منطق‌پژوهی، پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
دوفصل‌نامهٔ علمی (مقالهٔ علمی ـ پژوهشی)، سال دهم، شمارهٔ دوم، پاییز و زمستان ۱۳۹۸، ۱۵–۳۶

ملاحظاتی در نظر ویلیامسن دربارهٔ تنش میان منطق غیرکلاسیک و کاربردپذیری ریاضیات

مسعود الوند*

مرتضی حاج حسینی**، **امیر احسان کرباسی زاده*****

چکیده

مشکلات منطق کلاسیک در توضیح مسائلی همچون پارادکسهای معنا شناختی، مسئله ابهام و پدیده‌های کوانتمی موجب شده تا منطقدانها در صدد صورتبندی منطقی غیرکلاسیک برآیند که اینگونه مسائل در آن برنخیزد. با این حال، رشد غیرقابل انکار علم ریاضی و نفوذ گسترده آن در سایر شاخه‌های علمی، اغلب منطقدانهای غیرکلاسیک را برآن داشته تا با جداکردن حوزه استدلالی ریاضیات از غیر ریاضی، بر پیروی استدلالهای ریاضیات از اصول منطق کلاسیک تاکید کنند. اما، ویلیامسن نشان می‌دهد که راهبرد جداسازی حوزه ریاضیات از غیر آن و پایبندی به منطق غیرکلاسیک در حوزه‌های غیرریاضی موجب اختلال در کاربردپذیری ریاضیات می‌شود و منطقدان غیر کلاسیک باید به فکر حل این مسئله باشد. در این نوشتار ضمن بیان استدلالهای ویلیامسن در تنش میان طرفداری از منطق غیرکلاسیک و کاربردپذیری ریاضیات و تاکید بر برخی از آنها، نشان می‌دهیم که برخلاف نظر ویلیامسن، فعالیت علمی مبتنی بر استنتاج قیاسی یکسره از منطق کلاسیک تبعیت نمی‌کند و بنابراین تنش مذکور گاهی فروکش می کند.

* دانشجوی دکتری منطق، دانشگاه اصفهان، alvandm@gmail.com
** دانشیار گروه فلسفه، دانشگاه اصفهان (نویسندهٔ مسئول)، mtzh.hosseini2006@yahoo.com
*** دانشیار گروه فلسفه، دانشگاه اصفهان، amir_karbasi@yahoo.com

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۱/۱۱، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۵/۲۳

کلیدواژه‌ها: مسئله ابهام، منطق غیرکلاسیک، کاربردپذیری ریاضیات، ویلیامسن، پارادکس مقدمه

۱. مقدمه

انگیزه‌های مختلفی موجب تجدیدنظر در منطق کلاسیک و ارائه منطقهای غیرکلاسیک شده است. پارادکسهای معناشناختی(semantical paradoxes)، پدیده‌های کوانتمی و مسئله ابهام(vagueness) از جمله علل تجدید نظر در منطق کلاسیک و صورتبندی منطقی است که مشکلات مذکور در آن منحل شوند. بدین طریق، برخی از منطقدانهای برجسته، همچون تیموتی ویلیامسن(Timothy Williamson)و گراهام پریست(Graham Priest)، برآن شده‌اند که تجدید نظر در نظریات منطقی و انتخاب نظریه برتر از همان قواعدی پیروی می‌کند که در سایر علوم از آنها تبعیت می‌شود. برای مثال، از نظر ویلیامسن در همه شاخه‌های علوم، گزینش معقول یک نظریه از بین سایر نظریات، فارغ از آنکه آن نظریه متصدی توضیح چه امری است، براساس روش‌شناسی استنتاج به بهترین تبیین (inference to the best explanation) یا نظریه‌ربایی(abduction) صورت می‌گیرد:

> گزینش نظریات علمی بطور وسیعی از روش‌شناسی نظریه‌ربایی تبعیت می‌کند. [...] مسلماً نظریه‌های علمی متناسب با میزان همسازیشان با شواهد مقایسه می‌شوند، ولی علاوه برآن، فضائلی همچون قوت(Strength)، سادگی(simplicity) ، زیبایی(Elegance) و قدرتِ وحدت بخشی(unification) نیز در این قیاس شریکند. بدین طریق ممکن است با مسامحه ازاستنتاج به بهترین تبیین سخن بگوییم، اگرچه در مورد قضایای منطقی بطور خاص، منظور از توضیح، توضیح علی نیست، بلکه هدف فرآیند وسیعتری است که عبارت از جمع‌آوردن اطلاعات متنوع زیر چتر تعمیمهای است که آن اطلاعات را به نحوی روشنگر وحدت می‌بخشند.([15]: p.14) .

بویژه آنکه، براساس روش‌شناسی فوق، رد یا پذیرش نظریات منطقی، دست کم در حوزه کاربردیشان، بیش از همه تابع سازگاری یا ناسازگاری با داده‌ها و شواهد پذیرفته شده است و از جمله مهمترین شواهدی که همواره نظریه‌پردازی منطقدانها را تحت‌تاثیر خود قرار داده است، استدلالهای ریاضیاتی است.

تنومند شدن درخت ریاضیات از یک سو و کاربرد آن در سایر شاخه‌های علمی از سوی دیگر، اغلب منطقدانان غیرکلاسیک را واداشته تا با احتیاط بیشتری با شواهد این

حوزه استدلالی برخورد کنند و علی‌رغم طرفداری از منطقی غیرکلاسیک، پیروی استدلالهای ریاضیاتی از منطق کلاسیک را تصدیق کنند. بجز منطقدانان شهودگرا که با حمایت از ریاضیات شهودگرایانه قصد درانداختن ریاضیاتی بدیل برای ریاضیات کلاسیک دارند، اغلب منطقدانان غیرکلاسیک از ریاضیات رایج حمایت می‌کنند و باوجود شکست برخی قضایا و قواعد منطق کلاسیک در زمینه‌های غیرریاضیاتی، صدق آنها در حوزه ریاضیات را به رسمیت می‌شناسند. برای مثال، هارتری فیلد(Hartry Field) باوجود ناکارآمدی اصل طرد شق ثالث در مواجهه با پارادکس خرمن معتقد است:

«احتمالاً طرد شق ثالث در سراسر ریاضیات، و درواقع هرکجا ابهام یا تعیین‌ناپذیری درکار نیست، برقرار است.» ([1]: p.101)

گذشته از این، برخی منطقدانان کلاسیک، همچون برجس(Burgess)، پا را از این هم فراتر نهاده و منطق غیرکلاسیک را از آن رو به نقد کشیده‌اند که در صورتبندی استدلالهای ریاضیات استاندارد ناتوان هستند:

> ... بدون تردید به اثبات رسیده است که استدلالهای ریاضیات استاندارد نمی‌تواند بطور[منطق] ربطی صورتبندی شود. با توجه به همه کارهای می‌یر(Meyer) ، به نظر می‌رسد که برای نیمی از مشهورترین قضایای نظریه اعداد مقدماتی(از جمله این قضیه که هر عدد طبیعی برابر است با مجموع مربعات دو عدد دیگر) هیچ اثبات قابل قبول ربطی نمی‌شناسیم....ابداعات می‌یر بطور غیرقابل انکاری هوشمندانه‌اند اما همان اندازه هوشمندی نشان می‌هد که ربط‌گرایی با فعالیت ریاضیات استاندارد مغایرت دارد. :[2]) 222-3)

در این حالت شاید یکی از آسان‌ترین راهها برای منطقدان غیرکلاسیک آن باشد که، همچون نظریه‌پردازان فیزیکِ نسبیت که مکانیک نیوتنی را در بعضی حالات تقریب خوبی برای بیان واقعیت می‌دانند، منطق کلاسیک را نه برای همه، بلکه برای برخی اهداف تقریب خوبی برآورد کند. برای مثال، برآورد کند که منطق کلاسیک در زمینه ریاضیات متداول به اندازه کافی خوب است ولی در مواجهه با پارادکس ابهام ناکام است؛ و در مقابل، منطق غیرکلاسیک را نه بعنوان تقریب خوبی در زمینه ریاضیات، ولی، مثلاً باوجود پارادکسهای استلزام در این منطق، آن را تقریب بهتری برای رابطه پیامد منطقی واقعی بداند.

به نظر می‌رسد که پیش‌فرض این رویکرد به نظریات منطقی آنستکه زمینه‌هایی که در آن به ریاضیات نیاز داریم جدا از زمینه‌هایی است که به منطق غیرکلاسیک متوسل

می‌شویم.اما از نظر ویلیامسن،این پیش‌فرض اگـر غیـرممکن نباشـد، قبـولش بسـیار مشـکل است([3]:20). برای مثال، از آنجا که مکانیک کوانتومی ریاضیات متداول را بطـور فراگیـر بـه کار می‌گیرد، منطقدانانی که در مواجهه با پدیـده‌هـای کـوانتمی منکـر قاعـده توزیـع‌پـذیری عطف می‌شوند و منطق کوانتمی را بعنوان بدیلی برای منطق کلاسیک معرفی می‌کننـد، بایـد ریاضیاتی مبتنی بر منطق کوانتمی بنا کنند تا نظریـه پـردازان فیزیـک کـوانتمی در محاسـبات خود بجای ریاضیات کلاسیک از آن استفاده کنند.

مسئله تنش میان منطقهای غیرکلاسیک و کاربردپذیری ریاضـیات تنهـا بـه اسـتفاده از آن در سایر شاخه‌های علمی محدود نمی‌شود و چنانکه ویلیامسن نشان می‌دهد، درمـورد دامنـه عمل قضـایا و قواعـد منطق(هـای غیرکلاسـیک)، جـدا دانسـتن حـوزه ریاضـیات از سـایر حوزه‌ها، کاربردپذیری آن در استفاده‌های روزمره را نیز دچار اختلال می‌کند. در ایـن نوشـتار برآنیم تا مسئله تنش میان طرفداری از منطق غیرکلاسیک و کاربردپـذیری ریاضـیات را بیـان کنیم و ببنیم تا چه اندازه استدلالهای ویلیامسن در نقد منطق غیرکلاسیک در قبال ایـن تـنش و حمایت از منطقی که ریاضیات برآن مبتنی است غیرقابل انکار است.

اما پیش از آن به یکی از خاستگاههای منطقهای غیرکلاسیک اشاره مـی‌کنـیم کـه بعضـی قضایا و قواعد منطق کلاسیک در آن نقض می‌شـود. در بخـش دوم از ایـن نوشـتار، مسـئله ابهام و بعضی صورتهای مختلف آن را بیان مـی‌کنـیم. بعـد از بیـان ایـن مسـئله وپاسـخهای غیرکلاسیک به آن است کـه اسـتدلالهای ویلیامسـن در مـورد لـوازم پایبنـدی بـه منطقهـای غیرکلاسیک در کاربردپذیری ریاضیات آشکارتر می‌شود. پس از بیـان نظـرات ویلیامسـن در بخش سوم، در بخش چهارم نگارنده ملاحظات خود درباره استدلالهای ویلیامسن را عرضـه می‌کند امـا روشـن اسـت کـه ابتنـاء اسـتدلالهای حـوزه ریاضـیات بـر منطـق کلاسـیک و کاربردپذیری آن، مسئله‌ای نیست که در بخش کوچکی از یک نوشتار مطرح و پاسـخ منطـق غیرکلاسیک به آن یکجا بیان شود.

۲. مسئله ابهام و بعضی راه‌حلهای غیرکلاسیک

محمول ›کودک بودن‹ در معنای زیست‌شناختی (و نه قانونی) آن را در نظر بگیریـد. فـرض کنید سالروز تولد چهارسالگی بیژن است و در این حالت بدون هـیچ تردیـدی او را کـودک میخوانیم؛ بنابراین جمله ›بیژن در صفر ثانیه بعد از تولد چهارسالگی کودک اسـت‹ ، کـه آن را با M_0 نشان می‌دهیم، جمله‌ای بوضوح صادق است. دراینصورت اگر M_0 صادق باشـد، در

یک ثانیه بعد از ساعت تولد چهار سالگی نیز بیژن کودک است و بنابراین جمله ‹بیژن یک ثانیه بعد از تولد چهارسالگی کودک است› ، که آن را با M_1 نشان می‌دهیم، نیز صادق است. با ادامه این زنجیره از استدلالها، جملاتی به شکل ‹بیژن n ثانیه بعد از تولد چهارسالگی کودک است› خواهیم داشت که همگی براساس صدق مقدمات و کاربرد قاعده وضع مقدم، صادق خواهند بود. از جمله، اگر n=946080000 باشد، جمله M_n بصورت ‹ بیژن ۹٤٦۰۸۰۰۰۰ثانیه بعد از تولد چهارسالگی کودک است› باید صادق باشد، درحالیکه زمان مذکور بیانگر ۲۹ سالگی بیژن است و M_n بوضوح کاذب است!

استدلال فوق معروف به پارادکس خرمن(sorites paradox) است که برای محمولهای مبهمی، همچون ‹کوچک بودن› ، ‹بزرگ بودن› ، ‹بلند قد بودن› ، ‹قرمز بودن› و.... ، که حد و مرز تعیین‌ناپذیری(indeterminable)دارند قابل بیان است.

بیان پارادکس خرمن بصورت فوق به شکل زنجیره‌ای از استنتاجهای حاصل از کاربرد قاعده وضع مقدم است که به شکل زیر نمایش داده می‌شود:

$$\cfrac{\cfrac{M_0 \qquad M_0 \rightarrow M_1}{M_1} \qquad M_1 \rightarrow M_2}{M_2}$$

$$\ddots$$

$$\cfrac{M_{k-1} \qquad M_{k-1} \rightarrow M_k}{M_k}$$

چنانکه ملاحظه می‌شود، صدق نتیجه M_i در بالا بطور زنجیروار از دو مقدمه بوضوح صادق، بدین صورت حاصل شده است که از $\rightarrow M_0$, $M_1 \vdash M_1 M_0$ و $\rightarrow M_1, M_2 \vdash M_2 M_1$بصورت زیر صدق$M_2$را نتیجه گرفته‌ایم:

$M1,$

$M1 \rightarrow M2$

$\vdash M2M0,$

$M0 \rightarrow$

تا در نهایت به صدق M_n حکم کرده‌ایم.

قاعده فوق بنام قاعده ساختاریِ(structural) برش(Cut) مطرح است که بصورت زیر بیـان می‌شود:

$$\text{if } \Gamma \Rightarrow \Delta, A \text{ and } A, \Pi \Rightarrow \Sigma \text{ then } \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma \qquad (۱)$$

در این حالت، با توجه به صدق غیرقابل تردید دو مقدمه اولیه، به نظر می‌رسـد کـه تنهـا دو راه برای جلوگیری از پارادکس خرمن فوق وجود دارد: ۱) نامعتبر دانسـتن قاعـده وضـع مقـدم، چنانکـه بیـل(JC Beal) مـی‌دانـد ([4]) و ۲) نـامعتبر شـمردن قاعـده بـرش، چنانکـه راپیلی(David Ripley)می‌شمرد ([5]).

با این همه، ابهام صرفاً مسئله‌ای در مورد محمولهای مبهم نیست، بلکـه درمـورد اسـامی نیز نوعی تعیین‌ناپذیری و ابهام وجود دارد که وارتزی(Achille C. Varzi) آن را به ترتیـب بـا استفاده از تمایز میان de re و de dicto بصورت زیر بیان می‌کند:

الف) ابهام وجودشناختی(ontological vagueness): مرجع [نامt] بگونه‌ای است که ***[دقیقـاً] مشخص نیست*** که چه تکه‌های خاصی از واقعیت، درون مرزهای آن قرار دارند.([6]:p.6)

ب) ابهام دلالت‌شناختی(semantical vagueness):[دقیقاً]مشخصنیست کـه چـه تکـه‌هـای خاصی از واقعیت درون مرزهای مرجع [نامt] قرار دارد.(همان)

در قرائت اول از ابهام، اسامی به ***اشیاء*** مبهم اشاره می‌کنند و اشیاء از رو مبهم‌اند که فاقـد مرزهای دقیق زمانی-مکانی هسـتند. بـرای مثـال، نـام ‹اورسـت› از آن رو مـبهم اسـت کـه مرزهای کوه اورست و غیرآن، بطور دقیق قابل تعیین نیست. درواقع، اگر بنابر ادعای فیزیـک کوانتمی هر جسم مادی را بصورت ابری از الکتـرون بـدانیم، درهـم آمیختگـی الکترونهـای تشکلیل دهنده اجسام مختلف مانع از تشخیص دقیق مرز میان آنها می‌شود. بنابراین، در ایـن حالت به نظر می‌رسد که صورت زیـر از اصـل طـرد شـق ثالـث بـرای اینهمـانی در منطـق کلاسیک نقض می‌شود:

$$AEMI \forall x \, \forall y \, (x = y \vee x \neq y)$$

در قرائت دوم، ابهام در بازنمایی نظام زبانی یا ابزار مفهومی ما نهفتـه اسـت نـه در شـیء بازنمایی شده. در این حالت، وقتی می‌گوییم که مرجع واژه‌ایی بطور دقیق تعیین نمی‌شود بـه این معنی است که واژه مذکور به شکلی مبهم شی‌ای را می‌نامـد نـه اینکـه شـیء مبهمـی را نامگذاری می‌کند. برای مثال، وقتی نام ‹اورست› را بکار می‌بریم دقیقاً معلـوم نمـی‌کنـیم کـه در حال اشاره به کدام قسمت از زمین هستیم و هرکدام از تکه‌های ظـاهراً متمـایز واقعیـت،

همچون دامنه کوه یا زمین مسطح، می‌توانند نامزد مدلول نام بکار رفته باشند. در این حالت نیز به نظر می‌رسد که صورت زیر از اصل طرد شق ثالث در منطق کلاسیک نقض می‌شود:

$EEMI\ \exists x\ (x = a \vee x \neq a)$

در هر دو برداشت فوق از ابهام، صورتهایی از اصل طرد شق ثالث نقض می‌شود و به نظر می‌رسد که، بجز قواعد وضع مقدم و برش، صدق یکی دیگر از اصول اساسی منطق کلاسیک در حیطه‌ای غیر از ریاضیات با شکست مواجه می‌شود. در این حالت نیز پیشنهاد منطقدان غیرکلاسیک معرفی منطقی است که طرد شق ثالث از جمله قضایای آن نبوده، بطور طبیعی پارادکسی ایجاد نخواهد شد.

نظام قوی کلینی(Kleene) ، K3، از جمله منطقهای سه ارزشی است که اصل طرد شق ثالث در آن برقرار نیست. زبان این منطق، در سطح جملات، همان زبان منطق کلاسیک است. با این حال، مجموعه ارزشهای ممکن برای یک جمله در دلالت‌شناسی آن بصورت $V=\{0,i,1\}$تعریف می‌شود که i نمایانگر ارزش جملاتی است که نه‌صادق‌اند و نه کاذب. مجموعه ارزشهایی که در استدلالهای معتبر این منطق حفظ می‌شود، $D \subseteq V$ ، عبارتست از $D=\{1\}$و از این رو اعتبار یک استدلال در این منطق، همچون منطق کلاسیک سنجیده می‌شود. براساس جداول ارزش ادات ربط فصل و نقض از جدولهای ارزش این منطق:

$f_\vee$	1	i	0
1	1	1	1
i	1	i	i
0	1	i	0

$f_\neg$	
1	0
i	i
0	1

در حالتی که ارزش p، i باشد، $p \vee \neg p$ ارزش 1 نخواهد داشت و بنابراین طرد شق ثالث از جمله قضایای K_3 نیست[۱].

۳. منطقهای غیرکلاسیک و کاربردپذیری ریاضیات

با وجود پاسخهای غیرکلاسیک به مسائلی همچون مسئله ابهام، منطقدانان غیرکلاسیک عموماً ابتناء استدلالهای ریاضی را بر منطق کلاسیک تصدیق می‌کنند و حوزه ریاضیات را از غیرِ آن جدا می‌کنند. جدا دانستن حوزه استدلالی ریاضیات در نظریه‌پردازی غیرکلاسیک

برای حوزه‌های غیرریاضیاتی، نگاهی است که بطور دقیق بوسیله جورتلند (Hjortland) تبیین شده است:

> اثباتهای ریاضی مملو از نمونه‌های اصول [منطق] کلاسیک است: کاربرد برهان خلف کلاسیک، دلیل شرطی، قیاس انفصالی، قانون جذب و غیره. با این حال، باید براین واقعیت تاکید شود که اینها *نمونه‌هایی* از اصول کلاسیک هستند. اثباتهای ریاضی متکی بر تعمیمهایی نیستند که بطور نامقید برقرار باشند[...] . آن اثباتها دست بالا متکی بر اصولی هستند که بطور محدود برای عالم سخن ریاضیات برقرارند و این امر مستلزم آن نیست که این اصول استدلالی بطور عام برقرارند. به بیان دیگر، فعالیت ریاضی سازگار با گامهای استدلالی است که اصول استدلالهای ریاضی نمونه‌های آنها هستند نه آنکه قابل تعمیم به دیگر عالم سخنها باشند. بطریق اولی، آن اصول ممکن است برای استدلالهای مجاز در ریاضیات بخوبی عمل کنند ولی برای نظریه‌پردازی برای صدق مناسب نباشند ([7]:p.22)

۱.۳ قضایای غیرکلاسیک

بطور کلی ویلیامسن برآن است که رویکرد جداسازی ریاضیات و غیر آن در نظرپردازی منطقی، به نادیده‌گرفتن توانایی کاربردپذیری ریاضیات منتهی می‌شود. برای مثال، درمورد *AEMI*، فرض کنید ساکنان غربی یک کوه آن را ‹اورست› و ساکنان شرقی آن را ‹چومولگما[۲]› می‌نامند. درصورتیکه متغیر xرا به شیء مدلول نام ‹اورست› و متغیر yرا به مدلول نام ‹چومولگما› نسبت دهیم، با توجه ابهام هستی‌شناختی در مورد شیء‌ای همچون کوه، فرمول آزاد $x = y$، و بنابراین $x = y \vee x \neq y$، نه صادق است و نه کاذب؛ و به طریق اولی تعمیم کلی *AEMI* نیز صادق نخواهد بود.

اما روشن است که *AEMI* جمله‌ای در زبان منطق محمولات مرتبه اول است که هیچ ثابت فردی یا محمول نامنطقی(non-logical)ندارد و بنابراین متعلق به زبان ریاضیات است؛ و دراینصورت با انکار *AEMI*، منکر قضیه‌ای از ریاضیات شده‌ایم. در این حالت پاسخ طرفداران جداسازی عالم سخن ریاضیات در رد قضایای منطق کلاسیک به این مسئله بسیار ساده است: قضایای منطق کلاسیک فقط زمانی قابل قبول هستند که محدود به ریاضیات محض و سورها مقید به اشیاء ریاضی محض شوند. برای مثال، فرض کنید که در حال سخن گفتن درباره شاخه‌ای از ریاضیات همچون نظریه مجموعه‌ها و بویژه مجموعه اعداد

طبیعی، هستیم. در این حال، اشیاء موضوع سخنمان محدود به مجموعه‌های محض می‌شوند: مجموعه‌هایی که اعضایشان مجموعه‌اند. برای مثال عدد طبیعی 0 بوسیله مجموعه تهی $\emptyset$ ، عدد 1 بصورت $\{\emptyset\}$ ، عدد 2 بصورت $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$ و ...تعریف می‌شود. بنابراین از آنجا که کوه اورست و چومولگما، مجموعه‌های تک عضوی، دو عضوی و غیرهِ از آنها، مجموعه‌هایی محض نیستند، اگرچه *AEMI* در مورد چنین اشیاء غیرریاضی کاذب است، در مورد اشیاء ریاضیاتی محض صادق باقی می‌ماند.

اما، به نظر ویلیامسون طرح مستثاء دانستن عالم سخن اشیاء ریاضی محض در بکار بستن قضایای منطقی، حتی کاربرد روزمره ریاضیات در شمارشهای معمولی را هم مختل می‌کند ([3]:p.4-5). برای مثال، این جمله را در نظر بگیرید که: اگر دقیقاً m سیب و n پرتقال داشته باشیم و هیچ سیبی، پرتقال نباشد (که نیست)، آنگاه m+n سیب و پرتقال داریم. بیان این جمله به زبان نظریه مجموعه‌ها آنست که برای هر مجموعه m عضوی A که همه عضوهایش سیب باشند و هر مجموعه n عضوی B که همه عضوهایش پرتقال باشند، اگر اشتراک A و B تهی باشد،مجموعه A اجتماع با B، m+n عضودارد. ملاحظه می‌شود که سورهای عمومی در جمله فوق بروی مجموعه‌هایی آمده‌اند که محض نیستند و اعضاء آنها را سیب و پرتقال تشکیل داده و بنابراین این قضیه را در مورد اشیاء مذکور نمی‌توان بکاربست.

در این حالت، شاید ساده‌ترین راه حل برای مسئله کاربرد ریاضیات آنستکه بگوییم هر نظامی از اشیاء که همه یا بعضی از آنها اشیاء ریاضی محض نباشند با نظامی از اشیاء ریاضیاتی محض همریخت(isomorph) است. براساس این دیدگاه، هر مجموعه از نامجموعه‌ها در تناظر یک به یک با مجموعه‌ای از مجموعه‌های محض است که خواص، روابط، یا عملگرهای تعریف شده روی مجموعه اول بروی خواص، روابط یا عملگرهای متناظر تعریف شده روی مجموعه دوم نگاشته می‌شود.

با این حال، از نظر ویلیامسن راه حل فوق درست از همان قیدی ضربه می‌خورد که طرفداران جداسازی عالم سخن ریاضیات در رد قوانین منطق کلاسیک در سر دارند([3]:p.5). وقتی می‌گوییم که هر مجموعه از نامجموعه‌ها در تناظر یک به یک با مجموعه‌ای از مجموعه‌های محض است، سور کلی روی اشیائی بسته شده که متعلق به مجموعه اشیاء ریاضیاتی محض نیستند! برای مثال، فرض کنید مجموعه {اورست و چومولگما} از نامجموعه‌ها در تناظر یک به یک با مجموعه X از مجموعه‌های محض

باشد. براساس ادعای طرفداران راهبرد جداسازی، نظریه مجموعه‌های محض ازقوانین منطق کلاسیک تبعیت می‌کند و بنابراین یا X حداکثر دو عضو یا حداقل دو عضو دارد. دراینصورت از آنجا که {اورست وچومولگما} در تناظر یک به یک با مجموعه X است، این مجموعه نیز یا حداکثر دو عضو دارد که دراین حالت جمله «کوه‌های اورست و چومولگما یکی هستند» صادق است، یا حداقل دو عضو دارد که بدین معنی است که جمله «کوه‌های اورست و چومولگما دو شیء متمایزند » برقرار است. حال آنکه پیشتر دیدیم که ابهام هستی شناختی شی‌ای همچون کوه، مانع از اسناد صدق و کذب به جملات اخیر می‌شود. بنابراین می‌توان دید که چگونه استدلال همریختی نیز با این فرض که طرد شق ثالث در عالم سخن اشیاء غیر ریاضیاتی کاذب است، مغایرت پیدا می‌کند.

ممکن است بگویید که استدلال فوق به معنای شکست ایده همریختی نیست و اگر قرار است که نظریه مجموعه‌ها مبنایی برای ریاضیاتی فراهم کند که در طبیعت و علوم اجتماعی کاربردپذیر باشد، باید نظریه‌ای غیر محض باشد و عالم سخن آن فقط شامل اشیاء ریاضیاتی محض نباشد؛ و برای مثال، می‌توانستیم بجای ZFC ، ZFCU را در نظر بگریم که ZFC همان نظریه مجموعه‌های زرملو-فرانکل بهمراه اصل انتخاب وU شامل اشیاء نامجموعه باشد. اما، دراینصورت نیز هر برداشتی از همریختی بین مجموعه‌های محض و غیرمحض، خود بخشی از نظریه مجموعه‌های نامحض ZFCU خواهد بود(نه نظریه مجموعه‌های محض ZFC) که بازهم مسئله تقید سورها به اشیاء ریاضیاتی محض رخ می‌نماید-[3]:pp5]) .6)

بنابراین، از نظر ویلیامسن، حتی اگر به نحوی راهی پیدا کنیم که هر مجموعه از نامجموعه‌ها در تناظر یک به یک با مجموعه‌ای از مجموعه‌های محض قرارگیرد، انتقال نتایج بدست آمده دربارهٔ مجموعه دوم به مجموعه اول براساس این راهبرد که قوانین منطق کلاسیک فقط به شرط تقید سورها به اشیاء ریاضیاتی محض برقرارند، ناممکن می‌شود؛ زیرا، راهبرد مذکور مستلزم آنستکه آنچه تحت آن قید برقرار است، بطور ساختاری نمایانگر چیزی نیست که بدون چنین قیدی برقرار است([3]:p.6).

آیا مشگل برسر *AEMI* است؟ اگر منطقدان غیرکلاسیک *AEMI* را بخاطر مشکوک بودن فرض ابهام در اینهمانی هستی‌شناختی، بپذیرد مشکلات فوق برنمی‌خیزد؟ فرض کنیم منطقدان غیرکلاسیک *AEMI* را قبول می‌کند. اکنون سؤال بعدی این است که آیا می‌توان قاعده کلاسیک تخصیص کلی(universal instantiation)را بر *AEMI* بکاربست؟ درصورت

بکاربردن این قاعده، می‌توان نمونه زیر از آن را بـرای نامهـای a (بعنـوان کوتهنوشـتی بـرای اورست) و b (کوتهنوشتی برای چومولگما) استنتاج کرد:

$$AEMIi \qquad a = b \lor a \neq b$$

اما، منطقدان غیرکلاسیکی که ابهام را نه مسئله‌ای هستی شـناختی، بلکـه دلالـت‌شـناختی می‌داند، بلافاصله *AEMIi* را رد مـی‌کنـد و بنـابراین در اینجـا نیـز بـه ناچـار کـاربرد قاعـده تخصیص کلی باید مقید به اسامی نامبهم شود. اما، از نظر ویلیامسـن، اگـر قاعـده تخصـیص کلی را محدود به اسامی نامبهم اشیاء ریاضیاتی محض کنیم و درنتیجـه سـورها را مقیـد بـه اشیاء ریاضیاتی محض کنیم، نامهای مبهم در سـایر شـاخه‌هـای علمـی، همچـون الکتـرون، پروتون و ...، عملاً بلااستفاده می‌شوند، زیرا از دسترس تعمیمهـای کلـی، همچـون قضـایای ریاضی، خارج می‌شوند([3]:p.7).

گذشته از این، ویلیامسن برآن است که مسئله کاربرد قاعده تخصیص کلی حتی بـا مقیـد کردن آن به اشیاء ریاضیاتی محض هم حل نمی‌شود(همان). بـرای مثـال، فـرض کنیـد 'a' کوتهنوشتی برای ' سرعت یک تکه ابر خاص برحسب کلیومتر بر ساعت' یا 'عـدد جـاری مولکولهای اکسیژن در اقیانوس آرام' یا 'بزرگترین عدد طبیعی کوچک' باشـد. هـر کـدام از این اوصاف بیانگر ویژگی‌های شی‌ای ریاضی هستند که بطور مبهم آن را وصـف مـی‌کننـد: وصف اول بخاطر تعیین‌ناپذیر بودن مقدار دقیق سرعت تکه ابر خاص و وجود خطا در هـر محاسبهٔ آن مبهم است؛ وصف دوم بخاطر تعیین‌ناپذیر بودن تعداد مولکولهـای اقیـانوس آرام در هـر لحظـه دلخـواه بواسـطه تبخیـر لحظـه‌ای آب آن و وصـف سـوم بـاوجود محمـول 'بزرگترین' مبهم است. در اینصورت برای مثال، جملـه ' سـرعت آن تکـه ابـر خـاص بـر حسب کیلومتر بر ساعت =۵۰ ' باوجود ابهـام سـمت راسـتِ علامـت ' = ' ، فاقـد ارزش صدق و کذب خواهد بود.

بنابراین، از نظر ویلیامسن برای گریز از چنین مسائلی کـه مبتلابـه ابهـام دلالـت‌شـناختی است، نه تنها باید سورها را مقید به به اشیاء ریاضیاتی محـض کنـیم، بلکـه بایـد از واژگـان ریاضیاتی محض برای سخن گفتن استفاده کنیم که بوضوح کاربرد ریاضیات را با مشـکلات بیشتری مواجه می‌کند(همان).

۲.۳ قواعد غیرکلاسیک

الف) از جمله رویکردهای غیرکلاسیک به مسئله ابهام، نگاه برخی منطقدانهای فراسازگار به این مسئله و معتبر ندانستن قاعده قیاس انفصالی بخاطر حافظ‌الصدق نبودن آن است([8]). براساس این دیدگاه، جملات حاوی مفاهیم مبهم ، همچون ‹بیژن قد بلند است› ، در حالات مرزی هم صادق‌اند و هم کاذب. فرض کنیم A چنین جمله‌ای و B جمله‌ای بوضوح کاذب باشد. دراینصورت جمله $A \vee B$ صادق است(چون A صادق است)؛ همچنین $\neg A$ صادق است(چون A کاذب است). در این حالت، اِعمال قاعده قیاس انفصالی برای دو مقدمه اخیر، به نتیجه کاذب B منجر خواهد شد و بنابراین، قیاس انفصالی نمی‌تواند برای چنین وضعیتی قاعده معتبری باشد.

حال منطقدان غیرکلاسیکی را درنظر بگیرید که در حمایت از ریاضیات رایج و امتناع از طرح ریاضیاتی بدیل، استدلال کردن بر طبق قواعد منطق کلاسیک را درون ریاضیات می‌پذیرد ولی قاعده یا فراقاعده ساختاری R را در خارج از حوزه ریاضیات نامعتبر می‌داند. بنابراین استنتاج نتیجه C از مقدمات W را، که بطور کلاسیک معتبر است، نامعتبر می‌داند چون در یکی از گامهای آن از قاعده R برای عبارت اتمی غیرریاضیاتیE، مثلاً مبهم، بکار رفته است. در این حالت ویلیامسن برآن است که اگر متغیر V را، که از نظر دستوری همنوع با E است، در سراسر استدلال جایگزین E کنیم، آنگاه V ،برخلاف E ، هیچ معنای مشخص غیرریاضیاتی ندارد و با انجام این فرآیند برای سایر عبارات غیرریاضیاتی در استدلال اولیه، استدلالی با مقدمه W^* و نتیجه C^* خواهیم داشت. دراین حالت منطقدان غیرکلاسیک ناچار است که استدلال از W^*به C^*را بپذیرد، زیرا شامل هیچ عنصر غیرریاضیاتی نیست و بطور کلاسیک معتبر است.

برای مثال، نمونه زیر از کاربرد قاعده قیاس انفصالی برای محمول مبهم ‹قد بلند› را در نظر بگیرید که منطقدان فراسازگار آن را رد می‌کند:

بیژن قدبلند است یا در واحد تکاوری استخدام نمی‌شود

بیژن قدبلند نیست

بیژن در واحد تکاوری استخدام نمی‌شود

اکنون با جایگزینی مناسب متغیرهای گزاره‌ای p و q بجای هـر کـدام از جمـلات فـوق، استدلال بالا به شکل زیر درمـی‌آیـد و از نظـر ویلیامســن منطقـدان غیرکلاسـیک نـاگزیر از پذیرش آن است:

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \\ \hline q \end{array}$$

با این حال، منطقدان غیرکلاسیک برای تن ندادن بـه چنـین نتیجـه‌ای ممکـن اسـت کـه جایگزین کردن V بجای E را بعنوان یک جانشانی غیر مجاز رد کنـد. ولـی ویلیامســن بـرآن است که:

> این ردیه یا نسبت به جزئیات استدلال[۳] از W^* به C^* حساس است یا غیر حسـاس. اگـر حساس نباشد، دراینصورت ایـن ردیـه معـادل بـا رد کـردن همـه جانبـه کـاربرد تمـام ریاضیات و منطق برای عباراتی نظیر E است، که به معنای خردگریـز دانسـتن E اسـت. ولی واژگانی همچون ‹خرمن› ، ‹کوچک› ، ‹صادق› ، ‹کاذب› ، خردگریـز نیسـتند. از سوی دیگر اگر این ردیه نسبت به جزئیات آن اسـتدلال حسـاس باشـد، در اینصـورت منطقـدان غیرکلاسـیکعملاً خـود را درگیـر طـرح تجدیـدبنای ریاضـیات کـرده اسـت تامشخص کند که این ریاضیات بازسازی شده تا چه حد می‌تواند بـرای کاربردپـذیری، از این عقب‌نشینی به منطق غیرکلاسیک جان سالم به در برد.([3]:p.14)

ب) می‌دانیم که آزمون فرضیه‌های علمی با استنتاج نتایج منطقـی–ریاضـیاتی آنهـا انجـام می‌شود و بنابراین نیازمند نظام استدلالی منطقی–ریاضی هسـتیم تـا برطبـق آن نظـام، از هـر مجموعه فرضیات Γ نگاشتی به مجموعـه نتـایج آن، $Cn(\Gamma)$، تولیـد کنـد؛ مجموعـه نتـایج $Cn(\Gamma)$ را بستار Γ تحت رابطه پیامد منطقی[نظام مربوطـه] مـی‌نـامیم[۴] و بنـابراین ادعـای A در $Cn(\Gamma)$ است اگر و تنها اگـر $\Gamma \vdash A$. بِیـل در مـورد نقـش عملگـر بسـتار یـک نظریـه می‌گوید:

«نظریـه Γ خـود را بـه منطـق بدهیـد و آنگـاه راحـت بنشـینید: منطـق ‹بـه راحتـی› و ‹بطورخودکار› نظریه شما را به $Cn(\Gamma)$ بسط می‌دهد، که شامل همه نتایج(تـک عضـوی) Γ است». ([4]:p.3)

عملگر بستار در نظامهای مختلف دارای ویژگیهای ساختاری زیر هستند[۵]([9]:p.31):

۱. اگر $\Gamma \subseteq \Delta$ آنگاه $Cn(\Gamma) \subseteq Cn(\Delta)$

۲. $\Gamma \subseteq Cn(\Gamma)$

۳. $Cn(Cn(\Gamma)) \subseteq Cn(\Gamma)$

به عقیده ویلیامسن تمام ویژگیهای فوق در آزمون نظریات علمی فرض گرفته می‌شوند: بنابر ویژگی سوم، هیچ محدودیتی بر طول زنجیره‌های مجاز استدلال وجود ندارد و بنابراین پیامدهایِ پیامدهایِ Γ، پیامدهای Γ هستند. ویژگی دوم برآن است که حتی یک زنجیره از استدلالها با طول صفر نیز مجاز است و بنابراین اعضای Γ نتایج خود Γ هستند. و درنهایت بنابر ویژگی اول، اگر $\Gamma \subseteq \Delta$ ، آنگاه بطوربدیهی می‌توان از Δ هرکدام از اعضای Γ را نتیجه گرفت و چون $Cn(\Gamma)$ همان مجموعه نتایج منطقی Γ است، اعضای $Cn(\Gamma)$ در $Cn(\Delta)$ جای می‌گیرند و داریم $Cn(\Gamma) \subseteq Cn(\Delta)$([3]:p.15).

بعلاوه، سه ویژگی بالا مستلزم همه قواعد ساختاری استاندارد برای یک رابطه پیامد منطقی(در آزمون نظریات علمی)، از جمله قاعده برش هستند و ویلیامسن براساس نشانه گذاریهای بالا نشان می‌دهد: اگر $A \epsilon Cn(\Gamma)$ و $B \epsilon Cn(\Delta \cup \{A\})$ ، آنگاه $B \epsilon Cn(\Gamma \cup \Delta)$ (برای اثبات نگاه کنید به ضمیمه([3])) . در اینصورت، آنها که برای جلوگیری از پارادکس خرمن قاعده ساختاری برش را کنار می‌گذارند، لاجرم قواعد ساختاری فوق را رد می‌کنند و ازاینجا این پرسش به میان می‌آید که در اینصورت دانشمندان چگونه نظریات خود را بیازمایند. برای مثال، فرض کنید که بپذیریم تالی هر عدد کوچک، عددی کوچک است و همچنین 0 عددی کوچک است(چنانکه یک دانشمند فرضیات نظریه خود را می‌پذیرد). دراینصورت از این دو فرض پذیرفته شده می‌توان نتیجه گرفت که1، بعنوان تالی 0، نیز کوچک است و این نتیجه را هم می‌پذیریم(چنانکه دانشمندان نتایج منطقی نظریه خود را می‌پذیرند). اکنون از آنجا که پذیرفته‌ایم که تالی هر عدد کوچکی، کوچک است و 1 نیز کوچک است، استنتاج می‌کنیم که عدد 2نیز کوچک است و این نتیجه را نیز می‌پذیریم. پذیرش نتیجه اخیر براساس پذیرش دو فرض اولیه و ویژگی سوم عملگر بستار صورت گرفته و هیچ استفاده‌ایی از قاعده برش نشده است. در اینصورت با پذیرش نتایج فعلی، می‌توان بطور نامحدودی به پذیرش نتایج بعدی ادامه داد که درنهایت به پارادکس خرمن

کشیده می‌شویم، درحالی که در نظام منطقی خود قاعـده بـرش را کنـار گذاشـته‌ایم(همـان). بنابراین از نظر ویلیامسن، تنها با قبول عملگر بستار و یژگیهای آن، و بدون بکار بستن قاعـده برش، نیز پارادکس خرمن رخ می‌نماید.

٤. ملاحظات

نگارنده بطور کلی با نقدهای ویلیامسن بر منطقهای غیرکلاسیک، بویژه درمـورد رد قضـایای کلاسیک، موافق است و به نظرمی‌رسد که هر نوع نظرپردازی غیرکلاسیک، اگر نمـی‌خواهـد ریاضیاتی غیرکلاسیک بنا کند، باید راه‌حلی برای کاربردپذیری ریاضیاتی پیدا کند کـه قواعـد استدلالی آن یکسره از منطق کلاسیک تبعیـت مـی‌کنـد. بـا ایـن حـال، دربـاره اسـتدلالهای ویلیامسن در بخش قواعد غیرکلاسیک دونکته را قابل بحث می‌بینم که در ادامه به طرح آنهـا می‌پردازم.

۱.۴ وصف اعتبار

در بخش ۳–۲)، ویلیامسن استدلال کرد که وقتی متغیرهـا جـایگزین عبـارات اتمـی حـاوی مفاهیم مبهم شوند، منطقدان غیرکلاسیکی که استدلال اولیه را نامعتبر می‌دانـد، نـاگزیر اسـت که اعتبار ایـن ترجمـه از اسـتدلال اولیـه را قبـول کنـد؛ زیـرا از نـوع قواعـدی اسـت کـه ریاضی‌دانان در استدلالهایشان بکارمی‌برنـد و اگـر منطقـدان غیرکلاسـیک ایـن جانشـانی را غیرمجاز بداند به معنی خردگریز دانستن مفاهیمی همچون «بلند قد بودن» است.

ظاهراً بیان ویلیامسن در قطعه بالا مستلزم آن است کـه اگـر اسـتدلالی حـاوی مفـاهیمی همچون مفاهیم مبهم، از ***قواعدنظریه منطق کلاسیک*** پیروی نکنند، بحث عقلانی درآن بـاره نیز ناممکن است، واین سخن کمی عجیب می‌نماید؛ زیرا در بخش دوم نشان دادیم که مـثلاً نظام قوی کلینی بدون درگیر شدن در هیچ پارادکسی می‌توانـد ابهامهـای دلالـت‌شـناختی و هستی‌شناختی را توضیح دهد.با این حال، به نظر می‌رسد که قبل از محکوم کـردن منطقـدان غیرکلاسیک به خردگریز دانستن مفاهیم مبهمی همچـون «خـرمن» ، بایـد معلـوم شـود کـه اساساً «اعتبار» وصف چـه چیـزی اسـت. درصـورتی کـه اعتبـار را وصـف یـک صـورت استدلالی محسوب کنیم، روشن است که با معتبر دانستن یک صـورت اسـتدلالی، نـاگزیریم که همه نمونه‌های آن را هم معتبر بشماریم زیـرا اساسـاً اعتبـار آن نمونـه‌هـا بخـاطر اعتبـار

صورت استدلالی مفروض است. دراین حالت، مسلماً معتبر دانستن صورت استدلالی قاعده قیاس انفصالی و نامعتبر شمردن یکی از صورتهای آن که مفهومی مبهم هچون ‹قد بلندبودن› در آن بکار رفته است، امری تناقض آمیز است و ***به این دلیل است که می‌توان منطقدان غیرکلاسیک را محکوم به خردگریز دانستن مفاهیم مذکور دانست.***

اما نظر فوق تنها دیدگاه درباره موصوف ‹اعتبار› نبوده و با تغییر دیدگاه در این خصوص، نتیجه بالا غیرقابل انکار نمی‌نماید. برای مثال، پریست ازجمله منطقدانانی است که اعتبار را وصف صورتهای استدلالی نمی‌داند؛ از نظر پریست اگر ‹اعتبار› را وصف الگوهای استنتاجی بدانیم و، مثلاً بجای استنتاجهای فردی، الگوی زیر از قاعده وضع مقدم را معتبر بدانیم:

A

اگر A آنگاه B

B

قبل از نسبت دادن وصف ‹اعتبار› به چنین الگویی، لازم است که آن را بطور دقیق بیان کنیم([10]:p.43)؛ زیرا، برای مثال، نمونه زیر از آن را نمی‌توان استنتاج معتبری شمرد:

اگر بیژن اینجا می‌بود، خیلی عصبانی می‌شد

می‌شد که بیژن اینجا باشد

بیژن خیلی عصبانی می‌شد

اگر فرض کنیم که دربیان الگوهای استنتاجی چنین دقتی صورت گرفته باشد، بازهم از نظر پریست تصورِ منطق بعنوان نظریه‌ای درباره صورتهای استنتاجی، در مقایسه با منطق به مثابه نظریه‌ای دربارهِ استنتاجهای منفرد، تصوری بسیار سست خواهد بود؛ زیرا صورتهای استنتاجی اغلب فقط بخاطر کمبود نمونه، معتبر می‌نمایند(همان). برای مثال، فرم استنتاجی زیر که در آن مقدمه تقویت می‌شود را در نظر بگیرید:

اگر A آنگاه C

اگر A و B آنگاه C

ممکن است چنین الگویی را، دست کم تا زمانی که مثالهای نقض استاندارد منطق شرطی را ندیده باشیم، معتبر بدانیم. اما مثال زیر، که در آن از مقدمه‌ای صادق نتیجه‌ای کاذب استنتاج شده، به راحتی عدم اعتبار آن را نشان می‌دهد:

اگر به ایستگاه برویم، می‌توانیم به مقصد تهران قطار بگیریم

اگربه ایستگاه برویم و در آنجا کارکنان اعتصاب کرده باشند، می‌توانیم به مقصد تهران قطار بگیریم

بنابراین، به نظر پریست در مورد انتساب «اعتبار» به الگوهایی استنتاجی ، «شاید بهتر باشد که آنها را تعمیمات نظری سطح پایینی بنگریم که بوسیله نوعی استقراء شکل گرفته‌اند»([10]: p.44]).

حال اگر هم‌نظر با پریست، «اعتبار» را بجای الگوهای استنتاجی، وصف افراد آن محسوب کنیم، روشن است که استدلال ویلیامسن در تخطئه منطقدان غیرکلاسیک الزام آور نخواهد بود. زیرا، برای مثال، نمونه‌هایی از الگوی قیاس انفصالی که در آنها مفاهیم مبهم بکار رفته است، نامعتبرند و نمونه‌های مورد استفاده ریاضی دانان از جمله موارد معتبر آن الگو است. بنابراین منطقدان غیرکلاسیک می‌تواند به عدم اعتبار قاعده‌ای معتبر در حوزه استدلالی ریاضیات معتقد باشد بدون آنکه حکم به خردگریزی مفاهیم مبهم دهد.

۲.۴ کل گرایی روش‌شناختی

ژیلیَن راسل در مورد روش‌شناسی استنتاج به بهترین تبیین(یا نظریه ربایی) برآن است که:

> اصل مطلب رویکرد نظریه ربایی مشتمل بر دو ادعاست: ادعای اول عبارتست از کل‌گرایی درباره توجیه منطق: تمام[قضایا و قواعد] منطقها هستند که توجیه می‌شوند(یا نمی‌شوند)– نه مدعیات جدا جدای نتایج آنها. ادعای دوم آنستکه آنچه نظریه‌ای را توجیه می‌کند عبارتست از کفایت داده‌ها و داشتن مزایا و فقدان معایب است. ([11]:p.3)

از توصیف راسل درمورد روش‌شناسی فوق چنین برمی‌آید که اگر براساس رهیافت استنتاج به بهترین تبیین، نظریه‌ای منطقی را بر نظریه دیگری ترجیح دادیم، نمی‌توان برخی از قضایا(یا قواعد) آن را قبول و برخی دیگر را رد کنیم و ناگزیر از پذیرش تمام مدعیات

آن هستیم. اکنون، فرض کنیم که هم نظر با ویلیامسن و براساس این رویکرد به گزینش نظریات منطقی، منطق کلاسیک را بخاطر توفیق بیشتر آن در کفایت داده‌ها (از جمله تبیین استدلالهای ریاضیات) برگزینیم. در اینصورت، ناگزیریم که همه مدعیات این منطق، از جمله صورت استنتاجی زیر را هم بپذیریم(چنانکه به تعبیر ویلیامسن دانشمندان نتایج فرضیات خود را می‌پذیرند):

$$P \wedge \neg P \vdash Q$$

این صورت استدلالی درواقع بعنوان یکی از قواعد منطق گزاره‌های کلاسیک بصورت زیر معرفی می‌شود([12]:p.30):

$$\frac{\perp}{\varphi} \perp E$$

که $\perp$ نمادی برای کذب و φنمادی برای گزاره‌ای دلخواه است.

بیان این قاعده در زبان طبیعی آنستکه از تناقض، می‌توان هر نتیجه‌ای گرفت. صورت استدلالی فوق از جمله استدلالهای معتبر بحث انگیز منطق کلاسیک است که رویکردهای مختلف در نظریه‌های فراسازگار[6] در تلاش برای یافتن راهی در نامعتبر ساختن آنند. منطقدانان ربط بطور خاص، این الگو را از آن رو نامعتبر می‌دانند که یکی از شروط لازم برای اعتبار یک استدلال، مربوط بودن مقدمه(یا مقدمات) به نتیجه است[7] که این الگو فاقد آن است. علاوه براین، بعید است که بطور شهودی بتوان این استدلال را پذیرفت که: از ‹ ۲ زوج است› و ‹ ۲ فرد است› می‌توان نتیجه گرفت که ‹مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است› . بنابراین به نظر می‌رسد که این استدلال معتبر در منطق کلاسیک را در خارج از حوزه ریاضیات نامعتبر می‌دانیم[8].

گذشته از این، به نظر می‌رسد که این الگوی استدلالی، باوجود نفوذ گسترده ریاضیات کلاسیک در انواع شاخه‌های علمی، با واقعیت فعالیت علمی سازگاری ندارد. پارادکس مقدمه از جمله مواردی است که بخوبی می‌تواند بیانگر این سخن باشد:

پارداکس مقدمه[9]:فرض کنید دانشمندی پس از مدتی تحقیق، کتابی در مورد زیست لاک‌پشتها در اقیانوسها نوشته است و بنابراین بطور طبیعی به تمام گزاره‌هایی که در آن کتاب نگاشته باور دارد. اما در مقدمه کتاب خود با فروتنی اعلام می‌کند که احتمال خطا در تحقیقاتش وجود دارد و ممکن است بعضی از آن گزاره‌ها نادرست باشند. در اینحالت با اینکه او براساس تحقیقات خود به تک تک گزاره‌های آن کتاب باور دارد، همچنین باور

دارد که همه آنچه درکتاب نوشته صادق نیست واحتمالاً بعضی از آنها کاذبند.در این حالـت، اگرچهاز هر کدام از گزاره‌های p_1 ، φ_2 ....، p_n در کتـاب دفـاع مـی‌شـود و بنـابراین ترکیـب عطفی زیر اعلام می‌شود:

$p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n$

ولی احتمال خطادر آزمایشها و درنتیجه خطاپذیریدر باورها بعنوان یک هنجـار عقلانـی، آن دانشمند را وامی‌دارد تا اعلام کند که:

$\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n)$

بنابراین، این دانشمند به ترکیب عطفی زیر باور دارد:

$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \wedge \neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n)$

روشـن اسـت کـه وقتـی کتـاب مـذکور فقـط یـک مـدعا داشـته باشـد، ایـن ترکیـب بصورت$p_1 p_1 \wedge \neg$خواهد بود. با این حـال، آن دانشـمند بـاور نـدارد کـه اعتقـاد بـه اصـلی از عقلانیت وی را ملزم به باور هر چیزی می‌کند، چون *از تناقض هر چیزی برمی‌آید*!

به نظر نگارنده، آنچـه در اینجـا بیشـتر اهمیـت دارد آن نیسـت کـه منطـق کلاسـیک از قاعده‌ای استفاده می‌کند که با واقعیت فعالیت علمی درتضاد اسـت و شـهود عقلانـی‌مـان را برآورده نمی‌کند؛ بلکه، این مثال بیانگر آن است فعالیت علمی، چنانکه ویلیامسن مـی‌پنـدارد، یکسره از قواعد منطقی که ریاضیات رایج بر آن اسـتوار اسـت پیـروی نمـی‌کنـد ودر مـورد وضعیتی همچون بالا، به نظر می‌رسد که منطقهای فراسازگار، که صورت اسـتدلالی فـوق در آن نامعتبر است، بهتر می‌تواند این نوع رفتار دانشمندان را توضیح دهد.

بدین طریق و بطـور خـاص در مـورد قاعـد بـرش، نیـل تنانـت از جملـه منطقـدانهای غیرکلاسیک است که قاعده برش را بخاطر احتراز از شرط نـامربوط بـودن مقدمـه و نتیجـه کنـار مـی‌گـذارد؛ زیـرا،ممکن اسـت در (۱)،Γ, Π ناسـازگار یـا Δ, Σ راسـتگوی منطقـی باشد([13]).

بعلاوه، یکی از راههای اثبات صورت استدلالی $P \wedge \neg P \vdash Q$ به شکل زیر است:

$$\dfrac{\begin{array}{ll} A \vdash A \vee B & \vee\ introduction \\ A \vee B, \neg A \vdash B & Disjuctive\ Sylogism \end{array}}{A \wedge \neg A \vdash B}\ Cut$$

در این صورت برای جلوگیری از چنین نتیجه‌ای دو راه حل وجود دارد: ۱) کنارگذاشتن قاعده قیاس انفصالی و ۲) نامعتبر دانستن قاعده برش. در این حالت، تنانت در حمایت یک منطق ربطی برای استدلالهای ریاضیات و برخلاف انتخاب اغلب منطقدانان ربط([16], [17], [18])، بجای قاعده قیاس انفصالی، کاربردقاعده برش را محدود می‌کند([14]:p.706). مسلماً استفاده از قاعده قیاس انفصالی در استدلالهای ریاضی بسیار شایع است و از جمله دستاویزهای مهم برجس در نقد منطق ربط و ناتوان دانستن آن در صورتبندی استدلالهای ریاضیات که در مقدمه به آن اشاره شد، کنارگذاشتن همین قاعده ازجانب منطقدانان ربط، از جمله می‌یر، است.از این رو، تنانت صورتی ربطی از قواعد استنتاج در منطق کلاسیک ارائه می‌کند که قاعده قیاس انفصالی در آن حفظ می‌شود([14]:p.716).

۵. نتیجه‌گیری

رشد گسترده شاخه‌های مختلف ریاضیات کلاسیک و وابستگی سایر رشته‌های علمی به آن موجب شده تا منطقدانان غیرکلاسیک، تجدیدنظرها در منطق کلاسیک را منحصر به خارج از حوزه ریاضیات کنند. ولی، ویلیامسن نشان داده است که جدا دانستن حوزه ریاضیات از نتایج آن تجدیدنظرها، دیدگاهی خوشبینانه است و به ناچاردامن ریاضیات را نیز آلوده ساخته و درنتیجه کاربردپذیری آن را با اختلال مواجه می‌سازد. با این حال، به نظر می‌رسد که نگاه ویلیامسن به دامنه قواعد کلاسیک، بویژه جای دادن قاعده برش در مجموعه قواعد منطق کلاسیک، کمی زیاده خواهی است و چنانکه خود ویلیامسن نشان می‌دهد، بدون این قاعده نیز می‌توان فعالیت علمی مبتنی بر استنتاج قیاسی را کنترل کرد. بعلاوه، بعضی قواعد منطق کلاسیک، همچون قاعده حذف کذب بصورت بالا، ظاهراً نه در ریاضیات کاربردی دارد و نه با فعالیت علمی سازگار است و بنابراین نمی‌توان انتظار داشت که فعالیت علمی، علی‌رغم نفوذ گسترده ریاضیات در علوم مختلف، یکسره مبتنی بر قواعد منطق کلاسیک است.

پی‌نوشت‌ها

۱. در واقع هیچ قضیه‌ای در نظام قوی کلینی برقرار نیست.

۲. نامی که مردم تبت بر کوه اورست نهاده‌اند

۳. نمادها برای همخوانی با متن تغییر کرده‌اند

٤. درواقع هر نظام منطقی را می‌توان همان بستار منطقی آن در نظر گرفت.

۵. عملگر بستار در نگاه تارسکی ویژگیهای دیگری هم دارد که گفتن آنها برای بحث حاضر چندان اهمیتی ندارد.

6. paraconsistent

۷. از جمله معیارهای مربوط بودن مقدمات و نتیجه یک استدلال در منطق ربط، variable sharing است

۸ جستجوی نگارنده برای یافتن کاربرد این قاعده در ریاضیات ناکام ماند و به نظر می‌رسد که جز برای اثبات برخی صورت برهانهای منطقی، کاربردی در ریاضیات ندارد. تمام نظریه‌های ریاضی دارای مدل و بنابراین سازگارند و ازاین رو در استنتاج نتایج منطقی نظریات ریاضی هیچگاه از تناقض آغاز نمی‌کنیم.

9. preface paradox

کتاب‌نامه

Field, H. (2008). *Saving truth from paradox*, OUP

Burgess, John P. (1958). *Read on relevance: A rejoinder*. Notre Dame Journal of FormalLogic, vol.25: 217–223.

Williamson, T. (2018). *Alternative Logics and Applied Mathematics.* Philosophical Issues, 00, Philosophy of Logic and Inference

Beall, JC. (2013). *Free of Detachment: Logic, Rationality, and Gluts*. Noˆus

Ripley, D. (2013). *Paradoxes and Failures of Cut.* Australasian Journal of Philosophy

Varzi, Achille C. (2001).*Vagueness, Logic, and Ontology.*The Dialogue. Yearbooks for Philosophical Hermeneutics 1, 135–154

Hjortland, O.T. (2017). *Anti-exceptionalism about logic.* philosophical studies, volume 174,issue 3

Weber, Zack. (2010). *A Paraconsistent Model of Vagueness.* Mind, Vol 0.0

Tarski, Alfred. 1983: *Logic, Semantics, and Metamathematics*, 2nd ed., translated by J.H. Woodger, edited by J.Corcoran.

Priest, G. (2016). *Logical disputes and the a priori*. Logique et Analyse.

Russell, Gillian. (2018). *Deviance And Vice: Strength As A Theoretical Virtue In The Epistemology Of Logi,*Philosophy and Phenomenological Research

Van Dalen, Dirk. (2013). *Logic and Structure.* Fifth edition, Springer

Tennant, Neil. (1987), *Anti-Realism and Logic,* Clarendon Press, Oxford.

Tennant N. (2005). *Relevance in Reasoning*. in the oxford handbook of philosophy of Mathematics and Logic, edited by Shapiro, S, OUP

Williamson, T. (2015). *Semantic paradoxes and abductive methdology*. In Armour-Garb, B., editor,The Relevance of the Liar. OUP, Oxford

Mares Edwin. (2004). *Relevant Logic*. Cambridge university press

Anderson, Alan R, Belnap, Nuel D, Dunn, Michael. (1992). *Entailment. Logic of Relevance and Necessity*, vol. 2. Princeton university press.

Read, Stephen. (1988). *Relevant Logic*. Blackwell, Oxford