Tarikh-e Elm, **Vol. 18(2) (December 2020), pp. 41-82**

Planetary Retrograde Motion in a Treatise Attributed to Muʾayyad al-Dīn al-ʿUrḍī

Maryam Zamani
MA in History of Science
maryam_zamani77@yahoo.com

(received: 25/12/2020, accepted: 15/03/2021)

Abstract

Planets occasionally quit their prograde motions and go against their normal direction, said retrogression. Happening for differences in orbital velocities of planets and earth, retrogression loops not only are unequal at forms and scales but appear everywhere in the sky. Applying the concentric epicycle-deferent model makes the similar regular loops, but it does not correspond to observations; thus, employing eccentre deferent is needed. Description of the phenomenon is the subject of Book XII of the *Almagest*. Ptolemy explained some necessary lemmas for his geometrical explanations and examined his justifications by few specified positions for every planet. This paper studies contents of a treatise note on retrogression attributed to Muʾayyad al Dīn al ʿUrḍī, one of the invited scholars to founding Maragha observatory. Apart from his skills and achievements in designing and manufacturing astronomical instruments, he was a proficient theorist astronomer with educational experiences. The present treatise is an informative text similar to other known works of ʿUrḍī in precision and consideration of the matter's geometrical aspects. He has attempted to encounter the phenomenon holistically instead of checking parameters in the case studies to present regulations using Apollonius' theorem.

Keywords: *Almagest*, Apollonius, eccentric model, epicycle-deferent model, Muʾayyad al Dīn al ʿUrḍī, prograde motion, Ptolemy, retrograde motion.

Introduction

Historical review

Babylonians had several registration types for astral phenomena, and they were interested in synodic cases, such as retrograde arcs. They have recorded their observations and predictions of stationary points, especially for outer planets. In retrogression, the plant keeps its longitude while its latitude changes for several days; the farther the planet, the longer its retrogression. So Babylonians could observe this event easily (Steel, 2, 3 & 6). They defined two mathematical systems to explain planetary phenomena. System A was based on the step function, while system B showed a linear zigzag function. It seems system A was used for exposition aspects such as the first station; however, they had different methods for retrograde motion or second station (Neugebauer, 1954, 81-82). For, some studies have suggested Babylonian observed stationary points for making the system A and B (De Jong, 2019).

Eudoxus, a pioneer in explaining this complex motion, had suggested homocentric spheres for the planets. For the representation of the retrogression, he devised a two-sphere system that could generate a figure-eight path. According to the Aristotelian system, heavenly bodies were supposed to have uniform circular motion. Consequently, any justification for retrogression should have produced by a combination of circles. Later, Apollonius, whose theories have received us through Ptolemy, introduced two simple equivalent models: eccentric and epicycle-deferent models (Toomer, 141-145). He could display a mechanism for retrograde motion by two circles. Ptolemy, who preferred the eccentric model in the case of sun for its simplicity, occasionally used a combination of both models to explain planetary movements in the *Almagest*. He then devoted Book XII to retrogression; in this Book, he has demonstrated several lemmas and has given detailed descriptions for the subject, which was the base of the upcoming works about retrograde motion. Here, I briefly review Book XII.

According to Ptolemy, Apollonius showed that it is possible to produce the retrograde arcs using the epicycle-deferent model. In his scheme, while an epicycle is traveling upon the circumference of the deferent, the path of a fixed point on the epicycle projects a limaçon.

In fact, it makes one of three types of limaçon (dimpled, cardioid, and looped) based on the radii and speeds of the epicycle and deferent. When the planet has retrogression, its path can project a looped limaçon, but if it only has a stop, the path makes a cardioid curve (Barbour, 144-149). So Apollonius presented a condition for occurrence retrogression (in the eccentric model, it happens as well). To make it short, the condition for both models is:

1- Suppose the eccentric orb has a concentric mover, which makes it move at the speed of the mean sun, by a line intersecting the eccentric orb through the center of the ecliptic, if it satisfies Apollonius' theorem, $\frac{\frac{1}{2}SV}{ST} = \frac{\omega_{ecc}}{\omega_p}$ we can see the planet stops at S (S=stationary point, ω_{ecc}=angular velocity of the center of the eccentr, ω_p=speed of the planet, see figure 1).

O: center of the eccentric orb

T: center of the ecliptic

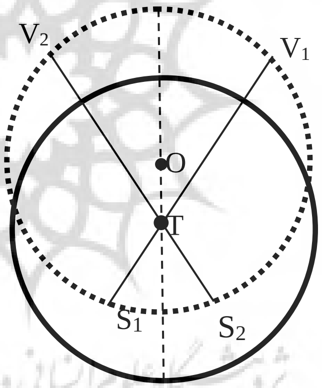


Figure 1. Stationary points in the eccentric model (see. Ṭūsī, 1/139)

2- If the epicycle goes upon the circumference of the concentric deferent, by drawing a secant of the epicycle through the center of the universe, the planet stops at S, when $\frac{\frac{1}{2}SV}{ST} = \frac{\omega_c}{\omega_p}$ (S=stationary point, ω_c=angular velocity of the center of the epicycle, ω_p=speed of the planet).

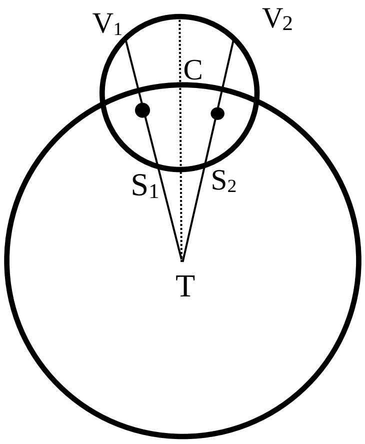


Figure 2. Stationary points in the epicycle-deferent model (see Ṭūsī, 1/139)

And Apollonius' theorem for the stationary point is displayed in the following figure (Figure 3).

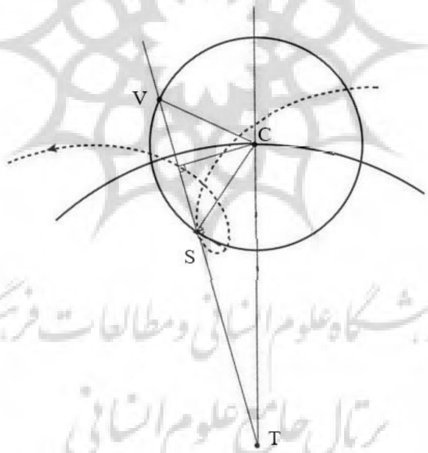


Figure 3. Applying Apollonius' theorem on the retrograde loop.

To present a single method capable of explaining the phenomenon in both models, Ptolemy has demonstrated a lemma to take advantage of a property related to inversion. It says K is an inverse point of T. In the following circle, two triangles ΔCKQ, ΔCQT are similar; therefore,

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

the similarity ratio is $r^2 = CT.CK$, and r is said power of the circle.[1] By applying componendo and dividendo on similarity ratio:

$$\frac{CT+r}{CT-r} = \frac{r+CK}{r-CK} \text{ or } \frac{R+r}{R-r} = \frac{r+d}{r-d}$$

$$\frac{R+r}{R-r} = \frac{TA_{\upsilon}}{T\Pi_{\upsilon}} = \frac{KA_{\upsilon}}{K\Pi_{\upsilon}} = \frac{\Delta_{Max}}{\Delta_{min}}$$

So Ptolemy could preserve $\frac{\Delta_{Max}}{\Delta_{min}}$. Consequently, as long as the ratio is constant, the observer's, displacementadoesI not affect, the results of Ptolemy's demonstrations eithert inf eccentrica orā epicycle-deferent models (Pedersen, 333, 340).

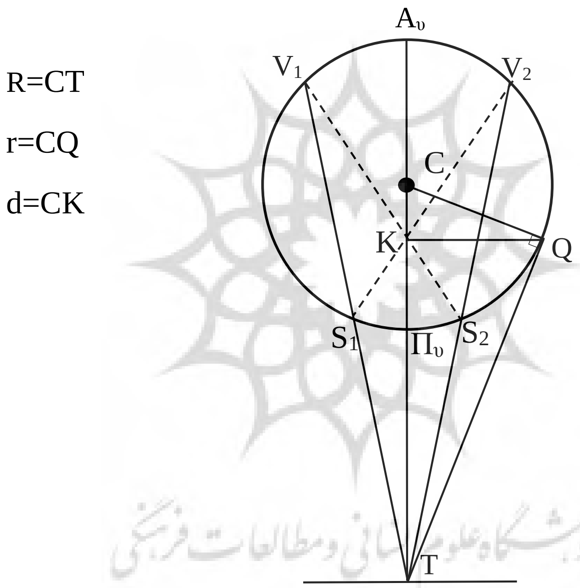


Figure 4. T and K are inversed points with respect to the inverse circle of inversion radius r, K is said pole, and the line through T is the polar line.

However, using the epicycle-deferent model, we would see the same retrograde arcs (see figure 5), but observations do not support this theory (see figure 6). In other words, Ptolemy needed the eccentricity to produce otherKforms. Moreover, Apollonius' theorem

1. Apparently this term defined by Jakob Steiner in the 19th in his *Einige geometrische Betrachtungen* (Some Geometrical Considerations), originated in proposition 35, Book III, *Euclid's Elements*.

cannot apply in a nonconcentric epicycle (Pedersen, 341). So, for applying eccentricity, Ptolemy gave his solutions in three specific points plus an extra one computing by regression for each planet (Neugebauer, 1975, 1/192-201; Pedersen, 345-349) where limited practicing of Apollonius theorem is possible (Pedersen, 341).

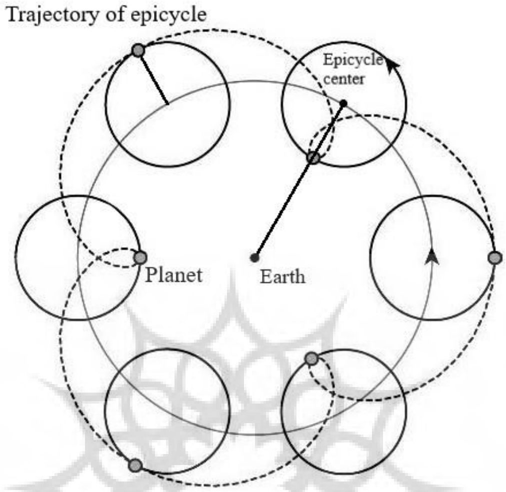


Figure 5. Zero eccentricity results in equal retrograde loos.

Observed retrogression arcs for the planets show other forms such as:

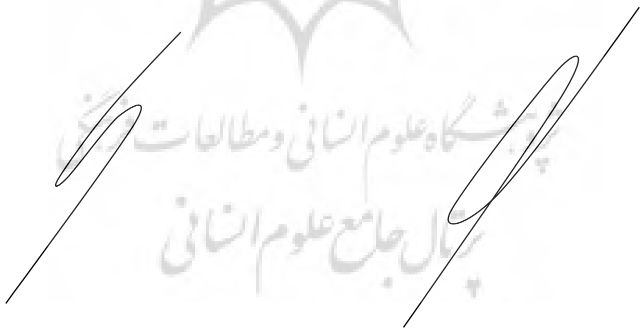


Figure 6. Observed retrograde loops.

Retrogration in astronomical works in Islamic period

Many scholars wrote commentary on the *Almagest* or have compiled their books influenced by Ptolemy's works in the Islamic period. Despite the genre, they generally had a brief note on retrogression such as Qaṭṭān Marwzī[1] or Sharaf al-Dīn Mas'ūdī.[2] However, several authors assigned more attention to details, for instance, Bīrūnī,[3] Jābir ibn Aflaḥ,[4] al-Kharaqī,[5] and Shīrāzī[6] have presented more explanations or demonstrations in their works.

The present treatise, *Masʾalat fī al-Rujūʿ wa al-Istiqāma* (prograde and retrograde motion), deals with retrograde motion based on the *Almagest*; it has been presented in two parts: a needful geometric introduction and description of the phenomenon. The first part begins with Ptolemy's third lemma, called Apollonius' lemma; the second part is about giving the general rules for the phenomenon as mentioned earlier, instead of case studies. The treatise goes into detail about the retrograde motion and brings out examples related to the subject. ʿUrḍī has a creative method in the given examples, as he has employed subsidiary circles whether for shifting a point or displaying chords. Representing chords in a circle identical to the diameter of another circle (see figures 12 & 17 & 18), He has made imaginary circles to show the correlation between speeds and diameters instead of chords and also eliminated the number one and a half in Apollonius' theorem (Ptolemy, 559). It is unknown if using this fashion was simply an educational tactic, such as helping the audience conceive the epicycle's motion upon the deferent or not. Since every epicycle whose chord is the diameter of another epicycle can display shifting in

---

1. A Persian astronomer lived in the 11th century. For his comments on retrograde motion cf. *GayhānīŠenāxt*, 101- 104
2. A Persian astronomer, mathematician, and geographer lived in the second half of the 13th century. For his explanation of retrogression cf. *Jahān Dānish*, 81- 83
3. *Kitāb al-Qānūn al-Masʿūdī*, (Canon Masudicus). Chapter 5 in Book X
4. He was a mathematician and astronomer in 12th century Andalusia. For his description of retrogression cf. *'Iṣlāḥ al-Majisṭī*, Book VIII, 99 v-106 r
5. Astronomer, geographer, and philosopher lived in the 12th century. For his explanation about retrogression cf. *Muntaha al-Idrāk fī Taqāsīm al-Aflāk*
6. He was a 13th century Persian astronomer and mathematician. For his description on retrogression cf. *Nīhāyat al-Idrāk fī Dirāyat al-Aflāk*, fol. 49r-51v. See Also Gamini, pp. 149-157

position. Also, he has applied nested circles along with deferent; thus, he could give the speed quantity in desired positions (see figures 14 & 17 & 18). It seems that he has no intention of any Physical justification of extra circles; however, ʿUrḍī (*Kitāb al-hay'a*, 197) has implied that for the fulfillment of the period of rotation in the zodiac, epicyclehneedsgan epicycleth(mudīr), hetdidrnot mentionaanyesimilarf idea nor mathematical explanations there.

In this paper, I have assumed that this text was presented by ʿUrḍī, as I have noticed two treatises in Bodleian Library in collections Marsh 720 and Thurston 3 by an anonymous author have partly the same content. Besides, some parts of Marsh 720 and Thurston 3 have been repeated in the appendix of one manuscript in Holy Shrine library (Mashhad, Iran) no. 5452 under the name of ʿUrḍī. Furthermore, parts of these three treatises are related to *Muqaddimah fī ʾIṣlāḥ Burhān al-shakl al-Rābiʿ min Tāsiʿa min al-Majisṭī* (Introduction on Explanation of the Demonstration of the Fourth Proposition of Ninth Book of *Almagest,* see Appendix II). Moreover, we have evidences for ʿUrḍī's teaching (Ibn abī Usaybaʿa, 768). Likely his pupils took notes on his lectures (Saliba, 1990, 32); so, some differences among the notes cannot be unexpected.

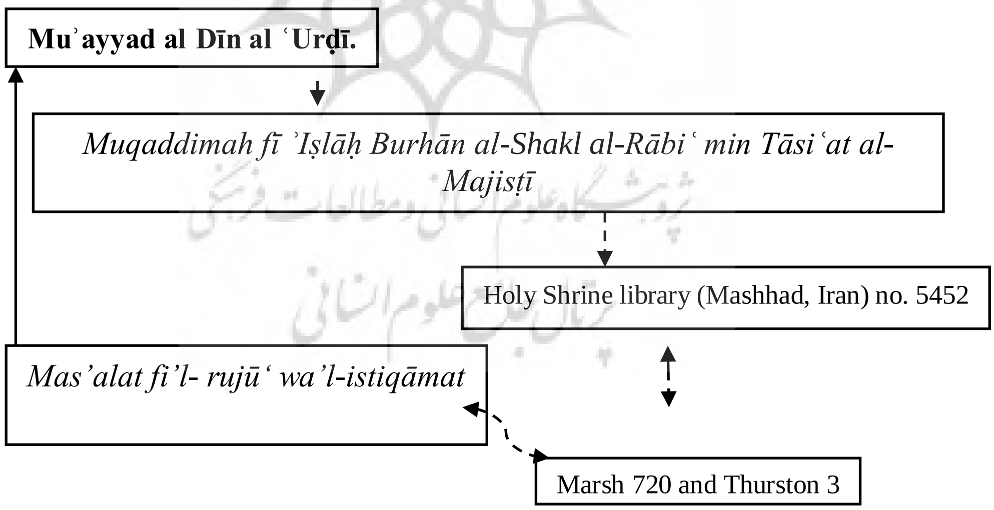


Figure 7

Masʾala fī al-Rujūʿ wa al-Istiqama

Masʾala fī al-Rujūʿ wa al-Istiqama (prograde and retrograde motion) keeps in Nuruosmaniye library with shelfmark 2971/18.[1] As I know, its treatises are written by Muḥīyy al-Dīn Magribī or Muʾayyad al Dīn al ʿUrḍī. Along with this manuscript (96a-100a) in this manuscript, there are also copies of three works of ʿUrḍī: *Risāla fī al-kayfīyya al-ʾArṣād* (Treatise on the quality of Observations) (74b-93a), *Muqaddima fī ʾIṣlāḥ Burhān al-shakl al-Rābiʿ min Tāsiʿa min al-Majisṭī* (Introduction on Explanation of the Demonstration of the Fourth Proposition of Ninth Book of *Almagest*) (93b–94a), and *Fī ʾIstikhrāj mā bayn Markazay al-Shams wa Mawaḍiʿʾ Awjuhā* (The Determination of the Solar Eccentricity and Apogee) (94a–95b) (see Appendix II).

The critical edition of the present manuscript is done according to the Book XII of the *Almagest*. I have edited the manuscript without changing its style but did minor alterations, such as writing *Hamza* on the seat depending on the vowels (for example:بطؤ).

First Part: Two lemmas

Masʾala fī al-Rujūʿ wa al-Istiqama begins with a brief introduction as follows: “our Imām, master of scholars, engineers, and researchers has dictated a case on the prograde and retrograde motions” then continued by two lemmas, the first one is Apollonius’ lemma:

First lemma: in a scalene triangle, by cutting the same length of the shorter side on the largest one, the following relation can be expressed:

$$\Delta ABG: |BG| > |AB|, |AG| \ \therefore \frac{GD}{BD} > \frac{\angle ABG}{\angle BGA}$$

Drawing a line through point *G*, as $GZ \parallel AD$ then extending *AB* and *GZ* to intersecting one another, we draw another parallel line $AE \parallel BG$ and a circle centered at *A*, with the radius *AG* through *E*, cutting off *AZ* at *H*:

$$AE = AG \ \therefore \angle AEZ \text{ is an obtuse angle.}$$

1. The author is grateful to Mr. Ali Safari Aq-qale for provision of this manuscript.

$$\begin{Bmatrix} sector\ AEH \prec \Delta AZE \\ sector\ AEG \succ \Delta AEG \end{Bmatrix} \therefore \frac{\Delta AZE}{\Delta AEG} \succ \frac{sector\ AHE}{sector\ AEG}$$

if

$$\frac{\Delta AZE}{\Delta AEG} = \frac{ZE}{EG}, \frac{ZE}{EG} = \frac{ZA}{AB} = \frac{GD}{BD}$$

$$\frac{GD}{BD} \succ \frac{sector\ AGE}{sector\ AEH}$$

$$\frac{\widehat{ZE}}{\widehat{EG}} \succ \frac{\angle ZAE}{\angle EAG} = \frac{\angle ABG}{\angle AGB} \therefore \frac{GD}{BD} \succ \frac{\angle ABG}{\angle AGB}$$

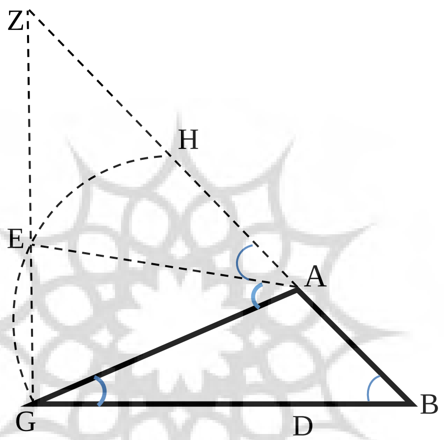


Figure 8: The relation between the sides and the angles.

Inversion case: If the ratio of the angles is given, cutting off the sides in the same ratio is possible.

$$\Delta ABG: |BG| \succ |AB|, |AG|$$

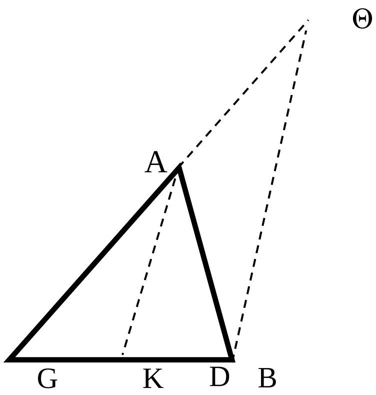


Figure 9: Constructing the angles by the ratio of the sides.

Cutting $GD = AG$ in triangle *ABG*, we draw the line *AΘ*, we make $\frac{AG}{A\Theta} = \frac{\angle ABG}{\angle AGB}$, then we join *Θ* to *B*, draw $\Theta B \parallel AK$; therefore *K* is on the line *GD*:

$$\frac{AG}{A\Theta} = \frac{GK}{KB} = \frac{\angle ABG}{\angle AGB}$$

First lemma links the magnitude of the angle to a segment.

Second lemma: derived from the *Elements* (III, 8): among all lines drawn to a circle from a point outside it, the one through the center is the greatest (Heath, 17-21). Ptolemy has applied it to distinguish points on the circumference (Toomer, 559-562), ʿUrḍī also has passed circles through intersecting points (see the example for case B). ʿUrḍī has paraphrased the proposition as:

> For all lines drawn to a circle from a point outside it, the ratio of the lines to the inside part of them are different, and this ratio for the one through the center is the greatest.

The circle *ABG* is centered at *D*; we draw secants *EZDA*, *EHB*, *EΘG* from the point *E* outside the circle; so *HB* and *ΘG* are bisected at *K* and *L*, therefore:

$$\frac{EA}{AD} \succ \frac{EG}{GL}$$

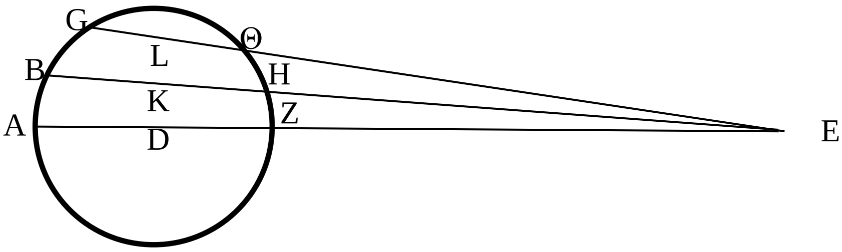


Figure 10: Outside of the circle's circumference, the line that goes through the center is the least.

So

$$\frac{ZD}{AD}=\frac{HK}{KB}\,,\frac{ED}{AD}>\frac{EK}{KB}\;\therefore\;\frac{(ED+AD)=EA}{AD}>\frac{(EK+KB)=EB}{KB}\quad(1)$$

$$\frac{HK}{KB}=\frac{\Theta L}{GL}\,,\frac{EK}{KB}>\frac{EL}{GL}\;\therefore\;\frac{(EK+KB)=EB}{KB}>\frac{(EL+GL)=EG}{GL}\quad(2)$$

$$(1)\,,(2)\rightarrow\frac{EA}{AD}>\frac{EG}{GL}$$

And if

$$\frac{EZ}{ZD}<\frac{EH}{HK}\;\therefore\;\frac{EH}{HK}<\frac{E\Theta}{\Theta L}$$

Proof:

$$ZD>HK\,,HK>\Theta L\,,EH<E\Theta\;\therefore\;\frac{EH}{HK}<\frac{E\Theta}{\Theta L}$$

Expressing inverse of the distances:

$$\frac{ZD}{EZ}>\frac{HK}{EH}\,,\frac{HK}{EH}>\frac{\Theta L}{E\Theta}\;\therefore\;\frac{ZD=AD}{EZ}<\frac{HK=BK}{EH}<\frac{\Theta L=GL}{E\Theta}$$

Apparently he missed some lines here:

$$\therefore\;\frac{E\Theta}{GL}<\frac{EH}{BK}<\frac{EZ}{AD}$$

$$\therefore\;\frac{E\Theta+2GL}{GL}<\frac{EH+2BK}{BK}<\frac{EZ+2AD}{AD}$$

$$\therefore\;\frac{EG}{GL}<\frac{EB}{BK}<\frac{EA}{AD}$$

Again, he made an inversion of the former ratios:

$$\frac{AD}{EA}>\frac{BK}{EB}\,,\frac{BK}{EB}>\frac{GL}{EG}\;\therefore\;\frac{GL}{EG}<\frac{BK}{EB}<\frac{AD}{EA}$$

It shows a relation between chords and secants; later, the scales of the lines convey the magnitude of the angular velocity of the planets and the epicycles.

Second part: description of the phenomenon

Here, ʿUrḍī has described apparent motion in an epicycle-deferent model [concentric]. By drawing two tangents toward the epicycle from the center of the universe, depending on the planet's position one of the following three cases can happen:

1- The planet goes upon the epicycle on the lower arc appears slow-motion -$\omega = \omega_{center\ of\ the\ epicycle} - \omega_{planet}$ and $\omega_{planet} \prec \omega_{center\ of\ the\ epicycle}$, after passing through the perigee the planet goes faster.

2- The planet goes upon the epicycle on the upper arc appears fast-motion because $\omega = \omega_{center\ of\ the\ epicycle} + \omega_{planet}$.

3- Or it is on the tangent points, it goes forward with the mean motion, $\omega = \omega_{mean}$.

While moving clockwise upon the epicycle, number 1 and 2 exchange.

When the planet undergoes backward, its movement slows down; it pauses, goes to the rear, stops again then proceeds. In other words, at any location after passing through the common point of the epicycle and its tangent in the left, however, the planet moves back but it is not seen retrograding because as long as $\omega_{planet} \prec \omega_{center\ of\ the\ epicycle}$, the center of the epicycle takes it forward [counterclockwise], when $\omega_{planet} = \omega_{center\ of\ the\ epicycle}$ it stands still, here is the first stationary point. As soon as $\omega_{planet} \succ \omega_{center\ of\ the\ epicycle}$ the planet is seen retrograding; up to the second stationary point, the circumstances are the same. After that, the planet's speed is less than the speed of the center of the epicycle; the planet resumes its progression. It is worth noting that retrogression does not influence the planet's period upon the epicycle (Jaghmīnī, 141), which means the planet completes its period of rotation around the epicycle despite of retrogression.

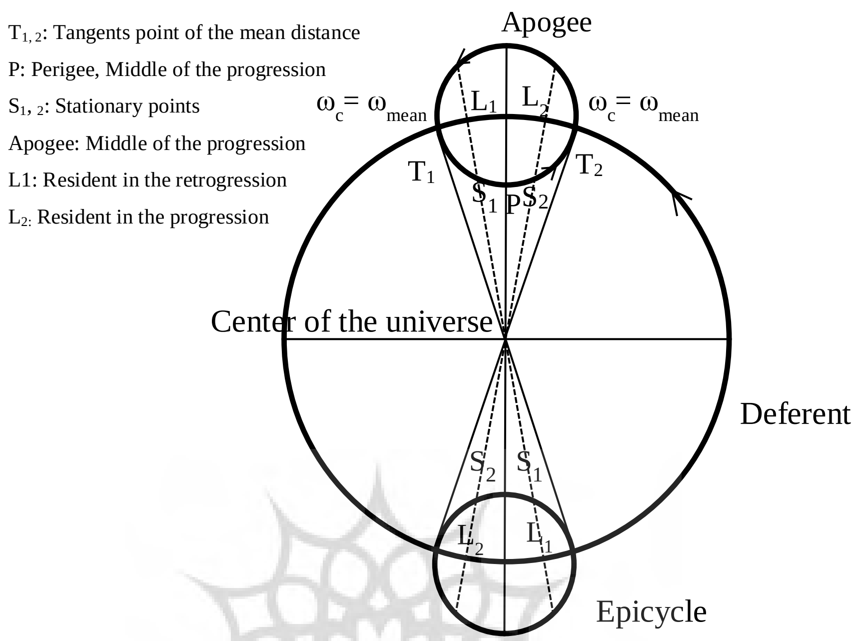


Figure 11: The epicycle's secants show points' status on the epicycle. Adapted from *Jahān Dānish by Masʿūdī,* 83.

A formula for finding stationary points

In this section, ʿUrḍī explains Apollonius' theorem and its consequences, as we saw earlier. It says if the ratio of the half chord formed in the epicycle on the distance between the planet and the center of the universe be the same as the ratio of the motion of epicycle on the motion of the planet, and if they move in the opposite direction:

> When the secant goes through the center of the epicycle, thus planet stops at apogee/ perigee. If not, the planet can stop at two points.

Imagine a circle of the same diameter as one chord of the epicycle, called it the second epicycle (Figure 12). Then another circle concentered at the ecliptic center with the radius at the exact size of the distance between the center of the universe to the planet; we named nested circles parallels [however he addressed them parallel, in the second example, they are tangent internally, or cross one another]. So if the ratio of the radii, second epicycle, and parallel is the same as the ratio of motions, speed of deferent and the epicycle, the planet stands still, or

$$\frac{r_{2^{nd}\ epicycle}}{r_{parallel\ circle}} = \frac{\omega_{center\ of\ the\ epicycle}}{\omega_{planet}}$$

In the other words, if the ratio of the planet's movement by the epicycle motion into its travel upon one of the epicycles is the same as the ratio of the half segment of the line inside the epicycle into the distance between the planet to the center of the universe:

$$\frac{\frac{1}{2}SV}{ST} = \frac{\omega_{center\ of\ the\ epicycle}}{\omega_{planet}}$$

There is another expression for finding the planet's situation by angles shown in the above figure as Ψ and Φ, while angle Ψ is showing the center of the epicycle movement, angle Φ represent the epicycle motion. Two angles estimate by lemmas as mentioned earlier, here is their correlation with speeds of the epicycle and its center

$$\frac{\omega_{center\ of\ the\ epicycle}}{\omega_{planet}} = \frac{\frac{1}{2}SV}{ST} > \frac{\angle STK}{2\angle SVK} = \frac{\angle STK}{\angle KES} = \frac{\Psi}{\Phi}$$

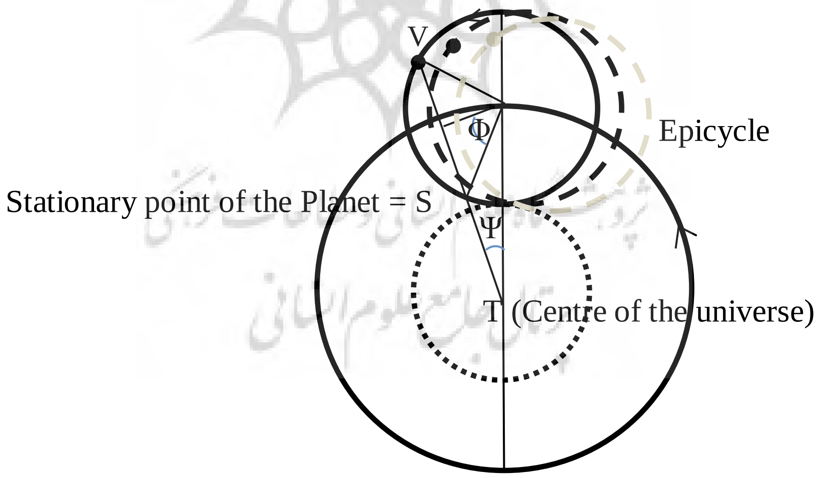


Figure 12. "Parallel" and second epicycle are shown in this picture

With an arc in common, an inscribed angle is a half measure of its central angle. For every point that satisfies the former inequality, we can say the planet travels in advance. So any point before VST (at the left side) holds the above relationship. At the stations, it transforms into equality; however, for any points between them, the orientation of the inequality changes (Toomer, 561).

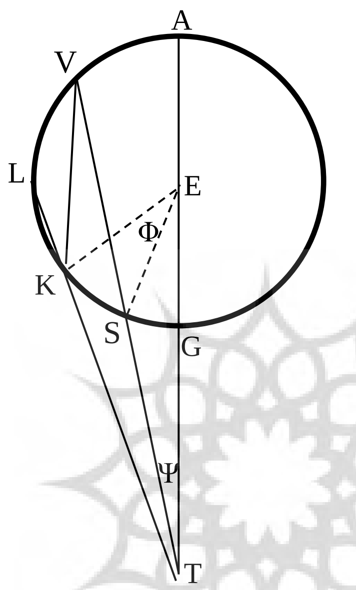


Figure 13. Magnitudes of the Angles express movements of the plant and the epicycle

Explanation of Retrogression according to him [Ptolemy]

A. Retrogression in upper arc of epicycle occurs only if $\omega_{planet} \succ \omega_{mean}$. Displacing by the center of the epicycle speed, path of the planet makes a circle of radius of distance from the centre of the universe to it, which is greater than deferent. In other words, the angle swept in direct motion is more than the angle covered backward. But for happening retrogression, we need the sector of epicycle to become more than the corresponding sector of deferent at the same time, or $\frac{\omega_{planet}}{\omega_{center\ of\ the\ epicycle}} \succ \frac{\Phi}{\Psi}$ (Toomer, 561). Therefore retrogression will occur if the planet is quicker than the deferent.

B. Retrogression in the lower arc of the epicycle depends on the planet's motion [It will be explained later].

An example for the case A

Drawing a circle centered at *D*, an epicycle centered at *B*, we then draw the parallel circle *EF* and the ecliptic *IΘ*, so extend *DB* to *E* and *F* [in two directions]:

If $\frac{DE\ (Radius\ of\ the\ parallel)}{EB\ (Chord\ of\ the\ epicycle)} = \frac{\omega_{planet}}{\omega_{center\ of\ the\ epicycle}}$ then planet stops at the apogee (no retrogression).

And if $\frac{DE\ (Radius\ of\ the\ parallel)}{EB\ (Chord\ of\ the\ epicycle)} \prec \frac{\omega_{planet}}{\omega_{center\ of\ the\ epicycle}}$ then it stops at two points, retrograde arc is between them. [In this case the ratio reverses]. We assume $\frac{\omega_{planet}}{\omega_{center\ of\ the\ epicycle}}$ equal to $\frac{DH}{HK}$, then draw *DH* to make the acute angle *BDH*, draw $KB \parallel HM$, line *BE* goes through *M*, *M* is at the middle of *BE*. We also draw the circle *DZM* cutting the epicycle at *Z* [in order to projection], join *D* and *Z*; it is a secant of epicycle at L and Z, extend it to *Θ*. We connect *Z* to *B* and *M*, draw $BN \perp ZL$.

So when $\frac{\Delta DMZ}{\Delta DBZ} \sim \frac{DZ}{ZN} = \frac{DM\ (=\omega_{planet})}{MB\ (=\omega_{center\ of\ the\ epicycle})}$ the planet stands still because of the equality of quadruple values; motion of the planet, motion of the center of the epicycle, and correspondent angles made in the second epicycle and parallel, as we can see $\frac{\omega_{planet}}{\omega_{center\ of\ the\ epicycle}} \sim \frac{\angle MBZ}{\angle MDZ} = \frac{DZ}{ZN}$.

There are two produced arcs, one in forwarding motion and another one in the backward motion until those two arcs of opposite motions are the same the planet is on the line *DZΘ*, despite their motions [the planet and the epicycle], it seems they are motionless, even when they have a slight difference in speed, they are considered equal.

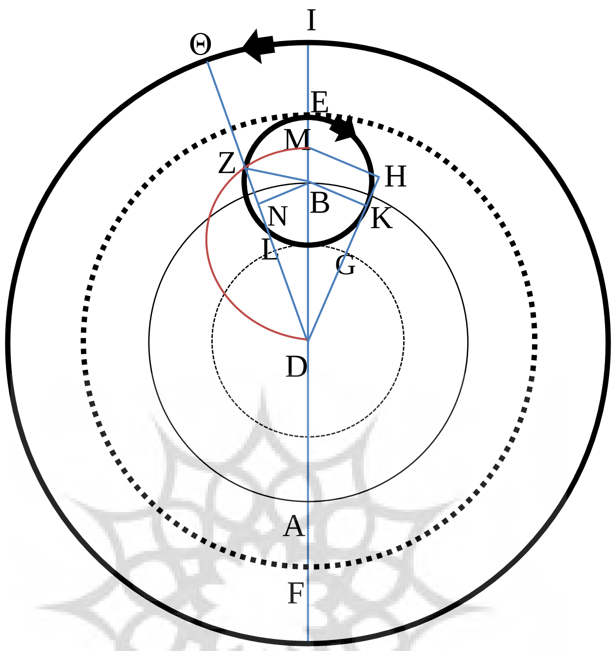


Figure 14. The planet stops at Z in upper arc.

Second case: retrogression in the lower arc of an epicycle

Here, he uses a radius of the second epicycle instead of half the chord inside the original epicycle.

1- $\omega_{planet} \succ \omega_{center\ of\ the\ epicycle}$, Δ_{min} = radius of the parallel = distance from the observer to the perigee of the epicycle.

   i. If $\frac{r_{epicycle}}{[\Delta_{min}]=R_{parallel}} = \frac{\omega_{center\ of\ the\ epicycle}}{\omega_{planet}}$ the planet stops at the perigee of the epicycle, but there is no retrogression.

   ii. If $\frac{r_{epicycle}}{[\Delta_{min}]=R_{parallel}} \prec \frac{\omega_{center\ of\ the\ epicycle}}{\omega_{planet}}$ there are two stationary points, retrogression happens between them. We will explain it later.

2- $\omega_{planet} = \omega_{center\ of\ the\ epicycle}$, $r_{epicycle} \geq \frac{R}{2}$, R= radius of deferent.

i. If $r_{epicycle} = \frac{R}{2}$ for equality of the two radii, the planet stops at perigee, since the parallel circle goes further than the epicycle, prograde arc becomes more than retrograde arc; therefore, the planet goes direct $[\Phi \succ \Psi]$.

ii. If $r_{epicycle} \succ \frac{R}{2}$ there are two stationary points, and retrogression happens between them. We will explain it.

3- $\omega_{planet} \prec \omega_{center\ of\ the\ epicycle}$, $r_{epicycle} \succ \frac{R}{2}$, R= radius of deferent.

i. If $\frac{r_{epicycle}}{\Delta_{min}} = \frac{\omega_{center\ of\ the\ epicycle}}{\omega_{planet}}$ the planet stops at the perigee, but there is no retrogression.

ii. If $\frac{r_{epicycle}}{\Delta_{min}} \succ \frac{\omega_{center\ of\ the\ epicycle}}{\omega_{planet}}$ there are two stationary points. So, retrogression happens between them. We are going to present an example of this one.

Examples for finding stationary points, prograde and retrograde motion in the case B

3-ii

Let in the epicycle centered at *E*, *AEGZ* be the diameter through the center of the universe, *Z*. Then we draw the diameter to *F* [in fact *F* is between *Z* and *E*].

The condition for retrogression is $\frac{r_{epicycle}\,(=EG)}{\Delta_{min}\,(=GZ)} \succ \frac{\omega_{center\ of\ the\ epicycle}}{\omega_{planet}}$, Δ_{min} = distance from the observer to the perigee of epicycle. Let $\frac{EG}{GZ} = \frac{\omega_{center\ of\ the\ epicycle}}{\omega_{planet}}$, so:

$$\frac{EG}{GZ} \succ \frac{EG}{GF} \qquad \therefore \frac{(EG+GZ)=EZ}{GZ} \succ \frac{(EG+GF)=EF}{GF} \qquad (1)$$

$$\frac{EF}{GF} \succ \frac{EZ}{ZK} \qquad \therefore \frac{(EF-GF)=EG}{GF} \succ \frac{(EZ+ZK)=EK}{ZK}$$

$$\frac{EG}{GF} \sim \frac{\omega_{center\ of\ the\ epicycle}}{\omega_{planet}} \qquad (2)$$

Alternatively, (1) shows a smaller deferent; thus (2) is the new ratio for stationary point. It is showed in the following figure.

E: center of the epicycle

Z: center of the universe

F: centre of the smaller deferent

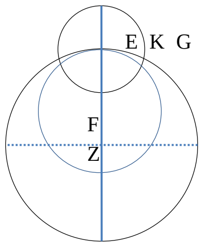


Figure 15. When speed of the planet is less than the speed of the center of the epicycle, deferent should be smaller.

Examples for items 1, 2

Let *L* be at the middle of the *ZK*, draw a circle centered at *L* of radius *LZ*, it cuts the epicycle on *Θ* and *H*, *Θ* and H are the stationary points, *ΘGH* is the retrograde arc, and *HAΘ* is the prograde arc. [In the following picture circle through *Z* is not deferent but a parallel and *K* is the correspondent point mentioned earlier].

The lines *ZΘD* and *ZHI* are secants of the epicycle. We draw *KΘ*, *KH*, then bisect chords *ΘD* and *HI* at the *M*, then we connect *EM*s:

$$\begin{Bmatrix} \angle ZM_1E = \angle Z\Theta K \\ \angle ZHK = \angle ZM_2E \end{Bmatrix} \therefore EM_1 \parallel K\Theta\ , EM_2 \parallel KH \text{ , so } \frac{M_1\Theta}{\Theta Z} = \frac{EK}{KZ}$$

$$\frac{M_1\Theta}{\Theta Z} = \frac{\omega_{center\ of\ the\ epicycle}}{\omega_{planet}} = \frac{\angle GZ\Theta}{\angle GE\Theta} = \frac{EG}{GZ}$$

For the equality of both ratios, $\frac{\omega_{center\ of\ the\ epicycle}}{\omega_{planet}} = \frac{r_{2^{nd}\ epicycle}}{R_{parallel}}$, the planet stands still at *Θ* and *H*; therefore, it goes indirectly along *ΘH*.

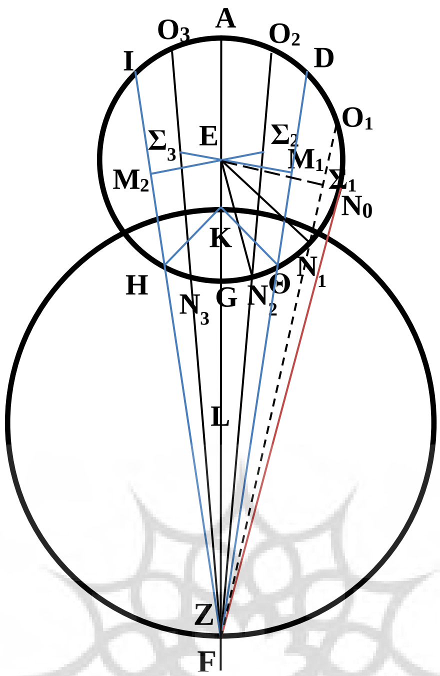


Figure 16. The epicycle and a parallel.

Type of positions for arbitrary points

ZN_0: tangent

On the arc ΘN_0 let ZN_0 be tangent line to the epicycle, since at intersection point $\omega_{planet} = \omega_{mean}$. Before and after the contact point, the planet goes direct; so, it is clear before stopping, it slows down.

ZN_1: secant

- If ZN_1 cut off the epicycle, we extend it to O_1, then bisect $N_1\, O_1$ at Σ_1, and connect E to N_1. According to lemmas:

$$\frac{\Sigma_1 N_1}{N_1 Z} \prec \frac{M_1 \Theta}{\Theta Z} \qquad (1)$$

$$\frac{M_1 \Theta}{\Theta Z} = \frac{\omega_{center\ of\ the\ epicycle}}{\omega_{planet}} = \frac{\angle GZN_1}{\angle GEN_1} \qquad (2)$$

and $\angle GEN_1 \succ \angle GZN_1$. Since the angle covered in forward movement (GZN_1) is more than the one in backward motion (GEN_1), the planet moves forward.

- The planet is on the retrograde arc *ΘH*.

Lengthening the N_2Z to O_2 on the epicycle, we bisect it at the Σ_2, then link E to N_2, so:

$$\frac{\Sigma_2 N_2}{N_2 Z} \succ \frac{M_2 H\ [=M_1 \Theta]}{\mathrm{HZ}\ [=\Theta Z]} = \frac{\omega_{center\ of\ the\ epicycle}}{\omega_{planet}} = \frac{\angle GZN_2}{\angle GEN_2}$$

Since the planet goes backward through GEN_2 at the same space of time the center of the epicycle moves in advance through GZN_2, and GEN_2 is more than GZN_2, so the planet travels backward.

- Another version; let N_1 be on the arc *ΘD*. According to lemmas:

$$\frac{\Sigma_1 N_1 (= r_{2^{nd}\ epicycle})}{N_1 F (= r_{parallel})} \prec \frac{M_1 \Theta}{\Theta Z} = \frac{\omega_{center\ of\ the\ epicycle}}{\omega_{planet}}$$

$\Sigma_1 N_1 =$ radius of the second epicycle, $N_1 F =$ radius of the parallel through F, since

$$\left(\omega_{center\ of\ the\ epicycle\quad N_1 F}\right)_{at\ N_1} \succ \left(\omega_{center\ of\ the\ epicycle\quad \Theta Z}\right)_{at\ \Theta}$$

in order to equality of the motions at *Θ* and also $M_1 \Theta \succ \Sigma_1 N_1$ we have:

$$\left(\omega_{center\ of\ the\ epicycle\quad \Theta Z}\right)_{at\ \Theta} \succ \left(\omega_{planet}\right)_{at\ \Theta} \gg \left(\omega_{planet}\right)_{at\ N_1}$$

therefore the planet goes forward on the arc *ΘD*, so is for every point on *ΘD*, but N_2 is on the arc *ΘGH*, the planet goes backward.

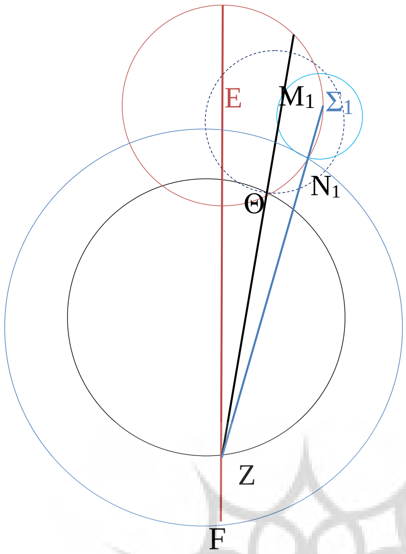


Figure 17: The planet proceeds direct motion on the arc *ΘN₁*.

In which arc the planet goes indirect?

Let $\Sigma_2 N_2$ be a radius of the second epicycle, and $N_2 Z$ be a radius of the parallel circle at N_2. So, $N_2 Z =$ radius of the parallel through N_2, $M_1\Theta =$ radious of the epicycle through Θ: $\Sigma_2 N_2 \succ M_2 H\ [= M_1\Theta], N_2 Z \prec ZH\ [= Z\Theta]$.

$$\left(\omega_{center\ of\ the\ epicycle\quad N_2 z}\right)_{at\ N_2} \prec \left(\omega_{center\ of\ the\ epicycle\quad \Theta Z}\right)_{at\ \Theta}$$

at stationary points $\omega_{center\ of\ the\ epicycle} = \omega_{planet}$.

Also in N_2: $\left(\omega_{planet}\right)_{at\ N_2} \succ \left(\omega_{planet}\right)_{at\ \Theta}$ and

$$\left(\omega_{center\ of\ the\ epicycle\quad N_1 z}\right)_{at\ N_1} \succ \left(\omega_{center\ of\ the\ epicycle\quad \Theta Z}\right)_{at\ \Theta}$$

it means $\omega_{planet} \succ \omega_{center\ of\ the\ epicycle}$

therefore, the planet appears retrograde along the arc *ΘH*.

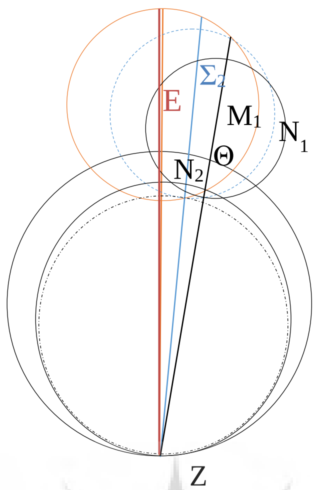


Figure 18. The planet goes reverse on the arc $N_2\Theta$

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

Appendix I

Arabic text

Masʾala fī al-Rujūʿ wa al-Istiqāma

مسألة في الرجوع والإستقامة

MS Nuruosmaniye 2971/18.

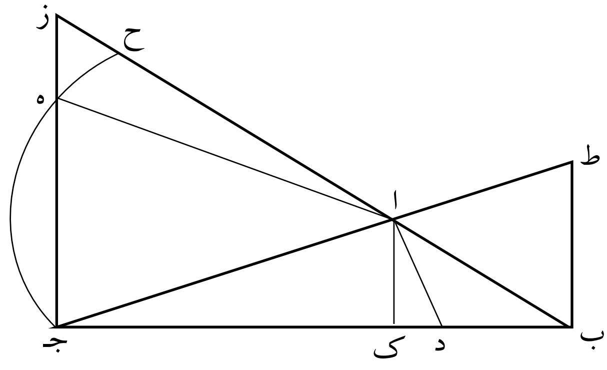
[96 r] مسألة من إملاء مولانا ملك الحكماء والمهندسين [و] المحقّقين مؤيّد الملّة والدين العُرضي في الرجوع والاستقامة فممهد لذلك مقدّمات أوليها لابلونيوس.

إذا كان في مثلث ضلع أطول وفصل منه مثل الأقصر فإن نسبة المفصول إلى ما بقى من الأطول أعظم نسبة الزاوية يوترها الضلع المفصول مثله إلى الزاوية الّتّي يوترها الضلع الثالث، فليكن المثلث ابجـ، وبجـ أطول من جـا وليفصل من بجـ، جـد مثل اجـ وليوصل اد. **فأقول** إن نسبة جـد إلى دب أعظم من نسبة زاوية ابجـ إلى زاوية اجـب.

برهانه: لنخرج من نقطة جـ خطّ جـز يوازى خطّ اد ونخرج خطّي با، جـز إلى أن يلتقا على نقطة ز ونخرج من نقطة ا خطّ اه يوازي خطّ بجـ فيكون سطح اح فإذا جعلنا نقطة ا مركزا، فأدرنا عليه ببعد اجـ قوسا مرّ بنقطة ه ويقطع خطّ از على ح لتساوي خطّي اه، اجـ. يكون زاوية اهز منفرجة، فلأن قطاع اهح أصغر من مثلث ازه وقطاع اهجـ أعظم من مثلث اهجـ، فنسبة مثلث ازه إلى مثلث اهجـ أعظم من نسبة قطاع احه إلى قطاع اهجـ ونسبة مثلث ازه إلى مثلث اهجـ كنسبة خطّ زه إلى خطّ جـ[ه] أي نسبة زا إلى اب أي نسبة جـد إلى دب فنسبة جـد إلى دب أعظم من نسبة قطاع اجـه إلى قطاع اهح أي قوس زه[1] إلى هجـ أي زواية زاه[2] إلى زاوية هاجـ أي زاوية ابجـ إلى زاوية اجـب، فنسبة جـد إلى دب أعظم من نسبة زاوية ابجـ إلى زاوية اجـب وذلك ما أردنا.

پرتال جامع علوم انسانی

١. زه
٢. جـ ه ا



شکل ۱

مقدّمة: وإذا كانت نسبة إحدى الزاويتين إلى الأُخرى معلومة أمكننا أن نقسمَ الضلع الّذي عليه الزاويتان على نسبتهما، فليكن المثلث ابجـ وبجـ أعظم من اجـ ونفصل جـد مثل اجـ ونخرج اط[۱] على استقامة ونجعل نسبة اجـ إلى اط كنسبة زاوية ابجـ إلى زاوية اجـب ونصل طب ونخرج من نقطة ا خطّ اک يوازي طب ويبّن أن نقطة[۲] ک يقع على خطّ جـد. فيكون نسبة جـا إلى ط[ا] كنسبة جـک إلى کب أي كنسبة [v 96] زاوية ابجـ إلى زاوية اجـب وذلک ما أردناه.

مقدمة ثانية: كلّ دائرة تخرج إليها من نقطة خارجة عنها خطوط يقطعها، فإن نسبة[۳] ما تقع بين النقطة ومحيط الدائرة من تلک الخطوط، كلّ واحد إلى نصف ما تقع منه داخل الدائرة متفاوتة وأعظمها[۴] نسبة الخطّ الّذي يجوز على المركز وما قرب إليه أعظم[۵] نسبة ممّا بعد عنه. فليكن الدائرة ابجـ على مركز د ولنخرج إليها من نقطة ه، [ه]زدا وهحب وهطجـ يقطعها وينصف بح على ک و جـط على ل. **فأقول** إن نسبة ها إلى اد أعظم[۶] من نسبة هجـ إلى جـل.

۱. اجـ
۲. يقطعه
۳. نسبت
۴. أصغرها
۵. أصغر
۶. أصغر

برهان ذلک: فلأن نسبة زد إلی دا کنسبة حک إلی کب. یکون نسبة ەد إلی دا أعظم[١] من نسبة ەک إلی کب وبالترکیب یکون نسبة ەا إلی اد أعظم[٢] من نسبة ەب إلی بک وأیضا نسبة حک إلی کب کنسبة طل إلی لجـ فیکون نسبة ەک إلی کب أعظم[٣] من نسبة ەل إلی لجـ وبالترکیب یکون نسبة ەب إلی بک أعظم[۴] من نسبة ەجـ إلی جـل [فیکون نسبة ەا إلی اد أعظم من نسبة ەجـ إلی جـل وذلک ما أردناه بنین].

وأیضا **فإنّا نقول** إن نسبة ەز إلی زد أصغر من نسبة ەح إلی حک ونسبة ەح إلی حک أصغر من نسبة ەط إلی طل.

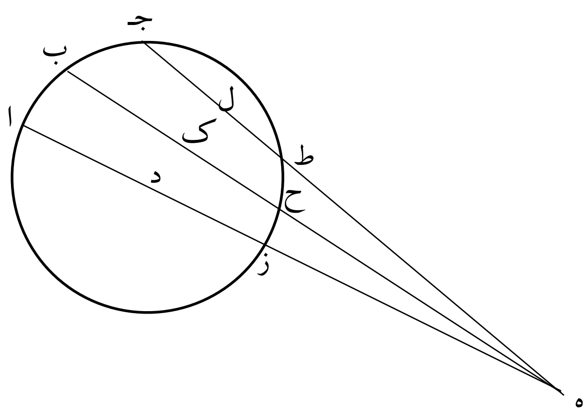
برهانه: إنّ زد أعظم من[۵] حک وأیضا حک أعظم من طل وەح أصغر من ەط، فنسبة ەح إلی حک أصغر من نسبة ەط إلی طل.

ونبیّن بعد العکس من هذا، إنّ نسبة دز إلی زە أعظم من نسبة حک إلی حە، ونسبة طل إلی طە أصغر من نسبة کح إلی حە وکذلک یکون نسبة ەب إلی بک أصغر[۶] من نسبة ەا إلی اد وأعظم[٧] من نسبة ەجـ إلی جـل، وکذلک حال کلّ خطّ یتوسطّ خطّین وعکس ذلک بیّن. أعني یکون نسبة دا إلی اە أعظم من نسبة بک إلی بە ونسبة بـ-ک إلی بە أعظم من نسبة جـل إلی جـە[٨]. ویکون نسبة بک إلی بە أعظم من نسبة جـل إلی جـە[٩] وأصغر من نسبة دا إلی اە وقس علیه.

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

---

١. أصغر
٢. أصغر
٣. أصغر
۴. أصغر
۵. + نسبة ە ح إلی
۶. أعظم
٧. أصغر
٨. ا ە
٩. ل جـ



شکل ٢

نريد أن نبيّن ما يعرض للكواكب في مسيرها عند مركز العالم بسبب حركاتها على محيطين تداويرها.

فنقول إن منطقة التدوير إذا كانت في سطح البروج أو في سطح مائل عن[١] [97 r] البروج فلابدّ أن يكون حركة الكوكب في إحدى القوسين اللتين نجدهما الخطّان المخرجان من مركز العالم المماّسان لفلك التدوير موافقة لحركة مركز التدوير بالحامل، وفي القوس الأُخرى متخالفة لها، فتبيّن أحوال الكواكب في مسيراتها في هاتين القوسين عند مركز العالم. فنقول إنّه يعرض للكواكب عند كونه عند نقطتي المماّسة أن ترى متحركة في البروج بحركة مركز التدوير فقط ويسمّى هذه الحركة بالوسطى. فإذا كانت حركة مركز التدوير إلى التوالي وكانت حركة الكوكب في القوس السفلي من التدوير إلى خلاف التوالي ولم يكن له وقوف، فحركته في جميع هذه القوس يكون منقصّة من حركة مركز التدوير ويقال له في هذه الحالة مُبطئ السير وأسر ما يكون بطؤه عند حضيض تدويره ويكون حركته في القوس العليا يزيد في حركته فترى مسرّعاً وأسرع ما يكون حركته عند ذروة التدوير وإن كان يسير في القوس العليا إلى خلاف التوالي من غير رجوع فالأمر بالعكس ممّا ذكر. وإن كان له رجوع في إحدى القوسين فسيكون له بطؤ في حركته يبتعد وقوف، يتلوه رجوع، بعقبه وقوف بأن، يتبّع ذلک استقامة.

---

١. + البروج

ولنذكر الآن الامور الّتي إذا وجدت خصلت للكواكب هذه الأحوال.

وذلک أنّه متى أخرج من مركز البروج خطّ ما يقطع التدوير فكان نسبة نصف ما ينفصل منه في التدوير إلى ما بين مركز العالم ومركز الكوكب كنسبة حركة مركز التدوير إلى حركة الكوكب على التدوير المختلفي جهتي الحركة، فإن الكوكب حينئذ ترى واقعاً. فإن مرّ هذا الخطّ الواقع للتدوير بمركز التدوير كان للكوكب وقوف واحد إمّا في الذورة وإمّا في الحضيض في كلّ دورة من دوران التدوير. وإن لم يمّر الخطّ بمركز التدوير وجد للكوكب وقوفان يتوسطها قوس رجوع وبيان ذلک أن يتوّهم دائرة يكون قطرها الوتر الواقع في فلک التدوير وتسمّيها التدوير الثاني ودائرة نصف قطرها ما بين مركز البروج ومركز الكوكب حيث كان وتسمّيها الموازية أي موازية لحامل التدوير.

فنقول إنّه متى كانت نسبة قطر أحد التدويرين إلى نصف قطر أحد الدوائر الموازية المارّة محيطها بطرف قطر التدوير كنسبة حركة المركز إلى حركة الكوكب فإنّ الكوكب [97 v] واقعا. وعلّة ذلک أن هذه الأقدار هي تكافان نسبتها حصل الوقوف، أعني متى كانت نسبة نقل[١] الكوكب بحركة المركز إلى نقله[٢] على محيط أحد التدويرين كنسبة نصف ما وقع في فلک التدوير من الخطّ المخرج إليه من مركز العالم إلى الخطّ الّذّي بين مركز العالم ومركز الكوكب، وجد الوقوف عند التكافؤ بين قطري هاتين الدائرتين والحركتان ونتبيّن لک ممّا **بقوله**، أن الرجوع إن كان في أسافل التدوير فإن ذلک يمكن وجوده مع كون حركة الخاصّة، أسرع أو أبطاء أو مساوية لحركة المركز وإمّا الرجوع إن كان في القوس العليا فلا يمكن إلّا وإن يكون الخاصّة أسرع من الوسط فقط.

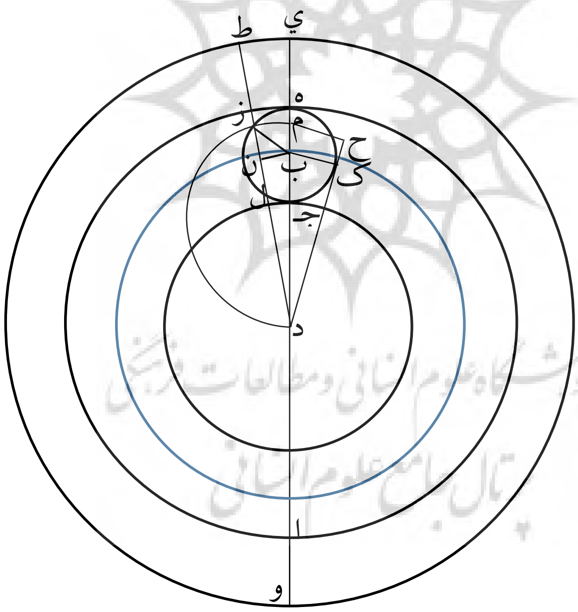
وعلّة ذلک إن نقل[٣] الكوكب بحركة المركز يكون قوساً من دائرة، يكون نصف قطرها هو بعد ما بين مركز العالم ومركز الكوكب وهذه الدائرة متى كان الرجوع للكوكب في أعالي التدوير، يكون أعظم من الفلک الحامل فهي أعظم كثيرا من التدوير، فالأجزاء الّتي بها نقل[٤] الكوكب إلى التوالي أعظم من أجزاء التدوير الّتي بها ينتقل الكوكب إلى خلاف التوالي فلذلک ينبغی أن يكون الأجزاء الّتي يقطعها الكوكب من التدوير في الزمان المشترک أكثر عدداً من الأجزاء الّتي يقطعها المركز

١. نقله
٢. نقليه
٣. نقله
٤. نقله

يجب [أن] يزيد عليها في المقدار لتعادل كثرة أجزاء التدوير وإن صغر بأجزاء الموازية مع قلتها، وإن عظمت أو يزيد عليها ليمكن أن ترى واقفا أو راجعا. فلذلک شرطنا أن يكون الخاصّة أسرع من المركز فقط.

فنمثل مثالا للحالة الّتي يكون مسير الكوكب فبها في أعالي التدوير إلى خلاف التوالي فليكن الحامل الموافق المركز دائرة اب على مركز د وقطر ادب والتدوير زجـ على مركز ب والموازية هو والبروج يط ونخرج دب إلى ه ثمّ و وليكن التوالي بين ي إلى ط وحركة الكوكب في قوس زه على خلاف التوالي.

فنقول أنّه متى كانت نسبة حركة الكوكب إلى حركة المركز كنسبة ده إلى هب فإن الكوكب يكون واقفاً عند نقطة ه أي الذروة و **لا** رجوع وذلک للتكافؤ بين المقادير الأربعة أعني حركتي الكوكب والمركز أعني زاويتي مسيريمها ونصفا قطري دائرتهما الموازية والتدوير وإن كانت نسبة خطّ ده إلى هب أصغر من نسبة حركة[1] [98 r] الكوكب إلى حركة المركز فسيوجد له وقوفان يتوسطها قوس رجوع.



شكل ٣

١. +الكوكب

برهان ذلک: أن نجعل نسبة حركة الكوكب إلى حركة المركز العدد، نتبّين كنسبة خطّ دح إلى حک ونجعل دح يحيط مع دب بزاوية حادّة وهي بدح ونصل خطّ ک-ب ونخرج من نقطة ح خطّ حم يوازي کب و يلقى خطّ به على م وبيّن أن نقطة م يقع فيمابين ب وه، وندير على خطّ دم نصف دائرة دزم وليقطع التدوير على ز ونصل خطّ دز يقطع التدوير على لز ونبعده إلى ط من البروج ونصل خطوط زم، زب ويخرج عمود بن على وتر زل. فلأن نسبة دم إلى مب أعني حركة الكوكب إلى حركة المركز كنسبة دز إلى زن وذلک لتشابه، مثلثي دمز، دبن. فيكون للكوكب وقوف عند نقطة ز وذلک لتكافؤ الأربعة المقادير أعني حركتي الكوكب والمركز أي زاويتي مسيريها ونصفي قطري جداريهما أعني الموازية والتدوير الثاني وذلک أن نسبة حركة الكوكب أی زاوية مبز إلى حركة المركز أی زاوية مدز كنسبة خطّ دز إلى زن.

وذلک بيّن من المقدّمات الّتي قدّمنا ففي الزمان الّذي ينتقل فيه الكوكب بحركة المركز إلى التوالي قوسا، ما ينتقل الكوكب بحركة الخاصّة إلى خلاف التوالي قوسا مساوية لتلک في الرؤية فترى الكوكب على خطّ دزط كما كان ترى أوّلًا ومن أجل أن تكافؤ الحركتين إنّمّا يكون في أن لا شعور به، لكن لأجل قلّة التفاوت فيما قيل تكافؤ وبعده لاتدرک الحس زيادة إحدى الحركتين المختلفين على الاخرى لقلّة التفاوت بينهما فذلک يصير الزمان الّذّي يخفى فيه الحركة كلّه زمان وقوف عند الحسّ.

وأمّا متى كانت حركة الكوكب في أسافل التدوير إلى خلاف التوالي وأردنا معرفة مواضع الوقوف والرجوع وشروط ذلک فنقول أنّ في [98 v] هذه الحال يمكن أن يكون للكوكب وقوف ورجوع مع كون حركة الكوكب أسرع أو أبطأ أو مساوية لحركة المركز.

فأمّا متى كانت حركة الكوكب أسرع من حركة المركز فإن كانت نسبة حركة المركز إلى حركة الكوكب كنسبة نصف قطر التدوير إلى الخطّ الواصل بين موضع البصر وحضيض التدوير فإنّ الكوكب ترى واقفاً عند نقطة الحضيض من التدوير وذلک لتكافؤ الحركتين ونصفي قطر التدوير والموازية في هذا البعد خاصّة ولا رجوع للكوكب فإن كانت نسبة نصف قطر التدوير إلى الخطّ الواصل بين البصر وحضيض التدوير أصغر من نسبة حركة المركز إلى حركة الكوكب فإنّه ترى للكوكب وقوفان بينهما قوس رجوع وسنبيّن ذلک.

وأمّا إذا كانت حركة المركز مساوية لحركة الكوكب فينبغى أن لايكون نصف قطر التدوير أصغر من نصف الخطّ الواصل بين البصر ومركز التدوير فإن كان مساويا له كان

الوقوف عند نقطة الحضيض ولارجوع وذلک لتکافؤ قطري التدوير والموازية في هذا الموضع فإمّا ما قبله وبعده فإنّ الموازية يصير أعظم من التدوير. فيکون أجزاء مسيرها الاستقامة أعظم من أجزاء حرکة الرجوع فکذلک ترى الکواکب مستقيم السير. وأمّا إذا کان نصف قطر التدوير أعظم من نصف البعد بين مرکز التدوير والبصر والحرکتان متساويان فإنّه ترى للکوکب وقوفا يتوسطها قوس رجوع وسنبيّن ذلک.

وأمّا إن کانت حرکة المرکز أسرع من حرکة الکوکب فينبغي أن يکون نصف قطر التدوير أعظم من نصف الخطّ الّذي بين البصر ومرکز التدوير ليکون فلک التدوير أعظم من الموازية فإن کانت نسبة نصف قطر التدوير إلى ما بين البصر وحضيض التدوير کنسبة حرکة المرکز إلى حرکة الکوکب فإنّه ترى الکوکب واقفا عند نقطة الحضيض للتکافؤ ولا رجوع له. فإن کانت نسبة نصف قطر التدوير إلى ما بين البصر والحضيض أعظم من نسبة حرکة المرکز إلى حرکة الکوکب فإنّه ترى للکوکب وقوفان بينهما قوس رجوع.

ونمثل مثالا تبيّن به ما قدّمنا ذکره، ليکن فلک تدوير مرکزه نقطة ه وقطر المار بمرکز العالم إذا أبعد اهجـز وز مرکز العالم[1] [99 r] ونخرج هذا الخطّ إلى و ونقصد أن نبيّن نقطتي الوقوف من التدوير وقسي الرجوع والاستقامة ولأنّه متى کان للکوکب رجوع فلابدّ أن نسبة نصف قطر تدويره إلى مابين البصر وحضيض تدويره أعظم من نسبة حرکة المرکز إلى حرکة الکوکب. فليکن نسبة خطّ هجـ أى نصف التدوير إلى جـز أعظم من نسبة حرکة المرکز إلى حرکة الکوکب فنجعل نسبة هجـ إلى جـز کنسبة الحرکة إلى الحرکة ولأن نسبة هجـ إلى جـز أعظم من نسبة هجـ إلى جـو وبالترکيب يکون نسبة هز إلى زجـ أعظم من نسبة هو إلى وجـ فليکن نسبة هز إلى زک کنسبة هو إلى وجـ وبالتفصيل يکون نسبة هک إلى زک کنسبة هجـ إلى جـو، أعني کنسبة حرکة المرکز إلى حرکة الکوکب.

وإذا قسمنا خطّ زک بنصفين على ل وأدرنا على ل ببعد لز دائرة يقطع التدور على نقطتي ط،ح. **فأقول** إنّ نقطتي ط، ح موضعا وقوف الکوکب وإن قوس طجـح قوس رجوع وقوس حاط قوس استقامة.

برهان ذلک: إنا نصل خطّي زطد، زحي يقطعان التدوير ونصل خطّي کط، کح و ننصف وتري طد، حي على م ونصل هم، هم ولأنّ کلّ واحدة من زاويتي زطک، زمه

---

۱. + و

وكذلک زاويتي همز، کحز، فإن يكون خطّ کط موازيا لخطّ هم فنسبة مط إلى طز كنسبة هک إلى کز فنسبة مط إلى طز كنسبة حركة المركز أعني زاوية جزط إلى حركة الكواكب أعني[1] زاوية جهط وكذلک يكون نسبة هج إلى جز فقد تبيّن.

إنّه متى تكافان الحركتان ونصفا قطري الدائرتين أعني التدوير الثاني الّذّي نصف قطره طم والموازية الّتّي نصف قطرها طز التقى نصفي قطري التدوير والموازية على الفصل المشترک بينهما من محيط التدوير على نقطة ط فلذلک ترى الكوكب عند نقطة ط واقعاً وكذلک ترى عند نقطة ح. **فأقول** أن مسير الكوكب عن جنبتى كلّ واحدة من نقطتي ط و ح ترى مخالفا مسيرة في الجهة الاخرى.

فنفرض قوس طن ممّا يلى د فنقول أن مسيره في طن ترى على التوالي.

برهان ذلک: أنّ نصل خطّ زن ونبعده فإن ماسّ للتدوير ولم يقطعه فمّر المسير[2] حركة الكوكب يكون على توالي البروج لأن نقطة التماس موضع [99 v] الحركة الوسطى ولابدّ أن يكون بتحليل بين المسير الوسط والوقوف بطؤ المسير أعني تناقص الحركة المستوية إلى التوالي فيكون مستقيم السير وإن قطع خطّ زن التدوير وأبعدناه إلى نقطة ع من المحيط وينصف نع على س ونصل هن فيكون لما تبيّن من المقدمّة نسبة سن إلى نز أصغر من نسبة مط إلى طز المساوية كنسبة حركة المركز إلى حركة الكوكب أى زاوية جزن إلى زاوية جهن، فلذلک يقطع المركز حين تقطع الكوكب زاوية جهن زاوية هي أعظم من زاوية جزن، فنرى مسيري الكوكب إلى توالي البروج لأن المركز ينقله إلى التوالي زاوية أعظم من زاوية جزن، الّتّي نقله التدوير إلى خلاف التوالي.

وأمّا إنْ نعلّمت نقطة ن على قوس حط، فأقول أن مسير الكوكب ترى إلى خلاف التوالي.

برهانه: إن نصل خطّ زن ونبعده يقطع التدوير على ع ونقسم بربع بنصفين على س ونصل خطّ هن فمن البيّن ممّا قدّمناه أن نسبة نس إلى نز أعظم من نسبة مح إلى حز أي حركة المركز إلى حركة الكوكب وكذلک يكون نسبة زاوية جزن أي حركة المركز إلى زاوية جهن فيكون الزواية الّتّي تقطعها الكوكب في الزمان الّذّي قطع فيه المركز بزاوية جزن وإذا قطع زاوية أعظم من زاوية جهن أو ترى عند مركز ز زاوية أعظم من زاوية جزن فترى سائرا إلى خلاف التوالي **فيقال** إنّه راجع.

---

١. إلى
٢. + ان

وقد نبيّن بوجه آخر وذلك أن متى فرضنا نقطة ن على قوس طد كانت نسبة خطّ سن إلى ن و بالمقدّمة أصغر من نسبة خطّ مط إلى طز أي حركة المركز إلى حركة الكوكب وخطّ نس هو نصف قطر التدوير الّذي سمّيناه الثاني و نو[1] هو نصف قطر الدائرة المرسومة على مركز و[2] وهي الّتي سمّيناها بالموازية. فإذا حركة المركز عند نقطة ن من موازية نو[3] أعظم من حركته عند نقطة ط من موازية طز وقد تكافان الحركتان عندها فحركة المركز عند نقطة يفضل على حركة الكوكب عند نقطة ط فيفضل عليها عند نقطة ن بكثير لأن نصف قطر يدور محيطة عند ط هو مط وهو أعظم من نصف قطر تدوير محطية عند نقطة ن أي نس فنرى الكوكب في قوس طن [4] [100 r] مستقيم السير، لأنّ متى فرضنا نقطة ما على قوس طن كانت حالها كذلک وأمّا متى كان وضع نقطة ن على قوس طجـح على فالأمر يكون بالعكس.

وترى مسير الكوكب في أي قوس فرضت إلى خلاف التوالي.

برهانه: ولأن نس أعني نصف قطر التدوير الثاني ونز نصف قطر الموازية في هذا الموضع ونس أعظم من مح ونز أصغر من زح فإذا حركة المركز عند نقطة ن على موازية نصف قطرها نز وهو أصغر من طز الّذي هو نصّف قطر الموازية المّارة بنقطة ط ونس وهو نصف قطر التدوير الثاني المّار محيطة بنقطة ن أعظم من نصف قطر التدوير المّار بنقطة ط الّذي نصف قطره مط و قد تبّين وإنّ الحركتين تكافاتا عند نقطة ط وأمّا عند ن فحركة المركز من دائرة أصغر من حركته عند نقطة ط وأمّا حركة الكوكب عند نقطة ط[5] من الدائرة الّتي تتحرک عليها عند نقطة ن فيفضل حركة الكوكب عند نقطة ن على حركته عند نقطة ط وينقص حركة المركز عند نقطة ن عن حركته عند نقطة ط فيفضل حركة الكوكب إلى خلاف التوالي على حركة المركز إلى التوالي فترى الكوكب متحركا إلى خلاف التوالي وهو المسمّى بالرجوع وكذلک يكون حالة في كلّ قوس يفرض من قوس طح وذلک ما أردنا بيانه.

---

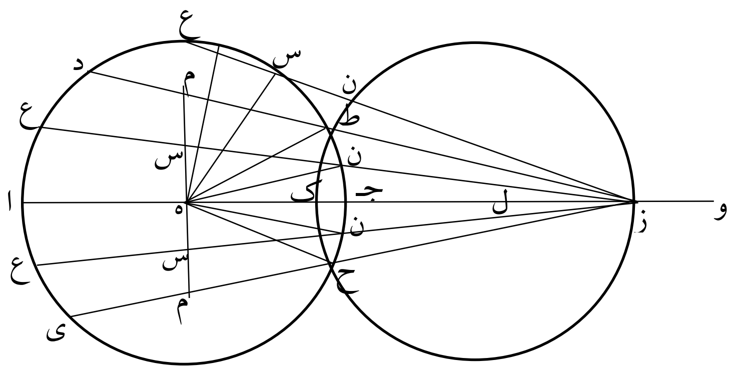
۱. نز

۲. ز

۳. نز

۴. +مستقيم.

۵. + فمن دائرة أصغر من حركته عند نقطة.



شکل ۴

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

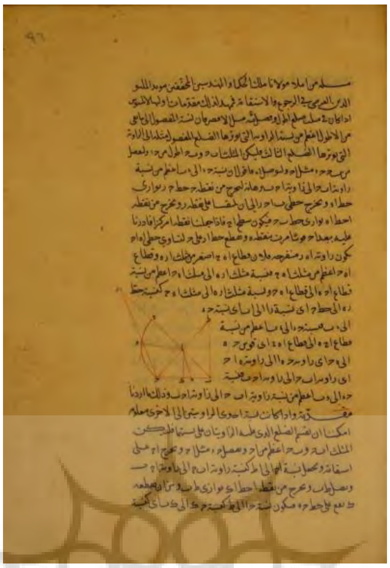


Figure 19. First Page of MS Nuruosmaniye 2971/18.

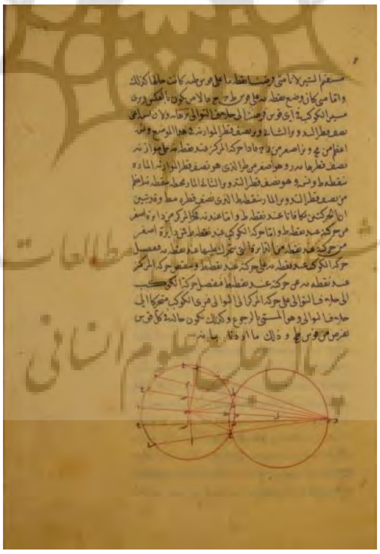


Figure 20. Last Page of MS Nuruosmaniye 2971/18.

Appendix II

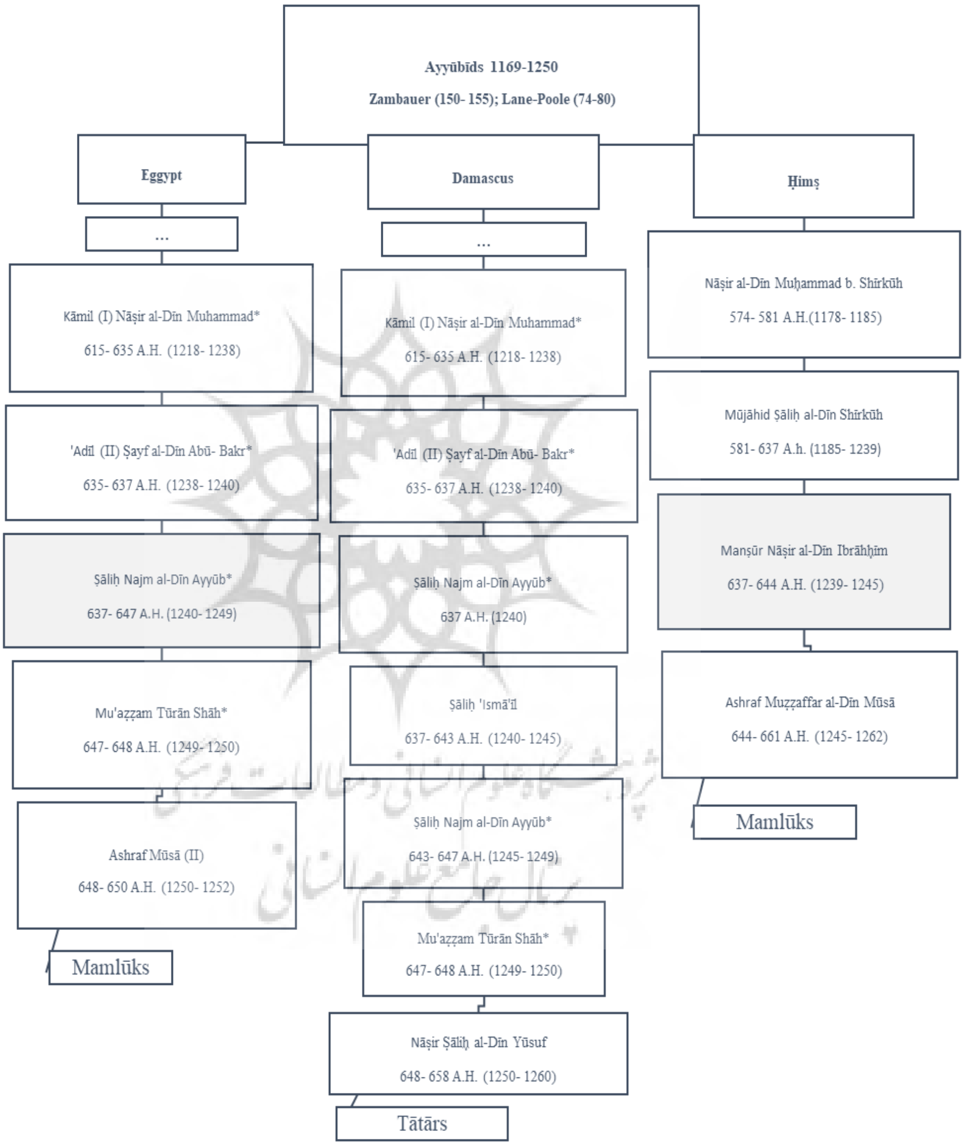
A glance at the life and works of ʿUrḍī's Biography

Mu'ayyad al Dīn al ʿUrḍī al Dimashqī 11th astronomer, engineer, instrument design- maker was one of the invited scientists to Maragha for founding the new observatory. Before arrival to Maragha he had been teaching at Damascus. Abū al-Faraj al-Quff (1233-1286) physician and geometer, had been one of 'Urḍī pupils, learning Euclid's *Element*. After preliminary study in medicine, he went Damascus with his father, who had transferred to Damascus (Ibn Abī Usaybi'a, 768). However, we know nothing about ʿUrḍī's other students there is a commendations of his teaching at the beginning of a copy of *Fī Istikhrāj mā bayn markazī al-Shams wa Mawẓiʿ ʾAwjihā*. It says he is master of the engineers and lord of the teachers " ملک المهندسين، رئيس أرباب التعاليم" (Nuruosmaniye, fol. 94r); and also there is another one in a copy of *Risāla fī al-Kayfīyyat al-ʾArṣād* (Library of Parliament 4345, fol. 1v) "ملک الحکماء والمهندسين استاد أهل التعاليم".

'Urḍī was an experienced instruments maker, fabricating some devices at Damascus or probably Ḥimṣ before starting his work in Maragha observatory. As it has expressed in *Risāla fī al-Kayfīyyat al-ʾArṣād* (fol. 23 v) he in 650/ 1252, presented an instrument to physician al-Lubūdī who was vizier of the governor of Ḥimṣ, Manṣūr (see table 1). Nevertheless, there is an ambiguity here. Najm al-Dīn al-Lubūdī was at the service of Manṣūr Nāṣir al-Dīn Ibrāhḥīm and accompanied him everywhere, after his death (1245) al-Lubūdī went to Egypt, for serving Ṣāliḥ Najm al-Dīn Ayyūb then get appointed to the Alexandria bureau until the death of Ṣāliḥ Najm al-Dīn Ayyūb (Ibn Abī Usaybiʿa, 662). Then al-Lubūdī went for Levant bureau (Ibid, 663). Saliba has implied if Manṣūr was a title for the ruler, in 1252 the ruler of Ḥimṣ was Ashraf Muẓẓaffar al-Dīn Mūsā while al-Lubūdī was in Egypt so, he has concluded that it was a misprint (2001- 29). However, according to Ibn Abī Usaybiʿa at this time al-Lubūdī was in the Levant. Broadly speaking, Levant could use for Damascus (Al-Qalqashandī, vol. 7, 201), moreover at 1252 ʿUrḍī and al-Lubūdī were in Damascus thus it would be another alternative,

ʿUrḍī presented to al-Lubūdī in 1252, the instrument had made earlier and revealing this event was likely for quoting his praise of ʿUrḍī's work.

Table 1



Works

1- *Fī ʾIstikhrāj mā bayn Markazī al-Shams wa Mawẓiʿ ʾAwjihā* (The Determination of the Solar Eccentricity and Apogee) translated and critically edited by Saliba (1985).

2- *Muqaddimah fi ʾIṣlāḥ Burhān al-Shakl al-Rābiʿ min Tāsiʿa al-Majisṭī* (Introduction on Explanation of the Demonstration of the Fourth Proposition of Ninth Book of Almagest) is a short treatise about Ptolemy's demonstration on Symmetries in Mercury's model (447- 448)[1].

3- *Risālat al-ʿAmal fī al-Kurat al-Kāmilah* (Treatise on the Use of the Armillary Sphere), mentioned by ʿUrdī in his *Kitāb al-Hayʾah* (274) and *Risāla fī al-Kayfīyyat al-ʾArṣād* (Library of Parliament 4345, fol. 2 r). Not a copy of it is known yet.

4- *Kitāb al-Hayʾah* (Book on Astronomy) edited by Saliba (1990). ʿUrdī in this book has presented his version of geocentric models.

5- *Risāla fi'l-kayfīyyat al-ʾArṣād* (Treatise on the quality of Observations) about astronomical instruments made by ʿUrḍī, particularly at Maragha observatory. Some parts of it were translated into German by Hugo Seeman (1928). A complete translation into English was made by Tekeli (1970).

Saliba (1990, 30) attributed a commentary on Kharaqī's *al-Tabṣira* under the name of *Mulḥaq ʿalā al-Tabṣira* to ʿUrḍī. However, there are two treatises in the manuscript no 955 of Escorial Arabic manuscripts catalog: the first one *al-Tabṣira* by Kharaqī and the other one *Taʿlīq ʿalā al-Tabṣira* by an anonymous author (Derenbourg & Renaud, 91-2). Since the name of ʿUrḍī is mentioned in the latter treatise (fol. 112 r), Saliba attributed it to ʿUrḍī'. Although at the last page of the first treatise (fol. 109 r), *al-Tabṣira*, there is a colophon and some supplementary sentences by the copyist saying he Abū Naṣr ibn Abī al-Surūr al- Mutaṭabbib, has written the scholium as well " علقه لنفسه أبونصر بن أبي السرور المتطبب عفا الله عنه".

---

[1] A critical edition will be published.

Table 2

Chronology

630 H. 1233/4 A.D.	Birth of Abū'l-Faraj al-Quff, a pupil of ʻUrdī (Ibn Abī Usaybiʻa, 767- 8). There is a possibility of delivering lectures after 1243. (when al-Quff came to his lectures, he would have been famous)
650 H. 1252 A.D.	Presentig "Alat al-Kāmilat" to al-Lubūdī (Risālat fi'l-kayfīyyat al-arṣād, Library of Parlimant 4345, fol. 22 v).
657 A.H. 1259 A.D.	Announcement of construction of Maragha Observatory (Faḍlullāh, vol 2, 1022-4; Hājī Khalifa, 562). Contributing Kitāb al-hay'ah (Saliba, 1990, 7) and Fī 'istikhrāj mā bayn markazī al-shams wa mawẓi awjuhā (Saliba, 1985, 206) before this date.
689 A.H. 1260 A.D.	Apparently arrival to Maragha and residency at 'Izzieh school (Ibn al-Fuwaṭī, vol. 1, 369-70, no 558).
660 A.H. 1261 A.D.	Making instruments in Maragha, [probably] two years before and after this year. "الالات الّتي عملنا بالرصد المحروس بمدينة مراغة ... ذلك في سنين منها ما هو قبل الستين وستمائة الهجرية ومنها ما هو بعدها."
664, Ramaḍān, 17 1252, November 21	Death (Faḍlullāh, vol. 2, 937)

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

References

Barbour, J. B. (2001). *The Discovery of Dynamics*. Oxford: Oxford university press.

Derenbourg, Hartwig. & Renaud, Henri Paul Joseph. (1641). *Les manuscrits arabes de l'Escurial*. Tome II, fasc. 3: Sciences exactes et sciences occultes. Paris: Geuthner.

De Jong, Teije. (2019). "A study of Babylonian planetary theory I". *The outer planets Archive for History of Exact Sciences*. 73:1–37.

———. (2019). "A study of Babylonian planetary theory II". *The outer planets Archive for History of Exact Sciences*. 73:309–333.

Faḍlullāh, Rashīd al-Dīn (1373/1994). *Jāmiʿ al-tawārīkh* (ed. Muhammad Raushan). Tehran: Alorz.

Hājī Khalifa. (1842). *Kaşf az-Zunūn* (Lexicon Bibliographicum et Encyclopaedicum, ed. Gustav Leberecht Flügel). Leipzig: Oriental translation fund of Great Britain & Ireland.

Heath, Thomas L. (1908). *The Thirteen Books of the Elements*, vol. 2: Books 3-9, Cambridge: the University Press.

Hunger, H. & Pingree, D. (1999). *Astral sciences in Mesopotamia*, Leiden; Boston: Brill

Ibn Abī Usaybiʻa. *'Uyūn ul-Anbāʾ fī Ṭabaqāt al-Aṭṭibbā* (ed. Nazar Riza). Beirut: Dar maktabat al- Hayat.

Ibn al-Fuwaṭī. (1374/ 1995). Majmaʿal-ādāb fī moʿjam al-alqābf (ed.n Muhammad Kazim). Tehran: Ministry of Culture and Islamic Guidance.

Al-Kharaqī, Bahāʾ al-Dīn. *Al-Tabṣirah*. Escorial: Ms. 955.

Lane-Poole, Stanley. (1894). *The Mohammedan dynasties: chronological and genealogical tables with historical introductions*. Westminster, A. Constable and company.

Abū Naṣr ibnlAbī al- Surūr al- Mutaṭṭabib, *Taʻlīq ʻalā al-Tabṣirah*. Escorial Ms. 955.

Al-Qalqashandi. *Ṣubḥ al- 'Aʻshā fī Ṣināʻat al-Inshā'*. Beirut:ḤDār al-Kutub al-ʻIlmiehr

Linton, C. M. (2007). *From Eudoxus to Einstein: a history of mathematical astronomy*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

Mas'ūdī, Sharaf Dīn. (2003)Ṣ *JahāneDānish* (ed. Djalil Akhavan Zandjani). Tehran: Miras Maktoob.

Neugebauer, O. (1954), "Babylonian Planetary Theory". *Proceedings of the American Philosophical Society*, vol. 98, no. 1, pp.60-89.

——— . (1975). *A history of ancient mathematical astronomy*, Berlin; New York: Springer-Verlag. vol. 1.

Pedersen, Olaf. (1974). *A survey of the Almagest*. New York, NY: Springer.

Ragep, Sally P. (2016). *Jaghmīnī's Mulakhkhaṣ: an Islamic introduction to Ptolemaic astronomy*. Springer International Publishing.

Saliba, George. (1985). "The Determination of the Solar Eccentricity and Apogee According to Muʾayyad al-Dīn al-ʻUrdī (d. 1266 A.D.)." *Zeitschrift für die Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften* 2: 47–67. (Reprinted in Saliba, *History of Arabic Astronomy*, pp. 187–207).

Steele1, J. M. & Meszaros, E. L. (2021). "A study of Babylonian records of planetary stations". *Archive for History of Exact Sciences*. https://doi.org/10.1007/s00407-021-00272-5.

Toomer, G. J. (1998). *Ptolemy's Almagest*. New Jersey: Princeton University Press.

Ṭūsī, Nsīr Dīn (1993). *Memoir on Astronomy (al-Tadhkira fī ʻilm al-hay'a)* (ed., F.J. Ragep). Springer-verlag.

ʻUrḍī, Muʾayyad al Dīn. *Fī ʾIstikhrāj mā bayn Markazī al-Shams wa Mawẓi ʾAwjuhā*. Nuruosmaniye, Ms.2971.

———. *Risālat fī al-kayfīyyat al-arṣād*. Library of Iran's Parlimant, Ms 4345/1.

———. (1990). *Kitāb al-hay'ah*. Edited by George Saliba. Bayrūt: Markaz Dirāsāt al-Waḥdah al-ʻArūīyah.

Zambaur, Eduard Karl Max. (1951). *Muʻjam al-ansāb wal- asrāt al-ḥākimat fī al-tārīkh al-islāmī*. Al-Qāhirah: Maṭba'at Jāmi'at Fu'ād al-Awwal.

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی