دانشگاه فرهنگیان
فصلنامه پویش در آموزش علوم پایه
دوره پنجم، شماره شانزدهم، پاییز ۱۳۹۸

Farhangian University
Quarterly Journal of Education in Basic Sciences
Volume ۵, Issue ۱۶, Autumn ۲۰۱۹

طراحی یک الگوی آموزش شبکه‌ای جهت اثبات قضایا در ریاضیات با استفاده از نقشه مفهومی

ساره حق‌خواه [۱]

دریافت: ۹۸/۱۰/۳ پذیرش: ۹۸/۱۰/۹

چکیده

برخی دروس تخصصی ریاضی، به‌خصوص در تحصیلات عالی، دارای قضیه‌هایی هستند که گاهی اثبات‌های طولانی و چند مرحله‌ای آن‌ها، فراگیران را سردرگم کرده و حتی بعد از فهمیدن تمام جزئیات اثبات، در آزمون‌های مربوطه از یادآوری و بازنویسی اثبات عاجز می‌مانند. با استفاده از طرح شبکه‌ای و نقشه مفهومی می‌توان مسیری را که ذهن در مراحل مختلف استدلال می‌پیماید، به‌صورت گام‌به‌گام و سازماندهی شده در شاخه‌های مختلف، به‌روشنی ترسیم نمود. همچنین ترغیب فراگیران به رسم نقشه مفهومی مربوط به اثبات قضایا و مسائل استنتاجی، موجب درگیری ذهن آن‌ها با مفاهیم و حقایق و ارتباط منطقی بین گزاره‌ها شده و با برقراری ارتباط بین دو نیمکره چپ و راست مغز، در یادگیری معنادار و بهبود فرایند یادگیری- یاددهی و ایجاد فراشناخت نقش مهمی ایفا می‌کند. در این مقاله سعی شده یک الگوی آموزش شبکه‌ای به کمک نقشه مفهومی و نحوه‌ی پیاده سازی آن در اثبات یکی از قضایای درس منطق و نظریه مجموعه‌ها، ارائه دهیم.

کلمات کلیدی: نقشه مفهومی، استدلال استنتاجی، اثبات قضایا، الگوی آموزش شبکه‌ای.

[۱]. استادیار گروه علوم پایه، دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران، نویسنده مسئول، Sareh_haghkhah@yahoo.com

مقدمه

تونی بوزان (Tony Buzan)، نویسنده و روانشناس مشهور بریتانیایی متوجه شد که هنگام مطالعه، دانش‌آموزان و دانشجویان و نیز موقع تدریس مدرسین گرامی، بیشتر نیمکره چپ مغز فعال است. سازمان‌دهنده‌های گرافیکی با به‌کارگیری رنگ، شکل، طرح و تصویر، نیمکره راست را نیز درگیر نموده و با ایجاد تعادل در مغز به یادگیری سریع‌تر و عمیق‌تر فرد کمک می‌کند (کرمانی، ۱۳۹۳). نقشه مفهومی یکی از این سازمان‌دهنده‌های گرافیکی است که در سال ۱۹۷۲ توسط ژوزف نواک و تیم پژوهشی وی بر اساس نظریه یادگیری معنادار آزوبل، مطرح شد. طبق این نظریه یادگیرندگان نمی‌توانند با حفظ مطالب و یادگیری پراکنده، یک یادگیری واقعی داشته باشند بلکه باید با سازماندهی، ارتباط دادن و اضافه کردن منظم مطالب به ساخت شناختی قبلی، یادگیری معنادار را در خود ارتقا دهند.

به عقیده‌ی نواک و همکارانش کمک به یاد گیرنده برای ایجاد یادگیری معنادار تنها راه غلبه بر بدفهمی‌هاست و استفاده از نقشه مفهومی می‌تواند برای این منظور مفید باشد. پس، نقشه‌های مفهومی از طریق شناسایی و درک روابط بین مفاهیم، بیش‌تر از به حافظه سپردن اطلاعات، منجر به یادگیری معنادار می‌شوند (نواک و کاناس، ۲۰۰۸).

در حقیقت نقشه مفهومی یک بازنمایی تصویری و کلامی از مفاهیم، گزاره‌ها و روابط میان آن‌هاست. پس می‌توان گفت که نقشه مفهومی یک روش خلاصه و اجمالی برای سازماندهی و مرتب کردن دانسته‌ها و اطلاعات فرد است که در آن از نمادها و علایم، کلمات و خطوط ارتباطی به منظور نمایش روابط درونی میان اجزای اطلاعات و مفاهیم استفاده می‌شود (هادیان دهکردی و همکاران، ۱۳۹۳).

مهم‌ترین طبقه‌بندی دانش ریاضی عبارتست از: دانش مفهومی و دانش رویه‌ای. دانش مفهومی، دانش روابط و اتصالات بین حقایق، مفاهیم و ایده‌های ریاضی و دانش رویه‌ای، دانش مربوط به الگوریتم‌ها، رویه‌ها و فرایندهای ریاضی است. استفاده از نقشه مفهومی در آموزش ریاضی، ضمن برقراری ارتباط بین مفاهیم و رویه‌ها، سبب وقوع یادگیری معنی‌دار شده و از این طریق علاوه بر غنی‌سازی برنامه‌های کلاسی، نقش مهمی در افزایش انگیزه و حس رضایت‌مندی فراگیران ایفا می‌کند. برخی دروس تخصصی ریاضی، خصوصاً ریاضی دانشگاهی دارای قضیه‌هایی هستند که گاهی اثبات‌های طولانی و چند مرحله‌ای آن‌ها، فراگیران را سردرگم کرده و حتی بعد از فهمیدن تمام جزئیات اثبات، در آزمون‌های مربوطه از یادآوری و بازنویسی اثبات عاجز می‌مانند.

اکثر نوشته‌ها و یادداشت‌ها در زبان فارسی، به‌صورت خطی از راست به چپ و از بالا به پایین تهیه می‌شوند؛ درحالیکه مغز انسان به کل صفحه به‌صورتی غیرخطی می‌نگرد. بنابراین با توجه به عملکرد مغز، استفاده از سازمان‌دهنده‌های گرافیکی در فرایند یاددهی- یادگیری منجر به یادگیری معنادار می‌شود. چراکه طبق نظریه یادگیری معنادار "آزوبل" یادگیرندگان نمی‌توانند با حفظ مطالب و یادگیری پراکنده، یک یادگیری واقعی داشته باشند. بلکه باید با سازماندهی، ارتباط دادن و اضافه کردن منظم مطالب به ساخت شناختی قبلی، یادگیری معنادار را در خود ارتقا دهند (یو، ۲۰۰۸). بنابراین در این مقاله سعی کردیم یک الگوی آموزش شبکه‌ای به کمک نقشه مفهومی ارائه داده و سپس نحوه‌ی پیاده سازی آن را در اثبات یکی از قضایای درس منطق و نظریه مجموعه‌ها بررسی نماییم.

پیشینه پژوهشی

طی سی سال اخیر، تعدادی از محققین، کاربرد نقشه‌های مفهومی را به‌عنوان روشی برای بهبود یادگیری- یاددهی بررسی کرده و نتایج مثبتی را گزارش نموده‌اند. باتلر (۲۰۱۴) فهرستی از مطالعات مربوط به کاربرد نقشه‌های مفهومی در رشته‌های مختلف را بیان می‌کند که از جمله تحقیقات ویلیامز (۱۹۹۸) و رابرتز (۱۹۹۹)، در ریاضیات می‌باشد.

خواجه و همکاران (۱۳۹۵) ضمن ارائه نقشه‌های مفهومی به‌وسیله نرم‌افزارهای فوق پیشرفته، به بیان بهبود روش‌های یاددهی- یادگیری ریاضی پرداختند.

نویسنده‌ی مقاله "نقشه مفهومی، ابزاری کارآمد برای آموزش مفاهیم ریاضی" در پژوهش خود پس از معرفی اجمالی نقشه مفهومی به ذکر نمونه‌هایی از نقشه‌های مفهومی در مباحث اعداد، دنباله‌ها، احتمال و تعیین علامت پرداخته و آن را به‌عنوان یک ابزار جمع‌بندی کننده مباحث و نظم‌دهنده به ذهن دانش‌آموزان معرفی می‌نماید (گلچین، ۱۳۹۵)

هادیان دهکردی و همکاران (۱۳۹۳) در تحقیق خود به کمک نقشه مفهومی، درک ۲۵ دانشجوی سال سوم رشته دبیری ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی از مفهوم حد را مورد بررسی و ارزیابی قرار دادند. پس از آشنایی دانشجویان با نقشه مفهومی در طی سه مرحله، دانشجویان به صورت انفرادی، گروهی و گروهی همراه با استفاده از نرم‌افزار به رسم نقشه مفهومی "حد" پرداختند. یافته‌های این تحقیق نشان می‌دهد که در هر مرحله نسبت به مرحله قبل بدفهمی‌ها و اشتباهات کاهش یافته، ارتباط‌های عرضی و طولی دقیق‌تر، بیشتر و پیچیده‌تر شدند.

ریحانی و همکاران (۱۳۹۱) در پژوهش خود نشان دادند که استفاده از نقشه‌های مفهومی به‌عنوان ابزار ارزیابی، باعث ارتقای یادگیری دانش‌آموزان می‌شود. در این تحقیق برخی از اشتباه‌های دانش‌آموزان در استفاده از رویه‌ها، مانند حل معادله مثلثاتی و یا رسم یک تابع مثلثاتی، در آزمون کتبی بهتر نشان داده شد. نتایج حاصل از این پژوهش حاکی از آن بود که نقشه‌های مفهومی قادرند بدفهمی‌های دانش‌آموزان را در مورد تابع مثلثاتی نشان دهند، به‌گونه‌ای که تشخیص برخی از این بدفهمی‌ها تنها با استفاده از آزمون کتبی امکان‌پذیر نبود.

احمدی (۱۳۸۸) در تحقیق خود به بررسی تأثیر به‌کارگیری نقشه مفهومی به‌عنوان ابزاری در فرآیند یاددهی- یادگیری روی پیشرفت تحصیلی و باورهای ریاضی دانش‌آموزان پایه دوم متوسطه رشته تجربی پرداخت. نتایج به‌دست آمده از این تحقیق حاکی از آن است که روش تدریس مبتنی بر نقشه‌های مفهومی نسبت به روش تدریس مرسوم در پیشرفت تحصیلی و باورهای ریاضی دانش‌آموزان تأثیر بیشتری دارد.

روش تحقیق

این تحقیق از نقطه نظر هدف، نوعی تحقیق کاربردی و از نظر ماهیت و روش یا چگونگی انجام کار، یک تحقیق کتابخانه-ای و بر اساس تجربیات نویسنده مقاله می‌باشد. برای انجام این پژوهش با بررسی منابع مختلف در ارتباط با نقشه مفهومی و استدلال استنتاجی، ابتدا الگویی جهت آموزش قضایای استنتاجی بیان و سپس نحوه‌ی پیاده‌سازی این الگو را با ترسیم نقشه مفهومی اثبات یکی از قضایای کتاب نظریه مجموعه‌ها و کاربردهای آن (لین و لین ۱۳۸۶)، بررسی می‌کنیم. نقشه ارائه شده در پژوهش حاضر، با استفاده از نرم‌افزار MindMapper ترسیم شده است. نحوه استفاده از این نرم‌افزار در مقاله‌ای تحت عنوان "استفاده از نرم‌افزار MindMapper در بهبود یاددهی- یادگیری هندسه دبیرستان" ارائه شده است (حق‌خواه، ۱۳۹۷).

معرفی الگوی آموزش شبکه‌ای برای اثبات قضایای استنتاجی

آزوبل معتقد است که یادگیری معنادار زمانی رخ می‌دهد که:

۱- یادگیرنده به رابطه بین مفاهیمی که آموخته پی ببرد.

۲- یادگیرنده دارای دانشی قبلی باشد که بتواند با مطالب جدید مرتبط شود.

۳- یادگیرنده واقعاً بخواهد که دانش جدید را به دانشی که قبلاً آموخته مرتبط کند (یو، ۲۰۰۸).

بنابراین برای درک واقعی اثبات یک قضیه یا یک مسأله‌ی استنتاجی، داشتن دانش قبلی و پیش‌نیازها از اصول اولیه می‌باشد. در الگوی ارائه شده فرض بر این است که فراگیر بر پیش‌نیازها تسلط کافی دارد. حال برای اینکه یادگیرنده بتواند بین مفاهیم ارتباط معناداری برقرار نماید، ایجاد یک شبکه مفهومی و سلسله مراتبی در فرایند اثبات، نه تنها این بستر را فراهم می‌آورد بلکه با ارائه ارتباط بین مفاهیم و گزاره‌ها در قالب دیداری، به دلیل تطابق الگو با ساختار و عملکرد مغز، زمینه تثبیت مراحل اثبات در حافظه بلندمدت نیز مهیا می‌شود. اینکه یادگیرنده واقعاً بخواهد دانش جدید را به دانشی که قبلاً آموخته مرتبط کند، به بعد نگرشی وی مرتبط می‌شود که پیاده‌سازی این الگو، علاوه بر پرورش خلاقیت، خود عاملی جهت افزایش انگیزه و میل به یادگیری معنادار می‌باشد.

مراحل الگوی آموزش شبکه‌ای به کمک نقشه مفهومی به‌صورت زیر پیشنهاد می‌شود.

گام اول: درک کامل صورت قضیه با تشخیص دقیق پیش‌فرض‌ها، فرض و حکم.

گام دوم: خواندن دقیق اثبات قضیه و استخراج چارچوب کلی و یا اسکلت اصلی اثبات از طریق راهبرد زیرمسأله.

گام سوم: رسم نقشه مفهومی چارچوب استخراج شده.

گام چهارم: تکمیل نقشه مفهومی با اضافه کردن زیرشاخه‌های مربوط به اثبات زیرمسأله‌ها.

از این الگو می‌توان در سه زمینه یاددهی، یادگیری و ارزش‌یابی بهره برد. به این صورت که مدرس، تدریس خود را با کمک نقشه مفهومی ارائه دهد و یا از فراگیران بخواهد نقشه مفهومی قضایا را ترسیم نمایند. حتی در آزمون‌ها می‌توان برخی از جعبه‌های نقشه را خالی گذاشته و از فراگیران بخواهیم تا آن‌ها را تکمیل کنند.

استفاده از این الگو، به‌خصوص در اثبات قضایای پیچیده، می‌تواند بسیار مفید باشد. در این بخش از مقاله، به‌عنوان نمونه، یکی از قضایای فصل ۷ کتاب نظریه مجموعه‌ها و کاربردهای آن (لین و لین ۱۳۸۶) را مورد بررسی قرار داده و سپس الگوی آموزش شبکه‌ای را روی آن پیاده می‌کنیم. نشان خواهیم داد که چگونه نقشه استدلالی با برقراری ارتباط بین مفاهیم و گزاره‌ها، می‌تواند مسیری را که ذهن در مراحل مختلف استدلال می‌پیماید، بصورت گام‌به‌گام و سازمان‌دهی شده در شاخه‌های مختلف، به‌روشنی ترسیم نموده و هدایتگر مخاطب خود باشد.

مبحث اعداد اصلی در نظریه مجموعه‌ها، مبحثی بسیار جالب است و معمولاً دانشجویان با اعداد اصلی ترا متناهی دیرتر مأنوس می‌شوند. عدد اصلی یک مجموعه‌ی متناهی، همان تعداد عنصرهای آن مجموعه است و می‌دانیم که اعداد حسابی قابل مقایسه‌اند. یعنی برای هر دو عدد حسابی متمایز m و n، داریم یا $m<n$ و یا $n<m$. اما اثبات این حکم برای اعداد اصلی ترامتناهی کار نسبتاً پیچیده‌ای است. فرض می‌کنیم خواننده با تعاریفِ عدد اصلی، مجموعه‌ی جزئاً مرتب، مجموعه‌ی کلاً مرتب، زنجیر، کران بالا و پایین، عنصر ماکسیمال و اصل ماکسیمال هاسدورف و لم تسورن آشنایی کامل داشته باشد. حال قضیه قابل مقایسه بودن اعداد اصلی را بیان کرده و الگوی آموزش شبکه‌ای را برای اثبات آن اجرا می‌کنیم.

قضیه قابل مقایسه بودن اعداد اصلی: دو مجموعه غیر تهی A و B مفروضند. آنگاه از A به B و یا از B به A یک تابع یک‌به‌یک موجود است. (درنتیجه یا $card\ B \quad card\ A$ یا $card\ A \quad card\ B$)

گام اول الگو: درک کامل صورت قضیه:

پیش‌فرض (پیش‌نیاز) اصلی قضیه: لم تسورن (اگر هر زنجیر از مجموعه‌ی جزئاً مرتب $(A, \quad)$، دارای کران بالا باشد، آنگاه A عنصر ماکسیمال دارد.)

فرض: A و B دو مجموعه غیر تهی هستند.

حکم: وجود دارد تابع $f:A \xrightarrow{1\ 1} B$ و یا A $\quad$ $1\ 1$ $f:B$.

گام دوم الگو: در این مرحله اثبات قضیه را با دقت خوانده و زیر مسأله‌ها را جدا می‌کنیم تا چارچوب اصلی اثبات استخراج شود. برای مشخص شدن زیر مسأله‌ها، آن‌ها را در کادر قرار می‌دهیم.

اثبات قضیه: قرار دهید: $\{(f\ ,A\ )\,\middle|\,A \quad A,\ f\ :A \quad {}^{1\ 1} \quad B\}$

توجه کنید که . زیرا:

ازآنجاکه A و B، پس وجود دارد $a \quad A$ و $b \quad B$. اگر تابع f را به‌صورت $\begin{matrix} f:\{a\} & B \\ f(a) & b \end{matrix}$ تعریف کنیم، به‌وضوح f یک‌به‌یک است و بنابراین $(f,\{a\})$.

رابطه $\leq$ را روی به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(f\ ,A\ ) \quad (f\ ,A\ ) \qquad A \quad A \qquad f\,\middle|\,A \quad f\ .$$

ثابت می‌کنیم که $(\ ,\ )$ یک مجموعه جزئاً مرتب است.

کافی است نشان دهیم که $(\ ,\ )$، انعکاسی، متعدی و پادمتقارن است.

بررسی خاصیت انعکاسی $(\ ,\ )$:

توجه کنید که $f \quad f\,\middle|\,A \qquad A \quad A \qquad (f\ ,A\ ) \quad (f\ ,A\ )$ و طرف راست گزاره فوق به‌وضوح برقرار است.

بررسی خاصیت تعدی $(\ ,\ )$:

فرض کنید $(f\ ,A\ ) \quad (f\ ,A\ )$ و $(f\ ,A\ ) \quad (f\ ,A\ )$. بنابر تعریف داریم:

(۱) $\qquad A \quad A \qquad A \quad A$

(۲) $\qquad f\,\middle|\,A \quad f \qquad f\,\middle|\,A \quad f$

بنابر رابطه‌ی (۱) داریم: $A \quad A$ و از رابطه‌ی (۲) داریم: $f_{\gamma}\,\middle|\,A \quad f$. درنتیجه $(f\ ,A\ ) \quad (f\ ,A\ )$.

بررسی خاصیت پادمتقارن $(\ ,\ )$:

فرض کنید $(f\ ,A\ ) \quad (f\ ,A\ )$ و $(f\ ,A\ ) \leq (f\ ,A\ )$. بنابر تعریف داریم:

(۳) $\qquad A \quad A \qquad A \quad A$

(۴) $\qquad f\,\middle|\,A \quad f \qquad f\,\middle|\,A \quad f$

بنابر رابطه‌ی (۳) داریم: $A \quad A$ و از رابطه‌ی (۴) داریم: $f \quad f$. درنتیجه $(f\ ,A\ ) \quad (f\ ,A\ )$.

درنتیجه $(\ ,\ )$ یک مجموعه جزئاً مرتب است.

حال می‌خواهیم به کمک لم تسورن یک عضو ماکسیمال برای $(\ ,\ )$ بیابیم. باید مطمئن شویم که هر زنجیر ، مانند $\{ \qquad C \quad \{(f\ ,A\ )\,|$ کران بالا دارد.

تعریف می‌کنیم: $A_1 \quad \bigcup A$ $\qquad f_1 \quad \bigcup f$.

ادعا می‌کنیم که (f_1, A_1) یک کران بالا برای زنجیر C است.

یعنی باید نشان دهیم که:

حکم ۱: $\chi \quad (f_1, A_1)$، به‌عبارت دیگر $f_1 : A_1 \qquad B$ یک تابع یک به یک است.

حکم ۲: $(f_\alpha, A\ ) \le (f_1, A_1) \qquad \forall (f\ ,A\ ) \quad C$.

توجه کنید که حکم ۲ بنابر تعریف f_1 و A_1 به‌وضوح برقرار است. به‌عبارت دیگر (f_1, A_1) از هر عضو دیگری از زنجیر C بزرگتر می‌شود.

برای اثبات حکم ۱ باید نشان دهیم:

الف) $f_1 : A_1 \qquad B$ یک تابع خوش‌تعریف است. یعنی باید ثابت کنیم که:

الف ۱) اگر $(x,y),(x,y\ ) \quad f_1$، آنگاه $y \quad y$.

اثبات الف ۱) فرض کنید $(x,y),(x,y\ ) \quad f_1$. پس

$$(x,y) \in f \qquad x \quad A$$

$$(x,y\ ) \quad f \qquad x \quad A$$

چون C یک زنجیر است یا $A_{\copyright} \quad A$ یا $A \quad A$. مثلاً فرض کنید: $A \quad A$. در این‌صورت $f \,|A \quad f$ و یا $f \quad f$. پس داریم $f \quad (x,y),(x,y\ )\forall$ و چون f یک تابع است، بنابراین $y \quad y$.

الف ۲) $dom\, f_1 \quad A_1$.

اثبات الف ۲) $dom\, f_1 \quad dom(\bigcup f\ ) \quad \bigcup_{\Gamma} dom\, f \quad \bigcup_{\gamma\ \Phi} A \quad A_1$

ب) $f_1 : A_1 \qquad B$ یک‌به‌یک است.

اثبات حکم ب) فرض کنید $(x,y),(x\ ,y) \quad f_1$. پس

$$(x,y) \in f \qquad x \quad A$$

$x \quad A \qquad (x, y) \quad f_{\beta}$

چون C یک زنجیر است یا $A_{\copyright} \quad A$ یا $A \quad A$. مثلاً فرض کنید: $A \quad A$. در این‌صورت $f \quad A \,|\, f$ و یا $f \quad f$. پس داریم $f \quad (x, y), (x, y)$ و چون f یک تابع یک‌به‌یک است، بنابراین $x \quad x$.

پس تا اینجا نشان دادیم که هر زنجیر دارای کران بالاست. بنابراین طبق لم تسورن $(\; , \;)$ دارای یک عنصر ماکسیمال مانند $(\tilde{f}, \tilde{A})$ است. پس داریم $\tilde{f} : \tilde{A} \quad B$ تابعی یک‌به‌یک است و $A \quad \tilde{A}$. دو حالت زیر ممکن است پیش آید:

حالت اول: $\tilde{A} = A$. در این حالت داریم $\tilde{f} : A \quad B$ یک تابع یک‌به‌یک است و بنابراین اثبات قضیه تمام می‌شود.

حالت دوم: $A \quad \tilde{A}$. به عبارت دیگر $\tilde{A} \quad A$. پس $\tilde{A} \quad A \quad x_0$. باز دو حالت درنظر می‌گیریم.

اگر $B \quad ^{1\;1} \quad \tilde{f} : \tilde{A}$ پوشا باشد، که در این حالت $\tilde{f}$ وارون‌پذیر می‌شود و بنابراین $A \quad \tilde{A} \quad \tilde{f}^{\;1} : B$ یک تابع یک‌به‌یک است و درنتیجه اثبات قضیه تمام می‌شود.

و اگر $B \quad ^{1\;1} \quad \tilde{f} : \tilde{A}$ پوشا نباشد، در این‌صورت $\tilde{f}(\tilde{A}) \quad y_0 \in B$. قرار دهید:

$$\bar{A} \quad \tilde{A} \cup \{x_0\} \quad ، \quad \bar{f} = \tilde{f} \cup \{(x_0, y_0)\}.$$

به‌وضوح $\bar{f} : \bar{A} \quad B$ تابعی یک‌به‌یک است و بنابراین $(\bar{f}, \bar{A})$. از طرفی داریم $(\bar{f}, \bar{A}) \quad (\tilde{f}, \tilde{A})$ و این مطلب با ماکسیمال بودن $(\tilde{f}, \tilde{A})$ برای در تناقض است. پس حالت اخیر اصلاً اتفاق نمی‌افتد و بنابراین اثبات قضیه تمام می‌شود.

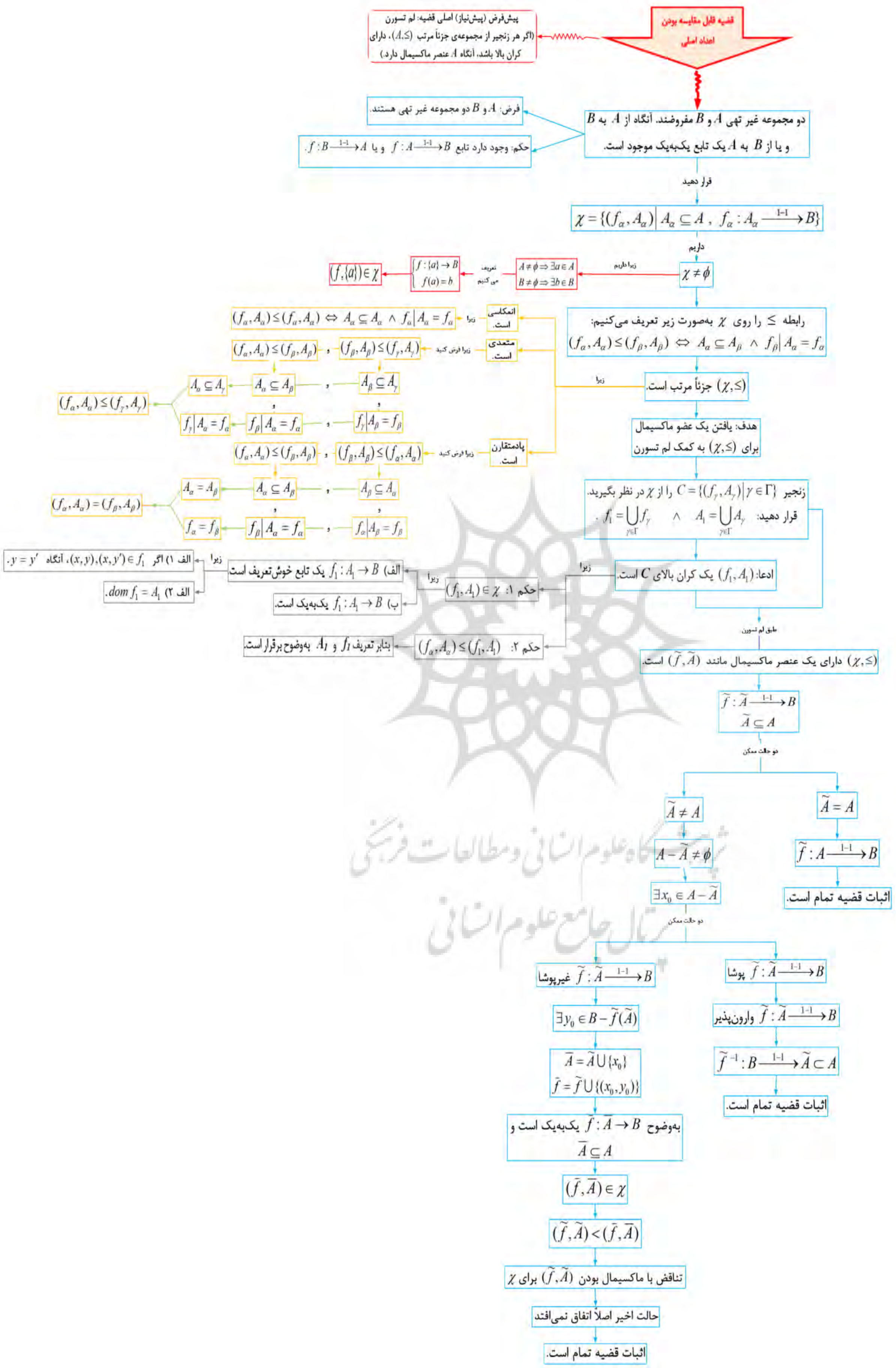
گام سوم الگو: همان‌طورکه ملاحظه می‌کنیم اثبات فوق به‌صورت خطی می‌باشد، درحالیکه مغز انسان به کل صفحه به‌صورتی غیرخطی می‌نگرد. بنابراین نمی‌تواند به‌راحتی اجزای مختلف اثبات را از یکدیگر مجزا سازد. در گام سوم، با توجه به اسکلت اصلی مشخص شده در گام قبل، نقشه مفهومی اثبات را با توجه به سلسله مراتب اثبات و کلمات ربطی بین گزاره‌ها رسم می‌کنیم. شکل زیر نقشه مفهومی اثبات این قضیه را به تصویر می‌کشد. در این نقشه، گام سوم اثبات (چارچوب اصلی)، با رنگ آبی مشخص شده است.

گام چهارم الگو: در این مرحله با توجه به زیرمسأله‌های مجزا شده در اثبات، زیرشاخه‌های مربوط به زیرمسأله‌ها را به نقشه مفهومی اضافه می‌کنیم. در نقشه زیر، گام چهارم اثبات، با رنگ‌های قرمز، نارنجی و خاکستری مشخص شده است. (توجه کنید که به‌دلیل در اختیار نداشتن فضای کافی، زیرشاخه‌های مربوط به اثبات حکم الف۱، حکم الف۲ و حکم ب در نقشه ترسیم نشده‌اند.) با یک نگاه به نقشه ترسیم شده، صورت قضیه، فرض و حکم و حالت‌های ممکن در قسمت‌های مختلف اثبات قضیه، به‌وضوح قابل مشاهده هستند.

نتیجه‌گیری

نقشه مفهومی، راهبردی آموزشی در جهت پرورش تفکر است. در واقع تدوین نقشه‌های استدلالی (نقشه‌های مفهومی با ذکر دلایل) یک راهبرد برای مهارت تفکر انتقادی در آموزش، یادگیری و ارزشیابی است. تهیه نقشه‌های استدلالی فرصتی است برای معلم که به شاگردان برای دیدن فرآیند فکری خود یاری دهد و از پیشرفت خود در پرورش قوای فکری و تفکر انتقادی آگاه شوند (ریحانی، ۱۳۹۵).

در الگوی آموزش شبکه‌ای ارائه شده، با ترسیم نقشه مفهومی مطالب به‌صورت سازمان‌دهی شده در اختیار مغز گذاشته می‌شود و چون این الگو مشابه ساختار و عملکرد مغز می‌باشد، زمینه برای ذخیره‌سازی بهتر مطالب در مغز مهیا شده و این امر علاوه بر پرورش خلاقیت، موجب افزایش یادگیری و کسب بازدهی بیشتر می‌شود. این الگو را می‌توان در تمام مقاطع تحصیلی، از دبستان تا آموزش عالی استفاده کرد. همچنین از این الگو می‌توان در سه زمینه یاددهی، یادگیری و ارزش‌یابی بهره برد. بنابراین توصیه می‌شود در مواردی که نیاز به یادگیری معنادار و عمیق مفاهیم است از این ابزار آموزشی استفاده گردد.



قضیه قابل مقایسه بودن اعداد اصلی
پیش‌فرض (پیش‌نیاز) اصلی قضیه: لم تسورن (اگر هر زنجیر از مجموعه‌ی جزئاً مرتب $(A,\le)$، دارای کران بالا باشد، آنگاه A عنصر ماکسیمال دارد)
دو مجموعه غیر تهی A و B مفروضند. آنگاه از A به B و یا از B به A یک تابع یک‌به‌یک موجود است.
فرض: A و B دو مجموعه غیر تهی هستند.
حکم: وجود دارد تابع $f:A\xrightarrow{1-1}B$ و یا $f:B\xrightarrow{1-1}A$.
قرار دهید
$\chi=\{(f_\alpha,A_\alpha)\mid A_\alpha\subseteq A\ ,\ f_\alpha:A_\alpha\xrightarrow{1-1}B\}$
داریم
$\chi\ne\phi$
زیرا داریم
$A\ne\phi\Rightarrow\exists a\in A$
$B\ne\phi\Rightarrow\exists b\in B$
تعریف می‌کنیم
$f:\{a\}\to B$
$f(a)=b$
$(f,\{a\})\in\chi$
رابطه $\le$ را روی χ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:
$(f_\alpha,A_\alpha)\le(f_\beta,A_\beta)\Leftrightarrow A_\alpha\subseteq A_\beta\ \wedge\ f_\beta|A_\alpha=f_\alpha$
$(\chi,\le)$ جزئاً مرتب است.
زیرا
انعکاسی است.
$(f_\alpha,A_\alpha)\le(f_\alpha,A_\alpha)\Leftrightarrow A_\alpha\subseteq A_\alpha\ \wedge\ f_\alpha|A_\alpha=f_\alpha$
متعدی است.
زیرا فرض کنید
$(f_\alpha,A_\alpha)\le(f_\beta,A_\beta)$, $(f_\beta,A_\beta)\le(f_\gamma,A_\gamma)$
$A_\alpha\subseteq A_\beta$, $A_\beta\subseteq A_\gamma$
$A_\alpha\subseteq A_\gamma$
$f_\beta|A_\alpha=f_\alpha$, $f_\gamma|A_\beta=f_\beta$
$f_\gamma|A_\alpha=f_\alpha$
$(f_\alpha,A_\alpha)\le(f_\gamma,A_\gamma)$
پادمتقارن است
زیرا فرض کنید
$(f_\alpha,A_\alpha)\le(f_\beta,A_\beta)$, $(f_\beta,A_\beta)\le(f_\alpha,A_\alpha)$
$A_\alpha\subseteq A_\beta$, $A_\beta\subseteq A_\alpha$
$A_\alpha=A_\beta$
$f_\beta|A_\alpha=f_\alpha$, $f_\alpha|A_\beta=f_\beta$
$f_\alpha=f_\beta$
$(f_\alpha,A_\alpha)=(f_\beta,A_\beta)$
هدف: یافتن یک عضو ماکسیمال برای $(\chi,\le)$ به کمک لم تسورن
زنجیر $C=\{(f_\gamma,A_\gamma)\mid\gamma\in\Gamma\}$ را از χ در نظر بگیرید.
قرار دهید: $A_1=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\ \wedge\ f_1=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}f_\gamma$.
ادعا: (f_1,A_1) یک کران بالای C است.
زیرا
حکم ۱: $(f_1,A_1)\in\chi$
زیرا
الف) $f_1:A_1\to B$ یک تابع خوش‌تعریف است
زیرا
الف ۱) اگر $(x,y),(x,y')\in f_1$، آنگاه $y=y'$.
الف ۲) $dom\, f_1=A_1$.
ب) $f_1:A_1\to B$ یک‌به‌یک است.
حکم ۲: $(f_\alpha,A_\alpha)\le(f_1,A_1)$
بنابر تعریف f_1 و A_1 به‌وضوح برقرار است.
طبق لم تسورن
$(\chi,\le)$ دارای یک عنصر ماکسیمال مانند $(\tilde f,\tilde A)$ است.
$\tilde f:\tilde A\xrightarrow{1-1}B$
$\tilde A\subseteq A$
دو حالت ممکن
$\tilde A=A$
$\tilde f:A\xrightarrow{1-1}B$
اثبات قضیه تمام است.
$\tilde A\ne A$
$A-\tilde A\ne\phi$
$\exists x_0\in A-\tilde A$
دو حالت ممکن
$\tilde f:\tilde A\xrightarrow{1-1}B$ پوشا
$\tilde f:\tilde A\xrightarrow{1-1}B$ وارون‌پذیر
$\tilde f^{-1}:B\xrightarrow{1-1}\tilde A\subset A$
اثبات قضیه تمام است.
$\tilde f:\tilde A\xrightarrow{1-1}B$ غیرپوشا
$\exists y_0\in B-\tilde f(\tilde A)$
$\bar A=\tilde A\cup\{x_0\}$
$\bar f=\tilde f\cup\{(x_0,y_0)\}$
به‌وضوح $\bar f:\bar A\to B$ یک‌به‌یک است و $\bar A\subseteq A$
$(\bar f,\bar A)\in\chi$
$(\tilde f,\tilde A)<(\bar f,\bar A)$
تناقض با ماکسیمال بودن $(\tilde f,\tilde A)$ برای χ
حالت اخیر اصلا اتفاق نمی‌افتد
اثبات قضیه تمام است.

منابع

احمدی، فاطمه (۱۳۸۸). بررسی تأثیر به‌کارگیری نقشه مفهومی به‌عنوان ابزاری در فرآیند یاددهی- یادگیری روی پیشرفت تحصیلی و باورهای ریاضی دانش‌آموزان پایه دوم متوسطه رشته تجربی. *پایان‌نامه کارشناسی ارشد*، دانشگاه شهید رجائی، تهران.

حق‌خواه، ساره (۱۳۹۷). استفاده از نرم‌افزار MindMapper در بهبود یاددهی- یادگیری هندسه دبیرستان، *اولین کنفرانس ملی یافته‌های نوین در حوزه یاددهی و یادگیری.*

خواجه، سید امیر؛ بهدانی، فهیمه؛ ریحانی، ابراهیم (۱۳۹۵)؛ بهبود روش‌های یاددهی- یادگیری به کمک نقشه‌های مفهومی ذهنی با استفاده از نرم‌افزارهای Minding Map، *مجموعه مقالات چهاردهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران، دوره ۶، شماره ۱۳۹۵.*

ریحانی، ابراهیم (۱۳۹۵)؛ *تحلیل خط مشی‌ها، اسناد مصوب، پژوهش‌ها و منابع معتبر مرتبط با حوزه‌ی یادگیری ریاضی*، واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.

ریحانی، ابراهیم؛ بخشعلی زاده، شهرناز؛ استادی، مریم (۱۳۹۱)؛ تأثیر کاربرد نقشه‌های مفهومی بر درک دانش‌آموزان رشته ریاضی از توابع مثلثاتی، *رویکردهای نوین آموزشی دانشکدهٔ علوم تربیتی و روان شناسی دانشگاه اصفهان*، سال هفتم، شمارهٔ دو، شمارهٔ پیاپی ۱۶، پائیز و زمستان ۱۳۹۱، ص ۲۳-۵۲.

کرمانی، میرجواد (۱۳۹۳). *نقشه ذهنی و سازمان‌دهنده‌های گرافیکی*، تبریز: انتشارات درویش.

گلچین، سمیه (۱۳۹۵)؛ نقشه مفهومی، ابزاری کارآمد برای آموزش مفاهیم ریاضی، *مجموعه مقالات چهاردهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران*، دوره ۶، شماره ۱۳۹۵.

لین، شوینگ تی؛ لین، یو-فنگ (۱۳۸۶). *نظریه مجموعه‌ها و کاربردهای آن، ترجمه عمید رسولیان*، چاپ دوازدهم، مرکز نشر دانشگاهی، تهران.

هادیان‌دهکردی، مسعود؛ اسلام‌پور، محمدجواد؛ ریحانی، ابراهیم (۱۳۹۳)؛ ارزیابی درک دانشجویان ریاضی از مفهوم حد به کمک نقشه مفهومی، *نشریه علمی پژوهشی فناوری آموزش*، جلد ۹، شماره ۱.

Butler, D. L. (۲۰۱۴). Reliable Measures of Concept Map Examinations. *The Online Journal of Distance Education and e-Learning*, ۲ (۲):۱۷- ۲۵

Novak, J. D. & Cañas, A. J, (۲۰۰۸).*The theory underlying concept maps and how to construct and use them*, Technical Report IHMC Cmap Tools, Florida Institute for HumanCognition. Retrieved ,.

Roberts, L. (۱۹۹۹) “Using concept maps to measure statistical understanding. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, ۳۰, ۷۰۷–۷۱۷.

Williams, C.G. (۱۹۹۸) “Using concept maps to assess conceptual knowledge of function.”, *Journal of Research in Mathematical Education*, ۲۹, ۴۱۴–۴۲۱.

Yue, Hong (۲۰۰۸). Concept maps As Assessment Tools in Mathematics, Comparison with Clinical Interviews, *Doctoral dissertation*, Department of Mathematical Sciences, The University of Texas at EL Paso.