار خرید عمیقاً زیان‌ده باشد، دلتا برابر ۰ است؛ در حالی که هرچقدر ارزش ذاتی یک اختیار معامله بیشتر باشد، دلتای آن بیشتر می‌شود. مطابق با آن، هر چقدر یک اختیار معامله سودآور باشد، ارزش دلتای اختیار معامله بالاتر رفته و به عدد ۱ نزدیکتر می‌شود (نیسی و سلمانی قرائی، ۱۳۹۶). با توجه به خروجی‌های جدول ۲ مشخص است که دلتای اختیار خرید شرکت ملی مس ایران نسبت به سایر شرکت‌ها بیشتر بوده است. بنابراین انتظار می‌رود اختیار معامله آن بیشترین میزان سوددهی را داشته باشد. از دیگر سو دلتای اختیار معامله فروش برای تمام شرکت‌ها منفی است و این به معنی رابطه عکس بین اختیار خرید با قیمت سهام است. اگر اختیار فروش زیان‌ده باشد، دلتا نزدیک ۰

است. و اگر اختیار فروش سودآور باشد، دلتای آن به ۱- نزدیک است. در بین شرکت‌های جدول ۲ شرکت پتروشیمی پارس سودآورترین اختیار فروش را دارد.

گام دوم بررسی، پارامتر گاما است. در واقع گاما مقدار تحدب منحنی رابطه بین قیمت اختیار معامله و قیمت سهام را اندازه‌گیری می‌کند. به زبان مالی و اقتصادی گاما معیاری برای محاسبه افزایش یا کاهش مقدار دلتا به ازای یک واحد تغییر در قیمت دارایی پایه و با فرض ثابت بودن دیگر عوامل است. هنگامی که اختیاری به سمت سودآوری یا زیان‌دهی میل کند، مقدار گاما کاهش می‌یابد، به‌نحوی که برای اختیار معامله‌های بسار سودآور یا بسیار زیان‌ده مقدار گاما برابر ۰ خواهد بود. مقدار گاما برای اختیار فروش و اختیار خرید همواره مثبت است (نیسی و سلمانی قرائی، ۱۳۹۷). به‌طور کلی هر چه گاما کوچکتر باشد، دلتا به تدریج تغییر می‌کند و برای ایجاد و نگهداری یک سبد دارایی بی‌تفاوت نسبت به ریسک، تعداد دفعات کمتری برای تغییر در ترکیب سبد دارایی، تعدیل در سبد دارایی و انجام پوشش ریسک لازم است (پیش‌بهار و همکاران، ۱۳۹۷). با توجه به خروجی‌های جدول ۳ می‌توان گفت کمترین مقدار گامای اختیار معامله مربوط به شرکت پتروشیمی پارس است. در نتیجه دلتای اختیار معامله این شرکت نسبت به شرکت‌های دیگر آهسته‌تر تغییر می‌کند.

گام سوم بررسی پارامتر تتا است. همچنان که بیان شد تتا عبارتست از نسبت تغییر ارزش اختیار معامله با توجه به گذشت زمان، در صورتی که سایر عوامل ثابت بمانند. تتا یک نوع پارامتر پوشش ریسک مشابه دلتا نیست. در مورد قیمت آتی سهام عدم قطعیت وجود دارد. لیکن در مورد زمان گذشته عدم اطمینان وجود ندارد. منطقی است که تغییرات قیمت سهام را پوشش دهیم. ولی نمی‌توان تأثیر گذشت زمان را پوشش داد (پیش‌بهار و همکاران، ۱۳۹۷).

آخرین پارامتر مورد بررسی در این پژوهش وگا می‌باشد. همان‌طور که در قبل بیان شد وگای یک اختیار معامله صادر شده بر سهام، نسبت تغییر ارزش اختیار را به میزان نوسان‌پذیری سهام اندازه‌گیری می‌کند. هرچه میزان وگا بیشتر باشد، سرمایه‌گذار تغییر بیشتر در ارزش اختیار معامله خود را انتظار خواهد داشت (پیش‌بهار و همکاران، ۱۳۹۷).

هرچه میزان نوسان‌پذیری قیمت سهام بیشتر باشد، احتمال این که اجرای اختیار معامله سودآور باشد، بیشتر است. از این‌رو قیمت اختیار معامله افزایش خواهد یافت (نیسی و سلمانی قرائی، ۱۳۹۶). با توجه به نتایج موجود در جدول ۵ مشخص است که شرکت پتروشیمی پارس بیشترین مقدار وگا را دارد که از پراکندگی قیمت سهام شرکت مذکور حکایت دارد. به عبارت دیگر، به‌نظر می‌رسد پراکندگی قیمت سهام شرکت پتروشیمی پارس پراکندگی زیادی دارد که این موضوع به نوبه خود ریسک خرید سهام این شرکت را زیاد می‌کند.

به‌طور ساده، نوسان‌پذیری قیمت سهام، ابزاری برای نشان دادن درجه عدم اطمینان نسبت به تغییرات آتی بازده سهام می‌باشد. هرگاه درجه نوسان‌پذیری افزایش یابد، احتمال کاهش یا افزایش قیمت سهام نیز افزایش می‌یابد. برای سهامدار، احتمال افزایش قیمت سهام ممکن است در مجموع با احتمال کاهش قیمت سهام معادل باشد، در حالی که وضعیت برای شخصی که صاحب اختیار خرید یا فروش سهام است، فرق

می‌کند. دارندهٔ اختیار خرید، از افزایش قیمت سهام سود می‌کند و حال آن‌که ریسک کاهش قیمت سهام که متوجه اوست، محدود می‌باشد؛ زیرا بیشترین زیان دارنده اختیار خرید، همان قیمت اختیار است. به همین ترتیب، دارندهٔ اختیار فروش از کاهش قیمت، سود می‌برد. اما ریسک افزایش قیمت سهام که متوجه اوست، محدود می‌باشد. نتیجه این‌که قیمت اختیارهای خرید و فروش به ازای افزایش درجه نوسان‌پذیری قیمت دارایی، افزایش می‌یابد.

از دیگر سو اثر تغییر قیمت سهام بر روی ارزش اختیار فروش و اختیار خرید به ترتیب منفی و مثبت است. به‌عبارت دیگر، هرگاه اختیار خریدی به اجرا گذاشته شود، ارزش آن بستگی به مقدار افزایش قیمت سهام، نسبت به قیمت توافقی دارد. بنابراین ارزش اختیار خرید به موازات افزایش قیمت سهام، افزایش و به موازات افزایش قیمت اعمال، کاهش می‌یابد. برعکس دربارهٔ اختیار فروش نیز می‌توان گفت ارزش آنها تابع میزان افزایش قیمت اعمال نسبت به قیمت سهام است. در نتیجه می‌توان گفت که رفتار ارزش اختیار فروش، برعکس بازدهی اختیار خرید است. زیرا بازدهی اختیار فروش، به ازای افزایش قیمت سهام، کاهش و به ازای افزایش قیمت توافقی افزایش می‌یابد.

با توجه به جداول قبل می‌توان گفت با توجه به این‌که ارزش قیمت سهام پایه برای برخی از شرکت‌ها بیشتر از شرکت‌های دیگر است. در نتیجه، ارزش اختیار خرید برای این شرکت‌ها به نسبت بیشتر است. اما برای اختیار فروش، نتایج کمی متفاوت است. با افزایش قیمت سهام می‌بایست ارزش اختیار فروش کاهش یابد. اما با توجه به این‌که قیمت سهام پایه برخی از شرکت‌ها به‌طور نسبی بیشتر است ولی قیمت اختیار فروش نه تنها کمتر نیست بلکه بیشتر است. دلیل این موضوع به نوسان‌پذیری (σ) زیاد قیمت پایه این شرکت‌ها نسبت به شرکت‌های دیگر برمی‌گردد که اثر افزایش قیمتی را خنثی می‌کند. به‌عبارت دیگر، برآیند اثر تغییر نوسان و تغییر قیمت به نفع تغییر نوسان تمام می‌شود. این موضوع نشان‌دهنده مهم بودن پارامتر نوسان در ارزش‌گذاری اختیار معامله می‌باشد.

در این پژوهش با توجه به این که نرخ سود بانکی (نرخ بهره بدون ریسک) توسط بانک مرکزی تعیین شد و متغیری برونزا می‌باشد و طی دو سال اخیر تقریباً ثابت بوده است. در نتیجه پارامتر رو محاسبه نشده است. هر چند این متغیر را نیز می‌توان محاسبه نمود.

نتیجه‌گیری و بحث

در سال‌های اخیر استفاده از ابزارهای مشتقه در بازارهای بورس اوراق بهادار بسیار فراگیر شده است. یکی از ابزارهای بسیار مهم مشتقه، قرارداد اختیار معامله اروپایی سهام است. در طی پژوهش‌های متعدد تلاش‌های زیادی برای ارزش‌گذاری اوراق اختیار معامله انجام شده است. در این پژوهش از روش تفاضلات متناهی به قیمت‌گذاری ارزش اختیار معامله اروپایی برای ۱۰ شرکت برتر بورسی پرداخته شد. از دیگر سو هرچند قرارداد اختیار معامله اروپایی، در بازار بورس اوراق بهادار بسیار کاربردی است، اما خود با ریسک‌هایی مواجه است که مدیریت آن بسیار ضروری است. یکی از روش‌های کمی‌سازی ریسک برای اختیار معامله تعیین پارامترهای حساسیت ریسک (یونانی‌ها) است. در این پژوهش از روش تفاضلات متناهی پارامترهای

حساسیت ریسک (Δ و Γ و θ و ν) برای ۱۰ شرکت برتر بورسی محاسبه شده است. با استفاده از محاسبات، در این پژوهش نشان داده شد:

۱. نتایج به‌دست آمده از روش تفاضلات متناهی جهت محاسبه ارزش اختیار معامله تقریب مناسبی از متغیر مذکور به‌دست آمده از روش تحلیلی (حل معادله بلک-شولز) است.
۲. نتایج به‌دست آمده از روش تفاضلات متناهی جهت محاسبه پارامترهای حساسیت ریسک تقریب مناسبی از متغیر مذکور نتایج به‌دست آمده از روش تحلیلی (حل معادله بلک-شولز) می‌باشد.
۳. ارزش اختیار معامله اروپایی برای برخی از شرکت‌ها به‌طور نسبی بیشتر از شرکت‌های دیگر برای هر دو اختیار خرید و فروش است. مهم‌ترین دلیل این موضوع به نوسان‌پذیری (σ) زیاد قیمت پایه سهام این شرکت‌ها نسبت به شرکت‌های دیگر است.
۴. محاسبات نشان داد برآیند اثر تغییر نوسان و تغییر قیمت بر ارزش اختیار معامله، به نفع تغییر نوسان تمام می‌شود. این موضوع نشان‌دهنده مهم بودن پارامتر نوسان در ارزش‌گذاری اختیار معامله است.

نتایج این پژوهش با نتایج پژوهش جونگ و همکاران (۲۰۱۷) مطابقت دارد که نشان دادند روش تفاضلات متناهی برای حل معادله دیفرانسیل جزئی بلک-شولز و قیمت‌گذاری اختیار معامله بدون شرایط مرزی کارا است. همچنین نتایج محاسبه پارامترهای حساسیت ریسک با استفاده از روش تفاضلات متناهی در این پژوهش با نتایج پژوهش ابرلین و همکاران (۲۰۱۶) همخوانی دارد. همچنین نتایج این پژوهش درباره انتخاب و تعدیل متغیرهای ورودی با یافته‌های اندرسون (۲۰۱۸) مطابقت دارد.

با توجه به مباحث گذشته می‌توان گفت روش تفاضلات متناهی جهت تعیین ارزش اختیار معامله اروپایی و محاسبه پارامترهای ریسک مزیت‌هایی دارد که دیگر روش‌ها این مزیت‌ها را ندارند. از جمله:

۱. روش تفاضلات متناهی نسبت به برخی از روش‌های تحلیلی قیمت‌گذاری اختیار معامله سبب کاهش پیچیدگی و زمان محاسبه می‌شود.
۲. روش تفاضلات متناهی قادر به حل مدل‌های غیرخطی قیمت‌گذاری اختیار معامله است که روش شبیه مونت کارلو این توان را ندارد.
۳. روش تفاضلات متناهی قادر به قیمت‌گذاری اختیار معامله بازارهایی با دامنه نوسان بالا است که روش‌های شبکه‌ای در مواجه با این‌گونه بازارها دچار اختلال می‌شوند.

با توجه به نتایج این پژوهش، به دستگاه‌های سیاست‌گذار و اجرایی پیشنهاد می‌شود:

۱. مقدار پارامترهای حساسیت ریسک به خصوص وگا و دلتا در تابلوهای خرید و فروش اختیار معامله برای سرمایه‌گذاران ارائه شود (این موضوع برای بورس‌های مطرح دنیا مرسوم است).
۲. نرم افزارهای مورد نیاز برای محاسبه پارامترهای حساسیت ریسک در سایت بورس تهران جهت محاسبه کمییت‌های مورد نیاز مانند، تحلیل پراکندگی اضافه گردد.

۳. انواع اختیارات معامله به خصوص آمریکای و اروپایی در بورس کالای ایران جهت مدیریت ریسک ناشی از نوسانات قیمتی استفاده شود.

در پایان به پژوهش‌های آتی نیز توصیه می‌شود:

۱. پارامترهای حساسیت ریسک برای دیگر اختیارهای معامله محاسبه شود.
۲. با توجه به این‌که در مدل بلک–شولز نوسان ثابت در نظر گرفته می‌شود، با فرض تبعیت نوسان از یک از فرآیند تصادفی، پارامترهای حساسیت برای اختیار معامله محاسبه شود.
۳. پارامترهای حساسیت ریسک برای کالاهای مورد معامله در بورس کالا نیز محاسبه گردد.

ملاحظات اخلاقی:

حامی مالی: مقاله حامی مالی ندارد.

مشارکت نویسندگان: تمام نویسندگان در آماده‌سازی مقاله مشارکت داشته‌اند.

تعارض منافع: بنابر اظهار نویسندگان در این مقاله هیچگونه تعارض منافعی وجود ندارد.

منابع

نیسی، عبدالساده و سلمانی قرائی، کامران. (۱۳۹۶). مهندسی مالی و مدل‌سازی بازارها با رویکرد نرم‌افزار متلب. تهران، انتشارات دانشگاه علامه طباطبایی، چاپ اول.

هال، جان ادوارد. (۱۳۸۴). مبانی مهندسی مالی و مدیریت ریسک. ترجمه سجاد سیاح و علی صالح‌آبادی، تهران، گروه رایانه تدبیر پرداز، چاپ اول.

احمدی چهره برق، سیاوش. (۱۳۹۷). مطالعات امکان‌سنجی بکارگیری فرمول حساسیت یونانی‌ها در بازار سرمایه ایران. *مهندسی مالی و بورس اوراق بهادار*، ۹(۳۶)، ۲۹-۱۷.

پیش بهار، اسماعیل.، باغستانی، مریم و دشتی، قادر. (۱۳۹۷). کاربرد درخت دوجمله‌ای در تعیین قیمت اختیار معامله آسیایی و محاسبه پارامترهای حساسیت ریسک. *اقتصاد و توسعه کشاورزی*، ۳۲(۱)، ۱۶–۱.

جلوداری ممقانی، محمد و پیکر، جمیله. (۱۳۹۱). کاربرد شبیه‌سازی مونت کارلو در محاسبه یونانی‌ها. *سومین کنفرانس ریاضیات مالی و کاربردها سمنان*، دانشگاه سمنان، ۱۱ بهمن‌ماه.

خضری پورقرایی، رشید و ستاردباغی، صفا. (۱۳۹۱). یک روش عددی برای ارزش‌گذاری اختیار معاملات اروپایی در بازارهای غیرنقدی. *سومین کنفرانس ریاضیات مالی و کاربردها سمنان*، دانشگاه سمنان، ۱۱ بهمن‌ماه.

محمدی، شاپور و آسیما، مهدی. (۱۳۹۸). قیمت‌گذاری ریسک غیرسیستماتیک از طریق تبیین ریسک آربیتراژ. *راهبرد مدیریت مالی*، ۷(۳)، ۲۴-۱.

نبوی چاشمی، سیدعلی و قاسمی چالی، جابر. (۱۳۹۳). کاربرد درخت دوجمله‌ای در محاسبه پارامترهای حساسیت ریسک و قیمت اختیار معامله در بورس سهام. *پژوهشگر (مدیریت)*، ۱۱(۳۴)، ۱۱۸–۱۰۱.

Ahmadi Chehreh Bargh, S. (2018). The feasibility studies of using the Greeks' sensitivity formula in the Iranian capital market. *Financial Engineering and Portfolio Management*. 9(36), 17-29. (In persian).

Aichinger, M. & Binder, A. (2013). A workout in computational finance. United Kingdom, John Wiley & Sons.

Anderson, D. .F. (2018). An efifcient finite difference method for parameter. sensitivities of continuous time markov Chains. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 50(5), 2237-2258.

Blyth, S. (2014). An introduction to quantitative finance. United Kingdom, Oxford University.

Broadie, M. & Jain, A. (2008). Pricing and hedging volatility Derivatives». *The Journal of derivatives*, 15(3), 7-15.

Causon, D. M & Mingham, C. G. (2010). Introductory Finite Difference Methods for PDEs. English, Ventus Publishing.

Choudhry, M. (2013). An introduction to value-at-risk. NewYork, Wiley.

Gracianti, G. (2018). Computing Greeks by finite difference using Monte Carlo simulation and variance reduction techniques. *Journal of Mathematics and Natural Sciences*, 25(1), 80-93.

Haug, E. (2007). The complete guide to option pricing formulas. New York, McGraw-Hill.

Hull, J. C. (2011). Options, futures and other derivatives. NewJersey, Prentice Hall.

Jelodari Mamaghani, M. & Paykar, J. (2013). The Applications of Monte Carlo Method in the computations of Greeks. 3rd Conference on Financial Mathematics and Applications, Smnan, Iran. 30-31January. (In persian).

Jeong, D., Kim, Y. R., Lee, S. & Choi, Y. (2015). A fast and robust numerical method for option prices and greeks in a jump-diffusion model. *Journal of the Korean Society of Mathematical Education*, 22(2), 159-168.

Jeong, D., Yoo, M. & Kim, J. (2017). Finite difference method for the black–scholes equation without boundary conditions. *Computational Economics*, 51(4), 961-972.

Khezripour Gharaei, R. & Sattar Dabaghi, S. (2012). A numerical method for valuing European trading options in non-cash markets. 3rd Conference on Financial Mathematics and Applications, Smnan, Iran. 30-31January. (In persian).

Kosowski, R. L. & Neftci, S. N. (2015). Principles of Financial Engineering. United Kingdom, Department of Finance Imperial College Business School Imperial College London, Third Edition.

Kwok, Y. K. (2015). Mathematical models of financial derivatives. NewYork, Springer Finance.

Kyng, T. J., Purcal, S. & Zhang, J. C. (2016). Excel implementation of finite difference methods for option pricing. *Spreadsheets in Education*, 9(3), 30-63.

Langtangen, H. P. & Linge, S. (2016). Finite difference computing with PDEs-a modern software approach, NewYork, Springer.

Mohammadi, S. & Asima, M. (2019). Idiosyncratic volatility pricing by explaining arbitrage risk. *Journal of Financial Management Strategy*, 7(3), 1-24. (In persian).

Muroi, Y. & Suda, S. (2017). Computation of Greeks using binomial tree. *Journal of Mathematical Finance*, 7(3), 597-623.

Nabavi Chashmi, A. & Ghasemi Chali, J. (2014). Application of binomial tree in calculating the risk sensitivity parameters and option price in stock exchange. *Pajouheshgar (Management)*, 11(34), 101-118. (In persian).

Neisy, A. & Salmani Gharaei, K. (2018). Financial engineering and market modeling with MATLAB software approach. Tehran, Allameh Tabatabai University Press, first edition. (In Persian).

Paunovic, J. (2014). Options, greeks, and risk management. *Singidunum Journal of Applied Sciences*, 11(1), 74-83.

Pishbahar, E., Baghestani, M. & Dashti, G. (2018). Application of binomial tree in determining the price of an asian option and calculation of risk-sensitive parameters (case study: soybean meal and corn). *Journal of Agricultural Economics & Development*, 32(1), 1-16. (In Persian).

Siskos, D. V. (2015). Numerical methods for valuing advanced option contracts. *Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=2967274 or http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2967274*.

Wilmott, P. (2007). Introduces quantitative finance. United Kingdom, John Wiley & Sons.

Zhang, B., Yu, Y. & Wang, W. (2015). Numerical algorithm for Delta of Asian option. *The Scientii c World Journa*, 1(1), 1-6.