ارزیابی تجهیز منابع در بانکداری بدون ربای ایران و مدل‌سازی الگوی جایگزین (با استفاده از روش‌های بهینه‌یابی پویای تصادفی)

یعقوب محمودیان،* اصغر ابوالحسنی هستیانی، محمدحسین پورکاظمی*** و کامران ندری****

تاریخ دریافت ۱۳۹۵/۶/۲	تاریخ پذیرش ۱۳۹۵/۱۲/۳

نهاد بانک از جایگاه برجسته‌ای در اقتصاد امروز برخوردار است. بر همین اساس، الگوهای مختلفی در بانکداری به منظور تجهیز و تخصیص بهینه منابع بانکی با یکدیگر در حال رقابت‌اند. در این میان، الگویی موفق‌تر است که بتواند خود را با میزان بالاتری از شاخص‌های بانکداری مطلوب مطابقت دهد. در تحقیق حاضر با در نظر گرفتن مشخصات و ویژگی‌های یک الگوی مطلوب تجهیز منابع در بانکداری اسلامی، به بیان مدل بهینه‌یابی تصادفی پویا متناسب با آن می‌پردازیم به نحوی که بتوان مسیر بهینه تجهیز منابع را در هر لحظه از زمان مشخص و عملکرد بانک را منطبق با آن تنظیم کرد. این مدل تاکنون در ادبیات داخلی مطرح نشده و نوآوری‌های مخصوص به‌خود را دارد به نحوی که قابلیت تبیین عملکرد یک بانک اسلامی در بخش تجهیز منابع را با حداکثر دقت داشته باشد.

کلیدواژه‌ها: تجهیز منابع؛ وکالت؛ مشارکت؛ بهینه‌یابی تصادفی؛ معادلات دیفرانسیل

ـ این مقاله استخراج شده از پایان‌نامه «الگوی بهینه تجهیزات منابع در بانکداری اسلامی»، دوره دکتری است.

* دانشجوی دکتری اقتصاد، گروه اقتصاد، دانشگاه پیام نور (نویسنده مسئول)؛ Email:mahmodian61@gmail.com

** دانشیار گروه اقتصاد، دانشگاه پیام نور؛ Email:abolhasani@pnu.ac.ir

*** دانشیار گروه ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی؛ Email:h_pourkazemi@yahoo.com.au

**** استادیار دانشکده اقتصاد، دانشگاه امام صادق (ع)؛ Email:k.nadri@gmail.com

مقدمه

بانکداری اسلامی شاهد رشد سریع در دو دهه گذشته بوده است. عوامل متعددی بـه وقـوع این رشد کمک کرده‌اند که مهم‌ترین آنها آزادسازی مقررات مالی؛ جهانی شدن بازارهـای مالی؛ تغییر در تکنولوژی؛ نوآوری محصول و گسترش رو بـه رشـد اسـلام در غـرب اسـت (Bellalah and Masood, 2013). اولـین نوشـته‌هـا در مـورد موضـوع بانکـداری و مالیـه اسلامی به دهه چهلم قرن بیستم بازمی‌گردد (Siddiqi, 1981: 29-30) و اولین تجربه عملی در این زمینه را می‌توان به اوایل دهه شصت ارجاع داد (Ahmad, 1995: 21-23). اقدامات ابتدایی به کشورهای مالزی و مصر در دهـه ۱۹۶۰ برمـی‌گـردد (Bellalah and Masood, 2013: 12). ادبیات موجود در این زمینه نشان می‌دهد به منظور مـدل‌سـازی و ارائـه الگـوی بانکداری اسلامی همواره تردید بین یک مدل واسطه‌ای مانند بانک‌های تجـاری متـداول و یک نهاد سرمایه‌گذاری به منظور ارائه خدمات بـه افـرادی کـه دنبـال کسـب سـود هسـتند، وجود داشته است (Siddiqi, 2006: 1-3).

در ایران هم پس از تحول اساسی در سیستم بانکی و اجرای نظام بانکداری بـدون ربـا در سال ۱۳۶۳، تعداد بسیاری از محققان بر این باورنـد کـه بـا گذشـت بـیش از ۳۲ سـال، اجـرای بانکداری اسلامی به شکل کامل مطلوب نبوده و بـا چـالش‌هـا و مشـکلاتی همـراه اسـت؛ امـا همین محققان درباره اینکه چالش‌ها بیشتر مربوط بـه کـدام قسـمت از فراینـد عملیـات بـانکی می‌شود و چگونه می‌توان آنها را برطرف کرد اخـتلاف نظـر دارنـد. نکتـه قابـل توجـه دربـاره تحقیق‌های صورت گرفته این است که در اکثر قریب به اتفاق موارد، این ارزیابی عملکـرد بـه صورت توصیفی انجام شده و تاکنون هیچ مدل‌سازی ریاضی کاملی صورت نگرفته است.

اگر اقتصاد، علمی تجربی است، بایستی روشی عملیاتی وجـود داشـته باشـد تـا بتوانـد مفاد نظریه را با مشاهدات واقعی تطبیق داده و امکان آزمون نظریه‌ها را بر اساس مشـاهدات فراهم آورد (Dusek, 2008: 33). ریاضیات می‌تواند درجه‌ای از عینیـت را نیـز بـرای علـم اقتصاد فراهم آورد (Smith, 2001: 3)؛ چرا که ابهام ذاتـی مفـاهیم، موجـب دخالـت‌هـای ارزشی نظریه‌پرداز می‌شود و بی‌طرفی علمی را که اصل اساسی برای کشف حقیقـت اسـت مخـدوش مـی‌کنـد. ازآنجاکـه ریاضـیات بـر اسـاس منطـق قیاسـی شـکل گرفتـه و مفـاهیم

(متغیرهای) آن شفاف است، می‌تواند تا حد زیادی به تبیین دقیق موضوع کمک کند (علیزاده، پورکاظمی و کشاورز، ۱۳۹۴: ۶۴).

بررسی عملکرد نظام بانکی در قالب مدل‌های دقیق و منسجم ریاضی، به ما این امکان را می‌دهد که برداشت دقیق‌تری از عملکرد نظام بانکی در بخش‌های مختلف و اظهارنظرهای تخصصی‌تری در این زمینه داشته باشیم. با توجه به ماهیت تصادفی متغیرهای مهم بانکی مانند تسهیلات و سپرده، به نظر می‌رسد مدل‌های تصادفی ریاضی در این زمینه دقت و تطابق بیشتری دارند. ازآنجاکه ادبیات ریاضی در مدل‌های بهینه‌یابی تصادفی، شامل مشتقات جزیی و معادلات دیفرانسیل تصادفی پیچیده است، تحقیقات زیادی در این زمینه صورت نگرفته و این نوع مدل‌سازی کمتر مورد اقبال محققان قرار گرفته است.

در تحقیق حاضر بعد از ارائه مشخصات الگوی پیشنهادی مورد نظر در تجهیز منابع در بانکداری اسلامی، این الگو را در قالب یک مدل بهینه‌یابی تصادفی پویا بیان می‌کنیم. طراحی این مدل به ما این امکان را می‌دهد که بتوانیم بعد از اجرای الگوی پیشنهادی ارزیابی دقیق‌تری از آن داشته باشیم و همچنین بتوانیم با زبان ریاضی این الگو را در مجامع بین‌المللی ارائه و از آن دفاع کنیم.

۱. پیشینه تحقیق

مدل‌های متعددی در بهینه‌سازی مدیریت منابع بانک‌ها تا کنون مورد استفاده قرار گرفته است. مدل برنامه‌ریزی خطی قطعی چمبرز و چارنز[1] (۱۹۶۱) یک مدل پیشگام در این زمینه بوده است. کومار[2] (۱۹۷۱)، کوهن و هامر[3] (۱۹۶۷) و لیفسون و بلکمن[4] (۱۹۷۳) هم کاربردهای موفقی از مدل چمبرز و چارنز (۱۹۶۱) داشته‌اند. مدل‌های تصادفی استفاده شده در مدیریت منابع بانک‌ها از دهه ۱۹۷۰ مورد استفاده قرار گرفته‌اند (Oguzsoy and Giuven, 1996: 576).

بلک و شولز (۱۹۷۳) اولین بار تئوری قیمت‌گذاری اختیار معامله در بازار سهام را

1. Chambers and Charnes
2. Komar
3. Cohen and Hammer
4. Lifson and Blackman

مطرح کردند. آنها قیمت سهام را در قالب معادله دیفرانسیل تصادفی حرکت براونی هندسی مدل‌سازی کردند. این مدل بیشترین کاربرد را در مهندسی مالی داشته است. مدل بلک و شولز برای یک سبد دارایی طراحی شده است که شامل دو نوع دارایی بدون ریسک با قیمت $B(t)$ ریسکی با قیمت $S(t)$ است که در آن به منظور حداکثر کردن تابع هدف (سود)، مسیر بهینه $S(t)$ را به‌صورت زیر به‌دست می‌آورد:

$$dS(t) = S(t)[\mu dt + \sigma dw(t)]$$

که در آن μ بیانگر میزان بازدهی ثابت سهام و σ نشان‌دهنده نوسانات قیمت سهام است. همزمان با بلک و شولز، مرتون (۱۹۷۳) هم در مقاله‌ای قیمت سهام را براساس معادله دیفرانسیل تصادفی با حرکت براونی هندسی مدل‌سازی کرده است.

موکودم پترسن و پترسن (۲۰۰۶)، هم در مقاله خود از مدل بهینه‌یابی پویای تصادفی به‌منظور بهینه‌سازی رفتار بانک استفاده کرده‌اند. آنها از این روش برای حداقل کردن ریسک بازار و ریسک کفایت سرمایه بانک استفاده کرده‌اند و یک سبد بهینه برای وام‌های اعطایی بانک پیشنهاد داده‌اند. برای این کار از رابطه ترازنامه‌ای یک بانک متعارف به‌صورت زیر استفاده شده است:

$$R(t) + L(t) + S(t) = D(t) + B(t) + C(t)$$

سمت چپ این معادله نشان‌دهنده دارایی و سمت راست آن بیانگر بدهی ترازنامه‌ای بانک است. با تعریف هر یک از اجزای این معادله ترازنامه‌ای به‌صورت یک رابطه مشخص و در قالب این هدف که باید ریسک بازار و ریسک کفایت سرمایه حداقل بشود، آنها مسیر بهینه اعطای وام و میزان سرمایه به‌صورت زیر را تعریف کرده‌اند:

$$dL(t) = L(t)[(r^L(t) - c^L)dt + \sigma_t(t)dw(t)]$$
$$dC(t) = c(t)dt + \sigma_c dw_c(t)$$

همچنین به‌عنوان یکی از مرتبط‌ترین مطالعات در این زمینه، موکودم پترسن و همکاران (۲۰۰۷) در مقاله‌ای با عنوان «حسابرسی بهینه در صنعت بانکداری» به بررسی ذخایر، دارایی‌ها و سرمایه بانک در الگوی متعارف در هر دو چارچوب تصادفی و غیرتصادفی پرداخته‌اند. در این مطالعه با استفاده از مدل تصادفی پویا، آیتم‌های اساسی بانک مانند وام، اوراق قرضه، سرمایه بانک و سوبسیدهای دولت پرداخته شده است و مطلوبیت سپرده‌گذاری نسبت به تغییرهای تصادفی اعطای وام حداکثر شده است.

ازآنجاکه بیشتر ادبیات موجود در زمینه بانکداری اسلامی به‌صورت توصیفی است، استفاده از مدل‌های بهینه‌یابی تصادفی، بسیار محدود و نادر می‌باشد، به‌نحوی‌که در مطالعات داخلی، مواردی که با استفاده از مدل‌های بهینه‌یابی ریاضی به ارزیابی بانکداری اسلامی پرداخته شده باشد، به کمتر از انگشتان یک دست می‌رسد. در این راستا به دو مورد از اصلی‌ترین مطالعات صورت گرفته اشاره می‌شود.

کیایی و همکاران (۱۳۹۲) در مقاله خود با عنوان «مقایسه عملکرد بهینه در بانکداری اسلامی و بانکداری متعارف: استفاده از فرایند تصادفی پرش ـ انتشار» به بررسی رفتار بانک در قالب یک مدل بهینه‌یابی تصادفی پویا پرداخته است. در این مقاله سعی شده با استفاده از روش کنترل بهینه تصادفی، به‌عنوان یک رویکرد جدید در این حوزه، عملکرد بانکداری اسلامی در مقابل بانکداری متعارف مورد بررسی قرار گیرد.

کیایی مسئله بهینه‌سازی تصادفی برای سیستم بانکداری متعارف و اسلامی با تعریف توابع هدف و قیدهای تصادفی در هر سیستم را به‌طور جداگانه استخراج کرده است و پس از معرفی یک روش شبیه‌سازی برای معادلات دیفرانسیل پرش ـ انتشار، از آن برای شبیه‌سازی معادلات دیفرانسیل تصادفی که از هر نوع سیستم بانکداری محاسبه شده‌اند استفاده کرده و نتایج حاصله برای بانکداری متعارف و اسلامی را مورد مقایسه قرار داده است. مسئله بهینه‌یابی تصادفی پویا برای یک بانک متعارف (مبتنی‌بر بهره) به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$\max_{D_t} V(t,L_t) = \int_0^T e^{-\beta t}(r^L L_t + r^T T_t - r^D D_t - (a_0 + a_1 D_t + a_2 D_t^2 + b_1 L_t + b_2 L_t^2))dt$$

$$s.t.\ \ dL_t = (C_t + D_t - T_t - R_t)dt + \sigma_t L_t dW_t - v_t L_t dP_t$$

در این مسئله میزان سپرده به‌عنوان متغیر کنترل و میزان تسهیلات پرداختی به‌عنوان متغیر وضعیت در نظر گرفته شده است. برای حل این مسئله تصادفی کیایی از روش هامیلتون ـ ژاکوبی ـ بلمن استفاده کرده و از این روش مسیر بهینه متغیرهای کنترل و وضعیت را استخراج کرده است. در نهایت با ایجاد سه تغییر اساسی مسئله بهینه‌یابی تصادفی برای یک بانک اسلامی را ارائه کرده است. این سه تغییر شامل اضافه کردن تابع پایانی به مسئله، تقسیم وام‌های اعطایی به دو دسته مبادله‌ای و مشارکتی و حذف سرمایه از ترازنامه بانک می‌باشد.

موسویان و همکاران (۱۳۹۳) در مقاله خود با عنوان «تعیین سهم بهینه عقدهای مبادله‌ای و مشارکتی در بانکداری بدون ربا» به بررسی رفتار بانک در قالب یک مدل بهینه‌یابی تصادفی پویا پرداخته است. در این مقاله با استفاده از تکنیک کنترل بهینه تصادفی، رفتار بانک بدون ربا در قالب تابع هدف مورد بررسی قرار گرفته است و سهمی از عقدهای مبادله‌ای و مشارکتی که عایدی بانک اسلامی را حداکثر می‌کند، در قالب یک الگوی نظری مشخص شده است. مسئله بهینه‌یابی تحقیق به‌صورت زیر ارائه شده است:

$$\underset{F,\theta}{Max}\, E_0\left[\int_0^T u(F(t))dt\right]$$
$$dG(t) = [(\theta(t)\mu G(t))dt + \theta(t)\sigma G(t)dw(t)] + r(1-\theta(t))G(t) + y(t)d(t) - \rho F(t)$$

که در آن $F(t)$ کل سپرده‌ها، $\theta(t)$ سهم تسهیلات مشارکتی از کل تسهیلات، $G(t)$ کل سپرده به غیر از سپرده قرض‌الحسنه، μ نرخ انتظاری سود تسهیلات مشارکتی، σ ریسک ناشی از عقدهای مشارکتی، $w(t)$ حرکت براونی، r نرخ تسهیلات مبادله‌ای، ρ نرخ انتظاری پرداختی بانک به سپرده‌گذاران و $y(t)$ درآمد ناشی از خدمات بانکی است.

موسویان با استفاده از روش هامیلتون ـ ژاکوبی ـ بلمن به حل این مسئله پرداخته و به این نتیجه رسیده است که بین نرخ سود عقدهای مبادله‌ای و سهم این عقدها در سبد تسهیلات بانک رابطه مستقیم وجود دارد و بین نرخ انتظاری سود تسهیلات مشارکتی و سهم این عقدها در سبد تسهیلات هم رابطه مثبت وجود دارد.

استفاده از روش بهینه‌یابی پویای تصادفی در مطالعات خارجی بیشتر در بهینه‌سازی سبد دارایی صورت پذیرفته کاربرد این روش در بانکداری بسیار محدود است. در این بین، مقاله‌ای که به‌صورت اختصاصی به کاربرد مدل بهینه‌یابی پویای تصادفی در بخش تجهیز منابع پرداخته باشد، یافت نشد و ازآنجاکه مبنای الگوی بانکداری متعارف براساس بهره و رباست، لذا ویژگی مقاله حاضر استفاده از این روش در بخش تجهیز منابع و در قالب یک الگوی اسلامی و بدون ربا می‌باشد. اما دو مورد مطالعه داخلی هم که به‌عنوان تنها مطالعات صورت گرفته در این زمینه به آنها اشاره شده است، از چند جهت با مقاله حاضر دارای رویکرد متفاوت می‌باشند اولاً در هر دوی این مقالات عملکرد کل بانک بدون پرداختن به جزئیات مورد تحلیل قرار گرفته است و مانند مقاله حاضر به‌طور اختصاصی به بخش تجهیز

منابع پرداخته نشده است، ثانیاً الگوی مورد استفاده در هر دوی این مقالات الگوی فعلی بانکداری بدون رباست و با توجه به اینکه نیاز به بازنگری و تغییر در این الگو، براساس نظر اکثر صاحبنظران، ضروری به نظر می‌رسد، لذا مدل‌سازی ریاضی این الگو نیز نمی‌تواند ما را به وضعیت مطلوب رهنمون سازد. در حالی که روش مقاله حاضر ابتدا معرفی یک الگوی جایگزین و مطلوب و سپس مدل‌سازی این الگوی جایگزین، براساس روش بهینه‌یابی پویای تصادفی بوده است.

نکته آخر اینکه در هر دو مطالعات داخلی اشکالات علمی و منطقی جدی وجود دارد که در مطالعه آقای موسویان این اشکالات بسیار اساسی و قابل توجه است به‌نحوی‌که به نظر نگارنده، این مقاله نمی‌تواند به‌عنوان مرجعی معتبر مورد استفاده دیگر مطالعات قرار گیرد. در این مطالعه تابع هدف (منفعت) به‌صورت کلی، نامشخص و تابعی و مبهم تعریف شده و صرفاً بدون هیچ‌گونه کمی‌سازی، بیان شده است که هدف‌های معنوی را هم در خود دارد. ازطرف‌دیگر، بدون بیان هیچ‌گونه مبانی نظری، ایشان معادله حرکت را در قالب تغییرات سپرده و تغییرات آن را تابع سود تسهیلات دانسته که هیچ منطق علمی و منطقی برای آن وجود ندارد. در مطالعه کیایی دو اشکال اساسی قابل طرح است؛ اول ایشان تابع هدف بانک را برمبنای سود پرداختی به مشتریان تعریف کرده‌اند ـ درحالی‌که این سود به بانک تعلق ندارد ـ و با همین منطق هم برای مسئله بهینه‌یابی خود تابع انتهایی تعریف نموده‌اند. از طرف دیگر ایشان در معادله حرکت مسئله $(dL_t = (C_t + D_t - T_t - R_t)dt + \sigma_t L_t dW_t - v_t L_t dP_t)$، به‌منظور وارد کردن متغیر سپرده در این تابع، متغیر وام را با استفاده از رابطه ترازنامه‌ای بانک، بازنویسی کرده است حال آنکه با ظرافت خاصی تنها در یک قسمت متغیر وام را بازنویسی کرده و باقی را به صورت همان متغیر وام در معادله باقی گذاشته است. تعریف معادله حرکت به‌صورت فوق یعنی اینکه مقدار ثابت تغییرات وام، فقط تابع زمان است، در حالی که براساس مطالعات صورت گرفته مانند موکودم پترسن و پترسن (۲۰۰۶) و پترسن و همکاران (۲۰۰۷) این تغییرات تابع تفاوت عایدی نهایی با هزینه نهایی می‌باشد، مانند حالتی که در مقاله حاضر بیان شده است.

۲. ارزیابی بانکداری بدون ربای ایران و تبیین الگوی جایگزین

الگوی فعلی بانکداری بدون ربای ایران، بدون تفکیک بین وظایف تجاری، تخصصی و جامع بانک‌ها در تجهیز و تخصیص منابع و بدون توجه به اهداف و انگیزه‌های سپرده‌گذاران و متقاضیان تسهیلات، شیوه‌های یکسانی برای همه ارائه می‌کند. این الگو در ناحیه تجهیز منابع به سه نوع سپرده قرض‌الحسنه جاری، قرض‌الحسنه پس‌انداز و سپرده سرمایه‌گذاری بسنده کرده است به نحوی که تفاوت آن با تجهیز منابع در بانکداری مبتنی‌بر بهره صوری بوده و در عمل تقریباً همان عملکرد و کارکرد نظام بانکداری مبنی‌بر بهره را دارد. لذا لازم است تغییراتی در جهت پاسخگویی حداکثری به نیازها و شرایط خاص مشتریان، حذف عملی بهره از معاملات و همچنین واقعی کردن استفاده از عقود در تجهیز منابع بانکداری اسلامی صورت پذیرد.

ازآنجاکه نظام مالی از دو بازار پول و سرمایه تشکیل شده است و پول و سرمایه ماهیتاً از هم متمایزند، بازارهای آنها نیز باید از یکدیگر متمایز باشد. به همین جهت الگوی پیشنهادی در تجهیز منابع از الگوی تفکیک در وظایف بانک پیروی می‌کند (میرجلیلی، ۱۳۸۳؛ داودی و صمصامی، ۱۳۸۹؛ محقق‌نیا، ۱۳۹۱ و۱۳۹۳). به این منظور دو بخش پولی و سرمایه‌ای بانکداری از هم جدا شده و برای هر کدام الگو و عملکرد متناسب با آن بخش پیشنهاد شده است. به منظور فراهم کردن سپرده‌گذاری برای همه سلایق و انگیزه‌های مشتریان در یک مجموعه مالی واحد به نام بانک، طراحی این دو بخش صورت می‌پذیرد.

براساس الگوی تفکیک شش نوع سپرده با کارکردهای خاص خود جهت پوشش همه نیازها و سلایق مشتریان طراحی شده است که در ادامه به بیان مختصر ویژگی‌های هر یک از آنها می‌پردازیم.

۱. سپرده جاری: با اقتباس از الگوی بانکداری محدود (Bossone, 2002) و بانکداری دوباجه‌ای (Ahmad, 1997)، این سپرده دارای ماهیت قرض بوده و هیچ‌گونه سودی به آن تعلق نمی‌گیرد و تمامی مانده آن جهت کنترل پول‌آفرینی بانک‌ها ذخیره می‌شود (داودی و محقق‌نیا، ۱۳۸۷؛ محسنی، ۱۳۹۳؛ Khan, 1986 and 1995).

۲. سپرده پس‌انداز: این سپرده براساس وکالت در قرض شکل می‌گیرد و هدف از طراحی

آن احیای سنت قرض‌الحسنه است. بانک باید همه وجوه ناشی از این نوع سپرده را صرف تسهیلات قرض نماید و در قبال انجام این خدمت، کارمزد خود را دریافت کند (مظاهری، ۱۳۸۶). بهترین راه برای جبران کاهش ارزش پول در این نوع سپرده که مورد توافق همه فقها نیز است روش شاخص‌بندی می‌باشد. بهترین روش شاخص‌بندی، قیمت‌گذاری براساس طلا می‌باشد (نزارالعانی، ۲۰۰۰: ۱۳۳) که سابقه اجرایی در بانک صادرات نیز دارد.

۳. سپرده سرمایه‌گذاری وکالت در عقود با بازدهی ثابت: منابع حاصل از این نوع سپرده در بخش تخصیص منابع توسط عقود با بازدهی ثابت به‌کار گرفته می‌شوند و دارای بازدهی انتظاری معینی هستند و سود مورد انتظار با سود تحقق‌یافته خیلی با هم تفاوت ندارند. این عقود شامل مرابحه، فروش اقساطی، خرید دین، سلف، اجاره به شرط تملیک و جعاله است. برای این نوع سپرده اوراق صادر نمی‌شود و سود علی‌الحساب پرداخت می‌شود و در پایان سال مالی نیز مابه‌التفاوت سود تسویه می‌شود.

۴. سپرده سرمایه‌گذاری وکالت در مشارکت: برای این نوع سپرده، گواهی سپرده با سررسید معین در اختیار سپرده‌گذاران قرار داده می‌شود. این اوراق خاصیت انتقال پذیری دارند یعنی می‌توانند در بازار ثانویه معامله شوند و با توجه به عملکرد نهاد مشارکت بانک و سود مورد انتظار پروژه‌های نهاد مشارکت، سود اوراق خود را در هر لحظه دریافت کرده و اوراق را منتقل کنند. به همین دلیل دیگر نیازی به پرداخت سود علی‌الحساب توسط بانک وجود ندارد.

۵. سپرده سرمایه‌گذاری وکالت در مضاربه: این نوع سپرده هم دارای ویژگی‌های سپرده بالاست با این تفاوت که منابع آن صرفاً در امور تجارت و در قالب عقد مضاربه به‌کار گرفته می‌شود.

۶. سپرده سرمایه‌گذاری وکالت عام: بانک می‌تواند وجوه جمع‌آوری شده براساس این سپرده را در تمام عقود موجود در بخش سرمایه‌ای به‌کار گیرد. در پایان سال مالی، بانک براساس میزان وجوه استفاده شده از این حساب در هر نهاد، سود ترکیبی این سپرده‌ها را مشخص کرده و به مشتریان پرداخت می‌کند. بانک به صاحبان این سپرده‌ها سود علی‌الحساب پرداخت می‌کند. لازم به ذکر است که با وجود ذخیره صد درصدی سپرده جاری، دیگر از سپرده‌های سرمایه‌گذاری ذخیره قانونی کسر نمی‌شود.

در جدول زیر به‌طور خلاصه مشکلات اساسی بانکداری بدون ربای ایران و نحوه برطرف شدن این مشکلات در الگوی جایگزین به همراه منابع آنها بیان شده است.

جدول ۱. ارزیابی تجهیز منابع در بانکداری بدون ربای ایران

ردیف	نوع مشکل	رفع مشکل در الگوی جایگزین	منبع
۱	پول‌آفرینی	با ذخیره صد درصدی سپرده‌های جاری براساس الگوی بانکداری محدود و دوباجه‌ای، عامل اصلی پول‌آفرینی یعنی همان سپرده‌های جاری از چرخه پول‌آفرینی خارج و سپرده‌های مردم مستقیم وارد بخش واقعی و چرخه تولید خواهد شد.	داودی و محقق (۱۳۸۷: ۹۴)، محسنی (۱۳۹۳: ۹۲)، بوسنه (۲۰۰۲: ۸)، سیفلو (۱۳۸۹: ۹۶)، خان (۱۹۸۶ و ۱۹۹۵)، احمد (۱۹۹۷)
۲	قرار نداشتن پول در جایگاه واقعی خود	در الگوی جایگزین دیگر پول به تنهایی ارزش‌آفرینی نمی‌کند بلکه به همراه یک عقد اسلامی و در بخش واقعی اقتصاد منجر به سود می‌شود.	توتونچیان (۱۳۷۹: ۹۹)، ابوالحسنی و همکاران (۱۳۹۱: ۹۱)، حسینی (۱۳۹۲: ۴۷)
۳	عدم جبران کاهش ارزش پول در سپرده‌های قرض	با شاخص‌بندی سپرده‌های قرض به‌وسیله طلا، که مورد توافق همه فقها و دارای سابقه اجرایی نیز است، این مشکل برطرف می‌شود.	یوسفی (۱۳۸۱: ۱۵۴)، یوسفی (۱۳۸۳: ۱۴۱-۱۳۹)، باطنی (۱۳۷۷: ۴۵)، نزار العانی (۲۰۰۰: ۱۳۷-۱۳۳)، موسایی (۱۳۸۲)، سیفلو (۱۳۸۹: ۷۱)، موسویان (۱۳۸۳: ۴۴۴)
۴	فراموشی سنت قرض‌الحسنه	استفاده از عقد وکالت در قرض، منجر به استفاده صد در صدی سپرده‌های قرض در تسهیلات قرض‌الحسنه خواهد شد.	موسویان (۱۳۸۳: ۴۴۱)، کاشانی (۱۳۷۶: ۱۰۰).
۵	عدم پوشش نیازها و روحیات سپرده‌گذاران	با توجه به وجود انواع مختلف محصولات سپرده‌ای توسط بانک همه نیازها و روحیات مربوط به سپرده‌گذاری اعم از ریسک‌پذیر و ریسک‌گریز پوشش داده می‌شود.	موسویان و میسمی (۱۳۹۳: ۶۹۶)، موسویان (۱۳۸۶)

ردیف	نوع مشکل	رفع مشکل در الگوی جایگزین	منبع
۶	استفاده از حیله‌های شرعی	با توجه به اینکه محصولات مختلف برای نیازها و روحیات مختلف سپرده‌گذاران طراحی و به‌طور واقعی اجرا می‌شود، در عمل دیگر نیازی به استفاده از حیله‌های شرعی باقی نمی‌ماند.	موسویان (۱۳۸۶: ۱۰۵ و ۱۰۶)، میرمعزی (۱۳۸۵)، شاطبی (۱۴۲۲ ق، ج ۲: ۳۱۲)
۷	وجود ذخیره قانونی برای سپرده‌های سرمایه‌گذاری	با وجود ذخیره صددرصدی سپرده جاری، در الگوی جایگزین دیگر از سپرده‌های سرمایه‌گذاری ذخیره قانونی کسر نمی‌شود.	محقق‌نیا (۱۳۹۳: ۲۲۱ و ۲۲۲).
۸	نحوه پرداخت سود علی‌الحساب	ازآنجاکه سپرده‌های مشارکتی که میزان سود آنها متغیر و نامشخص است به‌صورت اوراق سپرده در اختیار مشتریان قرار می‌گیرد مشکل سود علی‌الحساب با خرید و فروش اوراق در بازار ثانویه برطرف و سود قطعی در انتهای دوره به دارنده نهایی اوراق تعلق می‌گیرد.	شیرانی (۱۳۸۶ : ۲۷۷)، میرجلیلی (۱۳۸۱: ۱۳۰)، سیفلو (۱۳۸۹: ۸۴)
۹	عدم تفکیک حسابداری	توجه به ساختار مالی جدا، امکان محاسبه سود در هر بخش به‌طور تفکیکی امکان‌پذیر خواهد بود.	محقق‌نیا (۱۳۹۳: ۲۲۲)
۱۰	خروج پول از بخش واقعی اقتصاد	با توجه به جدا شدن بخش پولی و سرمایه‌ای و فعالیت تخصصی بانک در بخش سرمایه‌ای، سپرده‌های سرمایه‌گذاری مستقیم وارد بخش واقعی اقتصاد می‌شوند.	چپرا (۲۰۰۸: ۱۰)، موسویان و میسمی (۱۳۹۳: ۳۸)
۱۱	نبود شفافیت در عملکرد بانک	ازآنجاکه سپرده‌ها مستقیم وارد بخش واقعی اقتصاد شده و بانک صرفاً حق‌الوکاله خود را دریافت می‌دارد، سود سپرده‌های مختلف به‌صورت کاملاً شفاف، براساس وضعیت موجود اقتصاد تعیین و پرداخت می‌شود.	صادقی شاهدانی و محسنی (۱۳۹۲: ۱۳)، بیدآباد (۱۳۹۰)

ردیف	نوع مشکل	رفع مشکل در الگوی جایگزین	منبع
۱۲	ورود غیرتخصصی بانک به بازار سرمایه	با تقسیم وظایف در الگوی پیشنهادی بانک تنها به انجام وظایف واسطه‌گری پرداخته و ارائه خدمات تخصصی سرمایه‌ای به نهادهای دیگر واگذار می‌شود.	بیدآباد (۱۳۹۰)، میرجلیلی (۱۳۸۳)، محقق‌نیا، (۱۳۹۳: ۳۰۲)، صالح و همکاران (۲۰۱۱)، احمد (۱۹۹۷)

مأخذ: یافته‌های تحقیق.

۳. مبانی نظری کنترل بهینه‌یابی تصادفی

در نظریه کنترل بهینه، مسئله بهینه‌یابی به‌جای دو متغیر، دارای سه نوع متغیر است. یعنی علاوه بر متغیر زمان t و متغیر وضعیت x(t) متغیر کنترل u(t) نیز مورد توجه قرار گرفته است (پورکاظمی، ۱۳۹۳: ۲۴۴). در این مسائل تابع هدف معمولاً وابسته به دو نوع متغیر وضعیت و کنترل است و قیود در آن معادلات حرکت نام دارند و به شکل معادلات دیفرانسیل می‌باشند. برای حل مسائل کنترل بهینه تصادفی از روش حساب تصادفی یا حل معادلات دیفرانسیل تصادفی (SDE)[1] استفاده می‌شود. صورت کلی مسئله کنترل بهینه تصادفی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$Max \;\; Z = E\left[\int_{t_0}^{T} I(t,x,u)dt + F(x(T),T)\right]$$
$$dx = f(t.x,u)dt + \sigma(t.x,u)dw \qquad s.t.$$
$$x(t_0) = x_0$$
$$z\big(T,x(T)\big) = F(x(T),T)$$

در رابطه بالا $x(t)$ متغیر وضعیت، $u(t)$ متغیر کنترل و $w(t)$ فرایند براونی هستند (Bertsekas, 2003: 49). بنابر نوع الگویی که قرار است مدل‌سازی شود، تابع هدف و متغیرها، متفاوت خواهند بود. موکودم پترسن و دیگران (۲۰۰۷) در مطالعه خود، معادله حرکت را در یک مسئله بهینه‌سازی رفتار بانک به‌صورت زیر تعریف کرده‌اند:

$$dL(t) = L(t)[(r^L(t) - c^L)dt + \sigma_t(t)dw(t)]$$

این معادله بیانگر تبعیت تغییرات اعطای وام از حرکت تصادفی براونی است و تغییرات غیرتصادفی و معین اعطای وام، تابع تفاضل عایدی و هزینه وام می‌باشد.

1. Stochastic Differential Equation (SDE)

در مطالعه‌ای دیگر مرتون (۱۹۷۳) در یک مسئله بهینه‌سازی ثروت شخصی معادله حرکت را به‌صورت زیر تعریف می‌کند:

$$dw(t) = [s(1 - w_1)w + aw_1w - c]dt + w_1w\sigma_t(t)dz(t)$$

که در آن w کل ثروت، c مصرف و w_1 سهم ثروت ریسکی است. مرتون در مطالعه خود c و w_1 را به‌عنوان متغیرهای کنترل و w را به‌عنوان متغیر وضعیت در نظر گرفته است. ویژگی این نوع معادله حرکت، در این است که دارای بیش از یک متغیر کنترل بوده و در قسمت تغییرات تصادفی براونی، متغیر کنترل به‌عنوان ضریب وارد معادله شده است.

در مقاله‌ای دیگر با عنوان نظریه عقلایی قیمت‌گذاری اختیارات، مرتون (۱۹۷۳) مسئله‌ای را با استفاده از مدل بهینه‌یابی تصادفی تعریف می‌کند که دارای سه متغیر وضعیت به نام‌های قیمت سهام، قیمت اوراق قرضه و قیمت اختیارات است که به‌صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$dS(t)/S(t) = \mu_S(t)dt + \sigma_S(t)dw_S(t)$$
$$dB(t)/B(t) = \mu_B(t)dt + \sigma_B(t)dw_B(t)$$
$$dY(t) = Y(t)[\mu_Y(t)dt + \sigma_{YS}(t)dw_S(t) + \sigma_{YB}(t)dw_B(t)]$$

نکته مهمی که در این مورد وجود دارد این است که مرتون برای تغییرات قیمت سهام و قیمت اوراق قرضه معادلات حرکت تصادفی مستقل تعریف کرده است و با تعریف تابعی میانی از ترکیب این دو معادله حرکت، معادله حرکت قیمت اختیارات را استخراج نموده است.

کیایی و همکاران (۱۳۹۲) که در مقاله خود به مدل‌سازی ریاضی عملکرد بانک پرداخته است، مسئله خود را با یک قید تصادفی خطی و تابع هدف درجه دوم تشکیل داده است. در این مطالعه، میزان تسهیلات به‌عنوان متغیر وضعیت با نوسانات تصادفی براونی و پرشی پواسن و میزان سپرده‌ها به‌عنوان متغیر کنترل در نظر گرفته شده است که با توان درجه دو در تابع هدف وارد شده است.

اساس حل مسئله کنترل بهینه غیرتصادفی مبتنی بر معادلات دیفرانسیل معمولی است، سه روش حساب تغییرات، اصل ماکزیمم و برنامه‌ریزی پویا (معادله بلمن) برای حل مسئله کنترل وجود دارد که از بین این سه روش، تنها روش سوم یعنی برنامه‌ریزی پویا و معادله بلمن قابل استفاده برای حل مسائل کنترل بهینه تصادفی است. لذا برای حل این‌گونه مسائل از معادله بلمن استفاده می‌شود (پورکاظمی، ۱۳۹۳: ۳۷۳).

برای به‌دست آوردن معادله بلمن از اصل بهینگی استفاده می‌شود. این معادله به‌صورت زیر است (Bertsekas, 2003: 55):

$$-z_t(t,x) = \underset{u}{Max}\left[I(t,x,u) + z_x(t,x)f(t.x,u) + \frac{1}{2}\sigma^2 z_{XX}(t,x)\right]$$

حل مسائل بهینه‌سازی پویای تصادفی که معادله حرکت آن یک معادله دیفرانسیل تصادفی باشد، در نهایت به یک معادله دیفرانسیل از همین نوع می‌انجامد. تفاوت این معادله دیفرانسیل با معادله حرکت این است که میزان بهینه متغیر کنترل برحسب متغیر وضعیت در معادله حرکت جایگذاری شده است. ازآنجاکه حل معادلات دیفرانسیل تصادفی به‌آسانی مقدور نیست، در بسیاری از مطالعات کاربردی از روش‌های شبیه‌سازی به منظور حل عددی این معادلات استفاده می‌شود (کیایی و همکاران، ۱۳۹۲: ۶۷). در مدل‌سازی تحقیق حاضر، از همه مبانی ذکر شده استفاده شده است، تا بتوان به یک الگوی جامع، دقیق و علمی دست یافت.

۴. مدل بهینه‌یابی پویای تصادفی تجهیز منابع در بانکداری اسلامی

در این قسمت از تحقیق به ارائه مدل بهینه‌یابی پویای تصادفی تجهیز منابع در بانکداری اسلامی می‌پردازیم. بر این مبنا که می‌توان یک مدل بهینه‌یابی پویای تصادفی برای توضیح عملکرد بانک اسلامی در بخش تجهیز منابع ارائه کرد، به این صورت که بتوان مسیر بهینه تجهیز منابع را در هر لحظه از زمان مشخص و عملکرد بانک را منطبق با آن تنظیم کرد. ازآنجاکه فعالیت‌های بانک در طول زمان پیوسته می‌باشد، به منظور تعیین میزان بهینه انواع سپرده، از نظریه بهینه‌سازی تصادفی پیوسته پویا استفاده شده است. مدلی که در ادامه به بیان آن می‌پردازیم تاکنون در ادبیات داخلی مطرح نشده و دارای نوآوری‌های مخصوص به خود است به نحوی که قابلیت تبیین عملکرد یک بانک اسلامی در بخش تجهیز منابع را با حداکثر دقت داشته باشد.

۴-۱. معرفی ساختار و اجزای تشکیل‌دهنده مدل

درآمدها: درآمدهای بانک شامل درآمدهای کارمزدی و خدماتی در بخش پولی و حق‌الوکاله در بخش سرمایه‌ای است، که به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

$$Total\ Income: y_t + r^c C(t) + r^{D_m} D_m(t) + r^{D_{if}} D_{if}(t) + r^{D_{iv}} D_{iv}(t) \qquad (۱)$$

که در آن y_t درآمد حاصل از ارائه خدمات بانکی، C سرمایه بانک، D_m سپرده‌های اختصاص‌یافته در زمینه قرض، D_{if} سپرده‌هایی اختصاص یافته درزمینه عقود با بازدهی ثابت و D_{iv} سپرده‌های اختصاص‌یافته در زمینه عقود مشارکتی می‌باشد و r^c نرخ سودی است که از به‌کارگیری سرمایه به‌دست می‌آید، r^{D_m} کارمزد ارائه خدمات قرض‌الحسنه، $r^{D_{if}}$ حق‌الوکاله به‌کارگیری سپرده‌ها در عقود با بازدهی ثابت و $r^{D_{iv}}$ حق‌الوکاله به‌کارگیری سپرده‌ها در عقود مشارکتی است.

هزینه‌ها: هزینه‌های بانک به دو بخش هزینه‌های خود بانک و هزینه‌های نهادهای زیرمجموعه بانک تقسیم می‌شود. هزینه‌های خود بانک در زمان t دارای یک فرم درجه ۲ از میزان کل سپرده‌ها (سپرده‌های بخش پولی و بخش سرمایه‌ای بانک) می‌باشد و هزینه نهادهای زیرمجموعه بانک هم به‌عنوان یک متغیر جدا در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه هزینه بانک را می‌توان به‌صورت زیر نشان داد:

$$Cost\ of\ the\ Bank(t) = a_0 + a_1 D(t) + a_2 D^2(t) + c_m D_m(t) + c_{if} D_{if}(t) + c_{iv} D_{iv}(t) \qquad (۲)$$

که در آن D مجموع کل سپرده‌های بانک، c_m هزینه نهایی تخصیص سپرده‌های قرض‌الحسنه، c_{if} هزینه نهایی تخصیص سپرده‌های عقود با بازدهی ثابت، c_{iv} هزینه نهایی تخصیص سپرده‌های مشارکتی و $[a_0, a_1, a_2]$ بردار پارامترهای ساختار هزینه‌ای بانک است. در نظر گرفتن فرم درجه ۲ به‌دلیل وجود صرفه به مقیاس است، معمولاً برای فعالیت بانک هزینه‌های سخت‌افزاری و نرم‌افزاری یکسانی در ابتدا مورد نیاز است، بنابراین با افزایش میزان سپرده، هزینه نهایی شکل نزولی خواهد داشت. اما از یک سطح مشخص به بعد، جذب سپرده، نیاز به هزینه‌های بیشتر به منظور ارتقای زیرساخت‌ها در بانک، مانند افزایش تعداد شعب یا ارتقای نرم‌افزارهای مورد استفاده را دارد که این امر باعث می‌شود افزایش هزینه، فزاینده باشد و هزینه نهایی صعودی شود (کیایی و همکاران، ۱۳۹۲: ۱۱۲). تفکیک هزینه‌های تخصیص سپرده‌ها نیز به این دلیل است که ساختار هزینه‌ای تخصیص انواع سپرده کاملاً متفاوت از یکدیگر است.

متغیرهای وضعیت: با توجه به غیر متعین بودن مصرف سپرده‌ها در هر لحظه از زمان، تغییرات در هر یک از انواع سپرده، از یک فرایند تصادفی تبعیت می‌کند. به این صورت که اگر $D_m(t)$ میزان سپرده پس‌انداز براساس عقد وکالت در قرض باشد، می‌توانیم تغییرات آن را به‌صورت زیر بیان کنیم:

$$dD_m(t)/D_m(t) = \left(\pi^e_{D_m} - c_m\right)dt + \sigma_{D_m}(t)dw_{D_m}(t) \quad (۳)$$

بر این اساس می‌توانیم تغییرات $D_{if}(t)$ و $D_{iv}(t)$ را نیز به‌صورت زیر بیان نماییم:

$$dD_{if}(t)/D_{if}(t) = \left(\pi^e_{D_{if}} - c_{if}\right)dt + \sigma_{D_{if}}(t)dw_{D_{if}}(t) \quad (۴)$$

$$dD_{iv}(t)/D_{iv}(t) = \left(\pi^e_{D_{iv}} - c_{iv}\right)dt + \sigma_{D_{iv}}(t)dw_{D_{iv}}(t) \quad (۵)$$

مجموع کل سپرده‌های بانک $D(t)$ تابعی از سه نوع سپرده فوق یعنی $D_m(t)$، $D_{if}(t)$ و $D_{iv}(t)$ است. به‌نحوی که در زمان t برای کل سپرده‌های بانک داریم:

$$D(t) = F\left(t, D_m(t), D_{if}(t), D_{iv}(t)\right) \quad (۶)$$

در نتیجه براساس دیفرانسیل‌گیری تصادفی کلی و قضیه ایتو (Allen, 2007: 95; Tsay, 2002: 228) خواهیم داشت:

$$dD(t) = D(t)\left(\mu_D(t)dt + \sigma_{DD_m}(t)dw_{D_m}(t) + \sigma_{DD_{if}}(t)dw_{D_{if}}(t) + \sigma_{DD_{iv}}(t)dw_{D_{iv}}(t)\right) \quad (۷)$$

در معادله دیفرانسیلی فوق ضرایب به صورت زیر تعریف می‌شوند (Hanson, 2007: 304):

$$\begin{aligned}\mathbf{D(t)\mu_D(t)} = {} & F_t + \mu_{D_m} D_m F_{D_m} + \mu_{D_{if}} D_{if} F_{D_{if}} + \mu_{D_{iv}} D_{iv} F_{D_{iv}} + \\ & \frac{1}{2}\left(\sigma^2_{D_m} D_m{}^2 F_{D_m D_m} + 2\rho_{D_m D_{if}}.\sigma_{D_m}\sigma_{D_{if}} D_m D_{if} F_{D_m D_{if}} + 2\rho_{D_m D_{iv}}.\sigma_{D_m}\sigma_{D_{iv}} D_m D_{iv} F_{D_m D_{iv}} + \right. \\ & \left. 2\rho_{D_{iv} D_{if}}.\sigma_{D_{iv}}\sigma_{D_{if}} D_{iv} D_{if} F_{D_{iv} D_{if}} + \sigma^2_{D_{if}} D_{if}{}^2 F_{D_{if} D_{if}} + \sigma^2_{D_{iv}} D_{iv}{}^2 F_{D_{iv} D_{iv}}\right)\end{aligned} \quad (۸)$$

$$\mathrm{D(t)\sigma_{DD_m}(t) = \sigma_{D_m} D_m F_{D_m}} \quad (۹)$$

$$\mathrm{D(t)\sigma_{DD_{if}}(t) = \sigma_{D_{if}} D_{if} F_{D_{if}}} \quad (۱۰)$$

$$\mathrm{D(t)\sigma_{DD_{iv}}(t) = \sigma_{D_{iv}} D_{iv} F_{D_{iv}}} \quad (۱۱)$$

به این صورت که عبارت اول ضریب dt، عبارت دوم، سوم و چهارم هم به‌ترتیب ضریب dw_{D_m} ، $dw_{D_{if}}$ و $dw_{D_{iv}}$ می‌باشند. به این ترتیب معادله دیفرانسیل تصادفی کل سپرده‌ها که مستخرج از سه معادله دیفرانسیل تصادفی انواع سپرده‌هاست با ذکر جزئیات و ضرایب به‌دست می‌آید. با جایگزین کردن مقادیر میانگین انتظاری سپرده‌ها براساس روابط سوم تا پنجم، می‌توانیم معادله نهایی دیفرانسیل تصادفی کل سپرده‌ها را به‌صورت زیر بیان کنیم:

$$dD(t) = \left(\left(\pi^e_{D_m} - c_m\right)D_m(t) + \left(\pi^e_{D_{if}} - c_{if}\right)D_{if}(t) + \left(\pi^e_{D_{iv}} - c_{iv}\right)D_{iv}(t)\right)dt + \sigma_{D_m}D_m(t)dw_{D_m}(t) + \sigma_{D_{if}}D_{if}(t)dw_{D_{if}}(t) + \sigma_{D_{iv}}D_{iv}(t)dw_{D_{iv}}(t) \quad (۱۲)$$

روابط ساختاری: رابطه انواع سپرده‌ها، سرمایه بانک و درآمد ناشی از ارائه خدمات بانک با کل سپرده‌های بانک به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$D_m(t) = \alpha(t)\, D(t) \quad (۱۳)$$

$$D_{if}(t) = \lambda(t)\, D(t) \quad (۱۴)$$

$$D_{iv}(t) = \gamma(t)\, D(t) \quad (۱۵)$$

$$C(t) = \theta\, D(t) \quad (۱۶)$$

$$y_t = \delta\, D(t) \quad (۱۷)$$

در این روابط α، λ و γ به‌ترتیب سهم سپرده‌های وکالت در قرض، وکالت در عقود با بازدهی ثابت و وکالت در مشارکت از کل سپرده‌ها می‌باشند. این سه را می‌توان به‌عنوان متغیر کنترل در مدل مدنظر قرار داد چرا که تغییر این سه متغیر مستقیماً در سوددهی بانک تأثیرگذار خواهد بود و اصلی‌ترین عواملی که می‌توانند این سه متغیر را تغییر دهند تبلیغات بانک و سپرده وکالت عام است. به این صورت که بانک می‌تواند برای بالاتر بردن سهم یک نوع خاص از سپرده نسبت به تبلیغ جذابیت‌های آن سپرده اقدام کرده یا مقادیر حاصل از سپرده وکالت عام را در جهت آن نوع خاص از سپرده به‌کار گیرد. اکنون با توجه به معادلات شماره ۱۳ تا ۱۷ می‌توانیم معادله ۱۸ را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$dD(t) = D(t)\left[\left(\alpha(t)\left(\pi^e_{D_m} - c_m\right) + \lambda(t)\left(\pi^e_{D_{if}} - c_{if}\right) + \gamma(t)\left(\pi^e_{D_{iv}} - c_{iv}\right)\right)dt + \alpha(t)\sigma_{D_m}dw_{D_m}(t) + \lambda(t)\sigma_{D_{if}}dw_{D_{if}}(t) + \gamma(t)\sigma_{D_{iv}}dw_{D_{iv}}(t)\right] \quad (۱۸)$$

۲-۴. تشکیل مسئله بهینه‌یابی پویای تصادفی تجهیز منابع

تابع هدف بانک مانند هر مؤسسه خصوصی دیگر، حداکثر نمودن ارزش فعلی خالص سود است که از تفاضل ارزش فعلی درآمد و هزینه بانک به‌دست می‌آید. این مسئله سه قید تصادفی دارد که شامل معادله دیفرانسیل تصادفی سه نوع سپرده ذکر شده در مدل، یعنی $D_m(t)$، $D_{if}(t)$ و $D_{iv}(t)$ می‌باشد. مشابه همین کار توسط مرتون (۱۹۷۳) صورت پذیرفته است. به این صورت که مرتون در فصل هشتم کتاب خود با عنوان نظریه قیمت‌گذاری عقلایی اختیارات، تغییر در قیمت سهام، اوراق قرضه و اختیارات را به‌صورت یک معادله دیفرانسیل تصادفی بیان کرده که تغییرات قیمت اختیارات در آن، تابعی از تغییرات قیمت در سهام و اوراق قرضه است. با این توضیحات می‌توانیم مسئله بهینه‌یابی پویای تصادفی موردنظرمان را به‌صورت زیر بیان نماییم:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{Max}\ \boldsymbol{Z}\left(t, D_m(t), D_{if}(t), D_{iv}(t)\right) \\
&\quad = E\left[\int_{t_0}^{T} e^{-\beta t}\left[y_t + r^{c}C(t) + r^{D_m}D_m(t) + r^{D_{if}}D_{if}(t) + r^{D_{iv}}D_{iv}(t)\right.\right. \\
&\quad \left.\left. - \left(a_0 + a_1 D(t) + a_2 D^{\gamma}(t) + c_m D_m(t) + c_{if} D_{if}(t) + c_{iv} D_{iv}(t)\right)\right] dt\right] \\
&\boldsymbol{s.t.}\ \left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{dD_m(t)} = D_m(t)\left[\mu_{D_m}(t)dt + \sigma_{D_m}(t)dw_{D_m}(t)\right] \\ \boldsymbol{dD_{if}(t)} = D_{if}(t)\left[\mu_{D_{if}}(t)dt + \sigma_{D_{if}}(t)dw_{D_{if}}(t)\right] \\ \boldsymbol{dD_{iv}(t)} = D_{iv}(t)\left[\mu_{D_{iv}}(t)dt + \sigma_{D_{iv}}(t)dw_{D_{iv}}(t)\right] \end{array}\right\}
\end{aligned}
\qquad (۱۹)
$$

که در آن β نرخ تنزیل استفاده شده برای محاسبه ارزش حال سودهای آینده بانک است. نکته‌ای که وجود دارد این است که مسئله بهینه‌سازی تصادفی بالا دارای سه متغیر وضعیت $D_m(t)$، $D_{if}(t)$ و $D_{iv}(t)$ است که معادله دیفرانسیل تصادفی هر یک به‌عنوان یک قید تصادفی در مدل وارد شده است. نکته مهمی که در مسئله بهینه‌سازی فوق وجود دارد، مسئله فاقد تابع انتهایی است؛ زیرا محاسبه‌های بانک در الگوی پیشنهادی برای درآمدها و هزینه‌ها در هر لحظه از زمان، مشخص بوده و میزان قطعی سودآوری طرح‌های اقتصادی بانک در پایان دوره تأثیری بر میزان سود بانک ندارد چرا که این سودها متعلق به موکلان بانک (صاحبان سپرده) می‌باشد و بانک میزان مشخص حق‌الوکاله خود را برداشت می‌کند. انگیزه بانک برای سودآوری بیشتر در الگوی حاضر، رضایت مشتریان و جذب بیشتر سپرده است.

مدل معرفی شده در معادله (۱۹) با سه متغیر وضعیت است. وجود چند متغیر کنترل، خیلی مدل را پیچیده نخواهد کرد، اما افزایش تعداد متغیرهای وضعیت، کار را برای محاسبه و حل مدل بسیار سخت‌تر می‌کند. یکی از نوآوری‌های مهم تحقیق حاضر، ساده کردن مدل با حفظ اطلاعات اصلی آن می‌باشد. به این صورت که با تعریف یک تابع میانی، شامل سه متغیر وضعیت مسئله، یک متغیر وضعیت کلی تعریف می‌نماییم که اطلاعات موجود در این سه متغیر وضعیت را در خود داشته باشد. در این صورت ما توانسته‌ایم با حفظ اطلاعات اصلی مسئله، آن را به یک مسئله ساده‌تر با یک متغیر وضعیت تبدیل کنیم.

با توجه به ساده‌سازی‌های انجام گرفته و استفاده از معادله (۱۸) به‌عنوان قید مسئله، می‌توانیم مسئله بهینه‌سازی تصادفی در معادله (۱۹) را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\begin{aligned} Max\ \ Z(t,D(t)) = E\Big[\int_{t_0}^{T} e^{-\beta t}\Big[(\delta + r^{c}\theta + \alpha(t)r^{D_m} + \lambda(t)r^{D_{if}} + \gamma(t)r^{D_{iv}})D(t) - \Big(a_0 + \\ a_1 D(t) + a_2 D^{2}(t) + c_m\alpha(t)D(t) + c_{if}\lambda(t)D(t) + c_{iv}\gamma(t)D(t)\Big)\Big]dt\Big] \end{aligned} \quad (۲۰)$$

$$\begin{aligned} s.t.\ \Big\{ dD(t) = D(t)\Big[\Big(\alpha(t)\big(\pi^{e}_{D_m} - c_m\big) + \lambda(t)\big(\pi^{e}_{D_{if}} - c_{if}\big) + \gamma(t)\big(\pi^{e}_{D_{iv}} - c_{iv}\big)\Big)dt \\ + \alpha(t)\sigma_{D_m}dw_{D_m}(t) + \lambda(t)\sigma_{D_{if}}dw_{D_{if}}(t) + \gamma(t)\sigma_{D_{iv}}dw_{D_{iv}}(t)\Big]\Big\} \end{aligned}$$

در این مسئله، سه متغیر کنترل $\alpha(t)$، $\lambda(t)$ و $\gamma(t)$ اضافه شده است که بیانگر سهم هر یک از سپرده‌هاست. بانک می‌تواند با کنترل این سه متغیر و تغییر آنها با استفاده از ابزار در اختیار خود مانند تبلیغات و سپرده‌های وکالت عام، مستقیماً میزان سودآوری خود را تغییر دهد. کامین و شوارتز (۲۰۱۲) هم در کتاب خود و در مسئله تخصیص ثروت شخصی بین مصرف جاری و سرمایه‌گذاری در زمینه‌های جنبی، سهمی از ثروت را که به صورت دارایی ریسکی اختصاص یافته، را به‌عنوان متغیر کنترل در نظر گرفته است که مشابه کاری است که ما در اینجا در مورد متغیرهای کنترل انجام داده‌ایم.

۳-۴. حل مسئله بهینه‌یابی پویای تصادفی تجهیز منابع

با توجه به اینکه مسئله تحقیق از نوع کنترل بهینه پویای تصادفی است، برای حل آن باید از روش برنامه‌ریزی پویا و به‌کارگیری معادله بلمن، استفاده کرد. نگارنده با رجوع به روش

استخراج معادله بلمن و استفاده از اصل بهینگی، معادله بلمن متناسب با مسئله فوق را به‌صورت زیر استخراج نموده است:

$$-z_t(t,x) = \max_u \left[I(t,x,u) + z_x(t,x)\mathrm{f}(\mathrm{t}.x,u) + \frac{1}{2} z_{xx}(t,x)\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + 2\rho_{13}\sigma_1\sigma_3 + 2\rho_{23}\sigma_2\sigma_3\right)\right] \quad (۲۱)$$

که در آن ρ_{12}، ρ_{13} و ρ_{23} ضریب همبستگی حرکت‌های براونی را با هم نشان می‌دهد. با قرار دادن تابع اصلی و جایگزینی عبارات معادل $f(\mathrm{t}.x,u)$، $\sigma_1(\mathrm{t}.x,u)$، $\sigma_2(\mathrm{t}.x,u)$ و $\sigma_3(\mathrm{t}.x,u)$ در معادله بلمن ذکر شده در معادله (۲۲)، به معادله بلمن متناسب با مسئله نهایی تحقیق دست خواهیم یافت که به‌صورت زیر است (به‌منظور ساده‌تر شدن مدل، ضریب همبستگی متغیرهای تصادفی برابر صفر در نظر گرفته شده است):

$$-z_t(t,D) = \max_u \left[e^{-\beta t}\left[D\left(\delta + r^c\theta + \alpha r^{D_m} + \lambda r^{D_{if}} + \gamma r^{D_{iv}}\right) - \left(a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + D\left(c_m\alpha + c_{if}\lambda + c_{iv}\gamma\right)\right)\right] + z_D(t,D).D\left(-\alpha c_m + \lambda\left(\pi^e_{D_{if}} - c_{if}\right) + \gamma\left(\pi^e_{D_{iv}} - c_{iv}\right)\right) + \frac{1}{2} z_{DD}(t,D).D^2\left(\alpha^2\sigma^2_{D_m} + \lambda^2\sigma^2_{D_{if}} + \gamma^2\sigma^2_{D_{iv}}\right)\right] \quad (۲۲)$$

در صورتی که بخواهیم مسئله نسبت به متغیرهای کنترل ماکزیمم باشد، باید از رابطه فوق نسبت به این متغیرها، مشتق جزئی گرفته و آنها را برابر صفر قرار دهیم و مقادیر به‌دست آمده را در معادله (۲۳) جایگزین کنیم. با جایگزینی مقدار بهینه متغیرهای کنترل در معادله بلمن (۲۳)، و حل این معادله با استفاده از روش ضرایب نامعین (پورکاظمی، ۱۳۹۳: ۴۵۲)، مقادیر نهایی و بهینه متغیرهای کنترل به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\alpha^* = \frac{r^{Dm} - (1+A_1)c_m + A_1\pi^e_{Dm}}{2A_2 D\sigma^2_{Dm}} + \frac{\pi^e_{Dm} - c_m}{\sigma^2_{Dm}} \quad (۲۳)$$

$$\lambda^* = \frac{r^{D_{if}} - (1+A_1)c_{if} + A_1\pi^e_{D_{if}}}{2A_2 D\sigma^2_{D_{if}}} + \frac{\pi^e_{D_{if}} - c_{if}}{\sigma^2_{D_{if}}} \quad (۲۴)$$

$$\gamma^* = \frac{r^{Div} - (1+A_1)c_{iv} + A_1\pi^e_{D_{iv}}}{2A_2 D\sigma^2_{D_{iv}}} + \frac{\pi^e_{D_{iv}} - c_{iv}}{\sigma^2_{D_{iv}}} \quad (۲۵)$$

در نهایت با جایگذاری مقادیر بهینه متغیرهای کنترل در معادله دیفرانسیل حرکت و با استفاده از فرمول ایتو می‌توانیم مقدار بهینه متغیر وضعیت یعنی $D(t)$ را در هر لحظه از

زمان به‌دست آوریم (Hanson, 2007: 250). نکته‌ای که در مورد معادله حرکت وجود دارد این است که این معادله به‌جای یک نوع حرکت براونی، شامل سه نوع حرکت براونی است، لذا باید فرمول ایتو را برای این نوع از معادله، دوباره استخراج کرد. در اکثر کتاب‌های مرجع فرمول مشخص و دقیقی برای این موارد ذکر نشده و صرفاً به بیان صورت‌برداری اکتفا نموده‌اند (Tsay, 2002: 242). به همین جهت با محاسبات نگارنده این فرمول به‌صورت زیر به‌دست آمده است:

$$dY = (F_t + F_x\,\alpha + 1/2\,F_xx\,[\sigma_1\hat{}2 + \sigma_2\hat{}2 + \sigma_3\hat{}2\,])dt + F_x\,[\sigma_1\,dw_1 + \sigma_2\,dw_2 + \sigma_3\,dw_3\,] \quad (۲۶)$$

براین اساس اگر طبق معادله (۲۰)، صورت کلی معادله حرکت به‌صورت زیر باشد:

$$\frac{dD}{D} = \left[\alpha dt + \sigma_1 dw_{D_m} + \sigma_2 dw_{D_{if}} + \sigma_3 dw_{D_{iv}}\right]$$

با تعریف $Y = F(t,x) = lnD$ و تشکیل فرمول ایتو براساس این تابع، جواب معادله دیفرانسیل به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$D^* = D_0 e^{\left(\alpha - \frac{1}{2}[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2]\right)t + \sigma_1 w_{D_m} + \sigma_2 w_{D_{if}} + \sigma_3 w_{D_{iv}}} \quad (۲۷)$$

در مرحله آخر با جایگذاری مقادیر معادل α، σ_1، σ_2 و σ_3 به‌دست آمده از معادلات ۲۵ تا ۲۸، می‌توانیم به مسیر بهینه متغیر وضعیت مسئله یعنی مقدار سپرده بانک دست یابیم.

$$\alpha = \left(\frac{r^{D_m} - (1+A_1)c_m + A_1\pi^e_{D_m}}{2A_1 D\sigma^2_{D_m}} + \frac{\left(\pi^e_{D_m} - c_m\right)^2}{\sigma^2_{D_m}} + \frac{\left(r^{D_{if}} - (1+A_1)c_{if} + A_1\pi^e_{D_{if}}\right)\left(\pi^e_{D_{if}} - c_{if}\right)}{2A_1 D\sigma^2_{D_{if}}} + \frac{\left(\pi^e_{D_{if}} - c_{if}\right)^2}{\sigma^2_{D_{if}}} + \frac{\left(r^{D_{iv}} - (1+A_1)c_{iv} + A_1\pi^e_{D_{iv}}\right)\left(\pi^e_{D_{iv}} - c_{iv}\right)}{2A_1 D\sigma^2_{D_{iv}}} + \frac{\left(\pi^e_{D_{iv}} - c_{iv}\right)^2}{\sigma^2_{D_{iv}}}\right)$$

$$\sigma_1 = \left(\frac{r^{D_m} - (1+A_1)c_m + A_1\pi^e_{D_m}}{2A_2 D\sigma^2_{D_m}} + \frac{\pi^e_{D_m} - c_m}{\sigma^2_{D_m}}\right)$$

$$\sigma_2 = \left(\frac{r^{D_{if}} - (1+A_1)c_{if} + A_1\pi^e_{D_{if}}}{2A_2 D\sigma_{D_{if}}} + \frac{\pi^e_{D_{if}} - c_{if}}{\sigma_{D_{if}}}\right)$$

$$\sigma_3 = \left(\frac{r^{D_{iv}} - (1+A_1)c_{iv} + A_1\pi^e_{D_{iv}}}{2A_2 D\sigma_{D_{iv}}} + \frac{\pi^e_{D_{iv}} - c_{iv}}{\sigma_{D_{iv}}}\right)$$

۵. شبیه‌سازی مدل

با توجه به اینکه الگوی پیشنهادی تحقیق، به‌صورت عملیاتی به‌کار گرفته نشده است و هیچ مورد عملی مشابهی نیز یافت نشد، لذا تعیین مقدار عددی پارامترهای موجود در مسئله و تعیین مسیر بهینه متغیرهای وضعیت و کنترل به‌صورت واقعی ممکن نیست. اما ازآنجاکه ثمره اصلی مدل ارائه شده، استخراج مسیر بهینه متغیرهای وضعیت و کنترل است، به این منظور با توجه به داده‌های بانکی موجود در الگوی بانکداری بدون ربای ایران، سعی شده است پارامترهای موجود در مدل تحقیق تقریب زده شوند و براساس این پارامترها، اقدام به شبیه‌سازی عددی در این مورد نماییم. حداقل فایده این شبیه‌سازی عددی، به‌کارگیری عملی مدل و نحوه انجام تحلیل حساسیت است. نحوه استفاده از داده‌ها برای تخمین پارامترها براساس شباهت و تطابق داده‌ها با بخش‌های مختلف مدل می‌باشد. به این صورت که برای تخمین پارامترهای بخش پولی از داده‌های بانک رسالت، برای تخمین پارامترهای بخش بازدهی ثابت، از داده‌های بانک‌های تجاری (ملت) و برای تخمین پارامترهای بخش بازدهی متغیر از داده‌های بانک‌های تخصصی (بانک صنعت و معدن) استفاده شده است. در جدول زیر پارامترها و مقدار عددی آنها بیان شده است.

جدول ۲. مقادیر عددی پارامترهای مورد استفاده در مدل

نام پارامتر	مقدار	نام پارامتر	مقدار
σ_{D_m}	۰/۱۸	c_m	۰/۰۰۵۷
$\sigma_{D_{if}}$	۰/۱۸	c_{if}	۰/۰۰۴۵
$\sigma_{D_{iv}}$	۰/۱۹	c_{iv}	۰/۰۰۵۵
r^{D_m}	۰/۰۰۱۷	$\pi^e_{D_m}$	۰/۰۱۲۵
$r^{D_{if}}$	۰/۰۰۲۵	$\pi^e_{D_{if}}$	۰/۰۱۵
$r^{D_{iv}}$	۰/۰۰۲۵	$\pi^e_{D_{iv}}$	۰/۰۱۷۵
a_1	۰/۰۰۲۴	r^c	۰/۰۰۴۷
a_2	۱۱E-۶/۵۹	θ	۰/۰۹۰۲
Δ	۰/۰۰۰۴	β	۰/۰۱۴۴
A_1	۰/۷۵	A_2	۵/۴۶E-09

مأخذ: همان

۱-۵. تعیین مسیر بهینه متغیرهای مدل

حال که مقادیر عددی پارامتر مدل تحقیق تعیین شدند، نوبت به تعیین مسیر بهینه متغیرهای وضعیت و کنترل می‌رسد. اولین و اصلی‌ترین متغیری که به تعیین مسیر بهینه آن می‌پردازیم، D(t) است. معادله نهایی تغییرات D(t) به‌صورت زیر به‌دست آمد:

$$dD(t) = \left(\left[\frac{(r^{D_m} - (1+A_1)c_m + A_1\pi^{\delta}_{D_m})(\pi^{\delta}_{D_m} - c_m)}{2A_1\sigma^{2}_{D_m}} + \frac{(r^{D_{lf}} - (1+A_1)c_{lf} + A_1\pi^{\delta}_{D_{lf}})(\pi^{\delta}_{D_{lf}} - c_{lf})}{2A_1\sigma^{2}_{D_{lf}}} + \frac{(r^{D_{lv}} - (1+A_1)c_{lv} + A_1\pi^{\delta}_{D_{lv}})(\pi^{\delta}_{D_{lv}} - c_{lv})}{2A_1\sigma^{2}_{D_{lv}}} \right] + \left[\frac{(\pi^{\delta}_{D_m} - c_m)^2}{\sigma^{2}_{D_m}} + \frac{(\pi^{\delta}_{D_{lf}} - c_{lf})^2}{\sigma^{2}_{D_{lf}}} + \frac{(\pi^{\delta}_{D_{lv}} - c_{lv})^2}{\sigma^{2}_{D_{lv}}} \right] D(t) \right) dt +$$

$$\left[\left(\frac{r^{D_m} - (1+A_1)c_m + A_1\pi^{\delta}_{D_m}}{2A_1\sigma_{D_m}} \right) + \left(\frac{\pi^{\delta}_{D_m} - c_m}{\sigma_{D_m}} \right) D(t) \right] dw_{D_m}(t) +$$

$$\left[\left(\frac{r^{D_{lf}} - (1+A_1)c_{lf} + A_1\pi^{\delta}_{D_{lf}}}{2A_1\sigma_{D_{lf}}} \right) + \left(\frac{\pi^{\delta}_{D_{lf}} - c_{lf}}{\sigma_{D_{lf}}} \right) D(t) \right] dw_{D_{lf}}(t) +$$

$$\left[\left(\frac{r^{D_{lv}} - (1+A_1)c_{lv} + A_1\pi^{\delta}_{D_{lv}}}{2A_1\sigma_{D_{lv}}} \right) + \left(\frac{\pi^{\delta}_{D_{lv}} - c_{lv}}{\sigma_{D_{lv}}} \right) D(t) \right] dw_{D_{lv}}(t)$$

برای تعیین مسیر بهینه D(t) براساس رابطه فوق از روش شبیه‌سازی اولر ـ مارویاما استفاده می‌کنیم. بر اساس این روش اگر صورت کلی معادله دیفرانسیل تصادفی را به شکل زیر در نظر بگیریم:

$$dx = \alpha(t.x)dt + \sigma(t.x)dw$$

متغیر x به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha(t_k.x_k)\Delta t + \sigma(t_k.x_k)\Delta w_k$$

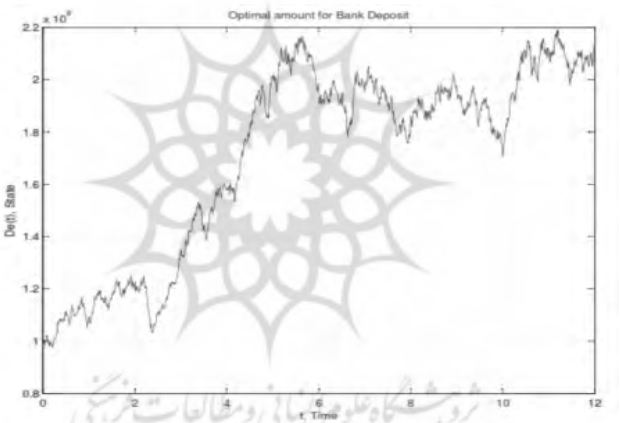
با توجه به معادله دیفرانسیلی مدل، رابطه فوق را می‌توان متناسب با مدل تحقیق به‌صورت زیر نوشت:

$$D_{k+1} = D_k + \alpha(t_k.D_k)\Delta t + \sigma_1(t_k.D_k)\Delta w_k + \sigma_2(t_k.D_k)\Delta w_k + \sigma_3(t_k.D_k)\Delta w_k$$

با جایگذاری مقادیر عددی پارامترها، به رابطه نهایی جهت تعیین مسیر بهینه دست می‌یابیم. به این منظور طبق روش شبیه‌سازی اولر ـ مارویاما باید فرایندهای وینر به‌طور مجزا در بازه‌های زمانی کوچک ساخته شوند و با استفاده از آنها مسیر بهینه D(t) به‌دست می‌آید. مقدار اولیه D را برابر ۱۰۰ میلیارد و بازه‌ای دوازده دوره‌ای (معادل یک سال) را در نظر می‌گیریم

$\left(\text{یعنی } t = 1, \ldots, 12\right)$. برای تقریب دقیق‌تر، بازه زمانی شبیه‌سازی را به $N = 4096$ زیر بازه تقسیم می‌کنیم در نتیجه $\Delta t = .00024$ خواهد بود. مقادیر Δw_k را از توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس Δt و با استفاده از اعداد تصادفی از توزیع نرمال استاندارد براساس رابطه $\Delta w_k = \sqrt{\Delta t} \times N(0,1)$ شبیه‌سازی می‌کنیم. به‌این‌ترتیب اگر مقدار فرایند D در زمان t_0 را داشته باشیم، مقدار فرایند در زمان $k+1$ برای $k = 1:N$ به‌دست می‌آید. تمام شبیه‌سازی‌های انجام شده در تحقیق با استفاده از نرم‌افزار Matlab انجام شده است. مسیر بهینه سپرده در طول یک دوره ۱۲ ماهه (یک‌ساله) در شکل زیر مشخص است:

نمودار ۱. مسیر بهینه سپرده‌های بانک



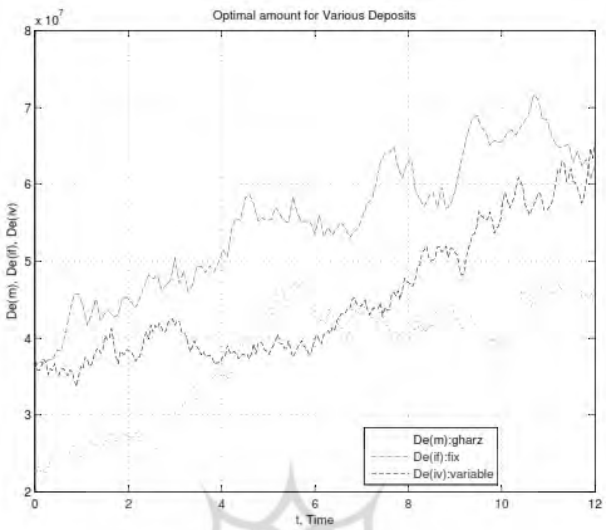
با مشخص شدن مسیر بهینه متغیر وضعیت، اکنون می‌توانیم مسیر بهینه متغیرهای کنترل، یعنی سهم بهینه هر یک از انواع سپرده را استخراج کنیم. با استخراج این سهم‌ها و ضرب آنها در مقدار بهینه سپرده، می‌توان مسیر زمانی بهینه هر یک از انواع سپرده را به‌دست آورد که فرمول و نمودار مربوط به آنها در ادامه آمده است.

$$D_m = \frac{r^{D_m} - (1+A_1)c_m + A_1\pi_{D_m}}{2A_2\sigma_{D_m}^2} + \frac{\pi_{D_m} - c_m}{\sigma_{D_m}^2} D(t)$$

$$D_{if} = \frac{r^{D_{if}} - (1+A_1)c_{if} + A_1\pi_{D_{if}}^e}{2A_2\sigma_{D_{if}}^2} + \frac{\pi_{D_{if}}^e - c_{if}}{\sigma_{D_{if}}^2} D(t)$$

$$D_{iv} = \frac{r^{D_{iv}} - (1+A_1)c_{iv} + A_1\pi_{D_{iv}}^e}{2A_2\sigma_{D_{iv}}^2} + \frac{\pi_{D_{iv}}^e - c_{iv}}{\sigma_{D_{iv}}^2} D(t)$$

نمودار ۲. مسیر بهینه انواع مختلف سپرده



۵-۲. تحلیل حساسیت تغییر پارامترهای مدل

با تغییر هریک از ۱۸ پارامتر موجود در مدل تحقیق مسیر بهینه؛ سپرده بانک به‌طور کل و هریک از انواع سپرده‌ها به‌طور خاص تغییر خواهد کرد. در این قسمت به‌عنوان نمونه چند پارامتر مهم را تغییر داده و نتایج حاصله را مورد بررسی قرار می‌دهیم. این نوع تحلیل در ایجاد نگرش صحیح نسبت به عملکرد بهینه بانک و انجام بهترین و مثمرثمرترین تغییرات در عملکرد بانک، بسیار مهم و نتیجه‌بخش خواهد بود.

۵-۲-۱. کاهش هزینه و افزایش بازدهی سپرده‌های وکالت در عقود با بازدهی متغیر

هریک از نهادهای زیرمجموعه بانک می‌توانند با مدیریت بهتر فعالیت‌های اقتصادی خود نسبت به کاهش هزینه و افزایش بازدهی سپرده‌های به‌کار گرفته شده، سهم خود را از سپرده‌های بانک افزایش دهند و در مرحله بعد نسبت به افزایش کارمزد و حق‌الوکاله اقدام کنند و در نتیجه باعث افزایش سود بانک شوند. در این قسمت به ترتیبی که در جدول ۳ نمایش داده شده نسبت به تغییر پارامترهای مربوطه اقدام کرده و نتایج بررسی می‌شود.

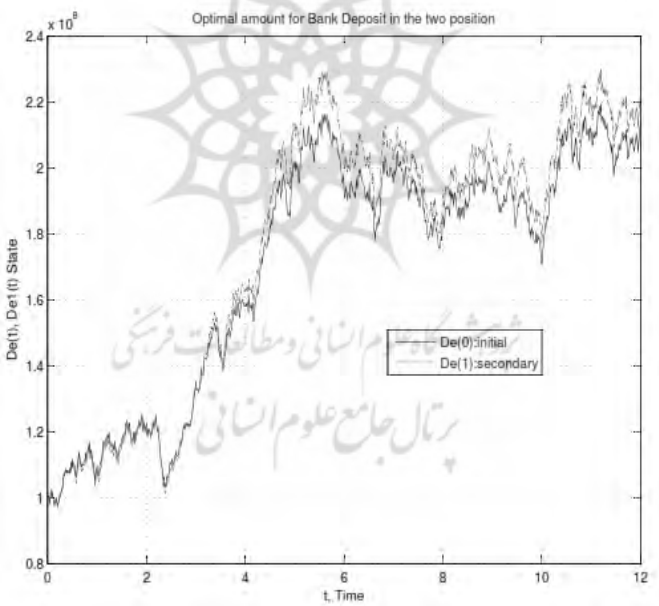
جدول ۳. مقدار تغییر هزینه و بازدهی سپرده‌های بازدهی متغیر

نام پارامتر	مقدار قدیم	مقدار جدید	درصد تغییر
c_{iv}	۰/۰۰۵۵	۰/۰۰۴۹۵	۱۰ درصد کاهش
$\pi^{e}_{D_{if}}$	۰/۰۱۷۵	۰/۰۱۹۲۵	۱۰ درصد افزایش

مأخذ: همان.

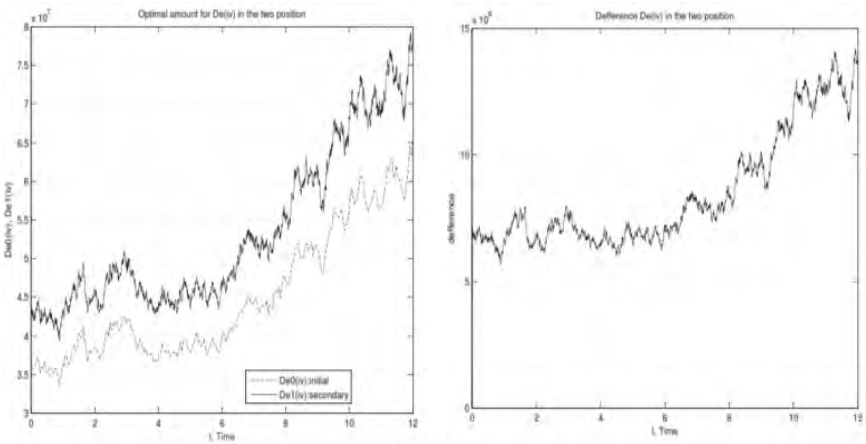
همان‌گونه که در جدول فوق پیداست، به میزان ۱۰ درصد از هزینه به‌کارگیری سپرده‌های با بازدهی متغیر کاهش و به میزان ۱۰ درصد به بازدهی این نوع سپرده‌ها اضافه کرده‌ایم.

نمودار ۳. مسیر بهینه سپرده‌های بانک قبل و بعد از تغییرات



در نمودار بالا منحنی خط‌چین، مسیر بهینه سپرده، بعد از تغییر پارامترهاست. همان‌گونه که در نمودار مشخص است این منحنی بالاتر از منحنی اولیه قرار دارد. در ادامه نمودار ۴ ارائه شده است که اثر تغییر در پارامترها، روی سپرده بازدهی متغیر را نشان می‌دهد.

نمودار ۴. مسیر بهینه سپرده بازدهی متغیر قبل و بعد از تغییرات و میزان تفاوت



نمودار بالا سمت چپ، که فقط مسیر بهینه سپرده با بازدهی متغیر در دو حالت را نشان می‌دهد، بیانگر تفاوت تغییر در مسیر بهینه این نوع سپرده بعد از تغییر پارامترهاست. همچنین نمودار سمت راست اختلاف این نوع سپرده را در دو حالت نشان می‌دهد. همان‌طور که مشخص است با گذشت زمان، اختلاف بین دو مسیر ناشی از تغییر در جهت بهبود عملکرد افزایش می‌یابد.

یکی از نوآوری‌های مهم این تحقیق، تشکیل مدل بهینه‌یابی پویای تصادفی با چند متغیر وضعیت است که به‌دلیل وجود پیچیدگی‌های متعدد و نبود الگوهای مشابه، کمتر مورد استفاده محققان قرار گرفته است و در کتاب‌های مربوطه نیز صرفاً به بیان فرمول‌های برداری اکتفا شده و وارد جزئیات این‌گونه مسائل نشده‌اند. در این مقاله با تعریف سه متغیر وضعیت جدا با فرایندهای تصادفی براونی مختص به خود، توانسته‌ایم همه اطلاعات مورد نیاز را در مسئله وارد و حداکثر دقت را در تحلیل نتایج به‌دست آوریم. در الگوی ارائه شده، بانک مانند هر مؤسسه مالی دیگر حداکثرکننده سود است و مسیر بهینه متغیرهای کنترل و وضعیت نیز طوری استخراج شده‌اند که بانک را به حداکثر سود برسانند.

الگوی پیشنهادی تحقیق طوری طراحی شده است که هم پاسخگوی نیازهای واقعی جامعه باشد و هم تطابق صددرصدی با شرع را داشته باشد و در عین حال نیازی به

صوری‌سازی و استفاده از حیله‌های شرعی برای اجرای آن نباشد. درآمد اصلی بانک در این الگو از دریافت کارمزد و حق‌الوکاله به‌دست می‌آید که از قبل مشخص و شفاف است. درواقع در قرارداد مشتری و بانک، همه چیز از قبل مشخص و شفاف است و بانک خود را درگیر تعهدات اضافه نکرده و طبق شرایط اقتصاد کلان جامعه و وضع بازار، میزان سود سپرده‌گذاران تعیین و به آنها پرداخت می‌شود. در این مدل انگیزه بانک برای کسب سودآوری بیشتر و ارائه سود بالاتر به مشتریان، کسب عملکرد بهتر نسبت به رقبا و جذب مشتریان بیشتر است چرا که با افزایش مقدار سپرده‌های بانک، طبیعتاً میزان کارمزد و حق‌الوکاله بیشتری نصیب بانک شده و میزان سودآوری بانک را افزایش می‌دهد. با توجه به اینکه بانک در شرایط رقابتی و براساس واقعیت‌های اقتصادی جامعه اقدام به فعالیت می‌کند، این الگو می‌تواند در کشورهای غیراسلامی نیز اجرا و با آنها رقابت نماید.

۶. جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

یکی از تفاوت‌های اساسی و بنیادین بانکداری اسلامی با بانکداری متعارف، حذف بهره و جایگزینی عقود تخصصی در فعالیت‌های بانک است. ورود این عقود با ویژگی‌ها و شرایط عملی مختص به خود، منجر به ایجاد یک نوع دشواری و پیچیدگی در طراحی الگو و مدل‌سازی ریاضی آن شده است. به همین دلیل مدل‌سازی عملکرد بانک در قالب یک الگوی اسلامی با بیان همه ویژگی‌های آن، تاکنون صورت نگرفته است و کارهای انجام شده در این زمینه بسیار محدود و ناقص است. یکی از نتایج مهم تحقیق حاضر، طراحی یک مدل ریاضی با درج همه ویژگی‌های لازم در بخش تجهیز منابع بانکداری اسلامی می‌باشد که نتیجه آن وجود چندین متغیر کنترل و وضعیت است. طبیعتاً تشکیل مسئله ریاضی، به تنهایی مفید فایده نخواهد بود، بلکه طراحی مدل زمانی ارزشمند است که قابل حل باشد. خوشبختانه در تحقیق حاضر با استفاده از محاسبات پیچیده و دقیق و تعریف توابع میانی، مقدار بهینه همه متغیرهای کنترل و وضعیت براساس پارامترهای موجود، مشخص شده و برای به‌دست آوردن مقادیر عددی این متغیرها کافی است براساس عملکرد بانک در دنیای واقعی، این پارامترها استخراج شوند.

یکی دیگر از نتایج مهم تحقیق، ویژگی توسعه‌ای بودن آن است. ورود به مسئله مدل‌سازی عملکرد بانکداری اسلامی در مجامع علمی بسیار محدود و ناقص بوده و تحقیق حاضر می‌تواند منبعی مهم و راهبردی برای تحقیقات آتی باشد. در تحقیق حاضر، برخلاف تحقیقات قبلی، به‌جای مدل‌سازی عملکرد فعلی بانکداری، عملکرد الگویی از بانکداری اسلامی مدل‌سازی شده است که در آن اشکالات اساسی الگوی فعلی بانکداری بدون ربا مرتفع شده است که این امر کاربردی بودن مدل را می‌رساند.

در انتها خاطر نشان می‌شود که تحقیق حاضر یک نقطه شروع در زمینه مدل‌سازی ریاضی عملکرد بانک است. یقیناً با ورود دیگر محققان به این عرصه، این الگو کامل‌تر شده و ایرادهای احتمالی آن مشخص و رفع می‌شود و در نهایت می‌تواند به‌عنوان الگوی جدید و مترقی مورد استفاده سیستم بانکی کشور عزیزمان قرار گیرد و به‌عنوان یک نماد از تمدن غنی ایرانی ـ اسلامی در دیگر کشورها نیز الگوبرداری شود.

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

منابع و مآخذ

۱. ابوالحسنی هستیانی، علی‌اصغر و همکاران (۱۳۹۱). «چیستی پول در اقتصاد اسلامی»، فصلنامه علمی و پژوهشی *اقتصاد اسلامی*، سال دوازدهم، ش ۴۸.

۲. باطنی، محمد (۱۳۷۷). *بررسی حقوقی تأثیر تورم در بازپرداخت دیون*، تهران، انتشارات ساجد.

۳. بیدآباد، بیژن (۱۳۹۰). «مقررات پیشنهادی برای شفافیت مالی حکمرانی و افشای اطلاعات بانک راستین»، ماهنامه *بانک و اقتصاد*، ش ۱۱۷.

۴. پورکاظمی، محمدحسین (۱۳۹۳). *بهینه‌سازی پویا، کنترل بهینه و کاربردهای آن*، چاپ اول، تهران، انتشارات دانشگاه شهید بهشتی.

۵. توتونچیان، ایرج (۱۳۷۹). *پول و بانکداری اسلامی و مقایسه آن با نظام سرمایه‌داری*، چاپ اول، تهران، انتشارات مؤسسه فرهنگی هنری توانگران.

۶. چیانگ، آلفا. سی. (۱۳۸۷). *اصول بهینه‌یابی پویا*، ترجمه عباس شاکری و فریدون اهرابی، چاپ اول، تهران، انتشارات دانشگاه علامه طباطبائی.

۷. حسینی، سیدعقیل (۱۳۹۲). «تحلیل اثرات نرخ بهره پولی مثبت بر بهینگی و پایداری (با تأکید بر مدل‌های پس‌انداز احتیاطی)»، پایان‌نامه دکتری به راهنمایی رحیم دلالی اصفهانی و محمد واعظ برزانی، دانشکده علوم اداری و اقتصاد دانشگاه اصفهان.

۸. خویی، سیدابوالقاسم (۱۳۷۷). *مصباح الفقاهه*، مؤسسه نشر الفقاهه، چاپ اول، قم.

۹. داودی، پرویز و حسین صمصامی (۱۳۸۹). *اقتصاد پول و بانکداری*، تهران، دانشگاه شهید بهشتی.

۱۰. داودی، پرویز و محمدجواد محقق‌نیا (۱۳۸۷). «بانکداری محدود»، دوفصلنامه علمی ـ پژوهشی *جستارهای اقتصادی*، سال پنجم، ش ۱۰.

۱۱. رضایی، محسن و رفیع حسنی‌مقدم (۱۳۹۱). «بررسی و بهینه‌سازی رفتار مصرف‌کننده در اقتصاد اسلامی با استفاده از تکنیک برنامه‌ریزی پویا»، *پژوهش‌های اقتصادی ایران*، ش ۵۱.

۱۲. سیفلو، سجاد (۱۳۸۹). «تحلیل مقایسه‌ای قابلیت تجهیز منابع مالی از طریق وکالتی و مشارکتی در نظام بانکداری بدون ربا و ارائه الگوی جدید برای بانکداری ایران»، پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد، رشته معارف اسلامی و اقتصاد، دانشگاه امام صادق (ع).

۱۳. شاطبی، ابراهیم بن موسی (۱۴۲۲ق). *الموافقات فی اصول الشریعه*، چاپ اول، بیروت، داراحیاء التراث العربی.

۱۴. شیرانی، علیرضا (۱۳۸۶). «شناسایی زیرساخت‌های توسعه بازارهای مالی و عوامل کلیدی موفقیت درصنعت بانکداری اسلامی»، *مجموعه مقالات هجدهمین همایش بانکداری اسلامی*، تهران، مؤسسه عالی بانکداری.

۱۵. صادقی شاهدانی، مهدی و حسین محسنی (۱۳۹۲). «بایسته‌های نظام مالی اسلامی در الگوی اسلامی ـ ایرانی پیشرفت»، دوفصلنامه علمی ـ پژوهشی *مطالعات اقتصاد اسلامی*، سال پنجم، ش ۲، پیاپی ۱۰.

۱۶. علیزاده، امیرخادم، محمدحسین پورکاظمی و محسن کشاورز (۱۳۹۴). «کاربرد ریاضیات در اقتصاد اسلامی؛ مزایا و محدودیت‌ها»، دوفصلنامه علمی ـ پژوهشی *مطالعات اقتصاد اسلامی*، سال هشتم، ش ۱، پیاپی ۱۵.

۱۷. کاشانی، سیدمحمود (۱۳۷۶). «بررسی حقوقی، چارچوب قانون عملیات بانکی بدون ربا مصوب شهریور ۱۳۶۲»، *مجموعه مقالات هشتمین همایش بانکداری اسلامی*، تهران، مؤسسه عالی بانکداری ایران.

۱۸. کیایی، حسن و همکاران (۱۳۹۲). «مقایسه عملکرد بهینه در بانکداری اسلامی و بانکداری متعارف: استفاده از فرایند تصادفی پرش ـ انتشار»، دو فصلنامه علمی و پژوهشی *مطالعات اقتصاد اسلامی*، سال ششم، پیاپی ۱۱.

۱۹. محسنی، حسین (۱۳۹۳). *مبانی بانکداری با رویکرد مالی*، چاپ اول، تهران، انتشارات بورس وابسته به شرکت اطلاع‌رسانی و خدمات بورس.

۲۰. محقق‌نیا، محمدجواد (۱۳۹۱). *ساختار بانکداری اسلامی و ارائه الگویی برای بانکداری اسلامی در ایران*، چاپ اول، تهران، انتشارات دانشگاه علامه طباطبائی.

۲۱. _____ (۱۳۹۳). *الگوی بانکداری اسلامی*، قم، مرکز بین‌المللی ترجمه و نشر المصطفی (ص).

۲۲. مظاهری، طهماسب (۱۳۸۶). «الگوی جایگزین برای نظام بانکی کشور»، *مجموعه مقالات هجدهمین همایش بانکداری اسلامی*، تهران، مؤسسه عالی بانکداری.

۲۳. موسایی، میثم (۱۳۸۲). *ربا و کاهش ارزش پول*، تهران، پژوهشکده اقتصاد دانشگاه تربیت مدرس.

۲۴. موسویان، سیدعباس (۱۳۸۳). «ارزیابی عملکرد سپرده‌های بانکی در بانکداری بدون ربای ایران»، *مجموعه مقالات پانزدهمین همایش بانکداری اسلامی*، تهران، مؤسسه عالی بانکداری ایران.

۲۵. _____ (۱۳۸۶). «نقد و بررسی قانون عملیات بانکی بدون ربا و پیشنهاد قانون جایگزین»، فصلنامه *اقتصاد اسلامی*، سال هفتم، ش ۲۵.

۲۶. موسویان، سیدعباس و حسین میسمی (۱۳۹۳). «بانکداری اسلامی: مبانی نظری ـ تجارب عملی»، تهران، پژوهشکده پولی و بانکی جمهوری اسلامی ایران، ویرایش سوم.

۲۷. موسویان، سیدعباس و همکاران (۱۳۹۳). «تعیین سهم بهینه عقدهای مبادلهای و مشارکتی در بانکداری بدون ربا»، فصلنامه علمی و پژوهشی *اقتصاد اسلامی*، سال چهاردهم، ش ۵۳.

۲۸. میرجلیلی، سیدحسین (۱۳۸۱). «مسائل بانکداری بدون بهره در تجربه ایران»، فصلنامه *پژوهشها و سیاستهای اقتصادی*، ش ۲۲.

۲۹. _____ (۱۳۸۳). «الگویی برای سازماندهی مجدد نظام بانکی»، فصلنامه *نامه مفید*، ش ۴۲.

۳۰. میرمعزی، سیدحسین (۱۳۸۵). «حیلههای ربا»، فصلنامه علمی پژوهشی *اقتصاد اسلامی*، سال ششم، ش ۲۴.

۳۱. نزار العانی، مضر (۲۰۰۰م). «احکام تغّیر قیمه العمله النقدیه و اثرها فی تسدید القرض»، دارالنفایس للنشر و التوزیع، الطبعه الاولی ، اردن.

۳۲. یوسفی، احمدعلی (۱۳۸۱). *ربا و تورم: بررسی تطبیقی جبران کاهش ارزش پول و ربا*، چاپ اول، تهران، پژوهشگاه فرهنگ و اندیشه اسلامی.

۳۳. _____ (۱۳۸۳). «راههای جبران کاهش ارزش پول در سپردههای بانکی»، فصلنامه *اقتصاد اسلامی*، سال چهارم، ش ۱۳.

34. Ahmad, Ausaf (1995). "The Evolution of Islamic Banking", Encyclopedia of Islamic Banking and Insurance, London, Institute of Islamic Banking and Insurance.

35. _____ (1997). "Structure of Deposits in Selected Islamic Banks: Implication for Deposit Mobilization", Islamic Research and Training Institute, Islamic Development Bank, Jeddah, Saudi Arabia.

36. Allen, E. (2007). "Modeling with Ito Stochastic Differential Equations"; University of Texas, USA, Published by springer, p.o. Box 17, 3300 AA.

37. Bellalah, Mondher and Omar Masood (2013). "Islamic Banking and Finance", Cambridge Scholars Publishing.

38. Bertsekas, Dimitri P. (2003). "Dynamic Programing and Optimal Control", Vol. 2, Athena Scientific, Third Edition.

39. Black, F. and M. J. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3.

40. Bossone, Biagio (2002). "Should Banks Be Narrowed?", Working Paper, No. 354.

41. Chapra, M. (2008). "The Global Financial Crisis: Can Islamic Finance Help Minimize The Severity and Frequency of Such a Crisis In The Future?", Paper Prepared at the Forum on the Global Financial Crisis, Islamic Development Bank.

42. Dusek, Tamás (2008). "Methodological Monism in Economics", *The Journal of Philosophical Economics*, I. 2.

43. Hanson, Floyd B. (2007). *Applied Stochastic Processes and Control for Jump-Diffusions: Modeling, Analysis and Computation*, University of Illinois, Chicago, USA.

44. Khan, Mohsin. S. (1986). "Islamic Interest-Free Banking", IMF Staff Papers.

45. _____ (1995). "Islamic Interest Free Banking: a Theoretical Analysis", in Encyclopedia of Islamic Banking and Insurance.

46. Merton, R. C. (1973). *Theory of Rational Option Pricing*, Bell J. Econ. Mgmt. Sci., Vol. 4, 1973 (Spring) (Reprinted in Merton (1992) [203, Chapter 8].)

47. Morton, I. Kamien and L. Schwartz Nancy (2012). "Dynamic Optimization, Second Edition: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management" (Dover Books on Mathematics), 2nd Edition.

48. Mukuddem-Petersen J., M. A. Petersen (2006). "Bank Management via Stochastic Optimal Control", *Automatica*, Vol. 42, No. 8.

49. Mukuddem-Petersen J., M. A. Petersen, I. M. Schoeman and B. A. Tau (2007). "Maximizing Banking Profit on a Random Time Interval", *Journal of Applied Mathematics*, 22.

50. Oguzsoy, Cemal Berk and Sibel Giuven (1996). "Theory and Methodology Bank Asset and Liability Management Under Uncertainty", Department of Industrial Engineering, Middle East Technical University, Ankara, Turkey.

51. Salihu, Abdulwaheed Adelabu, Madya Zakariya Man, Odukoya Babatunde AbdulJubreel (2011). "Concept of Profit Maximization Model in Islamic Commercial Banking System and its Weakness", *Arabian Journal of Business and Management Review*, Vol. 1, No.3.

52. Siddiqi, Mohammad Nejatullah (1981). "Muslim Economic Thinking, Leicester", The Islamic Foundation.

53. _____ (2006). "Islamic Banking and Finance in Theory and Practice: Asurvay of State of the Art", *Islamic Economic Studies*, Vol. 13, No. 2.

54. Smith, Leanne M. (2001). "The Impact of the Third Wave - Mathematisation - on Samuelson's Economics", Discussion Paper / Department of Applied and International Economics, Massey University, O~uzsoy, Sibel Gi~ven.

55. Tsay, R. S. (2002). "Analysis of Financial Time Series"; University of Chicago, the Wiley-interscience Publication.

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی