تساوی و چالشهای آن از پیش‌دبستانی تا کارشناسی

ساره حق خواه[۱]

چکیده

رکن اولیه هر دستگاه ریاضی نوعی نسبت "تساوی" در آن است تا بدان وسیله بتوان تشخیص داد که اشیا مورد بحث از جهت مورد نیاز متمایزند یا نه. از زمانیکه کودک به مقایسه و ایجاد تناظر یک به یک بین دو دسته از اشیا می‌پردازد، مفهوم تساوی در ذهن وی معنا پذیرفته و بتدریج با افزایش معلومات و رشد شناختی کودک، این مفهوم تکامل می‌یابد. در مسیر این تکامل گاه درگیر چالش‌ها و پارادوکس‌هایی می‌شود که آشنایی با آنها می‌تواند به هموارسازی این مسیر کمک شایانی نماید. در این مقاله که حاصل یک پژوهش کتابخانه‌ای و تجربیات آموزشی نویسنده می‌باشد، سعی شده رایج‌ترین چالش‌های تساوی، از پیش دبستانی تا مقطع کارشناسی به اجمال بررسی گردد.

کلید واژه ها: تساوی، بدفهمی، معادله، اتحاد، پارادوکس.

۱. استادیار گروه علوم پایه پردیس شهید باهنر فارس، دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران، نویسنده مسئول، sareh_haghkhah@yahoo.com

۱. مقدمه

در هر دستگاه و مبحث ریاضی، تساوی نقش خاص خود را ایفا می‌نماید. در حساب و جبر از تساوی بین اعداد و عبارتهای جبری، توابع، مجموعه‌ها، بردارها، ماتریس‌ها و ... سخن به میان می‌آید. دانش‌آموزان در هندسه‌ی مسطحه، تساوی بین اشکال هندسی یا اجزای آنها را به معنی قابلیت انطباق آنها بر یکدیگر، فرا می‌گیرند. در ریاضیات پیشرفته‌تر، پا را فراتر نهاده، هر دو مجموعه‌ی (جبری یا فضای برداری خاص) متناظر را که ساختارشان تحت آن تناظر حفظ شود، یکسان می‌گیرند.

در منطق ریاضیات تساوی منطقی، به معنی "همانی" است. رابطه $a=b$ یعنی "a همان b است" و به عبارت دقیقتر "a و b اسامی یک چیزند". نقیض رابطه فوق بصورت $a\neq b$ نوشته می‌شود و به این معنی است که a و b اسامی دو شی متمایزند. تساوی یک رابطه هم-ارزی است، یعنی برای آن روابط انعکاسی و تقارنی و تعدی برقرار است.

خاصیت جانشینی یا اصل لایبنیتز می‌گوید: فرض کنید حکمی درباره شی a برقرار باشد و $a=b$، در اینصورت اگر در آن حکم همه یا بعضی از موارد a را به b تبدیل کنیم، حکم جدید حاصل از تبدیل نیز برقرار است. بعبارت دیگر اگر $p(a)$ حکمی درباره a باشد و داشته باشیم $a=b$، در این صورت داریم $p(a)$ اگر و فقط اگر $p(b)$. (مصاحب ۱۳۵۳)

در این مقاله ابتدا به بیان چالش‌هایی که یک کودک پیش‌دبستانی در رابطه با مقایسه و بیان تساوی با آن درگیر است پرداخته و سپس با یک نگرش جبری، مهم‌ترین بدفهمی‌هایی که دانش‌آموزان و دانشجویان کارشناسی در مفهوم و کاربرد تساوی با آن مواجه می‌شوند به اختصار بررسی نموده‌ایم.

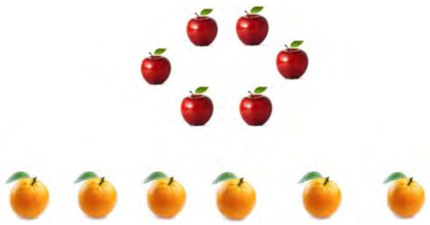
۲. بیان مساله

آنچه که در مورد کودکان پیش‌دبستانی (۵ تا ۷ سال) بررسی می‌کنیم تساوی اشکال هندسی، به معنای قابلیت انطباق، و تساوی عدد اصلی دو مجموعه از طریق مقایسه و تناظر یک به یک بین اعضای دو مجموعه و تساوی حجم و یا مقدار معینی از مواد می‌باشد. معولاً کودکان برای تشخیص تساوی دو شکل هندسی ساده از طریق منطبق کردن آنها بر یکدیگر با مشکل خاصی مواجه نمی‌شوند. مثلاً اگر تعدادی دایره به شعاعهای ۵ تا ۱۰ سانتیمتر در اختیار کودک قرار دهیم و یک دایره به شعاع ۷ سانتیمتر به او داده و از وی بخواهیم از طریق مقایسه و انطباق، دایره‌های هم‌اندازه با آن را بیابد، کودک با آزمون و خطا این کار را بدرستی انجام می‌دهد. مشاهده می‌شود که حتی کودکان کوچکتر بخوبی از عهده‌ی بازیهای جورکردنی که مهره‌هایی با اشکال هندسی ساده و اندازههای مختلف باید در جایگاه صحیح خود قرار گیرند، برمی‌آیند.

در اینگونه تمرینات، صفتی را که کودک به مقایسه آن می‌پردازد، بوضوح برایش قابل لمس است. اما زمانیکه پای مقایسه‌ی تعداد اعضای دو مجموعه از اشیا به میان می‌آید درک موضوع برای کودک به همین سادگی نمی‌باشد. ۶ عدد سیب و ۶ عدد پرتقال را در دو ردیف مرتب زیر هم قرار دهید. (شکل ۱) از کودک بخواهید تعداد سیبها و پرتقالها را، از طریق تناظر یک به یک (نه شمارش آنها)، با هم

مقایسه کند. چون نحوه‌ی چینش بگونه‌ای است که کودک براحتی قادر به انجام مقایسه می‌باشد، در پاسخ به این سؤال که "سیبها بیشترند یا پرتقالها؟" پاسخ می‌دهد: "هر دو به یک اندازه هستند."

حال پرتقال ها را کمی از هم دور کنید (شکل ۲ – الف) و یا سیبها را بصورت دایره‌وار بچینید (شکل ۲ – ب) و دوباره سؤال خود را تکرار کنید. اغلب با این جواب مواجه می‌شوید که "پرتقالها بیشترند." حتی اگر از کودک بخواهید سیبها و پرتقالها را شمارش کند باز هم ممکن است همان جواب قبلی را دریافت کنید.



شکل ۲ – الف

شکل ۲- ب

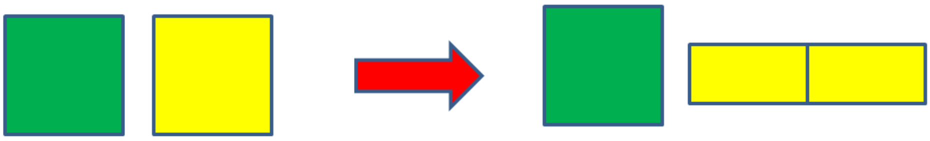
اگر این آزمایش را با دو دسته اشیا که از نظر اندازه و شکل متفاوت هستند، مثل دو ردیف ۶ تایی برگ که ردیف اول شامل برگهای بزرگتر و ردیف دوم شامل برگهای کوچکتر هستند، انجام دهید، کودکان ۵ ساله بندرت به تساوی تعداد برگها اشاره می کنند. (شکل ۳)

شکل ۳

در واقع کودک در مورد عدد، بطور متغیر فکر می‌کند و آن را به نحوه‌ی چینش یا ترکیب یا اندازه اشیا نسبت می‌دهد. در اینجا کودک بر این باور است که بزرگتر بودن شیء یا درازتر کردن ردیف، بدون اینکه در نظر بگیرد که عدد در این تغییر و تحول ثابت می‌ماند، آن عدد را بزرگتر می کند. پدیده نگهداری ذهنی را ژان پیاژه بیان کرده است. بندرت اتفاق می‌افتد که یک کودک ۵ ساله درک کند که جابجایی اشیا یک مجموعه تأثیری در تعداد آنها ندارد. (رایس ۱۳۹۱)

درک این موضوع زمانیکه کودک با مقدار و یا حجم مواد، سروکار دارد بمراتب پیچیده‌تر می‌شود. دو لیوان هم‌اندازه و یک شکل را از شکر پر کنید. محتویات یکی از لیوانها را در یک بشقاب پهن بریزید. کودک خواهد گفت که شکر داخل بشقاب از شکر داخل لیوان

بیشتر است. همین اتفاق در مقایسه‌ی سطوح هم‌اندازه تکرار می‌شود. دو مربع به ضلع ۱۰ سانتیمتر در اختیار کودک قرار دهید و از وی بخواهید با انطباق آن دو بر روی هم به تساوی‌شان پی ببرد. سپس یکی از مربع‌ها را بصورت دو مستطیل مساوی ۵ در ۱۰ برش بزنید و با چسباندن دو ضلع کوچکتر یک مستطیل ۵ در ۲۰ بسازید. این بار کودک خواهد گفت که مستطیل از مربع بزرگتر است. (شکل ۴)



شکل ۴

درک اصل پایستگی حجم یا مساحت حتی به سنین بالاتر مربوط می‌شود. علت اساسی هر یک از چالشهای فوق که کودک در مقایسه و بیان تساوی با آن مواجه است، این است که در هر کدام از آزمایشهای ذکر شده، کودک در مرحله‌ی اول واقعاً به مقایسه‌ی تعداد، مقدار و یا اندازه‌ی سطح می‌پردازد، اما در مرحله‌ی دوم آزمایش و با تغییر موقعیت جسم، صفت دیگری از جسم مثل درازتر شدن ردیف، پهن‌تر شدن حجم و یا درازتر شدن سطح، ذهن کودک را درگیر کرده، در بیان تساوی دچار مشکل می‌گردد. استدلال بصورت این همانی، عمل عکس و یا جبران کردن، که همگی متکی بر اصل بازگشت‌پذیری می‌باشند، (لطف‌آبادی ۱۳۹۲)، طراحی و انجام فعالیتهای آموزشی همراه با بیان واضح و قابل درک صفت مورد اندازه‌گیری و مقایسه، می‌تواند در جهت ارتقا آگاهی کودکان و رفع چالشهای فوق بسیار مؤثر واقع شوند. با ورود کودک به دبستان و رشد ذهنی وی، بمرور مشکلات فوق برطرف می‌شود اما از طرفی آشنایی با مفاهیم جدیدی در رابطه با تساوی، کودک را با مشکلات و بدفهمی‌های جدید مواجه می‌سازد.

درک بسیاری از مفاهیم حساب و جبر به درک صحیح مفهوم تساوی برمی‌گردد. مثلاً کودکی که مفهوم تساوی و کسرها را بخوبی فراگرفته است نباید با مفهوم اعشار، درصد و یا تناسب مشکل چندانی داشته باشد. زیرا هر عدد اعشار درحقیقت برابر است با یک کسر با مخرجی از توان ۱۰، و یا درصد که در واقع کسری است با مخرج ۱۰۰ و تناسب تساوی بین کسرهاست.

عمده‌ترین بدفهمی دانش‌آموزان در دوره ابتدایی این است که نماد "=" را به‌معنای "پاسخ برابر است با ..." می‌دانند. فالکنر، کارپنتر (۱۹۹۹) نقل شده در ون‌دوویل، کارپ و ویلیامز (۲۰۱۰) در آزمونی از دانش‌آموزان دوره ابتدایی خواستند که در تساوی $8+4=\square+5$ در جای خالی عدد مناسب بنویسند. کمتر از ۱۰ درصد دانش‌آموزان هر پایه پاسخ درست ۷ را ارائه کرده‌اند و به شکل عجیبی عملکرد دانش-آموزان با افزایش سن بهبود پیدا نکرده است. (بخشعلی‌زاده ۱۳۹۲) برخی دانش‌آموزان در جای خالی، عدد ۱۲ و برخی نیز عدد ۱۷ را بعنوان پاسخ قرار داده‌اند. این بدفهمی ممکن است در معادلاتی با هر یک از چهار عمل اصلی برای دانش‌آموزان رخ دهد.

اگر دانش‌آموز عمیقاً درک کرده باشد که در یک تساوی جبری مقدار دو طرف تساوی باید یکسان باشد، نه تنها در برخورد با معادلات دچار مشکل نمی‌شود بلکه این درک عمیق منجر به استفاده از ایده‌های خلاقانه و ساختاری می‌گردد. مثلاً برای حل معادله x+۵۲=۵۱+۱۷ ، به جای حل معادله به شیوه معمول (x=۶۸−۵۲=۱۶) با توجه به اینکه ۵۲ یک واحد از ۵۱ بیشتر است، برای برقراری تساوی، x باید یک واحد از ۱۷ کمتر باشد و بنابراین به جواب x=۱۶ می‌رسد. این سطح از یادگیری را سطح ساختاری گویند. (اصغری ۱۳۹۵)

در دوره متوسطه نیز دانش‌آموز با مشکلاتی مشابه در حل معادلات مواجه می‌شود که از پشت سر هم نوشتن معادلات نشأت می‌گیرد. مثلاً برای حل معادله ۳x−۲=۴x+۶ ممکن است دانش‌آموز به شیوه‌های نافرجام زیر عمل کند:

۳x−۲=۴x+۶ =۶+۲=۸ و یا ۳x−۲=۴x+۶ =۴x−۳x=x

فرنچ (۲۰۰۲) دلیل بروز این بدفهمی را چنین توضیح می‌دهد: دانش‌آموزان نماد تساوی را به جای هم ارزی دو عبارت، بعنوان یک دستور برای انجام عملی به منظور رسیدن به یک نتیجه تفسیر می‌کنند. این تفسیر به طور طبیعی به دنبال مشاهده نماد تساوی در عباراتی که محاسبات عددی در آنها منظور است، شکل می‌گیرد. (بخشعلی‌زاده ۱۳۹۲)

از دیگر مشکلات دانش‌آموزان متوسطه در برخورد با اتحادها و تفاوت آن با معادله می‌باشد. در ریاضیات به تساوی‌های جبری که با جایگذاری هر مقدار عددی از دامنه‌شان، برقرارند، اتحاد جبری گویند. مثلاً تساوی (x+۱)(x−۱) = $x^۲$−۱، برای هر عدد حقیقی x برقرار است. لذا این عبارت جبری یک اتحاد است. اما یک معادله جبری به ازای تعداد محدودی از اعضای دامنه خود (مجموعه جواب معادله) برقرار می‌باشد. به‌عنوان مثال، تساوی ۴x=۳x+۱، فقط برای x=۱ برقرار است. گاهی مشاهده می‌شود که دانش‌آموز در تلاش برای یافتن مجهول یک اتحاد جبری، زمانیکه به تساوی ۰=۰ می‌رسد از اینکه مجهول از بین رفته، سردرگم شده و به تصور اینکه در حل خود اشتباه کرده است چندین مرتبه به مرور محاسباتش می‌پردازد.

بعنوان نمونه‌ای دیگر از اشتباهات رایج دانش‌آموزان، به تساوی دو تابع اشاره می‌کنیم. فرض کنید $f: X \to Y$ و $g: Z \to W$ دو تابع باشند. در این صورت تساوی $f = g$ ، تساوی بین دو مجموعه است و لذا $f = g$ اگر و فقط اگر اعضای مجموعه‌های f و g یکسان باشند. به عبارت دیگر دو تابع f و g با هم برابرند اگر و تنها اگر دامنه‌شان با هم برابر باشد و برای هر x از دامنه مشترکشان $f(x) = g(x)$.

مثلاً توابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-3}}$ و $g(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x-3}}$ را در نظر بگیرید. معمولاً دانش‌آموزان بدون توجه به دامنه‌ی توابع از تساوی $\sqrt{\dfrac{x-2}{x-3}}=\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-3}}$ استفاده می‌کنند. در حالیکه $D_f=(3,+\infty)$ و $D_g=(-\infty,2]\cup(3,+\infty)$ و بنابراین $f\neq g$.

به نمونه‌های دیگری از این بدفهمی‌ها ذیلاً اشاره شده است.

$$\log x^2=2\log x \qquad \sqrt{(x-2)(x-3)}=\sqrt{x-2}\sqrt{x-3}$$

$$\frac{x-2}{x^2-4}=\frac{1}{x+2} \qquad \sqrt{x^2}=(\sqrt{x})^2$$

از دیگر بدفهمی‌هایی که در مورد تساوی وجود دارد به کارگیری خواص تساوی مربوط به فرمول یا رابطه ریاضی یک قضیه می‌باشد که دانش‌آموز یا دانشجو بدون توجه به دیگر مفروضات قضیه، از خواص تساوی استفاده می‌کند. بعنوان نمونه به قضیه اساسی حسابان توجه کنید:

اگر f بر $[a,b]$ پیوسته باشد و F تابع اولیه f باشد $(F'=f)$، آنگاه

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

معمولاً دانشجویان در برخورد با مسائلی شبیه مثال زیر (خصوصاً قبل از تدریس انتگرالهای ناسره)، فقط با توجه به تساوی فوق به حل مسأله می‌پردازند.

مثال: بنابر قضیه اساسی حسابان داریم:

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1}=-1-1=-2$$

در اغلب موارد دانشجویان به حل نادرست فوق واکنشی نشان نمی‌دهند و تازه زمانیکه از آنها پرسیده می‌شود: "چرا سطح زیر منحنی تابع غیرمنفی $\frac{1}{x^2}$ یک عدد منفی شده است؟" به دنبال علت این اشتباه می‌گردند.

گاهی اوقات نیز در مورد برخی از تعاریف ریاضی که با تساوی بیان می‌شود این بی‌دقتی رخ می‌دهد. مثلاً می‌دانیم که در مورد حد دنباله‌ها (و یا بطور مشابه حد توابع) عبارت "حد دنباله $\{a_n\}$ برابر با L است" بصورت تساوی $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ نمایش داده می‌شود. درواقع تساوی فوق دربردارنده یک گزاره مسور بصورت زیر می‌باشد:

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N > 0 \qquad n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

در ریاضیات عمومی دانشگاهی معمولاً اولین قضیه‌ای که بعد از تعریف حد دنباله بیان می‌شود قضیه‌ی منحصر بفردی حد می‌باشد. این قضیه بیان می‌کند که: حد دنباله $\{a_n\}$، در صورت وجود منحصر بفرد است. بیایید برای اثبات قضیه بصورت زیر عمل کنیم:

اثبات: فرض کنید: $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$ و از طرفی $\lim_{n\to\infty} a_n = L_2$. بنابر خاصیت تعدی تساوی، چون طرف اول تساوی‌های فوق برابرند طرف دوم نیز برابر می‌باشند. بنابراین داریم: $L_1 = L_2$. ■

باوجود اینکه دانش‌آموزان با تعریف حد در دوره دبیرستان آشنا شده‌اند، پس از بیان اثبات نادرست فوق، اغلب با هیچ اعتراضی از جانب دانشجویان مواجه نمی‌شویم و تازه زمانیکه از دانشجویان خواسته می‌شود در مورد اثبات قضیه تأمل کنند باز هم اکثراً متوجه استفاده‌ی نابجا از خواص تساوی نشده و فقط با دیده‌ی تردید به آن می‌نگرند.

این قبیل بی‌توجهی‌ها در بکارگیری تعاریف و قضایا گاهی اوقات دانش‌آموزان یا دانشجویان را دچار پارادوکس‌های جالبی می‌کند که به ذکر یک نمونه از آنها اکتفا می‌کنیم.

مثال: انتگرال زیر را در نظر بگیرید:

$$\int \sin x \cos x \, dx$$

توجه کنید که داریم:

$$\int \sin x(\cos x\, dx) = \int \sin x\, d(\sin x) = \frac{\sin^2 x}{2}$$

همچنین: $\int \cos x(\sin x\,dx) = -\int \cos x\,d(\cos x) = -\frac{\cos^2 x}{2}$

بنابراین: $\sin^2 x = -\cos^2 x$ و در نتیجه: $\sin^2 x + \cos^2 x = 0$.

از طرفی می دانیم که: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

از دو تساوی اخیر نتیجه می‌گیریم که: $1 = 0$!!!!

۳. نتیجه‌گیری

باید توجه داشت که برای استفاده‌های مفید و عملی در آموزش، همانقدر که شناخت چگونگی یادگیری ریاضی مهم است فهمیدن خطاهای آنها و ریشه‌های آن خطاها، هم از طرف معلم و هم از طرف فراگیر، از اهمیت بالایی برخوردار است. در این مقاله به بیان نکات ظریفی دررابطه با مفهوم تساوی پرداختیم که نادیده گرفتن آنها دانش‌آموزان را گرفتار چالش و پارادوکس می‌نماید. انتظار می‌رود که معلمین عزیز با بینش عمیق خود به بررسی و بیان این ظرافتها در کلاس درس پرداخته و مانع بروز بدفهمی‌های مذکور گردند.

منابع

۱. اصغری، امیرحسین؛ تقی‌دستجردی، شراره؛ عادلی ساردو، مریم (۱۳۹۵)، درک دانش‌آموزان چهارم دبستان از علامت تساوی، پذیرفته شده در چهاردهمین کنفرانس آموزش ریاضی.

۲. بخشعلی زاده، شهرناز (۱۳۹۲)، شناسایی بدفهمی های رایج دانش آموزان پایه چهارم ابتدایی در حوزه محتوایی ریاضی، ناظر طرح: غلام‌آزاد، سهیلا، همکار اصلی: بروجردیان، ناصر. سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی، پژوهشگاه مطالعات آموزش و پرورش.

۳. رایس، رابرت (۱۳۹۱)، کمک به کودکان در یادگیری ریاضیات، ترجمه مسعود نوروزیان، چاپ هشتم، انتشارات مدرسه، تهران.

۴. علم الهدایی، سید حسن (۱۳۸۱)، راهبردهای نوین در آموزش ریاضی، چاپ اول، نشر شیوه، تهران.

۵. لطف‌آبادی، حسین؛ سیف، سوسن؛ کدیور، پروین؛ کرمی نوری، رضا (۱۳۹۲)، روانشناسی رشد، انتشارات سمت، تهران.

۶. مصاحب، غلامحسین (۱۳۵۳)، تئوری مقدماتی اعداد، تالیف، انتشارات کتابفروشی دهخدا، تهران.

۷. French, D., *Teaching and Learning Algebra*, London: Continuum, ۲۰۰۲.

۸. Van de WalleJ. A., Karp, K. S., Bay-Williams, J. M., *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*, ۷th Edition, Allyn & Bacon, USA, ۲۰۱۰.