دانشگاه فرهنگیان
فصلنامه علمی-تخصصی پویش در آموزش علوم پایه
دوره سوم، شماره هفتم، تابستان ۱۳۹۶

مروری بر چند اثبات قضیه مورلی

آرزو حسینی [۱]، خدیجه مرشدی [۲]

چکیده

یکی از چالش‌های موجود در آموزش ایجاد انگیزه برای یادگیری است که یکی از موارد انگیزش، کاربرد و تعمیم مسائل بیان شده در درس است. تئوری مورلی [۳] در آموزش ریاضی با روش‌های متفاوت حل شده است. یکی از ساده‌ترین حل‌های آن را تاکنون آقای دکتر کرم‌زاده ارائه کرده‌اند. حالا در اینجا، با یک روش ساده می‌خواهیم تعمیم آن را به عنوان یک مسئله دوره متوسطه و کاربرد قوانین مثلثاتی حل کنیم. تئوری مورلی باعث به وجود آمدن معماها و مسائل متفاوت و وافری شده است. در این مقاله به بررسی چند روش اثبات این قضیه می‌پردازیم که قابل درک برای دانش‌آموختگان دوره متوسطه است.

کلیدواژه‌ها: آموزش ریاضی، حل مسئله، قضیه مورلی.

[۱] استادیار گروه علوم پایه دانشگاه فرهنگیان، ایران، نویسنده مسئول، a.hosseini@cfu.ac.ir

[۲] دانشجوی دبیری ریاضی دانشگاه فرهنگیان، ایران.

دریافت: ۹۶/۷/۱۱ پذیرش: ۹۶/۸/۱۵

[3] F.Morely

۱. مقدمه

تئوری مورلی فرصت مناسبی برای هندسه(دان‌ها) فراهم می‌کند تـا ابهـام آن را برطـرف کننـد. همچنین اثبات می‌کنیم که اثبات ما بسیاری از معماها (نقاط ابهام) را برطرف می‌کند. به منظـور توجیه نامی که برای عنوان این مقاله انتخـاب شـده تعـدادی از اثبـات‌هـای متفـاوت کـه بـرای دانش‌آموزان متوسطه قابل درک باشد بیان می‌گردد.

قضیه مورلی حاکی از این است که نقاط برخورد خطوط مجاور اضلاع تثلیث کننده سـه زاویـه داخلی هر مثلث تشکیل یک مثلث متساوی‌الاضلاع مـی‌دهنـد. ایـن مسـئله ابتـدا در سـال ۱۸۹۹ توسط فرانک مورلی مطرح گردید و تاکنون اثبـات‌هـای متعـددی بـرای آن ارائـه شـده اسـت. همیشه به دنبال پاسخ ساده‌تری برای مسئله هستیم تا بتوان در سطوح متوسطه قابل طـرح باشـد و بیان یک مسئله به طور ساده و حل ساده آن هنـر آموزشـگر اسـت کـه قابـل درک بـرای تمـام سطوح، حتی دانش‌آموختگان سطوح پایین‌تر باشد. مانند حل مسئله مورلی توسـط آقـای دکتـر کرم‌زاده [1, 2]. در بیشتر ساختارهای زمینهٔ (پیش نیاز) اثبات برای تئـوری مـورلی، یـک مثلـث مشابه با مثلث داده شده وجود دارد (یا اثبات با مشابهت یک مثلث با مثلـث داده شـده بـه پایـان می‌رسد) و موقعیت یک نیمساز ساده مبنایی برای هر مرحله‌ای از اثبات است.

۲. روش حل بانکف[1]

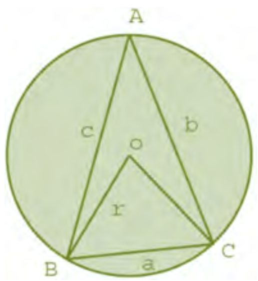
اثبات بانکف مبتنی بر روش‌های مثلثاتی است [1] که دانش‌آموزش در دوره متوسطه با مثلثـات آشنا شده و روش‌های هندسه و مثلثاتی این اثبات باعث انگیزش خواهد بـود کـه قضـایای مهـم نیز با آن قابل حل است.

[1] Bankoff

برای هر مثلث ΔABC داریم:

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin(\mathrm{A})} = \frac{\mathrm{AC}}{\sin(\mathrm{B})} = \frac{\mathrm{AB}}{\sin(\mathrm{C})} = 2\mathrm{r}$$

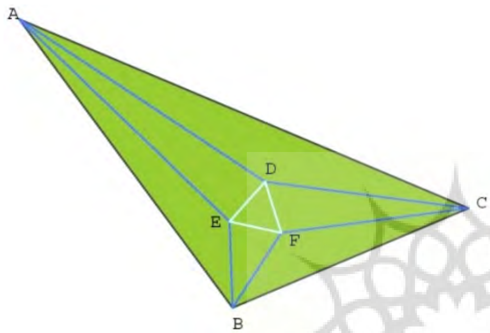
(r شعاع دایره محیطی مثلث ΔABC)



شکل ۲-۱.

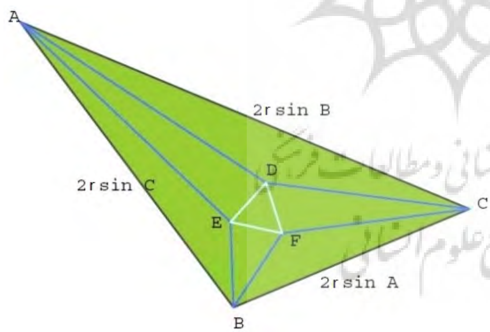
مثلث دلخواه ΔABC، با زاویه‌ها در نقاط A، B و C کشیده شده است. از شکل مقابل می‌دانیم که

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^o.$$



شکل ۲-۲.

$$\begin{aligned}\angle BFC &= 180^o - \hat{B}/3 - \hat{C}/3 \\ &= 180^o - (\hat{B}+\hat{C})/3 \\ &= 180^o - (180^o - \hat{A})/3 \\ &= 120^o + \hat{A}/3 \\ &= (360^o + \hat{A})/3\end{aligned}$$



شکل ۲-۳.

به همین ترتیب:

$$\sin\angle ADC = \sin\left(\frac{360^o + \hat{B}}{3}\right) \qquad (i)$$

در مثلث ΔABC فرض می‌کنیم:

$$\hat{A} = 3\alpha, \qquad \hat{B} = 3\beta, \qquad \hat{C} = 3\gamma$$

و در مثلث ΔBFC داریم:

$$\frac{BF}{\sin\gamma} = \frac{BC}{\sin(180^0 - \gamma - \beta)}$$

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin(180^0 - \gamma - \beta)} = \frac{2r\sin(3\alpha)}{\sin(\gamma + \beta)} = \frac{2\mathrm{r}\sin(3\alpha)}{\sin(60^0 - \alpha)}$$

بنابراین

$$\frac{\mathrm{BF}}{\sin\gamma} = \frac{2\mathrm{r}\sin(3\alpha)}{\sin(60^0 - \alpha)}$$

پس

$$\mathrm{BF} = \frac{2\mathrm{r}\sin(3\alpha)\sin \mathrm{c}}{\sin(60^o - \alpha)}$$

$$\begin{aligned}
\sin(3x) &= 3\sin(x) - 4\sin^3(x) \\
&= 4\sin(x)\,[\,(\sqrt{3}/2)^2 - \sin^2(x)] \\
&= 4\sin(x)\,[\,\sin^2(60^o) - \sin^2(x)] \\
&= 4\sin(x)\,(\sin 60^o + \sin(x))(\sin 60^o - \sin(x)) \\
&= 4\sin(x)\,2\sin\left[\frac{60^o + x}{2}\right]\cos\left[\frac{60^o - x}{2}\right]2\sin\left[\frac{60^o - x}{2}\right]\cos\left[\frac{60^o + x}{2}\right] \\
&= 4\sin(x)\sin(60^o + x)\sin(60^o - x)
\end{aligned}$$

بنابراین:

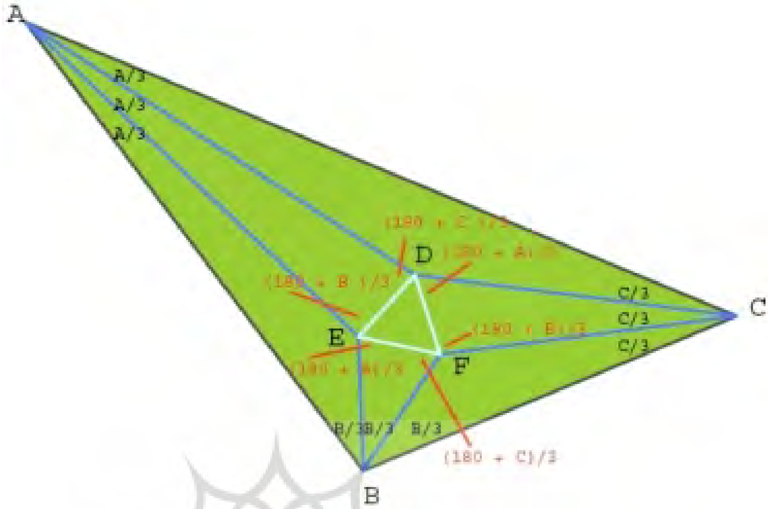
$$BF = 8\,r\sin(\alpha)\,.\sin(60^o + \alpha)\,.\sin(60^o - \alpha)\,.\frac{\sin\gamma}{\sin(60^o - \alpha)}$$

$$BF = 8r\sin(\alpha)\,.\sin(60^o + \alpha)\,.\sin(\gamma) \qquad (ii)$$

مانند (ii) برای $\mathrm{B} = 3\beta$ و $\mathrm{C} = 3\gamma$ استفاده می‌کنیم و به‌دست می‌آید:

$$AD = 8r\sin(\beta)\sin(\gamma)\sin(60^0 + \beta)$$

$$AE = 8r\sin(\gamma)\sin(\beta)\sin(60^o + \gamma)$$



شکل ۲-۴.

$$\frac{AE}{AD} = \frac{\sin(60^o + \gamma)}{\sin(60^o + \beta)}$$

$$\angle ADE + \angle AED = 180^o - \frac{A}{3}$$

$$= \frac{540^o - A}{3}$$

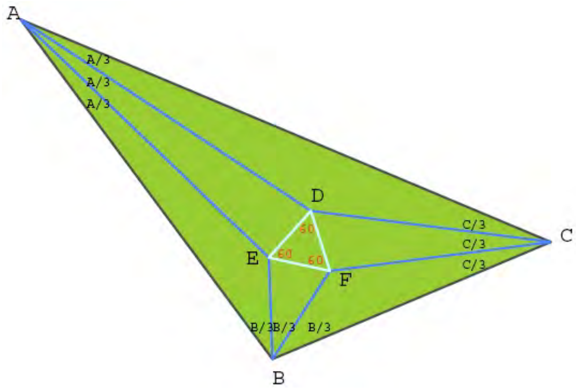
$$= \frac{540^o - (180^o - B - C)}{3}$$

$$= \frac{360^o + B + C}{3}$$

$$= \frac{180^o + B}{3} + \frac{180^o + C}{3}$$

از اینجا خواهیم داشت:

$$\angle ADE = \frac{180^o + B}{3},$$
$$\angle AED = \frac{180^o + C}{3}$$



شکل ۲-۵.

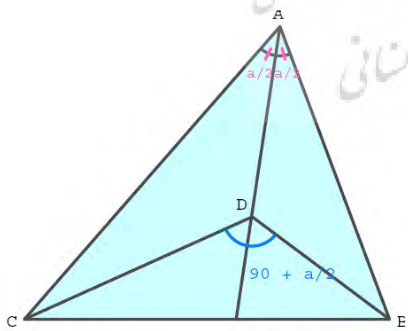
به همین ترتیب برای مثلث‌های ΔDFC و ΔBFE به‌دست می‌آید.

زوایای حول F را به‌دست می‌آوریم $\widehat{DFE} = 300^o$ یا $\widehat{DFE} = 60^o$. به همین ترتیب برای زوایای D و E نیز 60^o خواهند بود.

۳. روش اثبات دریگیدز[1]

اثبات دیگری از قضیه مورلی مطرح می‌کنیم؛ این نوع اثبات‌ها از این نظر حائز اهمیت است که با اطلاعات دانش‌آموزان در دوره متوسطه قابل درک هستند.

برای اثبات قضیه مورلی از لم زیر استفاده می‌شود که اثبات لم در [4] آمده است.



شکل ۳-۱.

لم ۱: فرض کنید $\angle BAC = a$ و نقطه D در مرکز مثلث ΔABC است، اگر و تنها اگر خط DA نیمساز زاویه a باشد و

$$\angle CDB = 90^o + a/2$$

[1] Dergiades

اثبات قضیه مورلی: فرض می‌کنیم زوایای داخلی مثلث دلخواه ΔABC:

$$\widehat{A}=\alpha,\qquad \hat{B}=\beta,\qquad \hat{C}=\gamma$$

باشند و دریگیدز فرض می‌کند:

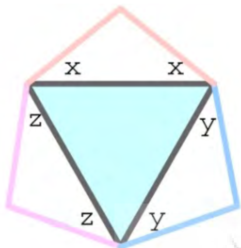
$$\mathrm{x}=60^o-\left(\frac{\alpha}{3}\right),\qquad y=60^o-\left(\frac{\beta}{3}\right),\qquad z=60^o-\left(\frac{\gamma}{3}\right)$$

و فرض می‌شود $0<x,y,z<60^0$ و $\mathrm{x}+\mathrm{y}+\mathrm{z}=120^0$.

سه مثلث متساوی‌الساقین روی اضلاع یک مثلث متساوی‌الاضلاع با زوایای جانبی x، y و z می‌سازیم که:

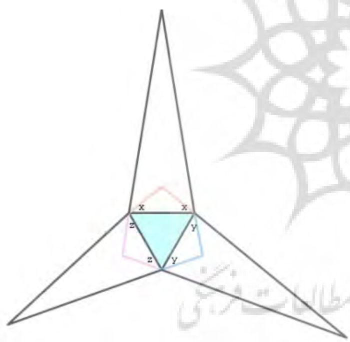
$$0<x,y,z<60^0$$
$$\mathrm{x}+\mathrm{y}+\mathrm{z}=120^0$$

در شکل مقابل می‌بینید.

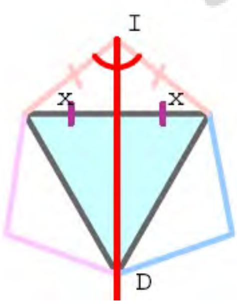


شکل ۳-۲.

ساق‌ها را مانند آنچه که در شکل(۳-۳) مشاهده می‌کنید امتداد داده تا یکدیگر را قطع کنند.


شکل ۳-۳.

چون D راس مثلث متساوی‌الاضلاع است بنابر آنچه که در شکل مشاهده می‌کنید خط ID نیمساز زاویه‌های I و D خواهد بود در شکل (۳-۴).



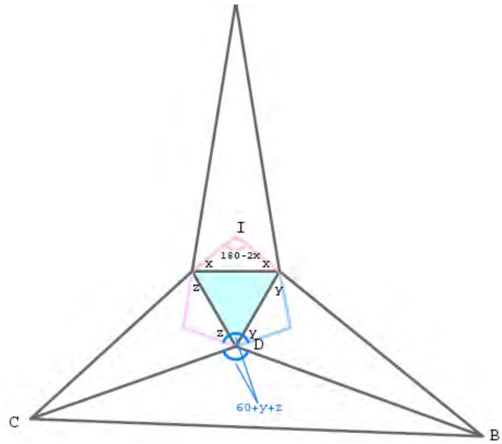
شکل ۳-۴.

رأس‌های B و C را به هم وصل می‌کنیم.

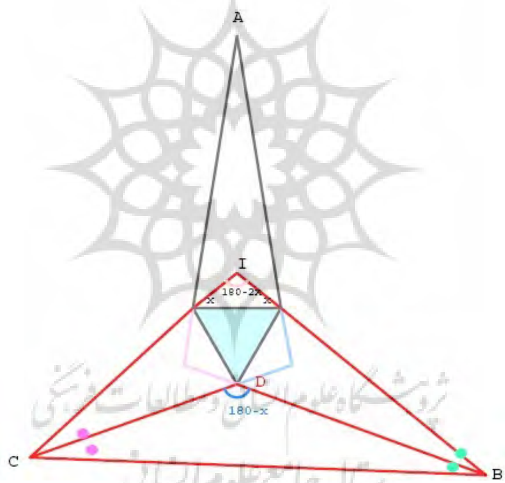
$$\begin{aligned}\angle BDC &= 60^o + z + y\\ &= 60^0 + x + y + z - x\\ &= 180^0 - x\end{aligned}$$

چون $\angle BIC = 180^0 - 2x$ و D روی نیمساز زاویه $\angle BIC$ است بنابر لم ۱ نتیجه می‌گیریم که D در مرکز مثلث ΔCIB است.

(D محل برخورد نیمسازها در مثلث ΔCIBاست.)



شکل ۳-۵.



شکل ۳-۶.

حال ضلع AB و AC را رسم می‌کنیم.

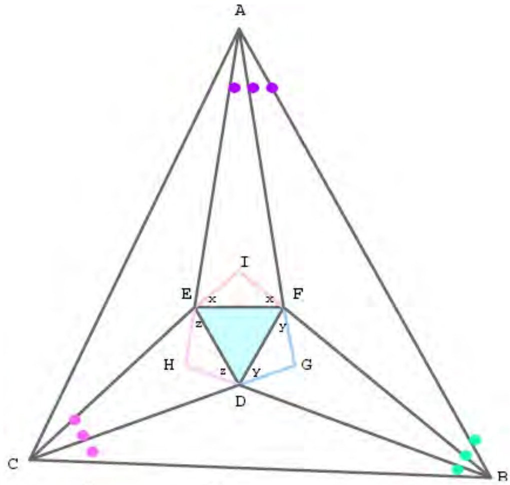
در آخر ثابت می‌کنیم که زوایای داخلی مثلث ΔABC همان α و β و γ است.

بنابر شکل ۳-۷ داریم:

$$s + x + z + 60 = 180^0$$

و درنتیجه

$$s + x + z = 120^0$$



شکل ۳-۷.

همچنین

$$a+s+t+x+x = 180^0$$

به همین ترتیب

$$t+x+y+60 = 180^0$$

پس

$$t+x+y = 120^0$$

و همچنین

$$x+y+z = 120^0$$

شکل ۳-۸.

بدین ترتیب:

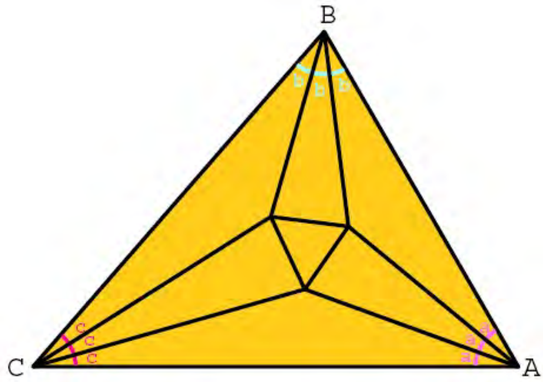
$$a+(s+x)+(t+x) = 180^0$$
$$a+(120^0-z)+(120^0-y) = 180^0$$
$$a+120^0+(120^0-z-y) = 180^0$$
$$a+120^0+x = 180^0$$

بنابراین به‌دست می‌آید

$$A = 60^0 - x = \frac{\alpha}{3}$$

لذا مثلث ΔABC دارای زوایای α و β و γ است.

٤. روش کانوی[1]



شکل ۴-۱

اثبات زیر اثری از کانوی که در سال ۱۹۹۵ انجام شده است [3, 5, 6]. در این اثبات بنابر شکل (۴-۱) در نظر گرفته شده است

$$3a + 3b + 3c = 180^o$$

بنابر این

$$a + b + c = 60^o$$

فرض می‌کنیم $x^+ = x + 60^o$ و چون $a + b + c = 60^o$ پس می‌توان چنین در نظر گرفت که:

$$0^+ = a + b + c = 60^o$$

بنابراین برای ساخت یک مثلث می‌توان سه نوع ترکیب از زوایا را در نظر گرفت:

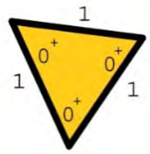
۱. نوع اول : $0^+, 0^+, 0^+$
۲. نوع دوم : a^+, b^+, c; a^+, b, c^+; a, b^+, c^+;
۳. نوع سوم : a, b, c^{++}; a, b^{++}, c; a^{++}, b, c;

چون جمع هر یک از این هفت ترکیب برابر 180^o است.

کانوی به روش بازگشتی مسئله را حل کرده است. او نشان می‌دهد که روی یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌توان یک مثلث با هر زاویه‌ای ساخت. یعنی با زوایای دلخواه a و b و c که $a + b + c = 60^o$ می‌توان داشته باشیم:

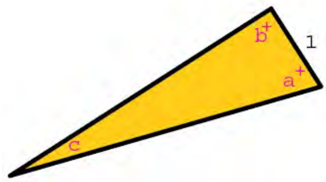
[1] Conway

۱. نوع اول: مثلث متساوی‌الاضلاع با طول ۱ می‌سازیم.



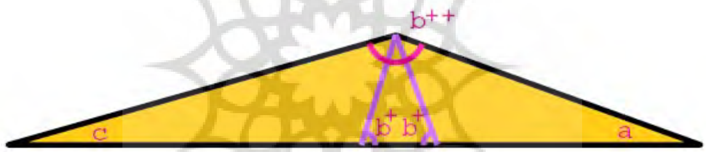
شکل ۴-۲.

۲. نوع دوم: یک مثلث با یک ضلع ۱ و زوایای a^+ و b^+ می‌سازیم.



شکل ۴-۳.

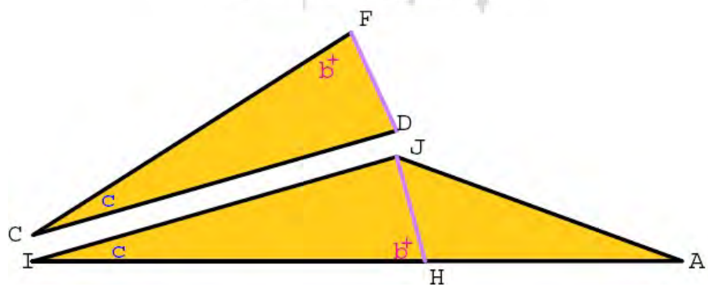
۳. نوع سوم: دو خط با نقطه اشتراک در b^{++} روی ضلع مقابل به زاویه b^{++} با زاویه b^+ باشند. مثلث متساوی‌الساقین با زاویه پایه b^+ ایجاد می‌کند. (دلیل و نحوه ساخت این مثلث در پایین ذکر شده است.)



شکل ۴-۴.

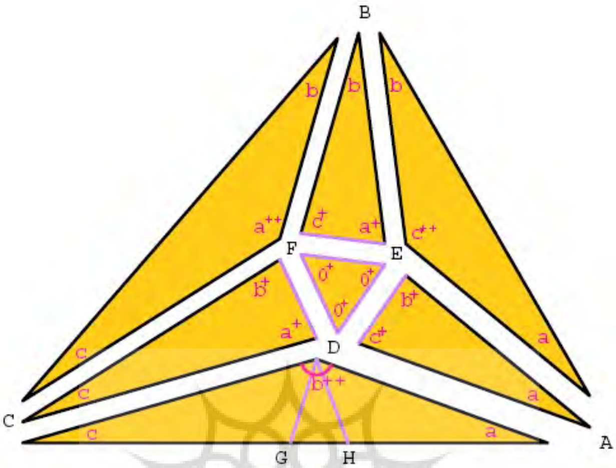
مثلث‌های JHI و DFC را می‌سازیم:

$$JHI = DFC = b^+$$
$$JIH = DCF = c$$
$$JH = DF = 1$$



شکل ۴-۵.

ثابت می‌شود مثلث‌های JHI و DFC همنهشت هستند. این نشان می‌دهد که DC = JI، چون دو مثلث یکسان شدند پس ضلع مشترک هستند و نقاط $J = D$ و $I = C$. به همین ترتیب می‌توان مثلث‌های دیگر را نیز ساخت و آن‌ها را کنار هم قرار داد.

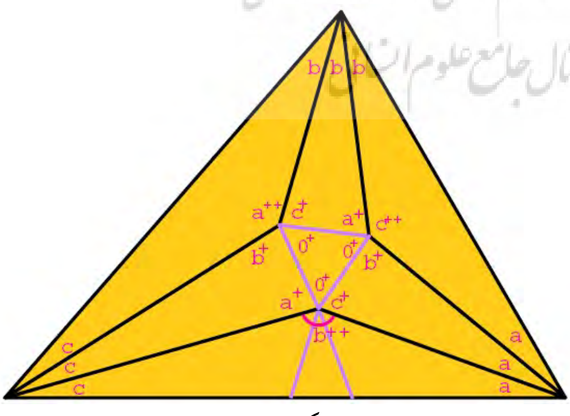


شکل ۴-۶.

توجه کنید جمع زوایای راس‌های مثلث متساوی‌الاضلاع 360^o باشد.

$$(a^+) + (c^+) + (b^{++}) + (0^+)$$
$$= a + 60^o + c + 60^o + b + 120^o + 60^o$$
$$= (a + b + c) + 300^o = 360^o$$

چون جمع زوایا در D، 360^o است و اضلاع منطبق هستند. می‌بینیم مثلث بزرگ‌تر از روی مثلث متساوی‌الاضلاع ساخته شده است با زوایای 3a، 3b و 3c، به نتیجه مطلوب دست پیدا کردیم.

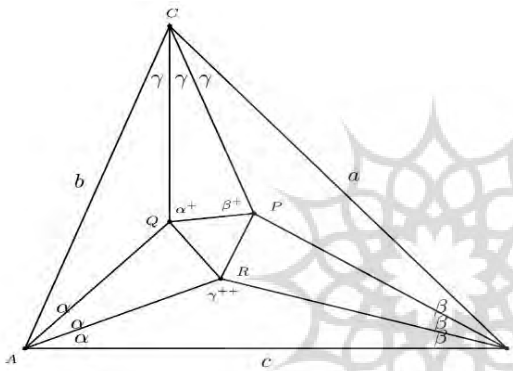


شکل ۴-۶.

۵. روش اثبات کرم‌زاده [3, 4]

در بیشتر ساختارهای اثبات بازگشتی قضیه مورلی، اثبات با یک مثلث متشابه با مثلث داده شده به پایان می‌رسد اما در اثبات دکتر کرم زاده با اجتناب از تشابه، در انتهای اثبات، به مثلث اولیه می‌رسیم. همچنین در این اثبات، قضیه نیمسازها (لم ۲)، برای اثبات هر کدام از گام‌های قضیه کفایت می‌کند. اثبات دقیق این قضیه در منبع [7] ذکر شده است، اینجا روش اثبات عنوان می‌گردد.

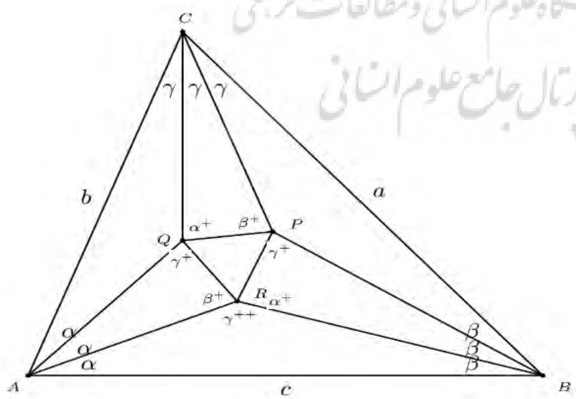
برای اثبات، ابتدا مسئله حل شده در نظر گرفته می‌شود. بدین ترتیب خواهیم داشت:



$$\alpha^+ = 60^0 - \alpha$$
$$\beta^+ = 60^0 - \beta$$
$$\gamma^+ = 60^0 - \gamma$$
$$\gamma^{++} = 120^0 + \alpha$$

شکل ۵-۱.

لم ۲: فرض کنید A نقطه‌ای درون زاویه $\widehat{XOY}$ و B و C به ترتیب نقاطی روی اضلاع OX و OY هستند. سپس اگر دو تا از گزارهٔ زیر درست باشند، آنگاه سومی هم درست است [3, 6].



شکل ۵-۲.

۱. نقطهٔ A روی نیمساز زاویهٔ $\widehat{XOY}$ قرار دارد.

۲. $AB = AC$.

۳. زاویهٔ $\widehat{OBA}$ و $\widehat{OCA}$ یا مساوی‌اند یا مکمل‌اند.

بنابر لم ۲ خواهیم داشت:

$$\widehat{CQP} = \widehat{PRB} = \alpha^{+}$$
$$\widehat{AQR} = \widehat{RPB} = \gamma^{+}$$
$$\widehat{ARQ} = \widehat{RPB} = \beta^{+}$$

حال برای اثبات قضیه مورلی مثلث ΔARB با داشتن ضلع AB و زوایای جانبی α و β رسم می‌کنیم سپس مثلث ΔARQ را روی ضلع AR با زوایای جانبی α و β^{+} رسم کرده به همین ترتیب مثلث ΔBRP و ثابت می‌کنیم $QR = PR = QP$ پس مثلث ΔPQR متساوی‌الاضلاع بوده که همان مثلث مورلی است. مثلث $\Delta PQC'$ را روی ضلع PQ با زوایای جانبی α^{+} و β^{+} رسم کرده و ثابت می‌کنیم نقطه C' همان نقطه C است، بدین ترتیب حکم کامل می‌شود.

منابع

[1] Alexander Bogomolny, this proof is first published, in Mathematics Magazine**,** 35 (1962) 223-224

[2] Dergiades, A simple geometric proof of Morley's Theorem, Diastasi 1991 issue 1-2 pp 37-38. Thessaloniki-Gree.

[3] Connes, A., A new proof of Morley’s theorem, http: //www.alainconnes.org/docs/morley.pdf

[4] I. Gorjian، O. A. S. Karamzadeh، M. Namdari، Morley’s Theorem Is No Longer Mysterious! 2015 Springer Science New York، DOI: 10.1007/s00283-015-9579-0، December 2015.

[5] O.A.s. Karamzadeh، Is John Conway's Proof of Morley's Theorem the Simplest and Free of A Deus Ex Machina?، The Mathematical Intelligencer، September 2014، Volume 36، Issue 3، pp 4–7.

[6] Dragutin Svrtan and Darko Veljan ،Side Lengths of Morley Triangles and Tetrahedra ،Forum Geometricorum ،Volume 17 (2017) 123–142.

[7] آرزو حسینی، مریم شمس سولاری، پردیس نیک فطرت، «مروری بر تعمیم قضیه مورلی»، *مجله شهید شرافت (دانشگاه فرهنگیان)*س، (۲۰۱۷) ۲۰-۲۴.

An Overview of Some of Morley's Theorems

Arezoo Hosseini[1], Khadije Morshedi[2]

Abstract

One of the challenges in teaching is to motivate learning. One of the instances of motivation is the application and generalization of the issues expressed in the lesson. One of the simplest ways to use Murley's theory of mathematical instruction has been presented by Dr. Karamzadeh. Now here, in a simple way, we want to solve its generalization as a secondary school problem and the application of trigonometric laws. Morley's theory has led to many different puzzles and problems. In this article, we will look at some of the ways in which this proves to be understandable to high school graduates.

Keywords: Mathematics Education, Problem Solving, Morley Theorem.

[1] Assistant professor, Basic Sciences Department, Farhangian University, IRAN, a.hosseini@cfu.ac.ir
[2] Teature Student, Farhangian University, IRAN.