هنر مدلسازی در پژوهش عملیاتی

ابراهیم ایجابی

مقدمه

مطالعه پژوهش عملیاتی عبارت است از ساختن مدلی از وضعیت طبیعی مورد نظر. یک مدل پژوهش عملیاتی به عنوان نمایش آرمانی (ساده شده) از یک دستگاه واقعی تعریف می شود. این دستگاه ممکن است از پیش موجود باشد، یا هنوز به صورت ذهنی بوده و به مرحله اجرا درنیامده باشد. در حالت اول، هدف مدل تحلیل رفتار دستگاه به منظور بهبود عملکرد آن است. در حالت دوم، هدف مدل عبارت از تعیین "بهترین" ساختار برای دستگاه آینده است.

پیچیدگی یک دستگاه واقعی ناشی از تعداد بسیار زیاد عناصری (متغیرهایی) است که رفتار دستگاه را کنترل می کند. این امر به نوبه خود، موجب بروز یک اشکال اساسی در پیشنهاد روش های ویژه عمل برای هر یک از این متغیرها می شود. خوشبختانه، اگر چه ممکن است در وضعیت واقعی، تعداد متغیرها از تنوع زیادی برخوردار باشند، معمولا "کسر کوچکی از این متغیرها در رفتار دستگاه، نقش تعیین کننده و موثری دارد. از این رو، ساده سازی این دستگاه واقعی بر حسب یک مدل، اصولا" روی تعیین متغیرهای موثر و روابط حاکم بر آنها متمرکز می شود.

مثال

برروی یک محصول تولیدی، از لحظه ای که طراح به فکر تولید آن می افتد تا زمانی که به دست مصرف کننده برسد، تعدادی عملیات انجام می شود. پس از تصویب طرح، سفارش تولید به بخش تولید داده می شود، که آن به نوبه خود، مواد لازم را از بخش تامین مواد درخواست می نماید. بخش تامین مواد ممکن است این درخواست را از موجودی

خود تامین نماید، یا برای صدور دستور خرید با بخش خرید تماس بگیرد. پس از تکمیل محصول نهایی، بخش فروش، با همکاری بخش بازاریابی، مسوولیت توزیع آن بین مصرف کنندگان را به عهده می گیرد.

فرض کنیم که هدف تعیین سطح تولید در کارخانه باشد. با توجه به کل دستگاه، ملاحظه می‌شود که متغیرهای زیادی به صورت مستقیم در سطح تولید دخالت دارند. چند مثال از این متغیرها را در زیر می آوریم.

۱-*در بخش تولید*: ساعات کار ماشین ها، ساعت کار کارگرها، توالی خاص عملیات ماشین ها، موجودی محصولات نیمه تمام، تعداد محصولات معیوبی که تولید می شود و میزان بازرسی.

۲-*در بخش تامین مواد*: مقدار موجودی مواد، میزان تحویل مواد خریداری شده‌ومحدودیت های انبار.

۳-*در بخش بازاریابی*: پیش بینی فروش کالا، فعالیت تبلیغاتی، ظرفیت امکانات توزیع، تاثیر محصولات رقیب.

هر یک از متغیرهای فوق (به طور مستقیم یا غیرمستقیم) بر سطح تولید اثر می گذارند و کوشش برای برقراری ارتباط روشن بین این متغیرها و سطح تولید امر گیج کننده‌ای است.

اولین سطح تجرید مستلزم تعریف دستگاه "واقعی فرضی" بر حسب متغیرهای موثر آن است. اندکی تامل نشان می دهد که این دستگاه را می توان با دو متغیر زیر نمایش داد.

۱-یک متغیر که معرف میزان تولید کالاست.

۲-یک متغیر که معرف میزان مصرف کالاست.

در تعیین میزان تولید، برای این که یک برآورد تا حد امکان واقعی به دست آید، متغیرهایی نظیر ساعات کار ماشین ها، ساعت کار

کارگرها، ترتیب عملیات ماشین ها و موجودی مواد مورد نیاز باید در نظر گرفته شوند. میزان مصرف، بر حسب متغیرهای مربوط به بخش بازاریابی مشخص می گردد. به عبارت دیگر، عمل ساده سازی از دستگاه "واقعی" به دستگاه "واقعی فرضی"، با "روی هم ریختن" چند متغیر دستگاه واقعی و تبدیل آنها به یک متغیر تنها در دستگاه واقعی فرضی، انجام می‌شود. در حالت کلی، قوانین ثابتی برای عمل ساده سازی وجود ندارد. تقلیل متغیرهای کنترل کننده دستگاه به تعداد نسبتا" کمی از متغیرهای موثر، و تجرید یک مدل از مدل واقعی فرضی، بیشتر یک هنر است تا یک علم. اعتبار مدل در نشان دادن دستگاه واقعی، بستگی به خلاقیت، بینش و قوه تحلیل تحلیلگر پژوهش عملیاتی و گروهی که روی طرح کار می کنند دارد. این گونه خصایص فردی یا شخصی را نمی توان با وضع قواعد ثابت برای ساختن مدل ها تنظیم و تعریف نمود.

انواع مدلهای پژوهش عملیاتی

مهم ترین نوع مدل پژوهش عملیاتی مدل *نمادی* یا *ریاضی* است.در فرمول بندی این نوع مدل، چنین فرض می شود که تمام متغیرهای مربوطه کمیت پذیرند از این رو برای نمایش این متغیرها که برای بیان رفتار دستگاه توسط توابع ریاضی مناسب به هم مربوط می شوند، از نمادهای ریاضی استفاده می شود. سپس جواب مدل از راه محاسبات ریاضی مقتضی به دست می آید.

علاوه برمدل های ریاضی الگوهای شبیه سازی و ذهنی نیز مورد استفاده قرار می گیرند. مدل های شبیه سازی، رفتار دستگاه را برای مدتی تقلید می کنند. این عمل تقلید با مشخص کردن پیشامدهایی صورت می گیرد که از لحظات وقوع آنها می توان اطلاعات مهمی درباره رفتار دستگاه جمع آوری نمود. وقتی چنین پیشامدهایی تعریف شدند،

لازم است تنها هنگامی به دستگاه توجه شود که پیشامدی رخ داده باشد. این اطلاعات که اندازه هایی از عملکرد دستگاه را به دست می دهند به عنوان مشاهدات آماری جمع آوری و با وقوع هر پیشامد جدید تعدیل و اصلاح می شوند.

چون الگوهای شبیه سازی برای بیان روابط متغیرها با یکدیگر احتیاج به توابع ریاضی صریح ندارند، معمولا"میتوان دستگاه های پیچیده ای را که مدل سازی برای آنها ممکن نیست و یا از لحاظ ریاضی نمی توان حل شوند شبیه سازی کرد. به علاوه، این انعطاف پذیری مدلهای شبیه سازی امکان نمایش دقیق تر دستگاه مورد نظر را فراهم می سازد. عیب عمده شبیه سازی این است که تحلیل دستگاه به وسیله انجام تعدادی آزمایش صورت می گیرد و تابع خطای آزمایشی می باشد. این امر به مشکلات متداول در طرح آزمایشی (از نظر آماری)، جمع آوری نتایج آزمایشی، و سپس اجرای آزمون های استنباط آماری لازم، منجر می شود. طبیعتا"، مدل شبیه سازی به خوبی مدل های ریاضی (حل شدنی)، که یک جواب کلی برای مساله به دست می دهند، نمی باشند.

با این که مدل های ریاضی در جستجوی تعیین جواب بهینه (بهترین جواب) هستند، گاهی ممکن است فرمول بندی ریاضی آنقدر پیچیده باشد که اجازه تعیین یک جواب دقیق را ندهد. چه بسا اگر امکان به دست آوردن جواب بهینه نیز موجود باشد، ممکن است محاسبات مورد لزوم بسیار طولانی و غیر عملی باشد. در این حالت، برای به دست آوردن جواب های (تقریبی) خوب می توان از *روش های ذهنی* استفاده نمود. روش ذهنی حل مدل متکی به قواعد شهودی یا تجربی است، که به فرض داشتن یک جواب فعلی امکان تعیین یک جواب بهتر را برای مدل فراهم می کند. در واقع، روش های ذهنی، روشهای جستجو هستند که به

منظور بهتر کردن مقدار معیار مدل، زیرکانه از یک نقطه جواب بـه نقطـه دیگر حرکت می کنند. وقتی امکـان حصـول بهبودهـای بیشـتری وجـود نداشته باشد، بهترین جواب حاصله جواب تقریبی برای مدل خواهد داد.

ساختار مدل های ریاضی

بر خلاف مدل های شبیه سازی یا ذهنی که نمی توان ساختارهای ثابتی برای آن ها پیشنهاد نمود، یک مـدل ریاضـی شـامل سـه مجموعـه اساسی از عناصر می باشد:

۱-متغیرهای تصمیم گیری و پارامترها:

متغیرهای تصمیم گیری مجهول هایی هسـتند کـه بایـد از روی جواب مدل معین شوند. پارامترها معرف متغیرهای کنترل شـده دسـتگاه هستند. مثلا"در مثالی که آورده شـد، سـطح تولیـد معـرف یـک متغیـر تصمیم گیری است. مثال در مورد پارامترها در این حالـت شـامل میـزان تولید و میزان مصرف کالای انبار شده می باشد.به طور کلـی پارامترهـای مدل می توانند قطعی یا احتمالی باشند.

۲-قیود یا محدودیت ها:

برای به حساب آوردن محدودیت های فیزیکی دستگاه، مدل باید متضمن قیودی باشد که متغیرهای تصمیم گیری را در حد مقادیر شدنی (مجاز) آنها محدود کند. این امر معمولا" بوسیله توابع ریاضی مقید کننده بیان می شود. مثلا"فرض کنید x_1 **و** x_2 (متغیرهای تصمیم‌گیری) تعداد واحدهایی از دو محصول باشند که باید تولید شوند و a_1 و a_2 (پارامترهـا) مقدار ماده خام مورد نیاز برای هر واحد از محصـول مربوطـه باشـند. اگـر مقدار کل موجودی این ماده خام Aباشد، تابع مقید کننده آن به صـورت $a_1x_1+a_2x_2 \leq A$ داده می شود.

۳-تابع هدف:

این تابع میـزان سـودمندی دسـتگاه را بـه صـورت تـابعی ریاضـی ازمتغیرهای تصمیم گیری دستگاه تعریـف مـی کنـد. مـثلا"، اگـر هـدف دستگاه بیشینه ساختن سود کل باشد، تابع هدف باید سود را بـر حسـب متغیرهای تصمیم گیری مشخص کند. به طور کلی، جـواب بهینـه بـرای مدل زمانی بدست می آید که مقادیر متنـاظر متغیرهـای تصـمیم گیـری ضمن صدق نمودن در همه قیود مدل، بهتـرین مقـدار تـابع هـدف را بـه دست دهند. معنی این گفته این است که برای دستیابی به جواب بهینـه، تابع هدف مانند یک شاخص عمل می کند.

مدل های ریاضی در پژوهش عملیاتی می توانند به طور کلی به عنوان روش هایی برای تعیین مقادیر متغیرهای تصمیم گیری x_j (nو .... و ۲و۱=J) باشد که مقدار تابع

$$z = f(x_1,\ldots, x_n)$$

را بهینه می سازد و در قیود

$$g_i(x_1,\ldots, x_n) \le b_i \qquad i=1,\ldots m$$

$$X_j \ge 0 \qquad j=1,2,\ldots,n$$

نیز صدق می کنند، در نظر گرفته شوند. تابعf تابع هدف است، در حـالی که$g_i \le b_i$ معرف قید iام وb_i یک مقدار ثابت معلوم است.قیود$x_j \ge 0$ که متغیرها را تنها به مقادیر صفر یا مثبت مقیـد مـی سـازند، *قیـود نـامنفی بودن*، نامیده می شوند. در اکثر دستگاه های دنیـای واقعـی وجـود قیـود نامنفی بودن یک نیاز طبیعی به نظر می رسد.

برای مثال مدل

$$\max z = 0.4\,x_1 + 0.3\,x_2$$

s.t.

$$x_1 + x_2 \le 400$$

$$2x_1 + x_2 \le 500$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

یک مدل ریاضی می باشد که در آن $z = 0.4\,x_1 + 0.3\,x_2$ تابع هدف و

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 400 \\ 2x_1 + x_2 \le 500 \end{cases}$$

قیود مدل و $x_1, x_2 \ge 0$ قیود نامنفی بودن می باشد.

ساده سازی یک مدل ریاضی

پس از ساختن یک مدل ریاضی، ممکن است ساده کردن آن به منظور آسان کردن بررسی تحلیلی آن ضروری باشد. برخی از ساده‌سازی های رایج عبارتند از:

۱-تبدیل متغیرهای گسسته به متغیرهای پیوسته.

۲-خطی کردن توابع غیرخطی

۳-حذف برخی از قیود.

به طور کلی، بررسی توابعی از متغیرهای پیوسته هم از لحاظ تحلیلی و هم از لحاظ محاسباتی ساده‌تر است. اکثر فنون موجود در تحقیق در عملیات به متغیرهای پیوسته مربوط است. وانگهی، حتی

حضور شمار معدودی متغیر گسته معمولا" یک مساله محاسباتی بسیار مشکل پدید می آورد.

وجود توابع غیرخطی در یک مدل، اغلب مستلزم راه حل پیچیده ای است. موثرترین راه حل های محاسباتی، به مدل هایی وابسته اند که در آنها تمام توابع خطی می باشند. در حقیقت، بسیاری از شیوه های حل مدل های غیرخطی بر تقریب زدن آنها به وسیله مدل های خطی مبتنی هستند.

یک قاعده کلی در مورد محاسبات اکثر مدل های ریاضی این است که هر چه تعداد قیود بیشتر باشد، کارایی مدل کمتر می شود. بنابراین، حذف کامل قیودی که گمان می رود اثر جدی روی جواب بهینه نخواهند داشت مقرون به صرفه است. در نهایت، اگر حذف هیچ یک از قیود ممکن نباشد، می توان آن قیودی را که گمان می رود نقطه بهینه را «دربر» نمی گیرند کنار گذاشت طبیعتا"، نمی توان همواره درباره وضعیت هر قید با اطمینان اظهار نمود. اما اگر جواب بهینه مدل «تقلیل یافته» در تمام قیود حذف شده صدق نماید، آنگاه مساله حل شده است و معلوم می شود که تمام قیود حذف شده زاید می باشند. در غیر این صورت، قیودی که جواب بهینه در آنها صدق نمی کند به مدل افزوده شده و مدل «جدید» حل می شود. این فرایند آنقدر ادامه می یابد تا جدیدترین جواب در تمام قیود حذف شده صدق نماید.

وقتی ساده سازی های فوق به مرحله اجرا درآیند، ممکن است یک مدل ریاضی «با دقت کمتر» به دست آید. در نتیجه، در طرح پیشنهادات برای دستگاه اصلی، باید تاثیر این ساده سازی اضافی بر کیفیت جواب حاصله را مورد بررسی قرار داد.

تاثیر دسترسی داشتن به داده ها برروی مدل سازی

مدل ها از هر نوعی که باشند، صرف نظر از پیچیدگی و دقتشان در نمایش دستگاه واقعی، هرگاه بر پایه داده های معتبری استوار نباشند، ممکن است ارزش چندانی نداشته باشند. به عنوان مثال، فرض کنید از ماده خامی که مقدار محدودی از آن در دسترس است دو محصول ساخته شوند فرض کنید مقادیر این ماده برای ساختن هر واحد از دو محصول مزبور مصرف می شوند a_1 و a_2 باشد اگر b مقدار کل موجودی ماده خام مزبور باشد، قیدی که این وضعیت را نمایش می دهد به صورت $a_1 x_1 + a_2 x_2 \leq b$ است، که در آن x_1 و x_2 به ترتیب تعداد واحدهای تولید شده از هر یک از دو محصول مزبور می باشد. مقادیر a_1 و a_2 و b باید هنگام «حل» مدل مزبور به توسط تحلیلگر برآورد شوند. برآورد این پارامترها ممکن است ساده نباشد، زیرا چه بسا امکان دارد که این مستلزم جستجوی وسیعی در میان پرونده های تمام سازمان باشد.

بعضی مواقع، یک مدل با این فرض که می توان داده هایی را برای آن تهیه نمود، ساخته می شود، ولی ممکن است در جستجوهای بعدی معلوم شود که به دست آوردن آن داده ها دشوار است. در این حالت، برای جبران فقدان داده ها ممکن است لازم باشد مدل مزبور بازسازی شود. بنابراین، دسترسی به داده ها می تواند برروی دقت مدل مورد نظر نیز تاثیر مستقیم داشته باشد. به عنوان مثال، یک مدل کنترل موجودی را در نظر بگیرید که هدف آن تعیین سطح موجودی کالایی است به طوری که هزینه کل نگهداری اضافه موجودی و تامین نکردن تمام تقاضا به حداقل برسد. این عمل مستلزم برآورد هزینه نگهداری هر واحد اضافی انبار شده، و هزینه هر واحد از تقاضای تامین نشده می باشد. برآورد هزینه نگهداری، که به مخارج انبارداری و ارزش سرمایه بستگی

دارد، ممکن است نسبتا" ساده باشد. اما اگر در برآورد هزینه تقاضای تامین نشده از دست دادن رضایت مشتریان به حساب آورده شود، ممکن است نسبت دادن یک مقدار عددی به چنین عامل نامحسوسی مشکل باشد. در چنین شرایطی ممکن است مجبور شویم مدل را به صورتی تغییر دهیم که هزینه تقاضای تامین نشده صریحا" در آن وارد نشود. مثلا" ممکن است مجبور شویم در هر زمان یک حد بالای قابل قبولی برای مقدار کمبود کالا تعیین کنیم. در حقیقت، این حد بالای تعیین شده بیانگر برآورد معینی از هزینه تقاضای تامین نشده می باشد. اما به نظر می رسد که تعیین چنین حدی بسیار ساده تر از برآورد هزینه تقاضای تامین نشده خواهد بود.

جمع آوری داده ها ممکن است به صورت عملی مشکل ترین قسمت کامل کردن یک مدل باشد. ولی متاسفانه نمی توان قواعدی برای آن پیشنهاد نمود. تنها می توان گفت که تحلیلگر پژوهش عملیاتی در حالی که تجربه مدل سازی را برای یک سازمان به دست می آورد، باید طرقی را نیز برای جمع آوری و نگهداری داده ها، به گونه ای که برای طرحهای حال و آینده مفید باشند، معین کند.

مثال

یک شرکت اتومبیل سازی، سواری و کامیون تولید می کند. هر وسیله نقلیه باید به کارگاه نقاشی و مونتاژ بدنه برود. اگر کارگاه نقاشی به طور کامل به نقاشی کامیون بپردازد، در روز می تواند ۴۰کامیون را نقاشی کند و اگر به طور کامل به نقاشی سواری بپردازد، در روز می تواند ۶۰سواری را نقاشی کند. اگر کارگاه بدنه فقط به مونتاژ کامیون بپردازد، در روز می تواند ۵۰ کامیون را مونتاژ کند. و اگر تنها به مونتاژ سواری بپردازد، در روز می تواند ۵۰ سواری را مونتاژ کند. سود هر کامیون معادل

۳۰۰دلار و سود هر سواری معادل ۲۰۰دلار است. برنامه ریزی خطی را به کار گرفته و مشخص کنید برنامه تولید روزانه چه باشد تا سود شرکت بیشینه گردد.

جواب: شرکت باید مشخص کند که روزانه چند سواری و کامیون تولید شود. این مطلب به تعریف متغیرهای تصمیم زیر منجر می گردد:

X_1: تعداد کامیون های تولید شده در روز

X_2: تعداد سواری های تولید شده در روز

سود روزانه شرکت (بر حسب صد دلار)، برابر $3x_1 + 2x_2$ است؛ بنابراین می توان تابع هدف شرکت را به صورت زیر نوشت

$$\max z=3x_1+2x_2$$

دو محدودیت شرکت به صورت زیر هستند،

محدودیت۱ کسری از روز(به صورت عددی کوچکتر یا مساوی۱)که طی آن، کارگاه نقاشی مشغول است.

محدودیت۲ کسری از روز(به صورت عددی کوچکتر یا مساوی۱)که طی آن، کارگاه بدنه مشغول است.

پس، روابط زیر برقرار هستند،

کسری از روز که کارگاه نقاشی روی کامیون ها کار می کند= $x_1 \frac{1}{40}$

کسری از روز که کارگاه نقاشی روی سواری ها کار می کند= $x_2 \frac{1}{60}$

کسری از روز که کارگاه بدنه روی کامیون ها کار می کند= $x_1 \frac{1}{50}$

کسری از روز که کارگاه بدنه روی سواری ها کار می کند= $x_2 \frac{1}{50}$

بنابراین، محدودیت۱ به صورت زیر قابل بیان است،

(محدودیت کارگاه نقاشی) $x_{1+}\frac{1}{40}\quad x_2\frac{1}{60}\le 1$

محدودیت۲ به صورت زیر قابل بیان است،

(محدودیت کارگاه بدنه) $x_{1+}\frac{1}{50}\qquad x_2\frac{1}{50}\le 1$

از آنجا که باید $x_1\ge 0$ و $x_2\ge 0$ نیز برقرار باشند، برنامه ریزی خطی مربوطه به صورت زیر است:

$$\max z=3x_1+2x_2$$

s.t.

$$x_{1+}\frac{1}{40}\quad x_2\frac{1}{60}\le 1$$

$$x_{1+}\frac{1}{50}\qquad x_2\frac{1}{50}\le 1$$

$$x_1, x_2\ge 0$$

منابع

1-CHURCHMAN, C. W. R.ACKOFF, and E.L. ARNOFF, Introduction to Operations Research, Wiley, NewYork, 1957.

2-ELMAGHRABY ,S. E. "The Role of Modeling in IE Design," The Journal of Industrial Engineering, Vol.XIX, No.6, 292-305(1968).

3-McCLOSKEY. J. F, and F. N. TREFETHEN (eds.), Operations Research for Management, Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1954.

۴- کتاب تحقیق در عملیات برنامه ریزی خطی نوشته واین ال. وینستون.