دانشگاه فرهنگیان
فصلنامه علمی-تخصصی پویش در آموزش علوم پایه
دوره دوم، شماره چهارم، پاییز ۱۳۹۵

تأثیر روش نموداری در تدریس مفاهیم و حل مسائل ریاضی

اژدر سلیمان‌پور باکفایت[۱]، مهتا برجیسی[۲]

چکیده

در این مقاله، یک روش ساده و مهم به نام روش نموداری را ارائه می‌دهیم که برای بیان برخی از مفاهیم ریاضی، خیلی مهم و کاربردی است. ضمن بیان نقاط ضعف و قوت و آسیب‌شناسی روش نموداری، توانایی این روش با ذکر مثال‌های متنوعی بیان می‌شود. در ادامه، موضوع اثبات بدون کلام را بیان کرده و ضمن ارائه منابع موجود، ارتباط آن با روش نموداری بررسی می‌شود.

کلیدواژه‌ها: اثبات بدون کلام، تدریس مفاهیم ریاضی، روش نموداری، نمودار توابع.

---

[۱] مدرس دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران، نویسنده مسئول مقاله، a.soleymanpoor@cfu.ac.ir
[۲] دانشجومعلم دانشگاه فرهنگیان، ایران.

دریافت: ۹۴/۱۱/۴ پذیرش: ۹۶/۳/۱۸

۱. مقدمه

از زمان‌های قدیم، یکی از ابزارهای ارائه مفاهیم ریاضی و حتی غیرریاضی، ارائه نمودارها و استفاده از اشکال بوده است. به‌طور مثال، در مقطع ابتدایی اشکال یکی از ابزارهای مهم انتقال مفاهیم هستند[1]. اما اینکه آیا در مقاطع بالاتر نیز این موضوع می‌تواند مصداق داشته باشد یا خیر سؤالی است که نیاز به بررسی دارد.

دانشمندان زیادی در جهان، روابط ریاضی زیادی را با رسم نمودارها بیان کرده و شکل رسم شده را به عنوان اثباتی برای رابطهٔ مذکور تلقی می‌کنند. به این روش، روش اثبات بدون کلام[2] می‌گویند [۱]. در این میان، عده‌ای اثبات بدون کلام را به عنوان یک اثبات ریاضی مورد قبول تلقی نکرده و آن را فقط یک توجیه هندسی می‌دانند. مثال‌های بررسی شده در این مقاله نشان می‌دهند که اثبات بدون کلام و روش نموداری گاهی برای انتقال مفاهیم اولیه و گاهی برای حل مسائل نسبتاً مشکل خیلی مناسب هستند. به‌طور مثال زمانی که لازم نیست موضوعی ثابت شود این دو روش خیلی مناسب خواهند بود. از جملهٔ این موارد، تدریس در مقاطع ابتدایی است. نشان خواهیم داد که در مقاطع بالاتر نیز جایگاه مناسبی برای این دو روش وجود دارد.

مجله انجمن ریاضی آمریکا MAA [3]، مقالات یک صفحه‌ایی به نام اثبات بدون کلام و نیز مقالات ریاضی در سطوح مختلف را چاپ می‌کند. به عنوان نمونه، در [۵] با ترسیم یک شکل ثابت شده است که مجموع فاصله‌های هر نقطه داخل یک مثلث متساوی‌الاضلاع برابر با ارتفاع آن مثلث است. در تحقیق دیگری [۴] که در همین مجله چاپ شده است، ضمن معرفی اعداد لاح[4]، مشتق مرتبه nام تابع e^{1-x} به‌دست آمده است [۴].

[1] حتی در این مقطع تعریف نیز وجود ندارد. زیرا هیچ موضوعی انتزاعی در این مقطع مفهوم ندارد و همه مفاهیم تجسمی‌اند.

[2] Proof Without Words.

[3] Mathematical Association of America.

[4] Lah Numbers.

مجله دیگری که تحقیقات معلمان ریاضی را چاپ می‌کند، NCTM [1] است. در [۶] نویسنده، در مورد هندسهٔ ماتریس فیبوناچی[2]، خواص مهمی را بیان و ثابت کرده است.

واضح است نه تنها روش نموداری، بلکه هیچ روشی برای حل همهٔ انواع مسائل کامل نبوده و نقاط ضعفی دارد. در این مقاله نقاط ضعف و قدرت روش نموداری بررسی می‌شوند.

۲. روش نموداری

در این بخش، روش نموداری از جنبه‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفته است و ضمن مثال‌هایی این جنبه‌ها به‌طور دقیق‌تر بیان می‌شوند.

تعریف: روش نموداری، روشی است که در آن برای بیان برخی مفاهیم ریاضی، توصیف رابطه‌ها و حل برخی از مسائل ریاضی فقط از نمودارهای ریاضی استفاده می‌شود.

روش نموداری، در سه مورد کلی به‌کار می‌رود که عبارت‌اند از:

(۱) بیان مفاهیم اولیه ریاضی؛ **(۲)** توصیف رابطه‌ها (اثبات بدون کلام)؛ **(۳)** حل برخی از مسائل مشکل ریاضی.

هر یک از سه بند فوق را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲-۱. بیان مفاهیم اولیه ریاضی

همان‌طور که توضیح داده شد، یکی از ابزارهای انتقال مفاهیم ریاضی در مقاطع تحصیلی مختلف استفاده از اشکال است. اما بدیهی است که استفاده از نمودارها ابزاری برای انتقال مفاهیم در مقاطع بالاتر و گاهی حتی در دانشگاه است.

برای مثال توجه داریم که در مقطع دبیرستان، زمانی انتقال مفهوم تابع تکمیل می‌شود که از نمودار ون استفاده کرده یا نمودار تابع رسم شود. نمودار تابع $y = f(x)$ قادر است رابطه بین

---

[1] National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).
[2] Fibonacci.

متغیر مستقل x و متغیر وابسته y را بیان کند. تـا زمـانی کـه نمـودار f رسـم نشـود درک رابطـهٔ مذکور برای متعلمان مشکل خواهد بود.

توجه خود را به تدریس تابع قدرمطلق با ضابطه $y = |x|$ متمرکز می‌کنیم. همواره تعریف ایـن تابع به صورت زیر است:

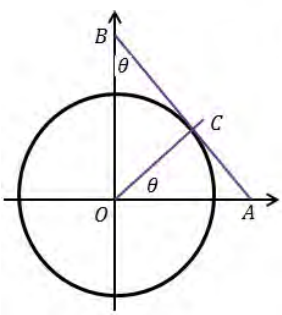
$$|x| = \begin{cases} x\ x, & \geq 0 \\ -x\ x, & < 0 \end{cases}$$

و پس از آن مثال‌های عددی زیادی حل می‌کنیم. اما با رسم نمودار این تابع درک ایـن مفهـوم که جواب قدر مطلق، به علامت داخل قدر مطلق بستگی دارد به آسانی صورت می‌گیرد.

به عنوان مثال دوم، تدریس مفهوم خط مجانب یک منحنی بدون رسـم شـکل کـاری مشـکل و غیرممکن خواهد شد. زیرا در این حالت منحنی به خط نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود امـا هرگـز به آن نمی‌رسد. در این مورد حتی برای تکمیل درک مفهوم خط مجانب از رفتار دنباله $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ نیز اسـتفاده مـی‌شـود. نتیجـه اینکـه اثـر نمودارهـا در مفـاهیم اولیـه، بـر کسـی پوشـیده نبـوده و کاملاً ضروری و لازم است.

مسـئله ۱. مـی‌خـواهیم مفهـوم دو نسـبت مثلثـاتی $\sec\theta$ و $\csc\theta$ را بیـان کنـیم و متعلمـان بـا نسبت‌های مثلثاتی $\sin\theta$ و $\cos\theta$ و دایره مثلثاتی آشنا هستند. بهتر اسـت از شـکل زیـر اسـتفاده شود.

در این شکل دایرهٔ رسم شده دایرهٔ مثلثاتی به شعاع واحد است. می‌توان نوشت:



$$\cos\theta = \frac{OC}{OA} = \frac{1}{OA} \Rightarrow OA = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$$

$$\sin\theta = \frac{OC}{OB} = \frac{1}{OB} \Rightarrow OB = \frac{1}{\sin\theta} = \csc\theta$$

بدین ترتیب طول پاره‌خط OA همان $\sec\theta$ و طول پاره‌خط OB برابر $\csc\theta$ است. در شکل فوق توجه داریم که زاویه OBA به این علت با θ برابر است که اضلاع متناظر OBA و COA برهم عمود هستند. در حالت کلی اگر دو زاویهٔ دارای اضلاع متناظر عمود باشند با هم برابرند![1]

■

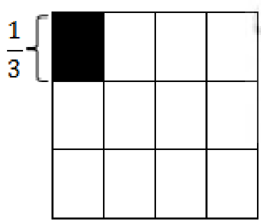
به عنوان نمونه دوم، نمودار ون در تدریس مفهوم تابع شاهد دیگری برای استفاده از روش نموداری در انتقال مفاهیم است.

مسئله ۲. می‌خواهیم در ابتدای تدریس تقسیم کسرها در مقطع ابتدایی ابتدا عمل تقسیم را با شکل ارائه دهیم. تقسیم‌های زیر را به‌صورت مفهومی و با استفاده از شکل بیان کنید:

$$\frac{1}{3} \div 4 \qquad (۱)$$

$$\frac{3}{4} \div \frac{1}{3} \qquad (۲)$$

جواب: ابتدا تقسیم (۱) را انجام می‌دهیم. برای عمل تقسیم کسرها یک مربع به طول ضلع یک واحد رسم می‌کنیم و سپس به‌طور عمودی یا افقی آن را به ۳ (مخرج کسر اول) قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. سپس از ضلع دیگر مربع، قسمت $\frac{1}{3}$ و سپس کل مربع را به ۴ (کسر دوم) قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. در نتیجه قسمت هاشورخورده جواب مسئله است که $\frac{1}{12}$ است. پس:



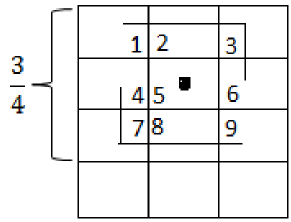
$$\frac{1}{3} \div 4 = \frac{1}{12}$$

برای حل (۲) ابتدا یک ضلع مربع واحد را به ۴ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم سپس ضلع دیگر مربع را به ۳ قسمت مساوی تقسیم کرده و مخرج‌ها را یکسان می‌کنیم: $\frac{9}{12} \div \frac{4}{12}$

[1] توسط تشابه مثلث‌ها می‌توان این حکم را ثابت کرد.

اکنون $\frac{9}{12}$ مربع عبارتست از شماره‌های ۱ تا ۹، جواب تقسیم عبارتست از اینکه در داخل $\frac{9}{12}$ چند تا $\frac{4}{12}$ وجود دارد. جواب می‌شود ۲ تا و $\frac{1}{4}$ پس:

$$\frac{9}{12} \div \frac{4}{12} = 2\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$



نمونه‌های فراوانی می‌توان در کتب درسی مقاطع مختلف تحصیلی یافت که نشان دهنده تأثیر نمودار در انتقال مفاهیم هستند. لذا از ذکر نمونه‌های دیگر خودداری می کنیم.

۲-۲. توصیف رابطه‌ها (اثبات بدون کلام)

در این بخش، می‌خواهیم تأثیر روش نموداری را در توصیف رابطه‌های ریاضی بیان کنیم. اما این تأثیر بدون ذکر مثال‌ها بی‌معنی خواهد شد. در توصیف رابطه‌ها، هدف ما حل یک مسئله ریاضی نیست بلکه منظور از توصیف، بیان علت به فرم هندسی بوده یا یک مقایسه است.

به‌طور مثال آیا می‌توان بدون شکل و به راحتی گفت که کدام یک از اعداد e^{π} یا π^{e} (e عدد نپر و π عدد پی است) بزرگ‌تر و کدام یک کوچک‌تر است؟ واضح است که پاسخ منفی است. (برای دیدن نموداری که مقایسه این‌دو را انجام می‌دهد به [۱] مراجعه شود.)

اهداف این فصل را در قالب مسائل و حل آن‌ها، بیان می کنیم.

مسئله ۳. کدام یک از اعداد x یا $\sqrt{x}$ بزرگ‌تر است؟ ($x > 0$)

جواب: در پرسش از گروه دانش‌آموزی در مقاطع بالاتر از دوم دبیرستان، اکثر دانش‌آموزان جواب‌های متنوع و بدون دلیل بیان می کنند و اکثراً $\sqrt{x}$ را کوچک‌تر از x می‌دانند! شکل p_1 مقایسه این دو نمودار را نشان می‌دهد.

$$0 < x < 1 \Rightarrow \sqrt{x} > x\,, \qquad x > 1 \Rightarrow \sqrt{x} < x\,, \qquad x = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = x$$

مسئله ٤. دامنه تابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \sqrt{x - \sqrt{x} - \sqrt{x - \sqrt{x}}} \qquad (۱)$$

جواب: برای پیدا کردن دامنه تابع (۱) بهتر است با استفاده از دامنه تابع ساده‌تری چون $g(x) = \sqrt{x - \sqrt{x}}$ مسئله را حل کنیم.

$$x - \sqrt{x} \geq 0 \;\Rightarrow x \geq \sqrt{x}\; D_g$$

در نتیجه بنابه شکل ۲ داریم: $D_g = [1, \infty)$.

حال دامنه تابع (۱) را بررسی می‌کنیم: با استفاده از تغییر متغیر $A = x - \sqrt{x}$ داریم:

$$g(A) = \sqrt{A - \sqrt{A}} \;\Rightarrow D_g = [1, \infty) \equiv A \geq 1$$

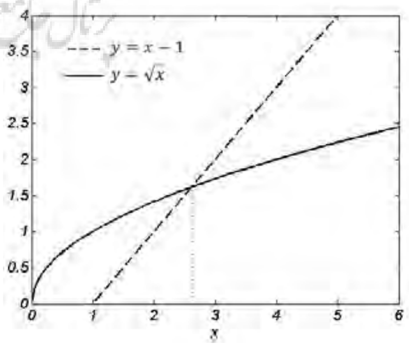
$$A = x - \sqrt{x} \geq 1 \;\Rightarrow x - 1 \geq \sqrt{x} \qquad (۲)$$

اکنون برای رسیدن به D_f، باید نامعادله (۲) حل شود. برای حل این نامعادله توابع موجود در سمت راست و چپ آن را رسم و سپس با مقایسه نمودار آن‌ها جواب حاصل می‌شود. شکل ۱ نمودار هر دو طرف را در یک دستگاه نشان می‌دهد. برای یافتن نقطهٔ تقاطع دو نمودار داریم:

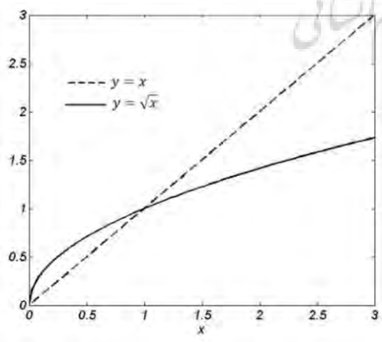
$$x - 1 = \sqrt{x} \Rightarrow x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

در نتیجه دامنه تابع f برابر است با: $[\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \infty)$

و توجه داریم که $\frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ و $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ همان نسبت طلایی است.



شکل ۱



شکل ۲

برای ادامه مقایسه‌ها یک حالت کلی را در نظر می‌گیریم. همان‌طور که دیدیم مقایسه بین دو نمودار x و $\sqrt{x}$ موجب حل مسئله‌ای مانند مسئله ۳ شد. پس حالت کلی می‌تواند شامل مقایسه نمودارهای توابع اولیه باشد، به‌طوری که توسط آن‌ها مسائل ریاضی زیادی قابل حل خواهد بود. بیان حالت کلی مقایسه در مسئله زیر انجام می‌شود که بهتر است خود دانش‌آموزان و به صورت انفرادی آن را انجام دهند.

مسئله ۵. توابع زیر را از نظر بزرگی دوبه‌دو با هم مقایسه کنید (با رسم نمودار).

$$x\,,\quad x^n\,,\quad \sqrt{x}\,,\quad |x|\,,\quad \sin x\,,\quad \cos x\,,\quad \log x\,,\quad [x]$$

جواب به این مسئله، موجب می‌شود دانش‌آموزان دید درستی نسبت به توابع داشته و همچنین در حل مسائل آتی به‌راحتی روش نمودار را به‌کار ببرند. این مسئله در کلاس درس حسابان در طول درس تابع باید توسط خود دانش‌آموزان بررسی شود. می‌توان این مسئله را در دروس دیگر نیز در درس‌هایی که تابع تدریس می‌شود بیان کرد.

۲-۳. حل مسائل ریاضی

یکی‌دیگر از مزایای روش نموداری حل برخی از مسائل ریاضی و رسیدن به جواب از طریق نمودار است. در این حالت، رسم نمودار موجب می‌شود تمام ابعاد مسئله را روشن کرده و در نتیجه در مورد رسیدن به جواب مسئله تمام حالت‌های ممکن در نظر گرفته شوند. از جمله کاربرد روش نموداری در حل مسائل ریاضی می‌توان به مسئله‌های زیر اشاره کرد.

مسئله ٦. در ماشین حساب، یک عدد حقیقی مثبت مانند $a\epsilon\mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید با فشار دادن دکمه $\sqrt{\ }$ از آن جذر گرفته می‌شود. اگر این دکمه را به تکرار فشار دهیم نهایتاً به عدد یک می‌رسیم. علت این نتیجه چیست؟

جواب:

روش اول: نمودار x و $\sqrt{x}$ را به صورت شکل ۴ در نظر می‌گیریم. پاسخ با توجه به این شکل، در حالتی که نقطه شروع بزرگ‌تر و کوچک‌تر از یک باشد واضح است.

روش دوم: دنبالهٔ بازگشتی $a_0 = a\,, a_{n+1} = \sqrt{a_n}$ را در نظر گرفته و نشان می‌دهیم $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

عدد a یا بزرگ‌تر از ۱ است یا کوچک‌تر از ۱. با توجه به رابطه زیر

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{a_n}}{a_n} = \frac{1}{\sqrt{a_n}}$$

زمانی که $a > 1$، دنباله حاصل نزولی و زمانی که $a < 1$، صعودی است. در نتیجه $\{a_n\}$ یکنواست. همچنین به ازای هر $n\epsilon\mathbb{N}$ داریم $|a_n| \le a + 2$. پس $\{a_n\}$ همگراست. در نتیجه:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = k$$
$$\to \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n}$$
$$\to k = \sqrt{k}$$
$$\to k = 0 \text{ یا } 1$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

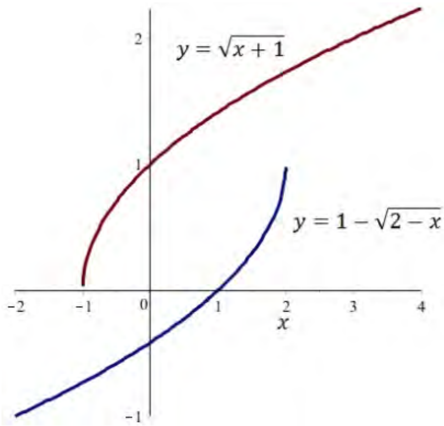
واضح است که در حل این مسئله شکل، خیلی راحت‌تر همگرایی دنباله را در حالات مختلف نشان می‌دهد.

مسئله ۷. نامعادله‌های زیر را حل کنید.

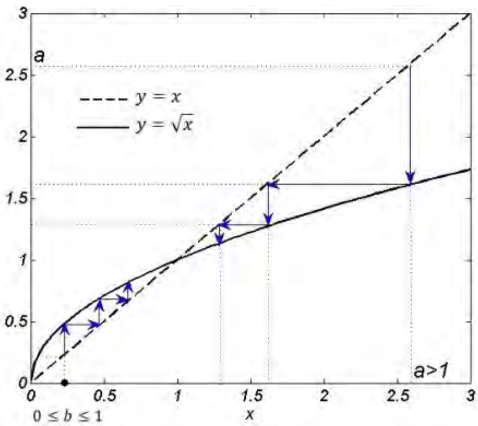
(۱) $\sin x < \cos x$

(۲) $\sqrt{x+1} > 1 - \sqrt{2-x}$

شمارهٔ (۲) را بررسی می‌کنیم. ابتدا توجه داریم که در تدریس رسم نمودارها از طریق انتقال نمودار تابع $\sqrt{2-\mathrm{x}}$ را نمی‌توان مستقیماً از روش انتقال نمودارها حل کرد. زیرا این نمودار برحسب نمودار $\sqrt{x}$ قابل رسم نیست. باید ابتدا آن را به‌صورت $\sqrt{-(x-2)}$ نوشته سپس ابتدا نمودار $\sqrt{x}$، سپس نمودار $\sqrt{-x}$ و نهایتاً نمودار $\sqrt{-(x-2)}$ رسم شود. حال توسط شکل ۳ جواب نامعادله حاصل می‌شود. توجه داریم دامنه مشترک $[-1,2]$ بوده و همه این بازه جواب نامعادله (۲) است. نامعادله (۱) نیز به‌طور مشابه حل می‌شود. ■



شکل ۳



شکل ۴

۳. محاسن و معایب روش نموداری

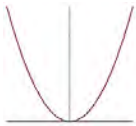
می‌دانیم هر روشی برای حل مسائل یا ارائه مفاهیم ممکن است دارای نقاط ضعف و قوت باشد. تنها مهارت لازم در استفاده از روش‌ها این است که آن‌ها را در جای مناسب و زمانی به‌کار ببریم که نقطه قوت آن‌ها است.

در رابطه با محاسن روش نموداری در فصل قبل از سه جنبه مختلف مواردی ذکر شد. در واقع نقاط قوت روش نموداری در بیان مفاهیم، اثبات بدون کلام و حل مسئله‌ها به‌وضوح دیده شد. اما روش نموداری چه معایب یا آسیب‌هایی ممکن است داشته باشد؟

در رابطه با به‌کارگیری روش نموداری، در مواردی که در فصل قبل بحث شد هیچ نقاط ضعفی وجود ندارد. اما در آسیب‌شناسی روش نموداری می‌توان گفت مواردی وجود دارد که در آن‌ها یا نمی‌توان این روش را استفاده کرد یا اگر استفاده کنیم به یک جواب نادرست خواهیم رسید. از جمله مواردی که نمی‌توان روش نموداری را به‌کار برد می‌توان به مسائل زیر اشاره کرد:

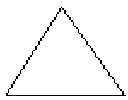
از جمله مواردی که استفاده از نمودار ظاهراً مقدور است اما به یک جواب نادرست منتهی می‌شود می‌توان به مسئله‌های زیر اشاره کرد:

مسئله ۸. از دانش‌آموزان می‌پرسیم که نمودار چه تابعی، شکل مقابل است؟



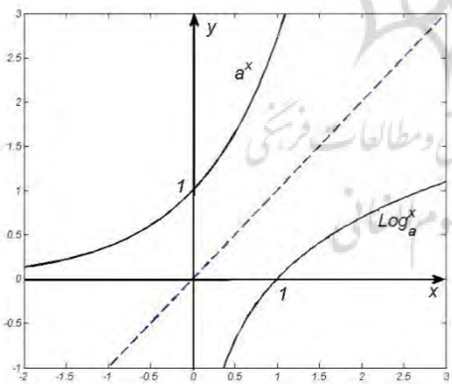
جواب: با توجه به اینکه دانش‌آموزان نمودار تابع $y = x^2$ را همواره به صورت سهمی در ذهن دارند، ممکن است با دیدن نمودار تصور کنند که نمودار مربوط به $y = x^2$ است در حالی که نمودارهای $y = x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$ همگی شکلی شبیه به نمودار مقابل دارند. پس رسیدن به جواب از روی شکل موجب ایجاد خطا می‌شود.

مسئله ۹. مثلث روبه‌رو چه نوع مثلثی است؟



جواب: با نگاه کردن به مثلث بالا به نظر می‌رسد که مثلث متساوی الاضلاع است. اکثر دانش‌آموزان همین جواب را بیان می‌کنند در حالی که تا اندازه‌های اضلاع مشخص نباشد نمی‌توان گفت شکل، متساوی‌الاضلاع است. زیرا چشم ما قادر به تشخیص اندازه‌های خیلی کوچک نیست.

مسئله ۱۰. آیا معادلهٔ $\log_a x = a^x$ به ازای $a > 0$ جواب دارد؟

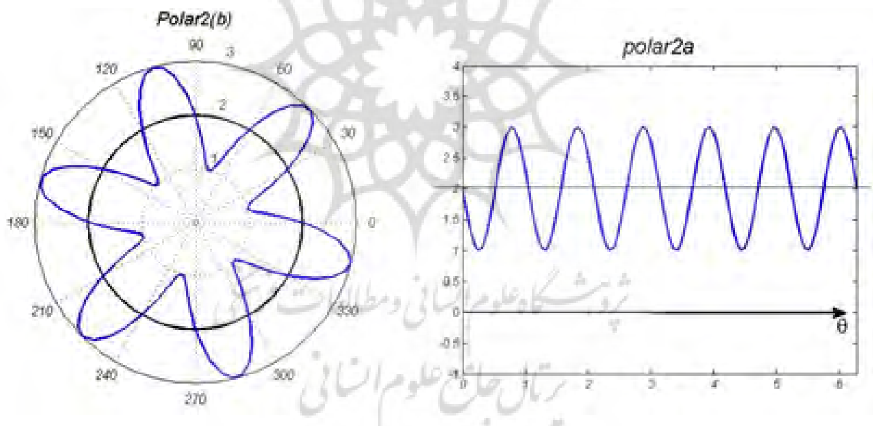


شکل۶

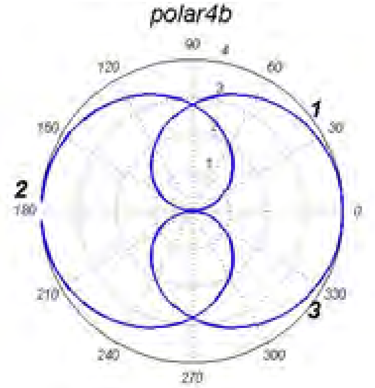
اگر نمودارهای هر دو تابع $y_1 = a^x$ و $y_2 = \log_a x$ را در یک دستگاه رسم کنیم شکل ۶ حاصل می‌شود. نمودار بیان کنندهٔ این است که این دو نمودار نمی‌توانند تقاطع داشته باشند و درنتیجه به‌ازای هر $a > 0$ معادلهٔ مورد نظر دارای ریشه نیست. اما این نتیجه درست نیست. در واقع به‌ازای $a = e^{1/e}$ معادله حاصل دارای ریشهٔ $x = e$ بوده (یک ریشه دارد) و به‌ازای $1 < a < e^{1/e}$ دارای دو ریشه است و به‌ازای $a > e^{1/e}$ ریشه ندارد. همچنین به ازای $0 < a < 1$ فقط یک ریشه وجود دارد. ■

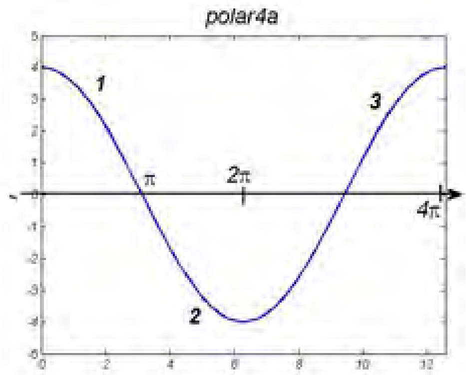
محاسن و معایب روش نموداری را با مثال‌های ساده و کاربردی که غالباً از دورهٔ متوسطه بودند بیان کردیم. اکنون برای اینکه اثر روش نموداری در ریاضیات عالی نیز دیده شود یک کاربرد و یک عدم کاربرد از روش نموداری در دورهٔ عالی بیان می‌کنیم.

مسئله ۱۱. از کاربردهای روش نموداری به تدریس مختصات قطبی اشاره می‌کنیم. این موضوع در مقالهٔ [۳] ارائه شده است اما خلاصه‌ای از آن را با یک مثال ارائه می‌دهیم. به دو رابطهٔ قطبی $r_1 = 1 - cos(2\theta)$ و $r_2 = 4\,cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم رسم نمودارهای r_1 و r_2 نیاز به بررسی تقارن‌ها، تقاطع‌ها و یافتن زوایا و مقادیر r متناظر آن زوایا است. اما می‌توان برای راحتی کار این روابط را در یک دستگاه مختصات دکارتی (یعنی r برحسب θ رسم شود) رسم کرد و سپس توسط نمودار دکارتی، نمودار قطبی را رسم کرد. نمودارهای قطبی و دکارتی r_1 در شکل ۷ و نمودارهای دکارتی و قطبی r_2 در شکل ۸ دیده می‌شوند:



شکل ۷. نمودارهای دکارتی و قطبی مربوط به $r_1 = 1 - \cos(2\theta)$.





شکل ۸. نمودارهای دکارتی و قطبی مربوط به $r_2 = 4\cos(\frac{\theta}{2})$.

مسئله ۱۲. از مواردی که کاربرد روش نموداری با مشکل مواجه می‌شود نمونه دیگری ذکر می‌کنیم. فرض کنید برای تابعی مانند $y = f(x)$ داریم $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ در این صورت در مورد جواب حد $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ چه می‌توان گفت؟ اگر داشته باشیم $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ آنگاه در مورد حد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ چطور؟

جواب: در پاسخ به این سؤال هر شخص توابع مختلفی را به‌طور نموداری تصور می‌کند که مجانب افقی دارند. در همهٔ این تصورات رابطه دوشرطی زیر برقرار است:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0 \qquad (۳)$$

آیا پاسخ سؤال درست است؟ به عبارت دیگر آیا رابطه (۳) به‌ازای همهٔ توابع پیوسته برقرار است؟ پاسخ منفی است. توجه داریم که این نتیجهٔ نادرست از نمودارهای مختلفِ توابعِ دارای مجانب افقی حاصل شده است. برای مثال فرض کنید:

$$f(x) = e^{-x}\sin(e^{2x})$$

برای تابع f داریم $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ولی با محاسبه مشتق، معلوم می‌شود که $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty \neq 0$.

برای بررسی شرایط عکس، تابع $g(x) = \sin(\log_e x)$ را در نظر می گیریم. باتوجه به رفتار توابع $\ln x$ و $\sin x$ درمی‌یابیم که $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ وجود ندارد و نوسانی است. اما:

$$g'(x) = \frac{\cos(\ln x)}{x} \to 0$$

در نتیجه رابطۀ (۳) در حالت کلی حتی از یک طرف نیز برقرار نیست. در حالی که تصور ذهنی ما ابتدا صحت آن را نشان می‌داد. در واقع می‌توان گفت با اعمال شرایطی اضافه می‌توان گفت که رابطه (۳) از یک طرف برقرار است. این موضوع در لم زیر آمده‌است.

لم (باربالات[1]): اگر تابع مشتق‌پذیر $f(x)$، هنگامی‌که $x \to +\infty$ میل کند، یک حد متناهی داشته باشد و اگر f' به‌صورت یکنواخت پیوسته باشد، آنگاه هنگامی‌که $t \to +\infty$ خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$$

اثبات: به مرجع [۲] مراجعه شود.

توجه داریم که لم فوق با اعمال پیوستگی یکنواخت ثابت می‌کند که اگر f حد متناهی (مجانب افقی) داشته باشد آنگاه حد f' نیز صفر است. اما توجه داریم که پیوستگی یکنواخت از روی نمودار یک تابع و با چشم قابل تشخیص نیست. با بیان یک مسئله باز[2] این قسمت را به پایان می‌رسانیم.

مسئله ۱۳. می‌دانیم مشتق اول یک تابع f'، با توجه به شکل قابل توجیه است و مقدار صعودی و نزولی را نشان می‌دهد. در واقع علامت f' به صعودی یا نزولی بودن f مربوط است. مشتق مرتبه دوم f''، از روی نمودار قابل تفسیر بوده و میزان تقعر منحنی را نشان می‌دهد. می‌خواهیم بدانیم چه تعبیر ریاضی می‌توان برای مشتق سوم $f'''(x)$ بیان کرد؟ آیا تعبیر فیزیکی بعد از شتاب برای آن می‌توان گفت؟ ■

[1] Barbalat ‘s Lemma.
[2] Open Problem.

٤. نتیجه‌گیری

در این مقاله، محاسن و معایب روش نموداری توضیح داده شد. یک نتیجه واضح این است که روش نموداری در تمام مقاطع از دبستان تا آموزش عالی به‌کار می‌رود. در هر مقطع به یک میزان می‌توان از روش نموداری استفاده کرده و حتی آسیب‌هایی وجود دارد. ما نباید از روی نمودار یک تابع به ضابطهٔ آن برسیم مگر اینکه اطلاعات کافی ذکر شده باشد. اندازه‌های دقیق ریاضی غالباً با نمودار تحلیل‌پذیر نیستند مانند طول‌های گنگ (اصم) که توسط خط‌کش جدایی‌پذیر نیستند. نتیجه نهایی اینکه روش نموداری می‌تواند از سه جنبهٔ بیان مفاهیم اولیه، توصیف رابطه‌ها و نامساوی‌ها و حل برخی از مسائل ریاضی کمک بلاتصوری در امر آموزش داشته باشد. اما تمام روش‌های موجود دارای نقایصی هستند که روش نموداری نیز از این قاعده مستثنی نیست.

منابع

[۱] راجرب. نلسن، *اثبات بدون کلام*، مترجم سپیده چمن‌آرا، موسسه انتشارات فاطمی، چاپ دوم، ۱۳۷۵.

[۲] ژان‌ـژاک ا. اسلوتین، و. لی، *کنترل غیرخطی کاربردی*، ترجمه محمدرضا ه. گلپایگانی، منوچهر احمدوند، امیر ه. جعفری، مرکز نشر دانشگاهی، چاپ دوم، ۱۳۸۹.

[۳] سلیمانپور ب. ا.، نوین ر. سهرابی ز.، *رسم روابط قطبی با استفاده از مختصات دکارتی*، چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران ۴ الی ۷ شهریور ۱۳۹۳ دانشگاه سمنان.

[4] Daboul. S,J. Mangaldan, M. Z. Spivey, P.J. Taylor, The Lah Numbers and the n th Derirative of e^{1-x}, MAA, *Mathematics Magazine*, Vol. 86, No. 1 (Feb, 2013), pp. 39-47.

[5] Tanton. J, Proof without words: Equilateral Triangle, Mathematical Association of America, *Math Magazine*, Vol. 74, No. 4 (oct. , 2001) , p.313.

[6] Triplett. S, Geometry of the Fibonacci Matrix, NCTM, *The Mathematics Teacher*, Vol. 107, No. 3 (Oct. 2013) ,pp. 232-237.

The Effect of Graphic Method in Teaching Concepts and Solving Mathematical Problems

Azhdar Soleimanpoor Bakefayat[1], Mahta Berjisi[2]

Abstract

In this article, we present a simple and important method called graphical method, which is very important and practical for expressing some mathematical concepts. Beside expressing the strengths and weaknesses and pathology of the graphic method, the ability of this method is expressed by mentioning various examples. Then, the subject of Non-verbal proof is expressed and while presenting the available sources, its relationship with the graphical method is examined.

Keywords: Non-verbal proof, Teaching mathematical concepts, Graphic method, Function diagram.

---

[1] Instructor, Farhangian University, IRAN, Corresponding Author, a.soleymanpoor@cfu.ac.ir
[2] Teature Student, Farhangian University, IRAN