دانشگاه فرهنگیان
دوفصلنامه علمی ـ پژوهشی
مطالعات آموزشی و آموزشگاهی
سال پنجم، شماره پانزدهم، پاییز و زمستان ۱۳۹۵
تاریخ چاپ: تابستان ۱۳۹۷

تدریس، با تأکید بر راه‌حل‌های چندگانه: گامی به سمت تقویت استدلال ریاضی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۰۹/۱۰
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۰۸/۱۵

زهرا رحیمی[۱]
ابراهیم طلایی[۲]*
ابراهیم ریحانی[۳]
هاشم فردانش[۴]

چکیده

هدف کلی پژوهش حاضر، بررسی میزان اثربخشی آموزش با تأکید بر راه‌حل‌های چندگانه، در تقویت مهارت استدلال ریاضی در دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه است. در این مطالعه، ۴۷ دانش‌آموز در گروه آزمایشی و ۵۴ دانش‌آموز در گروه کنترل، شرکت داشتند که همگی در سال تحصیلی ۹۵ــ۱۳۹۴، در مدارس دولتی دخترانهٔ منطقهٔ ۳ آموزش و پرورش شهر تهران، در دو رشتهٔ ریاضی و تجربی مشغول به تحصیل بودند. ابزار این مطالعه، آزمونی است که بر مبنای دسته‌بندی میازاکی (۲۰۰۰) شامل استدلال استنتاجی و استقرایی است. روش پژوهش، کنش‌پژوهی است که در بطن آن از روش شبه‌آزمایشی استفاده شده است. تحلیل نتایج نشان می‌دهد آموزش به کمک راه‌حل‌های چندگانهٔ مهارت، استدلال را در گروه دانش‌آموزان ریاضی افزایش می‌دهد؛ ولی تغییرات میانگین در گروه تجربی اندک است. تحلیل کیفی نتایج نیز نشان می‌دهد بسیاری از دانش‌آموزان فهم درستی از اثبات، ضرورت اثبات، ویژگی‌های اثبات معتبر و تمایز بین نمایش و محتوای اثبات ندارند و بسیاری از آنها با مفهوم متغیر، مأنوس نیستند و به‌خوبی موفق به گذر از تفکر حسابی به تفکر جبری نشده‌اند و نیز در گفتمان ریاضی، قوی عمل نمی‌کنند.

کلمات کلیدی: راه‌حل‌های چندگانه، استدلال ریاضی، کنش‌پژوهی.

۱. دکتری برنامه‌ریزی درسی دانشگاه تربیت مدرس
۲. استادیار گروه تعلیم و تربیت دانشگاه تربیت مدرس e.talae@modares.ac.ir
۳. دانشیار گروه آموزش ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی
۴. دانشیار گروه تعلیم و تربیت، دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه

ریاضیات از دیرباز بخش جدایی‌ناپذیر برنامه‌های درسی مدارس بوده و برخی آن را دروازهٔ موفقیت یا شکست فارغ‌التحصیلان دبیرستانی و رمز موفقیت حرفه‌ای آنان دانسته‌اند (شورای ملی تحقیقات[1] آمریکا، ۲۰۰۱). باوری که برخی آموزشگران را به سمت راه‌های میانبری سوق داده است که برای سریع‌تر رسیدن به مقصد، حفظ و تکرار رویه‌ها را به‌جای فهم آن برگزیده‌اند و به‌تدریج، ریاضیات را به سطحی ابزاری و رویه‌ای فروکاسته‌اند. حال آن‌که مهم‌ترین هدف تدریس ریاضی، آموزش استدلال منطقی است و این فرایند استدلال ریاضی است که می‌تواند درک و بینش افراد را در پدیده‌های مختلف توسعه دهد (شورای ملی معلمان ریاضی[2] امریکا، ۲۰۰۰). از این رو، از نظام آموزشی انتظار می‌رود به‌جای انتقال صرفِ اطلاعات به دانش‌آموزان، موقعیت‌های مناسبی را برای پرورش تفکر و توسعهٔ توانایی استدلال منطقی آنان فراهم آورد (حاجی‌حسینی‌نژاد و بالغی‌زاده، ۱۳۸۹؛ ملکی و حبیبی‌پور، ۱۳۸۵). بر اساس منابع و به‌رغم اصالتِ چنین رسالتی، بیشتر دانش‌آموزان بر حفظ رویه‌ها تکیه دارند تا فهم آن و اغلب، درک و فهم مناسبی از فرایند استدلال و اثبات‌های معتبر در ریاضیات مدرسه‌ای ندارند (ریحانی وهمکاران، ۱۳۹۱).

افزون بر این، نتایج مطالعات تیمزِ ۱۹۹۹ ـ ۲۰۱۱ و نیز تیمزِ پیشرفتهٔ ۲۰۰۸، جایگاه ایران را در تمامی این سال‌ها و در هر دو پایهٔ چهارم و هشتم، در هر سه حیطهٔ دانستن[3]، به کار بستن[4] و استدلال[5]، به‌طور معناداری پایین‌تر از میانگین مقیاس تیمز نشان می‌دهد [6](گزارش نتایج تیمز و پرلز، ۱۳۹۱). به نظر می‌رسد آموزش ریاضی در ایران، از رسالت اساسیِ تقویت تفکر و قدرت استدلال افراد، فاصله گرفته و در اغلب موارد به آموزش روندها، رویه‌ها و تکنیک‌ها اکتفا شده است. بنابراین، پرسش اساسی این است که با اتخاذ کدام رویکرد و چه راهکاری می‌توان راهی به سمت رهایی از این بحران گشود؟ مواجهه با چنین موقعیتی، اهمیت تبیین و توسعهٔ رویکردهای جدید را برای توسعهٔ دانش

1. National Researches Council (NRC)
2. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)
3. Knowing
4. Applying
5. Reasoning

۶. میانگین نمرات ریاضی پایه چهارم در این سال‌ها (به استثنای سال ۱۹۹۹) به‌ترتیب ۳۸۷، ۳۸۹، ۴۰۲ و ۴۳۱ و در پایه‌ی هشتم ۴۱۸، ۴۲۲، ۴۱۱، ۴۰۳ و ۴۱۵ بوده است. لذا همان‌طور که این اعداد نشان می‌دهند، در پایه‌ی چهارم هر چند میانگین نمرات، روندی رو به رشد داشته، اما در بهترین حالت، هنوز با میانگین بین المللیِ ۵۰۰، اختلافی به اندازه‌ی ۶۹ نمره وجود دارد. در پایه‌ی هشتم این اختلاف به ۷۸ نمره می‌رسد، ضمن آنکه تعداد روندهای کاهشی بیش از روندهای افزایشی است.

ریاضی معلمان برجسته می‌کند (کمیتهٔ یادگیری ریاضی، ۲۰۰۱) و رویکرد تازه‌ای لازم است که ریاضیات را با رسالت دیرینه‌اش آشتی دهد و دانش‌آموزانی بپرورد که ریاضی‌وار بیندیشند و در برخورد با مسایل، همان‌گونه که آرمان برنامهٔ درسی ملی (۱۳۹۱: ۳۳) است، به‌طور منطقی استدلال کنند و قدرت تجزیه و انتزاع داشته باشند.

یکی از رویکردهای آموزشی نویدبخش که پتانسیل مناسب و ارزشمندی در بهبود تلاش‌های یادگیری دانش‌آموزان دارد، مقایسهٔ راه‌حل‌های چندگانه[1] برای حل یک مسأله است (لینچ و استار[2]، ۲۰۱۴؛ استار و ریتل[3]، ۲۰۰۸) به تبعِ استفاده از این روش، حل مسأله با اتخاذ رویکردی واحد و رسیدن به پاسخ، خاتمه نمی‌یابد؛ بلکه تلاش می‌شود از زوایای مختلف به مسأله نگاه شود و راه‌حل‌های متعدد، ارائه و ارزیابی می‌شود؛ اما به‌رغم پافشاری اسناد سیاست‌گذاری آموزشی در حیطهٔ آموزش ریاضی، بر آموزش دانش‌آموزان با راه‌حل‌های چندگانه (NRC, 2001; NCTM, 2006; CCSS[4], 2010)، و با وجود مطالعات متعدد که تشویق دانش‌آموزان به استفاده از این روش را کلید دست‌یابی به دانش عمیق ریاضی می‌دانند (اسکایلو و کروگ[5]، ۲۰۱۴)، برخی محققان معتقدند این روش، یادگیرندگان را با سردرگمی مواجه می‌کند و با وجود توافقات حرفه‌ای آشکار در به کارگیری این رویکرد، بحث در این خصوص که این روش برای تمامی دانش‌آموزان مفید و کارآمد است یا فقط برای دانش‌آموزانی با توانایی بالای علمی، عملی است، ادامه دارد (لینچ و استار، ۲۰۱۴).

به‌هر حال از یک سو، مواجهه با نظرات موافق و مخالف با کاربرد استفاده از چند راه‌حل برای حل یک مسألهٔ ریاضی و از دیگر سو، تألیف کتاب‌های درسی جدید در حوزهٔ ریاضی با این شیوه، بر ضرورت آزمون عملی این رویکرد صحه می‌گذارد. بنابراین، هدف کلی این مطالعه، بررسی میزان موفقیت و اثربخشی آموزش، با تأکید بر راه‌حل‌های چندگانه بر استدلال ریاضی دانش‌آموزان است. این مقایسه به استناد مطالعاتی که این روش را تنها برای دانش‌آموزان با توانایی زیادتر ریاضی مناسب می‌دانند (برای نمونه لینچ و استار، ۲۰۱۴؛ لیکین، ۲۰۱۱)، در دو رشتهٔ ریاضی و تجربی انجام

1. Multiple solutions
2. Lynch and Star
3. Star & Rittle
4. Common Core State Standards for Mathematics
5. Schukajlow & Krug

شده است تا امکان بررسی تأثیرات این روش روی دانش‌آموزان با مهارت بیشتر و پایین‌تر در درس ریاضی فراهم شود.

مبانی نظری و پیشینهٔ پژوهشی

استدلال ریاضی: استدلال را به‌طور کلی هماهنگی شواهد، باورها و اندیشه‌ها برای نتیجه‌گیری دربارهٔ آنچه صحت دارد، تعریف کرده‌اند (لیتون[1]، ۲۰۰۳: ۳) و استدلال ریاضی را توانایی تفکر منسجم و منطقی و استنتاج از حقایق ریاضی آشنا یا مفروض دانسته‌اند (مانسی[2]، ۲۰۰۳: ۹). در این مطالعه، بر اساس طبقه‌بندی میازاکی (۲۰۰۰)، استدلال ریاضی شامل استدلال استنتاجی و استدلال استقرایی است[3]. او با بررسی توانایی اثبات دانش‌آموزان در مقطع دبیرستان، مدلی با دو بعد نمایش[4] و محتوا[5] و چهار سطح اثبات ارائه می‌کند که در جدول ۱ قابل مشاهده است:

جدول۱: طبقه‌بندی سطوح اثبات دانش‌آموزان از دیدگاه میازاکی (۲۰۰۰)

محتوا نمایش	استدلال استقرایی	استدلال استنتاجی
زبان رسمی استدلال	اثبات D	اثبات A
زبان‌های دیگر، تصاویر و وسایل قابل استفاده	اثبات C	اثباتB

فرایند استدلال و اثبات در تحقیقات مرتبط با آموزش ریاضی به کرّات بررسی شده است؛ برای نمونه هارل و ساودر[6]، ۱۹۹۸؛ میازاکی، ۲۰۰۰؛ هیلی و هویلز[7]، ۲۰۰۰؛ استایلیانیدز[8]، ۲۰۰۵، ۲۰۰۷؛ استایلیانیدز و استایلیانیدز، ۲۰۰۸؛ چین و لین[9]، ۲۰۰۹. متخصصان تعلیم و تربیت، پرورش استدلال را رسالت اساسی ریاضی و زیربنای تفکر اندیشمندانه و منطقی دانسته‌اند (ملکی و حبیبی‌پور، ۱۳۸۵؛ حاجی

1. Leighton
2. Mansi
۳. این مبنا تنها در طراحی ابزار استفاده شده و در نمره‌گذاری آزمون‌ها از شیوهٔ او تبعیت نشده است.
4. Representation
5. Content
6. Harel & Sowder
7. Healy & Hoyles
8. Stylianides
9. Chin & Lin

حسینی‌نژاد و بالغی‌زاده، ۱۳۸۹)؛ اما بسیاری از مطالعات مؤید آن است که اغلب دانش‌آموزان در درک، فهم و ساخت اثبات و استدلال‌های منطقی در همهٔ سطوح تحصیلی با مشکل مواجهند (هارل و ساودر، ۱۹۹۸؛ هیلی و هویلز، ۲۰۰۰؛ رکیو و گودینو[1]، ۲۰۰۱؛ استایلیانیدز، ۲۰۰۵، ۲۰۰۷؛ وارجیس[2]، ۲۰۰۷؛ دی‌وانس پرونسن[3]، ۲۰۰۸؛ پاداک[4]، ۲۰۰۹) و بیشتر بر حفظ رویه‌ها تکیه دارند تا فهم آن و اغلب آنان از سؤالاتی که آن‌ها را درگیر حتی ساده‌ترین اثبات‌ها می‌کند، می‌گریزند و ترجیح می‌دهند به جای آن، سراغ سؤالات رویه‌ای و الگوریتمی ــ که ممکن است پیچیده‌تر هم باشند، بروند (تال[5]، ۱۹۸۹، به‌نقل از ریحانی و همکاران، ۱۳۹۱)؛ بدون آن‌که درک درستی از اثبات آن گزاره داشته باشد یا به طور کامل از درستی روش، قانع شده باشد (وبر[6]، ۲۰۰۵، ۲۰۰۴). حال آن‌که وقتی ریاضیات به عنوان علمی مستدل یاد گرفته می‌شود، دانش به‌دست‌آمده، حتی موقعی‌که حافظه، رویه‌ها را فراموش می‌کند، به‌راحتی می‌تواند بازسازی شود (بال و باس[7]، ۲۰۰۳) و مسائل رویه‌ای و الگوریتمی، به‌ندرت موجب گسترش تفکر اصیل ریاضیات در دانش‌آموزان می‌شوند (برودیه[8]، ۲۰۱۰).

راه‌حل‌های چندگانه: در این مطالعه، تأکید بر راه‌حل‌های چندگانه حین آموزش، رویکردی مؤثر در افزایش توانمندی دانش‌آموزان در استدلال ریاضی، فرض شده است. از نگاه این مطالعه آموزش، خلق معنا در ذهن دانش‌آموز است و نه انتقال آن به ذهن او و حین آموزش به جای رعایت مراحلی مشخص، بر اصولی کلی برای یادگیری، نظیر تشویق به تملک و داشتن نظر در فرایند یادگیری، استفاده از انواع روش‌های یادگیری و نیز تقدیر از دیدگاه‌های مختلف تأکید می‌شود (فردانش، ۱۳۸۳). قرارگرفتن در چنین فضایی، دانش‌آموز را از حالت انفعالی پذیرش خارج کرده و این باور قدیمی که برای هر پرسش، پاسخ درستی منحصربه‌فرد موجود است که آن را باید نزد معلم جست، فرو می‌ریزد.

---

1. Recio & Godino
2. Varghese
3. Dee Vanspronsenz
4. Paddack
5. Tall
6. Weber
7. Ball & Bass
8. Brodie

تأکید بر راه‌حل‌های چندگانه، رویکردی است که بیشتر صاحب‌نظران حیطۀ آموزش ریاضی در خارج از مرزهای ایران بر آن تمرکز دارند و به‌خصوص در سال‌های اخیر مقالاتی در خصوص قابلیت‌های ویژۀ آن در تقویت مهارت‌ها و نگرش‌های ریاضی دانش‌آموزان و حتی معلمان ریاضی به رشتۀ تحریر درآمده؛ اما در داخل کشور پژوهش مشخصی را به خود اختصاص نداده است.

این رویکرد حاوی بایستگی یا نوعی پتانسیل آشکار برای حل مسأله به روش‌های مختلف است. در حوزۀ موضوعی ریاضی، تفاوت بین این راه‌حل‌ها در سه محور بازنمایی‌های متفاوت از یک مفهوم ریاضی، ارائۀ تعاریف و ویژگی‌های متفاوت برای یک مفهوم خاص در ریاضی یا نگرش به یک مقوله از شاخه‌های متفاوت ریاضی، انعکاس خواهد یافت (لیکین و لو، ۷۷۶:۲۰۰۷)؛ بدین‌ترتیب مسیر برای ورود بازنمایی‌های[1] متفاوت هموار خواهد شد. غنای هرچه بیشترِ تصویر ذهنی ساخته‌شده از مفهوم، به موفقیت بیشتر شخص در یادگیری منجر خواهد شد و حرکت از یک بازنمایی ریاضی به بازنمایی دیگر و تنوع فعالیت‌ها می‌تواند بستر ذهن دانش‌آموز را برای تفکر و فهمی عمیق‌تر مهیا سازد (هنینگسن و استین[2]، ۱۹۹۷). اما یافته‌های مطالعات در حوزۀ راه‌حل‌های چندگانه، مواجهه‌های متفاوتی را به‌تصویر می‌کشد. برخی مطالعات، استفاده از این رویکرد را برای دستیابی به تسلط بیشتر در دانش ریاضی به رسمیت شناخته‌اند و برآنند که آگاه‌کردن دانش‌آموزان، از این‌که هر مسأله می‌تواند از راه‌های بسیار به نتیجه برسد و تشویق ایشان به گام‌گذاشتن در هر یک از این مسیرها، نهایتاً کیفیت فهم ریاضی را در آنان افزایش می‌دهد. طرفداران این رویکرد معتقدند استفاده از مسائلی با تنها یک جواب درست، دانش‌آموز را از تجربۀ مسیرهای متفاوت منصرف و دلسرد می‌کند و او را از کاوش در ایده‌های متنوع باز می‌دارد. ایشان این رویکرد را فرصتی ویژه، برای به فعل رساندن خلاقیت ریاضی دانش‌آموزان و فهم عمیق‌تر ایشان، از مفاهیم ریاضی برشمرده‌اند و آن را هم ابزاری آموزشی و هم ابزاری پژوهشی دانسته‌اند که توانی ویژه در ارزیابی دانش ریاضی دانش‌آموزان دارد (لیواووینبرگ و لیکین[3]، ۲۰۱۲). ابزاری آموزشی و پژوهشی که با داشتن ظرفیتی ویژه،

---

1. Representation
2. Henningsen and Stein
3. Leikin & lev

پیامدهای مثبت بسیاری را در حوزهٔ مهارت‌ها و نگرش‌ها، هم در دانش‌آموزان و هم در معلمان به همراه دارد.

به موازات همین اقبال و به‌رغم توصیه‌های بسیاری از متخصصین و آموزشگران حوزهٔ آموزش ریاضی بر استفاده از این روش، برخی پژوهشگران نیز بر آنند که ارائهٔ مفاهیم ریاضی و به‌خصوص هندسی از چشم‌اندازهای متفاوت، نه‌تنها فهم عمیق هندسی را تضمین نمی‌کند، به واسطهٔ محدودیت‌های زمانی این رؤیا محقق نخواهد شد و علاوه بر آن، ارائهٔ تصاویر چندگانه به چشمی که برای «دیدن» آموزش ندیده است، به ابهام بیشتر تصویر اولیه دامن خواهد زد (وو[1]، ۱۹۹۶). بنابراین، برخی آموزشگران با استناد به این‌که نتوانسته‌اند چنین رویکردی را در بازهٔ زمانی کوتاه کلاس درس پیاده کنند، آن را باعث سردرگم‌شدن دانش‌آموزانِ به‌خصوص ضعیف‌تر دیده‌اند و از اجرای آن در کلاس‌های درس امتناع می‌ورزند (لیکین، ۲۰۱۱). برخی مخالفان نیز برآنند که آموزش به دانش‌آموزان ضعیف‌تر تنها در صورتی اثربخش خواهد بود که مجموعه‌ای محدود و ساده از قوانین به آنان آموزش داده شود (لینچ و استار، ۲۰۱۴).

با وجود مخالفت‌های موجود با این ایده، تألیف کتب درسی جدید در حوزهٔ ریاضی با تأکید بر استفاده از راه‌حل‌های چندگانه و ضرورت آزمون عملی این رویکرد، در بافتی طبیعی و موقعیتی عملی، بایستگی انجام این مطالعه را بارز می‌کند. در این مطالعه از آن رو که پیوند میان کنش و اندیشه مدنظر بود، مجالی فراهم شد که پژوهشگران در مقام معلم پا به صحنهٔ عمل بگذارند و توان یا ضعف این رویکرد را در تقویت مهارت استدلال دانش‌آموزان نشان دهند.

روش پژوهش

برای بررسی میزان موفقیت روش تدریس بر مبنای راه‌حل‌های چندگانه، در تقویت استدلال دانش‌آموزان، از آن رو که لازم بود در بافت طبیعی و واقعی کلاس درس اثربخشی این رویکرد آزمون شود، از بین روش‌های پژوهشی که می‌توانست پاسخ‌گوی نیازهای عرصهٔ عمل باشد، روش کنش‌پژوهی برگزیده شد. این روش شامل چهار مرحلهٔ

1. Wu

برنامه‌ریزی[1]، عمل[2]، مشاهده[3] و بازاندیشی[4] (کمیس و همکاران[5]، ۲۰۰۴) و مبتنی بر این فلسفه است که تحقیق نباید فعالیتی باشد که به‌طور مجزا از جامعهٔ موردمطالعه صورت گیرد (ادیب حاج‌باقری و همکاران، ۱۳۹۰).

مراحل اجرای روش

برای پایبندی به چرخهٔ چهارمرحله‌ای **برنامه‌ریزی، عمل، مشاهده و بازاندیشی**، در مرحلهٔ برنامه‌ریزی ابتدا دو کلاس ریاضی و تجربی در پایهٔ دوم متوسطه، در یکی از مدارس دولتی تهران انتخاب شدند. به علت امکان‌نداشتن انتخاب تصادفی اعضای نمونه به اقتضای رعایت بافت طبیعی و واقعی که از ملزومات کنش‌پژوهی است، انتخاب این دو کلاس به شکل هدفمند انجام شد. پس از انتخاب نمونه، درس ریاضیات ۲ به دلیل قابلیت مناسب آن در تدریس به کمک راه‌حل‌های چندگانه انتخاب شد و طرح درس‌های روزانه برای آموزش به مدت یک ترم تحصیلی بر این اساس تنظیم شد و متخصصین این حوزه آن را تأیید کردند. این طرح‌درس‌ها، در واقع پیش‌بینی‌کنندهٔ حوادث بین معلم و دانش‌آموزان در ظرف زمانی هفتادوپنج‌دقیقه‌ایِ کلاس درس و به مثابهٔ راهنمای عمل، تعیین‌کنندهٔ خط مشی کلاس درس است.

در مرحلهٔ عمل و اجرا، به دلیل سیال‌بودن کلاس‌های درس و پیچیدگی رفتارهای انسانی، پایبندی به اجرای صددرصدی طرح‌درس‌ها ممکن به نظر نمی‌رسید؛ اما تلاش بر این بود که این پایبندی به شکل حداکثری اتفاق بیفتد و در مدت زمان محدود کلاس درس، به انواع راه‌حل‌های ارائه‌شدهٔ دانش‌آموزان بها داده شده است، تمامی آنها بررسی و ارزیابی می‌شود. ضمن اجرا، سعی بر آن بود که از دو ضعف اجتناب شود، اول این که عنصری از عناصر این رویکرد، در مراحل تدریس از قلم نیفتد و دیگر آن که عنصری که در این رویکرد جایی ندارد، حین اجرا به آن اضافه نشود؛ به این معنا که اگر این مطالعه مدعی است این روش تدریس، به فرایندهایی نظیر گفتمان ریاضی و تفکر با صدای بلند و بازنمایی‌های چندگانه اجازهٔ بروز و ظهور می‌دهد، حتماً حین اجرا،

1. Plan
2. Act
3. Observe
4. Reflect
5. Kemmis, McTaggart and Retallick

زمینه برای طرح این پتانسیل‌ها آماده باشد و در عین حال از کاربرد سایر تکنیک‌ها و مهارت‌هایی که با این روش تدریس قرابت ویژه‌ای ندارد، تا حد ممکن صرف‌نظر شود.

در مرحلهٔ مشاهده، لازم بود که فرایند عمل، بازبینی شود؛ بنابراین نگرشی دوباره از چشم‌اندازهای متفاوت، به آنچه در کلاس درس اتفاق می‌افتد، ضروری به نظر می‌رسید. چشم‌اندازهای مختلفی که هر کدام بخشی از پازل عمل تربیتی را تکمیل می‌کنند. بدین‌ترتیب پس از کسب مجوز قانونی و دریافت رضایت‌نامه از اولیای تمامی دانش‌آموزان[1]، از همهٔ جلسات تدریس، ضبط ویدئویی به عمل آمد. علاوه بر ضبط ویدئو و بازبینی آن به هدف تشخیص نقاط قوّت و ضعف پس از هر جلسهٔ آموزشی، یادداشت‌نگاری هفتگی دانش‌آموزان پس از پایان درس، لنز دیگری بود که برای مشاهدهٔ دقیق‌تر و وسیع‌ترِ اتفاقات کلاس درس انتخاب شد. در میان این یادداشت‌ها، دانش‌آموزان با ذکر تفاوت کلاس ریاضی کنونی، با کلاس‌های ریاضی که در سال‌های گذشته تجربه کرده بودند، تلویحاً شواهدی را در تأیید استفاده از راه‌حل‌های چندگانه و علاوه بر آن راهنمایی برای بهبود عمل تدریس، فراهم می‌آوردند. در نهایت برآیند بازخوردهای حاصل از بازبینی و تحلیل تصاویر ضبط‌شده از چشم‌اندازهای متفاوت، در مرحلهٔ پیشین، به عنوان آخرین مرحله از کنش پژوهشی موسوم به بازاندیشی، رهنمون‌هایی را برای بهبود عمل تدریس در جلسات بعد فراهم می‌کرد.

در بستر این مطالعه و در راستای بررسی وضعیت دانشی دانش‌آموزان و مقایسهٔ آن، پیش و پس از قرار گرفتن در معرض رویکرد آموزشی مدنظر، پیش از آغاز دورهٔ آموزشی و پس از پایان آن، آزمون سنجش استدلال به شکل پیش‌آزمون و پس‌آزمون روی گروه مداخله برگزار شد و علاوه بر آن، آزمون استدلال روی گروه دیگری موسوم به گروه کنترل، که تحت آموزش با رویکرد راه‌حل‌های چندگانه نبودند، اجرا شد.

آزمودنی‌ها

شرکت کنندگان این مطالعه، به فراخور الزامات کنش‌پژوهی و ضرورت انجام پژوهش در بافتی طبیعی و واقعی، نمونه‌ای است در دسترس، شامل ۴۷ دانش‌آموز دختر دبیرستانی (۲۰ نفر رشتهٔ ریاضی، ۲۷ نفر رشتهٔ تجربی) در گروه آزمایشی و ۵۴ دانش‌آموز (۲۰

---

۱. اولیای دو نفر از دانش‌آموزان به ضبط ویدیویی رضایت نداشتند، لذا این دانش‌آموزان هنگام ضبط فیلم در مکانی مستقر می‌شدند که در زاویهٔ دید دوربین نباشند.

دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی و ۳۴ دانش‌آموز رشتهٔ تجربی) در گروه کنترل. برای انتخاب گروه کنترل، به هدف انتخاب گروه همتای مناسب و کاهش سوگیری‌های احتمالی، با مشورت مدیر گروه ریاضی منطقهٔ آموزش و پرورش مربوط، سه مدرسهٔ دولتی در همان منطقه، با شرایط آموزشی یکسان و نزدیک به گروه آزمایش انتخاب شد و از تمامی دانش‌آموزان این سه کلاس آزمون گرفته شد.

ابزار پژوهش و اجرا

استدلال در این پژوهش بر مبنای کار بسیاری از صاحب‌نظران حوزهٔ آموزش ریاضی نظیر میازاکی (۲۰۰۰)، متشکل از دو محور عمدهٔ استقرا و استنتاج است؛ به‌خصوص که دانش‌آموزان در این مقطع سنی با استدلال‌هایی نظیر برهان خلف، مثال نقض، استدلال بازگشتی و... آشنایی ندارند. در محور استدلال استنتاجی، سؤالات مربوط به بخش استدلال در مطالعات تیمز (۲۰۰۷، ۲۰۱۱) پایهٔ هشتم، پرسشنامهٔ میازاکی (۲۰۰۰) و سؤالات پرسشنامهٔ هیلی و هویلز (۲۰۰۰) در نظر گرفته شد.

در محور استقرا نیز، بانکی متشکل از مقالات معتبر و کتب صاحب‌نظران در این حوزه تهیه شد و سؤالات مربوط از آن استخراج شد. برای نمونه (نوارک[1]، ۲۰۰۲، ووگل[2]، ۲۰۰۵؛ کوپر و وارن[3]، ۲۰۰۸؛ زازکیس، لیلیدال و چرنوف[4]، ۲۰۰۸، آمیت و نریا[5]، ۲۰۰۸، کاراهر و همکاران[6]، ۲۰۰۸، تانیش و اوزدس[7]، ۲۰۰۹؛ ریورا و بکر[8]، ۲۰۰۸؛ وارنر و همکاران[9]، ۲۰۰۹؛ ریورا، ۲۰۱۰؛ یسیلدره و آکوک[10]، ۲۰۱۰؛ میسن و همکاران[11]، ۲۰۱۰، پیدمونته و بوخبیندر[12]، ۲۰۱۱؛ زاپارتا و کایهو[13]، ۲۰۱۳، جردک و

1. Newark
2. Vogel
3. Cooper & Warren
4. Zazkis, Liljedahl & Chernoff
5. Amit & Neria
6. Carraher & Martinez & Schliemann
7. Tanisli & Ozdas
8. Rivera & Becker
9. Warner, Schorr & Davis
10. Yesildere & Akkoc
11. Mason, Burton & Stacey
12. Pedemonte & Buchbinder
13. Zapatera & Callejo

همکاران، ۲۰۱۴؛ صدیقی، ۱۳۸۷؛ شجاعی، ۱۳۹۱)، گواه این استدلال است.

پس از تشکیل بانک سؤالات مربوط به استدلال استنتاجی و استقرایی، دو آزمون در قالب پیش‌آزمون و پس‌آزمون برای سنجش مهارت استدلال طراحی شد؛ سپس آزمون‌ها به متخصصان موضوعی و آموزشگران مجرب ارسال شد. بعد از کسب تأییدیه و اطمینان از روایی محتوا، پیش‌آزمون و پس‌آزمون استدلال به شکل آزمایشی در یکی از مدارس دخترانهٔ دولتی در منطقهٔ ۳ آموزش‌و پرورش تهران روی تعدادی از دانش‌آموزان، در دو رشتهٔ ریاضی و تجربی اجراشد که علاوه بر اطمینان از روان‌بودن واژه‌پردازی‌ها، از مدت زمان لازم برای برگزاری آزمون و همین‌طور تناسب سطح دشواری دو آزمون با هم و تناسب سطح دشواری هر آزمون با توانایی دانش‌آموزان، تخمین مناسبی حاصل شد. بعد از نمره‌گذاری پیش‌آزمون و پس‌آزمون و بررسی و تحلیل نتایج حاصل از اجرای آن در مرحلهٔ آزمایشی، آزمون‌ها اصلاح و ویرایش شد و بدین‌ترتیب نهایتاً در هر آزمون در قالب ۹ سؤال مجزا، ۴ سؤال به استدلال استنتاجی و ۵ سؤال به استدلال استقرایی اختصاص یافت. نمرهٔ کل آزمون استدلال ریاضی، ۲۳ لحاظ شد.

در اجرای آزمون اصلی پس از برگزاری مرحلهٔ آزمایشی، پیش‌آزمون استدلال، ۱۰ روز پس از شروع سال تحصیلی، برگزار شد. دورهٔ آموزشی حدود سه ماه طول کشید و طی آن درس ریاضی۲ با تأکید بر راه‌حل‌های چندگانه به دانش‌آموزان دو کلاس تجربی و ریاضی آموزش داده شد. دلیل انتخاب این درس، آن بود که هم قابلیت تدریس به‌کمک راه‌حل‌های چندگانه را به‌خوبی داشت و هم این که در برنامه‌ریزی هفتگی مدارس، پنج ساعت آموزشی را به خود اختصاص داده بود و چنین زمانی برای تحقق هدف این پژوهش، زمان مناسبی به نظر می‌رسید. امتیاز دیگر این درس، آن بود که در دو رشتهٔ تجربی و ریاضی به شکلی واحد و با کتاب درسی یکسان ارائه شده است و امکان مقایسهٔ اثربخشی رویکرد استفاده‌شده در این پژوهش را در دو گروه با توانایی زیادتر و توانایی کمتر، فراهم می‌ساخت. پس از اتمام دورهٔ آموزشی، پس‌آزمون روی گروه آزمایشی و گروه کنترل اجرا شد.

یافته‌ها

پس از برگزاری پیش‌آزمون و پس‌آزمون و تصحیح آن از سوی محققان، تحلیل نتایج در دستورکار قرار گرفت. در راستای هدف این مطالعه که تأثیر آموزش با راه‌حل‌های

چندگانه را بر مهارت استدلال، در دو گروه ریاضی و تجربی مدنظر داشت، به‌واسطهٔ آن که علاوه بر تفاوت بین گروه‌ها، تغییرات دو گروه، از پیش‌آزمون به پس‌آزمون و نیز بررسی برتری یک گروه نسبت به گروه دیگر از طریق اثر تعاملی مدنظر بود، از آزمون اندازه‌گیری مکرر (طرح یک‌بین ــ یک‌درون) استفاده شد. نتایج به‌دست‌آمده از شاخص‌های توصیفی در بین گروه مداخله (گروه ریاضی و تجربی) در استدلال، در دو مرحلهٔ اندازه‌گیری (قبل و بعد از آموزش) در جدول۲ گزارش شده است. نتایج نشان می‌دهد میانگین نمرهٔ استدلال دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی از پیش‌آزمون به پس‌آزمون به شکل معناداری افزایش یافته و در گروه تجربی، تغییرات میانگین اندک است.

جدول ۲: آماره‌های توصیفی استدلال در دو گروه مداخله در پیش‌آزمون و پس‌آزمون

گروه	**رشتهٔ ریاضی (۲۰ نفر)**		**رشتهٔ تجربی (۲۷ نفر)**	
متغیر	میانگین	انحراف استاندارد	میانگین	انحراف استاندارد
پیش‌آزمون	۱۴/۷۴	۴/۶۸	۱۳/۵۷	۵/۰۹
پس‌آزمون	۱۹/۲۳	۳/۲۵	۱۴/۹۲	۴/۸۹

آزمون همگنی واریانس (لوین)، برابری واریانس را در بین دو گروه مداخله در دو مرحلهٔ اندازه‌گیری تأیید کرد؛ بنابراین دو گروه از نظر پراکندگی یکسان بوده‌اند.

نتایج آزمون تحلیل واریانس تک‌متغیری (اثر بین آزمودنی)، نشان داد که بین دو گروه مداخله (تجربی و ریاضی) در محور استدلال (η^2=۰/۱۰، p = ۰/۰۳، $F_{(1,45)}$=۵/۱۷، MS_e=۳۳/۲۸) تفاوت معنادار وجود دارد و میانگین گروه ریاضی بیشتر است. نتایج اثر درون‌آزمودنی نیز نشان داد که از پیش‌آزمون به پس‌آزمون میانگین استدلال (η^2=۰/۳۲، p= ۰/۰۰۱، $F_{(1,45)}$=۲۱/۱۵، MS_e=۹/۲۳)، افزایش داشته است و با توجه به معناداری اثر تعاملی زمان× گروه (η^2=۰/۱۲، p= ۰/۰۲، $F_{(1,45)}$=۶/۱۵، MS_e=۹/۲۳) نتایج گویای این است که گروه دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی در مهارت استدلال، عملکرد بهتری نسبت به رشتهٔ تجربی داشته است (جدول۳).

جدول ۳: نتایج تحلیل واریانس تک‌متغیری با اندازه‌گیری مکرر

منبع اثر	SS	df	MS	F	P	η^2
اثر بین‌آزمودنی (گروه) استدلال	۱۷۲	۱	۱۷۲	۵/۱۷	۰/۰۳	۰/۱۰
خطای بین‌آزمودنی (گروه) استدلال	۱۴۹۷/۷۴	۴۵	۳۳/۲۸			
اثر درون‌آزمودنی (زمان) استدلال	۱۹۵/۲۶	۱	۱۹۵/۲۶	۲۱/۱۵	۰/۰۰۱	۰/۳۲
اثر تعاملی زمان×گروه؛ استدلال	۵۶/۸۲	۱	۵۶/۸۲	۶/۱۵	۰/۰۲	۰/۱۲
خطای درون‌آزمودنی استدلال	۴۱۵/۵۴	۴۵	۹/۲۳			

شکل۱ میانگین استدلال را در دو گروه دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی و تجربی نشان می‌دهد. همان‌طور که شکل گویای آن است، میانگین استدلال در پیش‌آزمون در دو گروه یکسان بوده است؛ اما در پس‌آزمون گروه دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی عملکرد بهتری داشته‌اند.

شکل۱: میانگین استدلال در پیش‌آزمون و پس‌آزمون در دو گروه دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی و تجربی

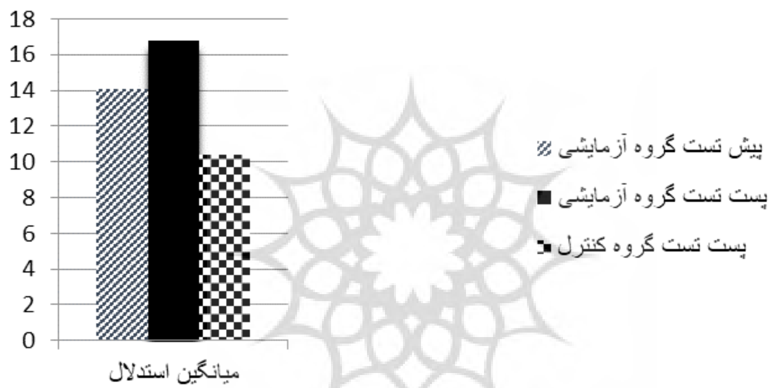
برای افزایش اعتباربخشی به نتایج تأثیر آموزش در پس‌آزمون، دو گروه معادل به‌عنوان گروه کنترل در کنار دو گروه مداخله، آزمون شدند و پس‌آزمون استدلال روی آنان اجرا شد. نتایج به‌دست‌آمده نشان داد میانگین گروه مداخلهٔ ریاضی، نسبت به گروه کنترل معادل گروه ریاضی در استدلال بیشتر است. این تغییرات در گروه تجربی نیز بررسی شد و در گروه تجربی نیز، میانگین استدلال در گروه مداخله بیشتر از گروه کنترل است؛ بنابراین

آموزش داده‌شده بر تقویت استدلال مؤثر بوده است.

در جدول ۶، دانش‌آموزان گروه آزمایشی و کنترل صرف‌نظر از رشتهٔ تحصیلی در پیش‌آزمون و پس‌آزمون مقایسه شده‌اند. نمودار۱، تصویر روشنی از این مقایسه به دست می‌دهد و گویای رشد نتایج در محور استدلال، از پیش‌آزمون به پس‌آزمون در گروه آزمایشی و نیز عملکرد بهتر دانش‌آموزان گروه آزمایشی نسبت به گروه کنترل در پس‌آزمون است.

جدول۶: میانگین نمرات استدلال در پیش‌آزمون و پس‌آزمون (گروه آزمایشی و کنترل)

میانگین آزمون استدلال	پیش‌آزمون گروه مداخله	پس‌آزمون گروه مداخله	پس‌آزمون گروه کنترل
	۱۴/۰۷	۱۶/۷۵	۱۰/۱۶



نمودار۱: مقایسهٔ میانگین نمرات کلی استدلال در پیش‌آزمون و پس‌آزمون (گروه آزمایشی و کنترل)

بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان

علاوه بر بهره‌وری از نگاه کمّی در تحلیل‌ها، نگاه کیفی و تحلیل سؤال به سؤال نتایج پیش‌آزمون و پس‌آزمون، نتایجی دیگر و مجالی دیگر برای تأمل در اختیار می‌نهد. سؤالات پیش‌آزمون و پس‌آزمون در این مطالعه به دو محور استدلال استنتاجی و استدلال استقرایی اختصاص داشت.

الف) استدلال استنتاجی. در پیش‌آزمون و پس‌آزمون، پنج سؤال از ۹ سؤال، به سنجش استدلال استنتاجی اختصاص داشت. در این گونه سؤالات انتظار می‌رود که شخص با استفاده از قوانین منطقی از مجموعه‌ای از فرضیات اولیه به نتایجی معتبر

دست پیدا کند (کریستو[1] و پاپاجرجیو[2]، ۲۰۰۷). پرسش‌های مربوط به این قسمت، به دو شکل مطرح شد. در برخی سؤالات، راه‌حل‌هایی برای مسئله ارائه و از دانش‌آموز خواسته شد که صحت‌و سقم هر کدام را بررسی کنند و برخی سؤالات نیز نیازمند ارائهٔ راه‌حل‌های خود دانش‌آموز است. در ادامه به‌نمونه‌ای از مدل اول در پیش‌آزمون و پس‌آزمون اشاره می‌شود (شکل ۷و ۶).

پیش‌آزمون

تعدادی از دانش‌آموزان کلاس دوم دبیرستان، سعی داشتند که درستی عبارت زیر را ثابت کنند:

"حاصل جمع هر دو عدد زوج، برابر عددی زوج می‌شود."

پاسخ‌های مختلف ۳ نفر از دانش‌آموزان را ذکر کرده‌ایم. هر کدام را به دقت بررسی کنید و نظر خود را راجع به آن بنویسید:

راه‌حل مریم:

۴+۴=۸ ، ۲+۲=۴ ، ۲+۴=۶ ۴+۲=۶ ۶+۴=۱۰ ، ۴+۶=۱۰ ، ۶+۲=۸ ، ۲+۶=۸

پس جمع دو عدد زوج همیشه یک عدد زوج است.

الف) آیا در راه‌حل مریم اشتباهی وجود دارد؟ ○ بله ○ خیر ○ نمی‌دانم

برای جواب خود دلیل بیاورید.

راه‌حل مینا:

می‌خواهیم جمع دو عدد زوج را پیدا کنیم، فرض می‌کنیم که a و b آن دو عدد زوج باشند، پس می‌توان آن‌ها را به صورت ۲m و ۲n نوشت که m و n دو عدد صحیح هستند. حالا این دو عدد را با هم جمع می‌کنیم و داریم:

$a+b = ۲m + ۲n = ۲(m+n)$ یعنی مجموع این دو عبارت، مضرب ۲ است، پس زوج است.

ب) آیا در راه‌حل مینا اشتباهی وجود دارد؟ ○ بله ○ خیر ○ نمی‌دانم

برای جواب خود دلیل بیاورید.

راه‌حل مهدیس:

اگر مانند شکل زیر اعداد زوج را دوتا دوتا دسته بندی کنیم، حاصل جمع، نیز به صورت دسته‌های دوتایی در کنار هم، قرار می‌گیرند. پس جمع دو عدد زوج، یک عدد زوج می‌شود.

ج) آیا در راه‌حل مهدیس اشتباهی وجود دارد؟ ○ بله ○ خیر ○ نمی‌دانم

د) به نظر شما بهترین راه‌حل مربوط به چه کسی است؟ چرا؟

شکل ۶: نمونه سؤال استدلال استنتاجی (برگرفته از هیلی و هویلز، ۲۰۰۰؛ از نوع بررسی راه‌حل ارائه‌شده) در پیش‌آزمون

پرسش نظیر این سؤال در پس‌آزمون بدین شکل است:

1Christou

2Papageorgiou

پس‌آزمون

تعدادی از دانش‌آموزان کلاس دوم دبیرستان، سعی داشتند که درستی عبارت زیر را ثابت کنند:

"حاصل جمع هر دو عدد زوج، برابر عددی زوج می‌شود."

راه‌حل‌های مختلف ۳ نفر از دانش‌آموزان را ذکر کرده‌ایم. هر کدام را به دقت بررسی کنید و نظر خود را راجع به آن بنویسید:

راه‌حل زهرا:
اعداد زوج، اعدادی هستند که بر۲ بخش پذیرند. پس وقتی دو عدد زوج را با هم جمع می‌کنیم، می‌توانیم عامل مشترک۲ را از هر دو عدد فاکتوربگیریم. یعنی جواب بر ۲ بخش پذیر است، پس جواب زوج است.

الف) آیا در راه‌حلی که زهرا برای اثبات ارائه کرده، اشتباهی وجود دارد؟ ○ بله ○ خیر ○ نمی‌دانم
برای جواب خود دلیل بیاورید.

راه‌حل آرزو:
اگر a یک عدد زوج باشد، عدد زوج بعدی $a+2$ است و جمع این دو عدد می‌شود:
$a+(a+2)=2a+2=2(a+1)$ یعنی جواب مضرب دو است پس زوج است و ما نشان داده‌ایم که جمع هر دو عدد زوج، زوج است

ب) آیا در راه‌حلی که آرزو برای اثبات ارائه کرده، اشتباهی وجود دارد؟ ○ بله ○ خیر ○ نمی‌دانم
برای جواب خود دلیل بیاورید.

راه حل سارا:
اگر x یک عدد فرد باشد پس $x-1$ و $x+1$ زوج هستند و داریم:
$x+1+x-1=2x$ یعنی جمع هر دو عدد زوج، عددی زوج است.

ج) آیا در راه‌حلی که سارا برای اثبات ارائه کرده، اشتباهی وجود دارد؟ ○ بله ○ خیر ○ نمی‌دانم
برای جواب خود دلیل بیاورید.

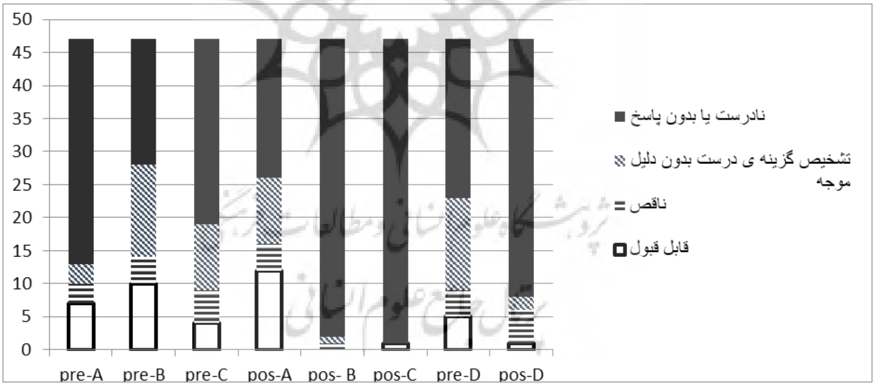
د) به نظر شما بهترین راه‌حل مربوط به چه کسی است؟ چرا؟

شکل۷: نمونه سؤال استدلال استنتاجی (برگرفته از هیلی‌و هویلز، ۲۰۰۰؛ از نوع بررسی راه‌حل ارائه‌شده) در پس‌آزمون

ایـن سـؤال، بـا الهـام از آزمـون هیلـی و هویلـز (۲۰۰۰) برای اثبات این فرض است که «جمع هر دو عدد زوج، عددی زوج است»، شش اثبات مختلف (در هر آزمون سه اثبات) به دانش‌آموزان ارائه کرده و از آنان می‌خواهد که صحت اثبات‌های ارائه‌شده را بررسی کننـد و از ایـن میـان، یکـی را با ذکـر دلیل به عنوان بهترین اثبـات برگزینند. از آنجا که این پرسش، مقولهٔ پیچیده‌ای را سؤال نکرده و از طرفی دانش‌آموز به جای آن که خود به دنبال یافتن پاسخ باشـد، کافی است که به بررسی صحت و سـقم پاسخ موجود بپردازد و انتظار می‌رفت بیشـتر دانش‌آموزان در پاسـخ‌گویی به آن موفق باشـند؛ حال آن کـه در عمـل، ۶۸٪ دانش‌آمـوان در پاسـخ بـه این سـؤال کاملاً ناموفـق بوده‌اند (جدول ۷ و نمودار۲)

جدول۷: پاسخ‌گویی به سؤال۱ در پیش‌آزمون و پس‌آزمون

		قابل قبول	ناقص	تشخیص گزینۀ درست بدون دلیل موجه	نادرست یا بدون پاسخ
پیش آزمون	الف	۷	۳	۳	۳۴
	ب	۱۰	۴	۱۴	۱۹
	ج	۴	۵	۱۰	۲۸
	د	۵	۴	۱۴	۲۴
پس‌آزمون	الف	۱۲	۴	۱۰	۲۱
	ب	۰	۱	۱	۴۵
	ج	۱	۰	۰	۴۶
	د	۱	۵	۲	۳۹
در مجموع		۴۰	۲۶	۵۴	۲۵۶
درصد		٪ ۱۰/۶	٪۷	٪۱۴/۴	٪۶۸



نمودار۲: پاسخ‌گویی به سؤال۱ در پیش‌آزمون و پس‌آزمون

در بررسی کیفی پاسخ‌های مربوط به هر پرسش مواردی تأمل‌برانگیز مشاهده می‌شود که به دلیل سهولت بررسی در قالب جدول ۸ و ۹ بدان اشاره می‌شود (جدول ۸ و ۹).

جدول۸: برخی پاسخ‌های نادرست به سؤال۱، بخش الف در پیش‌آزمون

<table dir="rtl">
<tr><td colspan="2">چرا مجموع دو عدد زوج، عددی زوج است؟</td></tr>
<tr><td colspan="2">راه‌حل مریم:
۸=۴+۴ ، ۴=۲+۲ ، ۶=۴+۲ ۶=۲+۴ ۱۰=۴+۶ ، ۱۰=۶+۴ ، ۸=۲+۶ ، ۸=۶+۲
پس جمع دو عدد زوج همیشه یک عدد زوج است.</td></tr>
<tr><td>پاسخ مورد انتظار</td><td>برخی از پاسخ‌های نادرست مشاهده‌شده</td></tr>
<tr><td rowspan="4">این راه‌حل نادرست است زیرا گزارهٔ داده‌شده را باید در حالت کلی ثابت کنیم و مثال‌زدن اثبات معتبری نیست.</td><td>برای این که بفهمیم جمله‌ای درست است یا نه، مثل مریم آن را امتحان می کنیم.</td></tr>
<tr><td>درست است، چون مریم به‌طور واضح و با مثال زدن عددی نشان داده که حاصل جمع هر دو عدد زوج، عددی زوج است.</td></tr>
<tr><td>زیرا من با چند مثال دیگری که برای خودم زدم به این موضوع پی بردم.</td></tr>
<tr><td>این راه درسته، چون عددهایی که با هم جمع شده زوج هستند و جواب هم زوج است.</td></tr>
</table>

جدول۹: برخی پاسخ‌های نادرست به سؤال۱، بخش ب و ج در پس‌آزمون

<table dir="rtl">
<tr><td colspan="2">چرا مجموع دو عدد زوج، عددی زوج است؟</td></tr>
<tr><td colspan="2">راه‌حل آرزو:
اگر a یک عدد زوج باشد، عدد زوج بعدی a + 2 است و جمع این دو عدد می‌شود:
= (a +۲) a + (a +۱) ۲ = ۲a + ۲
یعنی جواب مضرب دو است پس زوج است و ما نشان داده‌ایم که جمع هر دو عدد زوج، زوج می‌شود.</td></tr>
<tr><td>پاسخ مورد انتظار</td><td>برخی از پاسخ‌های نادرست مشاهده شده</td></tr>
<tr><td rowspan="9">این راه‌حل نادرست است زیرا فقط نشان داده است که جمع دو عدد زوج متوالی زوج است و گزارهٔ داده شده را در حالت کلی اثبات نکرده است.</td><td>درست است چون وقتی یک عدد زوج را با عدد بعد از آن که زوج است جمع می کنیم حاصل عددی می‌شود که آن هم مضربی از ۲ است.</td></tr>
<tr><td>(۱+ ۲)۲=۲+۴= (۲ +۲)+۲</td></tr>
<tr><td>خب اشتباهی وجود ندارد. امتحانش کردم درست بود.</td></tr>
<tr><td>راه‌حل صحیح است، زیرا اعداد زوج متوالی با جمع دو واحد جلو می‌روند و با جمع این دو و فاکتورگیری، چون پاسخ مضرب ۲ است، پس جواب زوج است.</td></tr>
<tr><td>به نظرم راه آرزو درست است. چون نتیجهٔ آخر یعنی (a + ۱)۲، ۱۰۰٪ زوج است، به خاطر اینکه ۲ قرار است در پرانتز ضرب شود.</td></tr>
<tr><td>تنها مشکلش فکر می کنم این است که جمع دو عدد زوج متفاوت نیست و به جای a تنها یک عدد زوج می‌توانیم بگذاریم.</td></tr>
<tr><td>این جواب درست است، زیرا آن را به زبان ریاضی نوشته و وقتی به جای a یک عدد زوج می گذاریم حل می‌شود.</td></tr>
<tr><td>مهم نیست که a چه عددی است و حاصل پرانتز چیست. این راه، ریاضی است و فرمول کلی است نه برای عددی خاص.</td></tr>
<tr><td>فکر می کنم درست است، زیرا راه‌حل فرمولی برای اثبات بهتر است.</td></tr>
</table>

ب) اسـتدلال اسـتقرایی. در سؤالات مربوط به استدلال استقرایی دانش‌آموزان باید با بررسی چند مثال و مورد خاص، درستی حدس خود را تأیید کنند و دلیلی برای درستی گـزارهٔ مدنظـر ارائـه کننـد (ادوارد،۱۹۹۷، نقـل شـده در مانسـی، ۲۰۰۳). نمونـه‌ای از این پرسش در پیش‌آزمون و پس‌آزمون در شکل ۸ آمده است.

پیش‌آزمون	پس‌آزمون
به عبارت‌های روبرو دقت کنید: ۳+ ۴ + ۵ - ۳ × ۴ ۶ + ۷ + ۸ - ۳ × ۷ ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ - ۳ × ۱۲ با توجه به این عبارت‌ها چه قانون کلی را می‌توان حدس زد؟ آن را بیان کنید.	به عبارت‌های روبرو دقت کنید: ۱ = ۱ ۱ + ۳ = ۲^۲ ۱ + ۳ + ۵ = ۳^۲ ۱+ ۳ + ۵ + ۷ = ۴^۲ با توجه به این عبارت‌ها چه قانون کلی را می‌توان حدس زد؟ آن را بیان کنید.

شکل ۸: نمونه‌ای از سؤالات مربوط به استدلال استقرایی در پیش‌آزمون و پس‌آزمون (میسن،۲۰۱۰)

در پاسـخ‌های مربـوط بـه ایـن سـؤال و سـؤالات مشـابه، به‌کرّات مشـاهده می‌شـود که دانش‌آموزان در ارائهٔ نمادین مفاهیم ریاضی و بیان آنچه در ذهن دارند، با مشکل مواجهند. نمایـش دو عـدد زوج بـا اشـکال نمادیـن x۲ و x۴ یـا x+۴ و x +۲ ، نمایـش اعـداد فرد بـه صـورت مضاربـی از عـدد ۳، یـا دسـته‌بندی سـه‌تایی اشـکال بـرای نمایش اعـداد فرد، نشـان‌دادن سـه برابـر k بـا نمـاد k^3 یـا نمایـش سـه عـدد صحیـح متوالـی بـا a۳ و a۲ و a شواهدی بر این مدعاست.

پاسخ به پرسش‌های تحقیق

این مطالعه در پاسخ به چگونگی اثربخشی آموزش به کمک راه‌حل‌های چندگانه بر توانایی اسـتدلال در دانش‌آموزان متوسـطه، انجام شـده اسـت. نتایج تحلیل آزمون‌های برگزارشده نشـان می‌دهد که اسـتفاده از این روش، توانسـته اسـت مهارت استدلال را در دانش‌آموزان افزایش دهد.

پرسش دوم به دنبال مقایسهٔ میزان اثربخشی این رویکرد بر مهارت استدلال دانش‌آموزان بـا مهـارت زیادتـر و کمتـر در درس ریاضی اسـت. نتایج تحلیل‌ها نشـان می‌دهد میانگین نمرهٔ استدلال دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی از پیش‌آزمون به پس‌آزمون افزایش یافته است؛ در

حالی‌که در گروه تجربی، تغییرات میانگین اندک است. نتایج اثر درون‌آزمودنی نیز نشان داد که از پیش‌آزمون به پس‌آزمون میانگین استدلال افزایش داشته و با توجه به معناداری اثر تعاملی زمان × گروه، گروه دانش‌آموزان رشتۀ ریاضی در مهارت استدلال، عملکرد بهتری نسبت به رشتۀ تجربی داشته‌اند.

بحث و نتیجه‌گیری

این مطالعه در راستای بررسی اثر روش تدریس با کمک راه‌حل‌های چندگانه بر تقویت استدلال دانش‌آموزان در دو گروه با مهارت زیادتر و کمتر طراحی شده است. افزایش معنادار مهارت استدلال در دانش‌آموزان، هم‌سو با مطالعاتی نظیر لینچ و استار (۲۰۱۴) و استار و جانسن (۲۰۰۸) است که مدعی‌اند مقایسۀ چند راه‌حل برای حل یک مسأله، تأثیری مثبت بر روند بهبود تلاش‌های یادگیری دانش‌آموزان دارد و استفاده از این روش را کلید دستیابی به دانش عمیق ریاضی می‌دانند (اسکایلو و کروگ، ۲۰۱۴). این روش هرچند درگروهی که از توانایی بیشتری در درس ریاضی برخوردارند، تأثیری به‌مراتب بهتر به‌همراه داشته، اما در گروه تجربی که مهارت کمتری در ریاضی داشته‌اند، نیز با شکست مواجه نشده است.

بر اساس برخی مطالعات، این روش یادگیرندگان را با سردرگمی مواجه می‌کند (لینچ و استار، ۲۰۱۴) و ارائۀ تصاویر چندگانه به ابهام بیشتر تصویر اولیه دامن خواهد زد (وو، ۱۹۹۶)؛ به همین لحاظ جایی برای این تردید می‌گشایند که این روش ممکن است برای تمامی دانش‌آموزان مفید و کارآمد نباشد یا فقط برای دانش‌آموزانی با توانایی علمی زیادتر، عملی باشد (لینچ و همکاران، ۲۰۱۴). نتایج این مطالعه در پاسخ به این تردید، هرچند مشکلات و چالش‌های استفاده از این روش را به تمامی رد نمی‌کند، اما در مجموع استفاده از این روش را در دانش‌آموزان با توانایی بیشتر در ریاضیات کاملاً مؤثر می‌داند و اثربخشی آن را در دانش‌آموزان با توانایی کمتر، رد نمی‌کند و البته پیاده‌سازی آن را با مشکلات بیشتری همراه می‌داند.

بررسی کیفی پاسخ‌های دانش‌آموزان و توجه به نمودار و جدول فوق، نشان‌دهندۀ برخی بیماری‌هاست که در بدنۀ سیستم آموزشی به چشم می‌خورد. در واقع به نظر می‌رسد دانش‌آموزان پایۀ دهم ضرورت ارائۀ اثبات را به‌درستی درک نمی‌کنند و گاه بین تشخیص درستی یا نادرستی یک گزاره و تشخیص صحت اثبات آن گزاره، تمایز روشنی

قائل نیستند. ارائهٔ مثال برای اثبات یک گزاره، رد اثبات‌های غیررسمی نظیر رسم شکل یا اثبات‌های کلامی و پذیرش بی‌قید و شرط اثبات‌های نمادین، همگی دالّ بر این است که بیشتر دانش‌آموزان هنوز فهم روشنی از اثبات‌های معتبر ندارند و اغلب با ساختار اثبات‌های جبری و استدلال‌های استنتاجی آشنا نیستند و به‌خوبی از مفهوم و اهداف اثبات‌های ریاضی آگاهی ندارند. این نتیجه با مطالعات کلاهدوز (۱۳۹۰) هم‌سوست.

به نظر می‌رسد آموزش به‌کمک ارائهٔ راه‌حل‌های مختلف برای یک مسأله بر فهم دانش‌آموزان از اثبات و ضرورت آن تأثیر مثبتی نداشته است.آشنانبودن دانش‌آموزان با گونه‌های معتبر اثبات، می‌تواند تا حد زیادی به نبود این موضوع در کتاب‌های درسی دانش‌آموزان[1] و و دوری معلمان از استفادهٔ این روش برای دانش‌آموزان برگردد.

بخشی از خطای دانش‌آموزان را در تشخیص محدودیت برخی اثبات‌ها در پس‌آزمون می‌توان ناشی از ناآشنایی آنان با سورهای عمومی و وجودی و بی‌توجهی به واژهٔ «هر» در گزارهٔ «جمع هر دو عدد زوج، زوج است» دانست. به نظر می‌رسد فهم دقیقی از آنچه به یک اثبات قوّت و اعتبار می‌بخشد، یا آنچه به اعتبار و قوّت آن آسیب می‌رساند، وجود ندارد تا بدانجا که حتی گاهی اشارات مستقیم یا غیرمستقیمی هم به متوالی‌بودن دو عدد زوج شده ولی این توالی، محدودیتی برای اثبات قلمداد نشده است.

به‌علاوه یافته‌های این مطالعه، حاکی از آن است که در پایهٔ دهم که چیزی بیش از سه سال به پایان تحصیلات عمومی دانش‌آموزان نمانده است، هنوز گذر از تفکر حسابی به تفکر جبری با موفقیت انجام نپذیرفته و غالب دانش‌آموزان با مفهوم متغیر و ضرورت استفاده از آن بیگانه‌اند. همین‌طور شواهد نشان می‌دهد همهٔ دانش‌آموزان در بیان شفاف آن‌چه در ذهن دارند و استفاده از زبان ریاضی، موفق عمل نمی‌کنند بنابراین در مجموع، مرور کیفی پاسخ‌ها نشان‌دهندهٔ فهم نادرست دانش‌آموزان از اثبات، ضرورت اثبات و ویژگی‌های اثبات معتبر، آشنانبودن آنان با سورهای وجودی و عمومی، ناآشنایی کامل با مفهوم متغیر و شکاف بین تفکر حسابی و تفکر جبری و ضعف در گفتمان ریاضی است. مواردی از این دست که به نظر می‌رسد بهتر است در کتب درسی و نیز آموزش معلمان به شکل شایسته‌تر بدان توجه شود.

---

۱ در کتاب‌های تازه‌انتشاریافته این مسأله مدنظر قرار گرفته و در پایه‌های مختلف، مباحثی به انواع اثبات و ضرورت آن اختصاص داده شده است.

سخن آخر

هدف این پژوهش، انتخاب مسیری بود که مقصد آن تقویت مهارت استدلال در دانش‌آموزان، به‌مثابهٔ اساسی‌ترین هدف از آموزش ریاضی، باشد. این مطالعه، نه مدعی یگانگیِ مسیر دستیابی به چنین مقصدی است و نه مدعی ارائهٔ الگویی که تبعیت گام‌به‌گام از آن، محصولی واحد را برای همگان رقم بزند؛ بلکه با استناد به اصل عدم قطعیت و منحصربه‌فردی موقعیت‌های مختلف کلاس درس و با دقت‌نظر به پیچیدگی‌ها و ظرافت‌های رفتارهای انسانی، تلاش برای به کارگیری مجموعه‌ای از قواعد را با روح تدریس در تضاد دانسته و معتقد است تدریس، کنشی بین‌انسانی، پیچیده و هنرمندانه است که تن به قالب تکنیک نخواهد داد (گیلبرت هایت[1]، ویلیام جیمز[2]، ای پال تورنس[3] و هانتر[4]، به‌نقل از مهرمحمدی و عابدی، ۱۳۸۰، آیزنر[5]، ۱۹۹۴). بنابراین، این پژوهش، مقام معلمان را در قضاوت فکورانه، نقادانه و هشیارانه برای استفاده یا عدم استفاده از یافته‌های این پژوهش به رسمیت می‌شناسد و تنها مدعی است که توانسته با تأکید بر راه‌حل‌های چندگانه در آموزش ریاضی، مهارت استدلال را در دانش‌آموزان افزایش دهد.

1 Gilbert Highet
2 William James
3 E. Paul Torrance
4 Hunter
5 Eisner

منابع

ادیب حاج‌باقری، محسن؛ پرویزی، سرور و صلصالی، مهوش (۱۳۹۰). روش‌های تحقیق کیفی. تهران: نشر و تبلیغ بشری.

برنامهٔ درسی ملی جمهوری اسلامی ایران (اسفند ۱۳۹۱). شورای عالی آموزش و پرورش. وزارت آموزش و پرورش. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی.

حاجی‌حسینی‌نژاد، غلامرضا و بالغی‌زاده، سوسن (۱۳۸۹). «تأثیر آموزش مبتنی بر (تدریس برای فهمیدن) بر برنامهٔ درسی تجربه‌شدهٔ درس تاریخ هنر»، فصلنامهٔ مطالعات برنامهٔ درسی ایران، شمارهٔ ۱۷. ۳۹ــ۵۵.

ریحانی، ابراهیم؛ حمیدی، فریده و کلاهدوز، فهیمه (۱۳۹۱). «بررسی درک و فهم دانش‌آموزان سال دوم متوسطه از استدلال و اثبات ریاضی»، فصلنامهٔ مطالعات برنامهٔ درسی ایران، سال ۶، شماره ۲۴، ۱۵۷ــ۱۸۲.

سیف، علی‌اکبر (۱۳۸۳). روان‌شناسی پرورشی (روان‌شناسی یادگیری و آموزش). ویرایش ششم، تهران: آگاه.

صدیقی، مریم (۱۳۸۷). بررسی مهارت جبری در دانش‌آموزان دختر سال اول متوسطه، پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد، رشتهٔ آموزش ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی.

غلام‌آزاد، سهیلا، [بی‌تا]، «دوباره‌نگری به برنامهٔ جبر دبیرستانی»، آموزش ریاضی، سال هفدهم، شماره ۶۳، ۴ ــ ۱۲.

فردانش، هاشم،(۱۳۸۳). طبقه‌بندی الگوهای طراحی سازنده‌گرا بر اساس رویکردهای یادگیری و تدریس. مشهد: مطالعات تربیتی و روان‌شناسی دانشگاه فردوسی مشهد.

کریمی، عبدالعظیم. بخشعلی‌زاده، شهرناز و کبیری، مسعود (۱۳۹۱). گزارش اجمالی از مهم‌ترین نتایج تیمز و پرلز ۲۰۱۱ و مقایسهٔ آن با عملکرد دانش‌آموزان ایران در دوره‌های قبل، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، پژوهشگاه مطالعات آموزش و پرورش، مرکز مطالعات تیمز و پرلز.

کلاهدوز، فهیمه (۱۳۹۰)، بررسی درک و فهم دانش‌آموزان سال دوم متوسطه از استدلال و اثبات ریاضی، پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی.

کمیتهٔ مطالعهٔ یادگیری ریاضی (۲۰۰۱). کمک کنیم کودکان ریاضی یاد بگیرند. ترجمهٔ بهزاد، مهدی و گویا، زهرا (۱۳۸۷). تهران: فاطمی.

ملکی، حسن؛ حبیبی‌پور، مجید (۱۳۸۵). «پرورش تفکر انتقادی هدف اساسی تعلیم و تربیت»، فصلنامهٔ نوآوری‌های آموزشی، شمارهٔ ۱۹، ۹۳ــ۱۰۸.

مهرمحمدی، محمود و عابدی، لطفعلی(۱۳۸۰). «ماهیت تدریس و ابعاد زیبا شناختی‌آن»، فصلنامهٔ مدرس، دورهٔ ۵، شمارهٔ ۳، پاییز، ۴۷ـ۵۷.

Amit, M. & Neria, D. (2008). Rising to the challenge: using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM*, 40(1), 111-129.

Ball, D. L. & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), A research companion to principles and standards for school mathematics (pp. 27–44). Reston, VA: *National Council of Teachers of Mathematics*.

Bessant, K. C. (1995). Factors associated with types of mathematics anxiety in college students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 327-345.

Brodie, Karin (2010). Teaching Mathematical Reasoning in Secondary School Classrooms, New York: *Springer*, Retrieved May 10, 2011 from http://www.springer.com.

Carraher, D. W.; Martinez, M. V. & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM*, 40(1), 3-22.

Chin, E-T. & Lin, F-L. (2009). A Comparative Study on Junior High School Students' Proof Conceptions in Algebra between Taiwan and the UK. *Journal of Mathematics Education*, 2(2), 52-67.

Cooper, T. J. & Warren, E. (2008). The effect of different representations on Years 3 to 5 students' ability to generalise. *ZDM*, 40(1), 23-37.

Dee Vanspronsen, Hillary (2008). *Proof processes of novice mathematics proof writers, Unpuplished doctoral dissertation, university of Montana, USA*. Retrieved from ProQuest Digital Dissertations.

Eisner, w. Elliot, 1994, The Educational Imagination, 2nd (ed.), New York: Macmillan.

Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students' proofs schemes: Results from exploratory studies. In A. Schenfeld, J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Colligate Mathematics Education III* (pg. 234-283). Providence, RI: American Mathematical Society

Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 396-428.

Henningsen, M. & Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 524-549.

Jurdak, M. E. & El Mouhayar, R. R. (2014). Trends in the development of student level of reasoning in pattern generalization tasks across grade level. *Educational Studies in Mathematics*, 85(1), 75-92.

Kemmis, S., McTaggart, R., & Retallick, J. (2004). The action research planner. (2nd ed. rev.). Karachi: Aga Khan University, Institute for Educational Development

Leighton, J. P. (2003). Defining and Describing Reasoning. In J. P. Leighton & R. J. Sternberg (Eds.), *The Nature of Reasoning*. New York, NY: Cambridge.

Leikin, Roza. 2011, Multiple-solution tasks: from a teacher education course to teacher practice, *ZDM* Mathematics Education, 43:993–1006

Leikin, R., & Lev, M. (2007, July). Multiple solution tasks as a magnifying glass for observation of mathematical creativity. In Proceedings of the 31st international conference for the psychology of mathematics education (Vol. 3, pp. 161-168). Seoul, Korea: The Korea Society of Educational Studies in Mathematics.

Levav-Waynberg, Anet. & Leikin, Roza (2010). *Multiple Solutions for a problem: A tool for evaluation of mathematical thinking in geometry*, University of Haifa- Israel.

Levav-Waynberg, Anet; Leikin, Roza (2012). The role of multiple solution tasks in developing knowledge and creativity in geometry, *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(1), 73-90.

Lynch, K. & Star, J. R. (2014). Views of struggling students on instruction incorporating multiple strategies in Algebra I: An exploratory study, Journal for Research in Mathematics Education.

Mansi , K.E. (2003). *Reasoning and proof in mathematics Education: A Review of the Litereture*. A Theses submitted to the graduate faculty of north Carolina State university in partial fulfillment of the degree of master of science.

Mason J.; Burton L. & Stacey K. (2010). Thinking mathematically, Second edition,

Miyazaki, M. (2000). Levels of proof in lower secondary school mathematics.

Educational Studies in Mathematics, 41(1), 47-68.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.*

National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*.

National Research Council (NRC) (2001). Helping Children Learn Mathematics, *Mathematics Learning Study Committee*.

Newark, Jenifa Cai (2002). Assessing and Understanding U.S. and Chinese Students' Mathematical Thinking: Some Insights from Cross-National Studies, *ZDM*, Vol. 34 (6).

Paddack, Megan (2009). *The process of making meaning: The interplay between teachers knowledge of mathematical proofs and their classroom practices*. Unpuplished doctoral dissertation, University of New Hampshire, United States. Retrieved from ProQuest Digital Dissertations.

Pedemonte, B. & Buchbinder, O. (2011). Examining the role of examples in proving processes through a cognitive lens: The case of triangular numbers. *ZDM*, 43(2), 257-267.

Recio, A. M. & Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 83-99.

Reid, D. A. & Knipping, C. (2010). Proof in mathematics education. *Reserach, learning and teaching*. Rotterdam: Sense Publisher.

Rivera, F. D. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics*, 73(3), 297-328.

Rivera, F. D. & Becker, J. R. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM*, 40(1), 65-82.

Schukajlow, S. & Krug, A. (2014). Do multiple solutions matter? Prompting multiple solutions, interest, competence, and autonomy. Journal for Research in Mathematics Education, 45(4), 497-533.

Stacey, Kay. (2006). What is mathematical thinking and why is it important? *Progress* *report of the APEC project: collaborative studies on innovations for teaching and learning mathematics in different cultures (II)—Lesson study focusing on mathematical thinking*.

Star, J. R. & Rittle, Johnson, B. (2008). Flexibility in problem solving: The case of equation solving. *Learning and Instruction*, 18, 565-579.

Stylianides, Andreas J. (2005). *Proof and proving in school mathematics instruction: making the elementary grades part of the equation*. Unpuplished doctoral dissertation, University of Michigan, Ann Arbor.

Stylianides, Andreas J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 289-321.

Stylianides, Gabriel J. & Stylianides, Andreas J. (2008). Proof in School Mathematics: Insights from Psychological Research into Students' Ability for Deductive Reasoning, *Mathematical Thinking and Learning*, 10, 103-133.

Tanisli, D. & Ozdas, A. (2009). The Strategies of Using the Generalizing Patterns of the Primary School 5th Grade Students. *Educational Sciences: Theory and Practice*, 9(3), 1485-1497.

Varghese, Thomas, (2007). *Student teachers conception of mathematical proof*. Unpuplished doctoral dissertation, University of Alberta, Canada.

Vogel, R. (2005). Patterns: A fundamental idea of mathematical thinking and learning. *ZDM*, 37(5), 445-449.

Warner, L. B.; Schorr, R. Y. & Davis, G. E. (2009). Flexible use of symbolic tools for problem solving, generalization, and explanation. *ZDM*, 41(5), 663-679.

Weber, K. (2004). A framework for describing the processes that undergraduates use to construct proofs. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 425-432.

Weber, K. (2005). Problem-solving, proving, and learning: The relationship between problem-solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. *Journal of Mathematical Behavior*, 24, 351-360.

Wu, Hung- His (1996). The Role of Euclidean Geometry in High School, *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 221-237

Yeşildere, S. & Akkoç, H. (2010). Algebraic generalization strategies of number patterns used by pre-service elementary mathematics teachers. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 2(2), 1142-1147.

Zapatera, A. & Callejo, M. L. (2013). Preservice Primary Teachers's Noticing of Students' Generalization Process. In *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 425-432).

Zazkis, R.; Liljedahl, P. & Chernoff, E. J. (2008). The role of examples in forming and refuting generalizations. *ZDM*, 40(1), 131-141.