*Research in Logics*, Institute for Humanities and Cultural Studies (IHCS)
Biannual Journal, Vol. 11, No. 1, Spring and Summer 2020, 15-31
DOI: 10.30465/lsj.2021.20623.1228

# Applications of Logic to Analysis

Karim Khanaki*

## Abstract

From the beginning of the emergence of new logic, fundamental links have been established between logic and various branches of mathematics, which led to solving mathematical problems and, conversely, solving basic problems in logic itself. One of the challenges of the logical methods in the study of mathematical structures is the impossibility of studying some of the important structures of mathematics, including analytic structures, in the framework of the first-order language and logic. The main purpose of this paper is to provide a suitable logic for studying these structures and then solving problems in the analysis using logical tools. At the beginning of this article, we will briefly review some suitable logics for studying the structures in mathematical analysis, and will outline some of the most important uses of logic in analysis. Then we present and prove one of the recent achievements, which is an important application of logic in analysis. In particular, we study the concept of definability in logic and its relation with mathematical analysis.

**Keywords:** Continuous logic; ultraproduct; definability; finitely representable; type space

* Faculty Member of Arak University of Technology and researcher at IPM Basic Sciences Research Institute, khanaki@ipm.ir

Date received: 2020/04/20, Date of acceptance: 2020/07/22

*منطق‌پژوهی*، پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
دوفصل‌نامهٔ علمی (مقالهٔ علمی ـ پژوهشی)، سال یازدهم، شمارهٔ اول، بهار و تابستان ۱۳۹۹، ۱۷–۳۱

# کاربردهای منطق در آنالیز ریاضی

**کریم خانکی***

## چکیده

از ابتدای پیدایش منطق جدید، پیوندهای بنیادی بین منطق و شاخه‌های مختلف ریاضیات ایجاد شده است که منجر به حل مسایلی در ریاضیات و بلعکس حل مسائل بنیانی در خود منطق گردیده است. یکی از چالش‌های روش منطقی در مطالعه ساختارهای ریاضی عدم امکان مطالعه بعضی از ساختارهای مهم ریاضیات، از جمله ساختارهای موجود در آنالیز، در قالب زبان و منطق مرتبه اول می‌باشد. هدف اصلی این مقاله معرفی منطقی مناسب برای مطالعه این ساختارها و سپس حل مسائلی در آنالیز با استفاده از ابزارهای منطقی است. در ابتدای این مقاله مروری کوتاه بر منطق‌های مناسب برای مطالعه ساختارهای موجود در آنالیز ریاضی خواهیم داشت و برخی از مهمترین کاربردهای منطق در آنالیز را بیان خواهیم کرد. سپس یکی از دستاوردهای اخیر که کاربردی مهم از منطق در آنالیز میباشد را ارائه و اثبات می‌کنیم. به‌ویژه، مفهوم تعریف‌پذیری در منطق و پیوند آن با آنالیز ریاضی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

**کلیدواژه‌ها:** منطق پیوسته؛ فراضرب؛ تعریف‌پذیری؛ بطور متناهی ارائه‌پذیر؛ فضای تایپ

## ۱. مقدمه

منطق جدید پیوندهای اساسی با ریاضیات دارد. این پیوندها از کارهای فرگه، راسل، گودل و دیگران آغاز و تا کنون در حال افزایش است. نکته اساسی در این است که بیشترین پیوند منطق با جبر ریاضی است و ساختارهای جبری در قالب منطق بصورت گسترده‌ای مورد

---

* عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی اراک و پژوهشگر در پژوهشگاه دانش‌های بنیادی IPM، khanaki@ipm.ir
تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۲۰/۰۱، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۵/۰۱

مطالعه قرار گرفته‌اند. سوالی که میتواند مطرح شود این است کـه "آیـا منطـق مرتبـه اول بـا سایر شاخه‌های ریاضی (از جمله آنالیز ریاضی) پیوندی مشابه پیوند آن با جبر دارد؟" پاسـخ اولیه به این سوال منفی است و میتوان بیان کرد کـه اسـتفاده از روش‌هـای منطـق ریاضـی و نظریه مدل در همه‌ی بخش‌های ریاضی ممکن نبوده است و بعضی از شاخه‌های ریاضـی از جمله آنالیز ریاضی در قالب منطق مرتبه اول کلاسیک قابل مطالعه نیستند. البتـه، ایـن پاسـخ نهایی نیست و در این مقاله با استفاده از منطقی مناسب (موسوم به منطق پیوسته) بـه مطالعـه ساختارهای دیگر ریاضیات از جمله آنالیز خواهیم پرداخت. در واقـع، یکـی از اهـداف ایـن مقاله معرفی منطق‌هایی مناسب برای مطالعه ساختارهای آنالیزی و همچنین بیان مزیـت‌هـا و کاربردهای این نوع مطالعه می‌باشد. همچنین، مروری کوتاه بـر تاریخچـه منطـق‌هـای ارائـه شده برای مطالعه ساختارهای آنالیزی و همچنین نتـایج و دسـتاوردهای مهـم آنهـا خـواهیم داشت. در انتهای این مقاله به یکی از دستاوردهای مهم که اخیرا حاصـل شـده اسـت اشـاره خواهیم کرد و اثباتی از آن را ارائه خواهیم داد. (مراجعه شود به (Khanaki, 2018).)

برای روشن شدن اهمیت موضوع و دسـتاوردهایی کـه از مطالعـه سـاختارهای آنـالیزی بوسیله ابزارهای منطق و نظریه مدل حاصل شده اسـت، بـه برخـی از مهمتـرین کاربردهـای نظریه مدل در مطالعه ساختارهای آنالیزی اشاره می‌کنیم. بسیاری از مهمتـرین دسـتاوردها در فضاهای باناخ توسط مفاهیم و تکنیک‌های منطق اثبات شده است. از آن جملـه میتـوان بـه مثال سیرلسون (Tsirelson, 1974: 57-60) از یک فضای باناخ که شامل $l_p$ و $c_0$ نیست اشـاره کرد که از روش فورسینگ برای ساختن این مثال استفاده شده است کـه یـک روش پایـه‌ای در نظریه مجموعه‌ها می‌باشد؛ نمونه دیگر قضـیه کریـوین (Krivine, 1976: 1-29) اسـت کـه توسط فراضرب‌ها و فشردگی اثبات شـده اسـت؛ قضـیه کریـوین–مـائوری (Krivine and Maurey, 1981: 273-295) یکی دیگر از کاربردهای منطق در آنالیز می‌باشد کـه بـا اسـتفاده از مفهوم پایداری در نظریه مدل، که یکی از بنیادی‌ترین مفـاهیم نظریـه مـدل اسـت، بنـا شـده است؛ قضیه بورگاین–روزنتـال–اسـکتچمن (Bourgain, Rosenthal, and Schechtman, 1981: 193-228) که با استفاده از مفهومی از رتبه در نظریـه مـدل اثبـات شـده اسـت؛ و در نهایـت قضیه دوگان گاورز (Gowers, 1996: 1083-1093) با استفاده از بلوک قضیه رمزی اثبات شـده است، که بیان می‌کند هر مجموعه رمزی تحلیلی است. این فهرست همچنان ادامـه دارد و در این مقاله یکی دیگر از دستاوردهای نظریه مدل در آنالیز را که اخیرا اثبات شـده اسـت ارائـه

خواهیم داد. همچنین به ارتباط بین نظریه مدل و آنالیز و ارتبـاط ذاتـی آنهـا اشـاره خـواهیم کرد.

در ابتدا نگاهی به سیر استفاده از روش‌های منطق و نظریه مـدل در مطالعـه سـاختارهای آنالیزی خواهیم داشت. از نخستین استفاده‌هـای ابزارهـای منطـق در آنـالیز ریاضـی و آنـالیز تابعی، استفاده از مفهوم‌های فراضرب و فراتوان برای فضاهای باناخ است کـه اولـین بـار در ۱۹٦۵ توسـط برتاگنولـه-کاسـتله-کریـوین ( Bretagnolle, Dacunha-Castelle, and Krivine, 1965: 231-259) استفاده شدند. در این مقاله با استفاده از فراضرب‌ها ثابت شد که بـرای هـر $1 \le p \le r \le 2$ فضای $L_r[0,1]$ به صورت ایزومتریک در فضای $L_p[0,1]$ مـی‌نشـیند. بایـد به این نکته توجه کرد که این قضیه در قلب مهمترین سـوالات نظریـه فضـاهای بانـاخ قـرار داشت و اثبات آن بوسیله فراضرب‌ها اولین اثبات از این قضیه بود. نکته دیگر که می‌بایسـت به آن توجه کرد این است که مفهوم فراضرب و فراتوان در فضاهای باناخ ترجمـه مسـتقیمی از این مفاهیم در منطق کلاسیک نیست و تفاوت‌هـایی در تعریـف آنهـا وجـود دارد. مقالـه مذکور در فوق، اولین تعریف این مفاهیم برای سـاختارهای آنـالیزی مـی‌باشـد. بعـد از ایـن تاریخ، استفاده از فراضرب‌ها در آنالیز رایج گردید و ریاضـیدانانی چـون هنسـون، هینـریش، موور، استرن، ریناود، و یوینو در مقاله‌هـای (Henson, 1976: 108-144)، ( Heinrich, Henson, and Moore, 1983: 79-90)، (Stern, 1976: 49-121)، (Raynaud, 1981: 671-673)، و ( Iovino, 1997: 493-505) از این ابزار درجهت حل مسائل موجود در آنالیز ریاضی و همچنـین بسـط منطق‌هایی مناسب برای مطالعه سـاختارهای آنـالیزی اسـتفاده کردنـد. مـی‌تـوان گفـت کـه بنیان‌گذار منطق‌های مناسب برای مطالعه ساختارهای آنـالیزی هنوسـن (-Henson, 1976: 108 144) است که با ارائه منطق فرمول‌های کران‌دار مثبت گامی بزرگ در این راه برداشـت. لازم به ذکر است که تقریبـا یـک دهـه قبـل از آن، چانـگ و کیسـلر (Chang and Keisler, 1966) کتابی با عنوان "نظریه مدل پیوسته" را نوشتند که طرحی کلی از منطـق‌هـایی بـرای مطالعـه ساختارهای پیوسته (به ویژه ساختارهای آنالیزی) را ارائه مـی‌داد کـه حـدودا ٤٠ سـال بعـد مبنایی برای خلق "منطق مرتبه اول پیوسـته" گردیـد کـه مناسـب‌تـرین منطـق بـرای مطالعـه ساختارهای متریک و فضاهای باناخ می‌باشد. (مراجعه شـود بـه ( Ben Yaacov, Berenstein , Henson, and Usvyatsov, 2008: 315–427).) یکی از دلایلـی کـه منطـق ارائـه شـده توسـط چانگ و کیسلر به مدت ٤٠ سال به فراموشی سپرده شده، کلیت ارائه شـده در کتـاب آنهـا و بنابراین عدم حصول نتایجی خوب از آن منطق‌ها بود. منطق هنسون (یـا منطـق فرمـول‌هـای

کران‌دار مثبت) توسط خوزه یووینو (یکی از دانشجویان هنسون) و همچنین خود هنسون مورد مطالعه گسترده قرار گرفت و به عنوان بخشی از یک کتاب در این زمینه با عنوان "فراضرب‌ها در آنالیز" به چاپ رسید (Henson and Jovino, 2002: 1-110). همچنین، یووینو این منطق را گسترش داد و مفاهیمی از قبیل فضاهای تایپ‌ها و پایداری را در این منطق مورد مطالعه قرار داد. البته مفهوم تایپ‌های بدون سور قبلا در کار کریوین و مائوری (Krivine and Maurey, 1981: 273-295) برای اثبات قضیه معروف آنها استفاده شد، اما معرفی و مطالعه این مفهوم در حالت کلی و بصورت روش‌مند اولین بار توسط یووینو (Iovino, 1997: 493-505) انجام گرفت. یووینو (Iovino, 1999: 77-95) توپولوژی‌های مختلف روی فضای تایپ‌ها تعریف و مفهوم تعریف‌پذیری در ساختارهای آنالیزی را بصورت روش‌مند ارائه و مورد مطالعه قرار داد. نتایجی مشابه دستاوردهای نظریه پایداری منطق کلاسیک در منطق فرمول‌های کران‌دار مثبت اثبات شدند و ساختارهای آنالیزی از جمله فضاهای باناخ با ابزارهای نظریه مدل‌ها مورد مطالعه و رده‌بندی قرار گرفتند. موج بعدی فعالیت در مطالعه ساختارهای آنالیزی بوسیله ابزارهای منطقی با ظهور ایتای بنیاکوف و الکس اوسویاتسوف (Ben Yaacov and Usvyatsov, 2010: 5213-5259) بوسیله‌ی اصلاح منطق‌های پیوسته چانگ و کیسلر ایجاد شد. آنها با حذف زواید منطق چانگ و کیسلر (Chang and Keisler, 1966) و به پیش بردن دستاوردهای نظریه پایداری برای این منطق اصلاح شده گامی اساسی در پیشرفت کار برداشتند. مفهوم پایداری برای فرمول‌ها (یعنی پایداری موضعی) که توسط ساهارون شلاح در منطق کلاسیک ارائه شده بود، بوسیله بنیاکوف و اسویاتسوف برای منطق پیوسته ارائه گردید. البته قبل از آنها یووینو (Iovino, 1999: 77-95) نیز مفهوم پایداری را برای فرمول‌های بدون سور در منطق هنسون (Henson, 1976: 108-144) مورد مطالعه قرار داده بود، اما بطور ذاتی، منطق هنسون برای مفهوم "پایداری موضعی" مناسب نبود. از این پس، روند فعالیت‌ها در مطالعه ساختارهای آنالیزی بوسیله منطق پیوسته سرعت گرفت و نتایج بسیار مهمی چه از جهت گسترش منطق پیوسته و چه از جهت اثبات نتایج جدیدی برای آنالیز ریاضی حاصل شد. پیوندهای بسیار مهمی بین نظریه مدل و شاخه‌های مختلف ریاضیات از جمله آنالیز تابعی و نظریه اندازه، توپولوژی، سیستم‌های دینامیکی و نظریه یادگیری ایجاد شدند که قبلا قابل تصور نبودند. این پیوندها و تعامل بین منطق و نظریه مدل با دیگر شاخه‌های ریاضیات منجر به پیشرفت در جنبه‌های مختلف گردید، به این معنا که ابزارهای منطق منجر به نتایجی جدید در

زمینه‌های دیگر ریاضیات شدند و همچنین ابزارهای ریاضی منجر به گسترش ابزارهای منطق و فهم بهتری از خود منطق و نظریه مدل گردیدند. در فصل بعد یکی از نتایج جدید نظریه مدل در آنالیز را ارائه و اثبات می‌کنیم.

در انتهای این مقدمه، شایسته است که به یکی دیگر از منطق‌های مناسب برای مطالعه ساختارهای آنالیزی، موسوم به منطق انتگرال، که پیوندهای ذاتی با منطق پیوسته نیز دارد اشاره کنیم. برای مطالعه این منطق و کاربردهای آن به مقالات باقری–پورمهدیان (Bagheri and Pourmahdian, 2009: 465-492)، خانکی–باقری (Khanaki and Bagheri, 2011: 494-503)، خانکی–امینی (Khanaki and Amini, 2012: 294-302) و خانکی (Khanaki, 2016: 253-286) مراجعه شود.

## ۲. مقدمه‌ای بر منطق مرتبه اول پیوسته

در این فصل مفاهیم اساسی منطق مرتبه اول پیوسته (Ben Yaacov, Berenestein, Henson, and Usvyatsov, 2008: 315-427) که در فصل بعد استفاده خواهد شد را ارائه می‌دهیم.

تعریف: یک زبان $L$ برای منطق مرتبه اول پیوسته شامل یک مجموعه $F$ از نمادهای تابعی، یک مجموعه $R$ از نمادهای محمولی و یک مجموعه $C$ از نمادهای ثابت می‌باشد. به هر نماد تابعی $f$ از مجموعه $F$ یک تابع $\delta_f : (0,1] \to (0,1]$ به نام پیمانه پیوستگی یکنواخت اختصاص داده می‌شود. بطور مشابه، برای هر نماد محمولی $P$ از مجموعه $R$ یک پیمانه پیوستگی یکنواخت $\delta_P$ و همچنین یک بازه بسته و کراندار $I_P$ از اعداد حقیقی اختصاص می‌یابد.

در تعریف فوق همیشه یک نماد مشخص $d$ در مجموعه $R$ وجود دارد. همچنین می‌توان این نماد را به عنوان نماد تساوی در مجموعه نمادهای منطقی در نظر گرفت. خواهیم دید که اگر $d$ بصورت متریک گسسته (یعنی $d(x,y)=0$ اگر و فقط اگر $x=y$) تعبیر شود آنگاه نقش نماد تساوی در منطق کلاسیک را خواهد داشت.

تعریف: یک $L$–ساختار مرتبه اول $M$ عبارت است از یک ساختار متریک کامل $(M,d)$ بطوریکه:

۱. برای هر نماد تابعی $f$ از مجموعه $F$، یک تابع پیوسته یکنواخت $f : M^n \to M$ وجود دارد بطوریکه اگر $d(x,y) < \delta_f(\varepsilon)$ آنگاه $d(f(x),f(y)) < \varepsilon$.

۲. برای هر نماد تابعی $P$ از مجموعه $R$، یک تابع پیوسته یکنواخت $P: M^n \to I_P$ وجود دارد بطوریکه اگر $d(x,y) < \delta_P(\varepsilon)$ آنگاه $|P(x) - P(y)| < \varepsilon$.

۳. برای هر نماد ثابت $c$ از مجموعه $C$، یک عضو $c^M \in M$ وجود دارد.

در ادامه چند ساختار آشنای آنالیزی را به عنوان مثال‌هایی از ساختار متریک بیان می‌کنیم. (برای توضیحات و مثال‌های بیشتر مراجعه شود به (Ben Yaacov, Berenestein, Henson, and Usvyatsov, 2008: 315-427 و مراجع ذکر شده در آن.)

مثال‌ها: الف) هر فضای باناخ یک ساختار متریک است. زبان مناسب برای فضاهای باناخ در ادامه این مقاله توضیح داده خواهد شد.

ب) هر مشبکه باناخ (Banach lattice) یک ساختار متریک است در زبانی مناسب. به عنوان حالتی خاص، فضاهای $L^p$ به عنوان مشبکه‌های باناخ، مثال‌هایی از ساختارهای متریک هستند.

پ) هر جبر باناخ (Banach algebra) یک ساختار متریک است.

ت) هر $C^*$–جبر ($C^*$-algebra) یک ساختار متریک است.

ث) فضاهای هیلبرت با ضرب داخلی مثالی از ساختارهای متریک هستند.

فرمول‌ها مشابه منطق کلاسیک با استقراء تعریف می‌شوند، هرچند تفاوت‌ها و نکات ظریفی در تعریف آنها وجود دارد که در ادامه به آنها اشاره می‌کنیم.

## ۱.۲ ترم‌هایی از زبان $L$

ترم‌ها با استقراء دقیقا مشابه منطق مرتبه اول تعریف می‌شوند. هر متغیر و هر نماد ثابت یک $L$–ترم است. اگر $f$ یک نماد تابعی $n$–تایی باشد و $t_1, \cdots, t_n$ همگی $L$–ترم باشند، آنگاه $f(t_1, \cdots, t_n)$ نیز یک $L$–ترم است. همه $L$–ترم‌ها با این روش ساخته می‌شوند.

## ۲.۲ فرمول‌های اتمی از زبان $L$

فرمول‌های اتمی از $L$ بصورت $P(t_1, \cdots, t_n)$ هستند که در آن $P$ یک محمول $n$–تایی از $L$ است و $t_1, \cdots, t_n$ همگی $L$–ترم هستند. بطور ویژه، $d(t_1, t_2)$ یک $L$–ترم است که در آن $t_1, t_2$ $L$–ترم هستند.

### ۳.۲ فرمول‌ها از زبان $L$

فرمول‌ها نیز با استقراء بوسیله فرمول‌های اتمی ساخته می‌شوند و ساختار استقراء مشابه تعریف متناظر آن در منطق مرتبه اول کلاسیک است. توابع پیوسته نقش رابط‌های منطقی را بازی می‌کنند و $sup$ و $inf$ نقش سورها را ایفا می‌کنند.

تعریف: کلاس $L$–فرمول‌ها عبارت است از کوچکترین کلاسی که در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱. فرمول‌های اتمی $L$–فرمول هستند.

۲. اگر $h: [0,1]^n \to [0,1]$ تابعی پیوسته باشد و $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ $L$–فرمول باشند، آنگاه $h(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ یک $L$–فرمول است.

۳. اگر $\varphi$ یک $L$–فرمول و $x$ یک متغیر باشد، آنگاه $inf_x \varphi$ و $sup_x \varphi$ نیز $L$–فرمول هستند.

یک $L$ –فرمول را بدون سور گوییم اگر هیچ نماد $sup$ و $inf$ در آن استفاده نشود. یک $L$–فرمول که متناظر با هر متغیر در آن یک سور وجود داشته باشد را یک $L$–جمله گویند.

### ۴.۲ حکم‌ها از زبان $L$

یک $L$–حکم $E$ عبارتی است بصورت $\varphi = 0$، که در آن $\varphi$ یک $L$–فرمول است. $L$–حکم $E$ را بسته گوییم اگر $\varphi$ یک $L$–جمله باشد.

محدودیت‌های اعمال شده از جمله پیوستگی یکنواخت، پیمانه پیوستگی یکنواخت، و کراندار بودن محمولات و توابع، منجر به ایجاد یک نظریه مدل خوب برای ساختارهای آنالیزی می‌شود که نتایجی مشابه با نظریه مدل کلاسیک برای این منطق قابل اثبات است. در ادامه بعضی از مفاهیم و نتایج این نظریه مدل را ارائه می‌دهیم.

## ۳. نظریهٔ مدل

از این پس زبان $L$ را ثابت در نظر می‌گیریم. در ادامه مفاهیم و قضایای نظریه مدل را معرفی می‌کنیم.

تعریف: یک تئوری در زبان $L$ عبارت است از یک مجموعه از $L$–حکم‌های بسته. اگر $T$ یک تئوری در زبان $L$ و $M$ یک $L$–ساختار باشد، $M$ را یک مدل از $T$ گوییم اگر هر حکم

$E\in T$ در $M$ درست باشد. تئوری $M$، که بـا $Th(M)$ نشـان داده مـی‌شـود، مجموعـه همـه حکم‌های درست در $M$ می‌باشد. یک تئوری که تئوری یک مدل باشد را کامل می‌گوییم.

تعریف: فرض کنید $M$ و $N$ دو $L$–ساختار باشند.

۱. $M$ و $N$ را هـم‌ارز مقـدماتی گـوییم هرگـاه $Th(M)=Th(N)$. بـه عبـارت دیگـر مجموعه‌های همه حکم‌هایی که در هر دو ساختار درست هستند یکسان می‌باشند.

۲. اگر $M\subseteq N$، آنگاه گوییم $M$ زیرساخت مقـدماتی $N$ اسـت (یـا $N$ توسـیع مقـدماتی $M$ است) هرگاه برای هـر $L$–فرمـول $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ و عناصـر $a_1,\cdots,a_n$ از $M$، داشـته باشـیم $\varphi^M(a_1,\cdots,a_n)=\varphi^N(a_1,\cdots,a_n)$.

۳. یک تابع $F$ از یک زیرمجموعه $M$ به $N$ را یک نشاندن مقدماتی گوییم اگر بـرای هـر $L$–فرمول $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ و عناصر $a_1,\cdots,a_n$ از $M$،

$$\varphi^M(a_1,\cdots,a_n)=\varphi^N(F(a_1),\cdots,F(a_n)).$$

مفهوم نشاندن مقدماتی یکی از مهمترین مفاهیم مـورد اسـتفاده در ایـن مقالـه اسـت. در واقع، هنگامی که می‌گوییم یک فضای بانـاخ $X$ بطـور ایزومتریـک در یـک فضـای بانـاخ $Y$ نشانده می‌شود، منظور نشاندن مقدماتی می‌باشد.

یکی از مهمترین ابزارهای نظریه مدل، همانطور که در مقدمه بـه آن اشـاره شـد، مفهـوم فراضرب می‌باشد. تعریفی مناسب برای فراضرب در منطق پیوسـته در مقالـه (Ben Yaacov, Berenestein, Henson, and Usvyatsov, 2008: 315-427) ارائـه شـده اسـت و نتـایجی مشـابه نظریه مدل کلاسیک برای این منطـق حاصـل شـده‌انـد. ازجملـه نتـایج مهمـی کـه بوسـیله فراضرب‌ها ثابت شده‌اند عبارت است از قضیه واش و نتیجه آن یعنی قضیه فشردگی کـه در ادامه به آن اشاره می‌شود:

قضیه فشردگی: فرض کنید $T$ یک $L$–تئوری و $C$ یک کلاس از $L$–ساختارها باشـد. اگـر برای هر زیرمجموعه متناهی از $T$ یک ساختار در $C$ وجود داشته باشـد کـه مـدلی بـرای آن مجموعه متناهی باشد، آنگاه یک فراضرب از ساختارهای موجود در $C$ وجود دارد که مـدلی از $T$ است.

یکی دیگر از قضایا مهم نظریه مدل که در منطق پیوسته نیـز قابـل اثبـات اسـت عبـارت است از:

قضیه لوونهایم–اسکولم (Lowenheim-Skolem): فرض کنید که $\kappa$ یک کاردینال نامتنـاهی باشد که بزرگتر یا مساوی کاردینال زبان می‌باشد. فرض کنیـد $M$ یـک $L$–سـاختار و $A\subset M$

مجموعه‌ای باشد که زیرمجموعه چگالی از کاردینال $\kappa$ دارد. آنگاه یک زیرساخت $N$ از $M$ وجود دارد بطوریکه:

۱. $N$ زیرساخت مقدماتی $M$ است؛

۲. $A \subseteq N \subseteq M$؛

۳. $N$ یک زیرمجموعه چگال از کاردینال $\kappa$ دارد.

## ۱.۳ فضای تایپ‌ها

یکی از مهمترین مفاهیم نظریه مدل مفهوم "تایپ" می‌باشد. از آنجایی که فرمول‌ها دارای تعدادی متناهی نماد هستند، بیان بسیاری از مفاهیم ریاضیات در منطق کلاسیک (و همچنین منطق پیوسته) با استفاده از فقط یک فرمول میسر نمی‌باشد. یک تایپ مجموعه‌ای از حکم‌هاست و می‌تواند خواص بیشتری از عناصر را بیان کرد. در ادامه تعریف دقیق یک تایپ را ارائه می‌دهیم.

فرض کنید $M$ یک مدل از تئوری $T$ باشد و $A \subseteq M$. $L(A)$ را زبانی شامل $L$ و همه نمادهای $c_a$ برای هر $a \in A$ در نظر می‌گیریم. در اینصورت $L(A)$–ساختار $(M,a)_{a\in A}$ را با نماد $M_A$ نمایش می‌دهیم و $T_A$ را برای $L(A)$–تئوری $M_A$ در نظر می‌گیریم، یعنی مجموعه $L(A)$–حکم‌های بسته که در $M_A$ درست هستند. (توجه داریم که هر مدل از $T_A$ یکریخت با ساختاری بصورت $(N,a)_{a\in A}$ است که $N$ مدلی از $T$ است.)

تعریف: فرض کنید $T_A$ مشابه فوق تعریف شده باشد و $x_1,\cdots,x_n$ متغیرهایی متمایز باشند. یک مجموعه $p$ از $L(A)$–حکم‌ها با متغیرهای آزاد $x_1,\cdots,x_n$ را یک $n$–تایپ روی $A$ گوییم اگر یک مدل $(N,a)_{a\in A}$ از $T_A$ و عناصر $b_1,\cdots,b_n$ از $N$ موجود باشند بطوریکه $p$ مجموعه همه $L(A)$–حکم‌هایی مانند $E(x_1,\cdots,x_n)$ باشد که $E(b_1,\cdots,b_n)$ در $(N,a)_{a\in A}$ درست است.

در اینصورت $p$ را با $tp^M(b_1,\cdots,b_n/A)$ نشان می‌دهیم و می‌گوییم $(b_1,\cdots,b_n)$ تایپ $p$ را در $N$ محقق می‌کند.

مجموعه تمام $n$–تایپ‌های روی $A$ با $S_n(T_A)$ (یا بصورت ساده‌تر با $S_n(A)$) نشان داده می‌شود و به آن فضای تایپ‌ها گفته می‌شود. (برای مطالعه بیشتر در مورد فضای تایپ‌ها، مراجعه شود به (Ben Yaacov, Berenestein, Henson, and Usvyatsov, 2008: 315-427).)

## ٤. بیان مساله و نتایج اصلی

یکی از مهمترین زمینه‌های مطالعـه در همـه‌ی شـاخه‌هـای ریاضـیات، رده‌بنـدی و مطالعـه ویژگی‌های مطلوب ساختارهای ریاضی است. این مطالعه منجر به دسته‌بنـدی سـاختارها بـر مبنای ویژگی‌های "خوب" در آن حوزه ریاضیات و در نهایت منجـر بـه درک بهتـر و حـل مسائل موجود در آن شاخه خواهد شد. در آنالیز ریاضی و بویژه نظریه فضاهای بانـاخ یکـی از سوالات اساسی از ابتدای پیدایش این حوزه از ریاضـیات، وجـود فضـاهای کلاسـیک در یک فضای باناخ دلخواه بوده است. منظور از فضـاهای کلاسـیک، فضـاهای $c_0$ و $l_p$ (بـرای $1 \le p < \infty$) می‌باشد. اهمیت وجود فضاهای کلاسیک در یک فضـای بانـاخ از ایـن منظـر قابل توضیح است که میتوان آن فضای باناخ را به قطعـه‌هـای کـوچکتری (یعنـی، فضـاهای کلاسیک) تقسیم کرد به نحوی که مطالعه این قطعه‌ها ساده‌تـر اسـت و اطلاعـاتی در مـورد فضای باناخ مورد مطالعه ارائه می‌دهد. برای چندین دهه تمام مثال‌هـای کشـف شـده شـامل این فضاهای کلاسیک بودند و تصور غالب براین بود که همـه فضـاهای بانـاخ شـامل ایـن فضاها هستند، اما در دهه ۱۹۷۰ سیرلسون (Tsirelson, 1974: 57-60) اولـین مثـال از فضـایی که شامل هیچ‌کدام از فضاهای $c_0$ و $l_p$ نبود را کشف کرد. از آن پـس، شناسـایی و رده‌بنـدی فضاهایی که شامل فضاهای کلاسیک هستند از مرکزی‌ترین سوالات این حوزه از ریاضـیات بوده است. در این فصل، ارتباط ذاتـی بـین ایـن سـوال و مفهـوم تعریـف‌پـذیری در منطـق ریاضی را مطالعه می‌کنیم و یکی از دستاوردهای اخیر را که کاربردی از منطق در این حـوزه است را بیان و اثبات می‌کنیم. (مراجعه شود به (Khanaki, 2018).)

در این فصل ساختارهای فضاهای باناخ را مطالعه می‌کنـیم، بنـابراین منظـور از زبـان در اینجا زبان ساختارهای باناخ است که در ادامه بطور دقیق آنرا تعریف می‌کنیم. زبان فضـاهای باناخ عبارت اسـت از $L_B = \{0, c_{r,s}, \|\cdot\|\}$ کـه $r, s$ مقـادیر خـود را از اعـداد حقیقـی اخـذ می‌کنند که $|r| + |s| \le 1$. در اینجا، $0$ یک نماد ثابت است؛ $c_{r,s}$ یـک نمـاد تـابعی ۲–تـایی است که $c_{r,s}(x, y)$ به صورت $rx + sy$ تعبیر می‌شود؛ $\|\cdot\|$ یک محمـول ۱–تـایی اسـت؛ و همـه تـابع‌هـا و محمـول‌هـا پیوسـته یکنواخـت هسـتند بـا پیمانـه پیوسـتگی یکنواخـت $\delta: (0,1] \to (0,1]$ که $\delta(r) = r$. (به عبارت دیگر توابع و محمولات ۱–لیپشیتز هستند.)

یادآوری می‌کنیم که یک فضای باناخ جدایی‌پذیر است اگر شامل زیرمجموعـه‌ای چگـال و شمارا باشد.

تعریف: فرض کنید $X$ یک فضای باناخ جدایی‌پذیر باشد. گوییم $X$ در منطق پیوسته تعریف‌پذیر است، اگر $X$ یکتا مدل جدایی‌پذیر از تئوری $Th(X)$ باشد. یعنی اگر $Y$ مدل جدایی‌پذیر دیگری از $Th(X)$ باشد، آنگاه $X$ و $Y$ (بطور ایزومتریک) یکریخت هستند. به عبارت دیگر، $X$ بطور یکتا توسط تئوری خودش مشخص می‌شود.

توجه داریم که یک تئوری دلخواه می‌تواند تعداد زیادی مدل از هر کاردینال دلخواه داشته باشد. (اگر جدایی‌پذیر بودن مفهوم متناظر با شمارا بودن در منطق کلاسیک در نظر گرفته شود، تعریف فوق از منظر نظریه مدل کلاسیک معادل با مفهوم $\aleph_0$–جازم بودن می‌باشد.)

قبل از ارائه تعریف زیر، یادآوری می‌کنیم که نگاشت $f: Y \to X$ بین دو فضای برداری $Y, X$ یک نشاندن خطی نامیده می‌شود، هرگاه برای هر دو بردار $v, w$ در $X$ و هر اسکالر $r$،

$$f(r.v + w) = r.f(v) + f(w).$$

تعریف: فرض کنید $X$ و $Y$ دو فضای باناخ باشند. گوییم $Y$ در $X$ بطور متناهی ارائه‌پذیر است هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ و هر زیرفضای با بعد متناهی $E$ از $Y$، یک نشاندن خطی $f: E \to X$ موجود باشد بطوریکه برای هر $x \in E$ داشته باشیم $(1-\varepsilon)\|x\| \le \|f(x)\| \le (1+\varepsilon)\|x\|$.

تعریف فوق بطور شهودی بیان می‌کند که هر زیرفضای با بعد متناهی $E$ از $Y$ تقریبا بطور ایزومتریک در $X$ وجود دارد، یا می‌توان زیرفضاهایی در $X$ یافت که به هر اندازه دلخواه شبیه زیرفضای $E$ باشند.

یادآوری: مفهوم بطور متناهی ارائه‌پذیر بودن در منطق پیوسته قابل بیان است. یعنی می‌توان با حکم‌های موجود در منطق پیوسته آن را توصیف کرد. برای این منظور، فرض کنید $Y$ یک فضای باناخ و $E$ یک زیرفضای دلخواه با بعد متناهی از $Y$ باشد. آنگاه همه حکم‌هایی به صورت زیر را در نظر می‌گیریم: برای هر $\varepsilon > 0$ و اسکالرهای $r_1, \cdots, r_n$،

$$(1-\varepsilon)\|\textstyle\sum_1^n r_i a_i\| \le \|\sum_1^n r_i x_i\| \le (1+\varepsilon)\|\sum_1^n r_i a_i\|.$$

(در اینجا $\{a_1, \cdots a_n\}$ یک پایه برای زیرفضای $E$ است و $r_i$ها اعداد حقیقی هستند. توجه داریم که $\|\sum_1^n r_i a_i\|$ یک عدد حقیقی است.)

اکنون یکی از قضایای مهم نظریه فضاهای باناخ را که در ادامه از آن استفاده خواهیم کرد بیان می‌کنیم.

قضیه دورتزکی (مراجعه شود به (Figiel: 1974, 1-5)): برای هر $\varepsilon > 0$ و هر عدد صحیح $k$ یک عدد صحیح $n = n(\varepsilon, k)$ وجود دارد بطوری که هر فضای باناخ $X$ با بعد بزرگتر از $n$ شامل یک زیرفضای $E$ با بعد $k$ است که برای هر $a \in E$، $\|a\| \leq |a| \leq (1+\varepsilon)\|a\|$. (دراینجا $|\cdot|$ نرم اقلیدسی است، یعنی $|\sum_1^n r_i a_i| = (\sum_1^n |r_i|^2 \, \|a_i\|^2)^{\frac{1}{2}}$ که $r_i$ اسکالرهایی از اعداد حقیقی هستند و $a_i$ها عناصری از $E$ هستند.)

تذکر: قضیه دورتزکی بیان می‌کند که برای هر فضای باناخ $X$، فضای هیلبرت $l_2$ در $X$ بطور متناهی ارائه‌پذیر است. (توجه داریم که نامساوی‌های $\|x\| \leq |x| \leq (1+\varepsilon)\|x\|$ و $(1-\varepsilon)|x| \leq \|x\| \leq (1+\varepsilon)|x|$، به دلیل اینکه $\varepsilon$ دلخواه است، قابل تبدیل به یکدیگر هستند.) اکنون، فرض کنید $\{e_1, e_2, \cdots\}$ پایه استاندارد $l_2$ باشد. برای هر $\varepsilon > 0$، هر $n$ و اسکالرهای $r_1, \cdots, r_n$، حکم‌های زیر را درنظر می‌گیریم: $(1-\varepsilon)(\sum_1^n |r_i|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \|\sum_1^n r_i x_i\| \leq (1+\varepsilon)(\sum_1^n |r_i|^2)^{\frac{1}{2}}$. طبق قضیه دورتزکی این حکم‌ها در هر فضای باناخ محقق می‌شوند، و این مطلب چیزی نیست جز اینکه $l_2$ یک تایپ است برای تئوری یک (یا هر) فضای باناخ. (توجه داریم که تایپ مورد نظر یک $\omega$-تایپ است، یعنی تعداد متغیرهای آزاد آن نامتناهی و شمارا است.)

اکنون آماده هستیم که ارتباط بین تعریف‌پذیری و وجود ساختاری خوب را بیان کنیم.

قضیه: فرض کنید $X$ یک فضای باناخ جدایی‌پذیر باشد. اگر $X$ در منطق پیوسته تعریف‌پذیر باشد، آنگاه $X$ (بطور ایزومتریک) شامل $l_2$ است.

برهان: اولا با استفاده از قضیه دورتزکی، حکم‌هایی که فضای $l_2$ را توصیف می‌کنند، یک تایپ در تئوری $Th(X)$ هستند. (برای روشن شدن این مطلب توجه داریم که طبق این قضیه، هر تعداد متناهی از این حکم‌ها در هر فضای باناخ محقق می‌شوند، بنابراین همه این حکم‌ها تشکیل یک تایپ می‌دهند. به تذکر فوق مراجعه کنید.) بنابراین با استفاده از قضیه لوونهایم-اسکولم، یک مدل جدایی‌پذیر $Y$ از $Th(X)$ وجود دارد که (بطور ایزومتریک) شامل $l_2$ است. اکنون با توجه به اینکه $X$ تعریف‌پذیر است و بنابراین یکتا مدل جدایی‌پذیر از $Th(X)$ می‌باشد، $X$ و $Y$ می‌بایست یکریخت باشند، و در نتیجه $X$ شامل $l_2$ است.

لازم به ذکر است که اثبات مشابهی، بطور مستقل، توسط هنسون (Ward Henson) به نویسنده این مقاله پیشنهاد شد. اگرچه، در مقاله (Khanaki: 2018) نتایجی بسیار قویتر از آنچه در اینجا بیان شده اند ارائه شده اند.

## ۵. نتیجه‌گیری

قضیه فوق شرطی کافی برای وجود فضاهای باناخ کلاسیک ارائه می‌دهد. به عنوان مثال، از قضیه فوق نتیجه می‌شود که فضای سیرلسون در منطق پیوسته تعریف‌پذیر نیست زیرا شامل فضاهای کلاسیک نمی‌باشد. دستاوردهای این مقاله منجر به کشف بخشی از رابطه ذاتی بین دو حوزه مختلف (یعنی منطق ریاضی و نظریه فضاهای باناخ) شدند و نوید این مطلب را می‌دهند که مطالعه ساختارهای مختلف ریاضیات (بطور ویژه آنالیز ریاضی) با ابزارهای منطقی منجر به درک بهتر مسائل و در نهایت حل آنها خواهند شد. در واقع، استفاده از ابزارهای موجود در یک حوزه منجر به دستاوردهایی در حوزه دیگر و برعکس می‌شوند.

برای تکمیل بحث، تناظر بین برخی از مفاهیم موجود در این دو حوزه (یعنی منطق ریاضی و نظریه فضاهای باناخ) را بیان می‌کنیم. مفهوم دنباله‌های تمایز ناپذیر (indiscernible sequences) در نظریه مدل متناظر با مفهوم دنباله‌های ۱–زیرمتقارن (1-subsymmetric sequences) در نظریه فضاهای باناخ است که در کار کریوین (Krivine, 1976: 1-29) برای اثبات قضیه معروفش استفاده شده است. مفهوم رتبه‌های اردینالی (ordinal ranks) در نظریه مدل متناظر با اندیس‌های اردینالی (ordinal indices) در آنالیز است. مدل‌های اهرنفخت–مستوفسکی (Ehrenfeucht-Mostowski models) متناظر با مدل‌های گسترش یافته (spreading models) در فضاهای باناخ هستند. همچنین مفاهیم تایپ بدون سور (quantifier-free type)، پایداری (stability) و فراضرب (ultraproduct) در هر دو حوزه متناظر یکدیگر هستند و بطور گسترده در کاربردها مورد استفاده قرار گرفته‌اند. (برای مشاهده تعریف تایپ بدون سور و پایداری در نظریه فضاهای باناخ به (Khanaki, 2018) مراجعه شود.)

در انتهای این مقاله می‌بایست به این مطلب اشاره کنیم که مشاهدات ذکر شده و دیگر نتایج این مطلب را نوید می‌دهند که ارتباط بین این دو حوزه (یعنی منطق و آنالیز) بسیار عمیق‌تر از پیوندهایی است که تا کنون کشف شده‌اند. بنابراین، یافتن پیوندهای بیشتر بین این دو حوزه و استفاده از ابزارها و روش‌های موجود از یک حوزه در حوزه‌ای دیگر بسیار مطلوب بنظر میرسد و این پروژه می‌تواند نتایج بسیار شگفت انگیزی در آینده داشته باشد.

## کتاب‌نامه


Bagheri S.M., and Pourmahdian M. (2009), The logic of integration, Arch. Math. Logic.48, 465-492.

Ben Yaacov I., Berenstein A., Henson C.W., and Usvyatsov A. (2008), Model theory for metric structures, Model theory with applications to algebra and analysis. Vol. 2, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 350, Cambridge Univ. Press, Cambridge, pp. 315–427.

Ben Yaacov I. and Usvyatsov A. (2010). Continuous first order logic and local stability. Trans.

Amer. Math. Soc., 362(10):5213-5259.

Bourgain J., Rosenthal H. P., and Schechtman G. (1981). An ordinal $L_p$-index for Banach spaces, with application to complemented subspaces of $L_p$. Ann. of Math. (2), 114(2):193-228.

Bretagnolle J., Dacunha-Castelle D., and Krivine J.-L. (1965/1966), Lois stables et espaces $L^p$, Ann. Inst. H. Poincare Sect. B (N.S.) 2, 231–259.

Chang C.C. and Keisler H. J. (1966). Continuous model theory. Annals of Mathematics Studies, No. 58. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.

Figiel T. (1974), A short proof of Dvoretzky's theorem, Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique), exp. no23, p. 1-5

Gowers W. T. (1996) . A new dichotomy for Banach spaces. Geom. Funct. Anal., 6(6):1083-1093.

Heinrich S., Henson C. W., and Moore L. C. (1983), Elementary equivalence of L1-preduals. In Banach space theory and its applications (Bucharest, 1981), pages 79-90. Springer, Berlin.

Henson C. W. (1976), Nonstandard hulls of Banach spaces. Israel J. Math., 25(1-2):108-144, 1976.

Henson C. W. and Iovino J. (2002), Ultraproducts in analysis, Analysis and logic (C. Ward Henson, Jose Iovino, Alexander S. Kechris, and Edward Odell, eds.), London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 262, Cambridge University Press, Cambridge, 2002, Lectures from the mini-courses offered at the International Conference held at the University of Mons-Hainaut, Mons, August 25–29, 1997, Edited by Catherine Finet and Christian Michaux, pp. 1-110.

Iovino J. (1997), Defnability in functional analysis. J. Symbolic Logic, 62(2):493-505.

J. Iovino J. (1999). Stable Banach spaces and Banach space structures. I. Fundamentals. In Models, algebras, and proofs (Bogota, 1995), pages 77-95. Dekker, New York.

Khanaki K. (2018), $\aleph_0$-categorical Banach spaces contain $l_p$ or $c_0$, on Arxiv https://arxiv.org/abs/1603.08134, to appear.

Khanaki K. (2016), Amenability, extreme amenability, model-theoretic stability, and NIP in integral logic, Fundamenta Mathematicae 234, 253-286.

Khanaki K., and Amini M. (2012), Haar measure and integral logic, Math. Log. Quart.58, No. 4-5, 294-302.

Khanaki K., and Bagheri S.M. (2011), Random variables and integral logic, Math. Log. Quart.57, No. 5, 494-503.

Krivine, J.-L. (1976), Sous-espaces de dimensionnie des espaces de Banach reticules. Ann. of Math., 104:1-29.

Krivine, J.-L., and Maurey B. (1981), Espaces de Banach stables. Israel J. Math., 39(4):273-295.

Raynaud Y. (1981), Espaces de Banach superstables, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math., 292(14):671-673.

Stern J. (1976), Some applications of model theory in Banach space theory. Ann. Math. Logic, 9(1-2):49-121.

Tsirel'son, B. S. (1974), It is impossible to imbed $l_p$ or $c_0$ into an arbitrary Banach space, Funkcional. Anal. i Prilozen., 8(2): 57-60.