فصلنامه مدیریت صنعتی دانشکده علوم انسانی، دانشگاه آزاد اسلامی
واحد سنندج –سال چهاردهم/ شماره ۵۰ / زمستان ۱۳۹۸

مدل‌های تصمیم برای ارزیابی و انتخاب تأمین کنندگان در حضور داده‌های اصلی و ترتیبی، محدودیت‌های وزنی و عوامل غیرقابل کنترل: یک رویکرد مبتنی بر DEA با مرز دوگانه

حسین عزیزی
گروه ریاضی، واحد پارس‌آباد مغان، دانشگاه آزاد اسلامی، پارس‌آباد مغان، ایران
رسول جاهد (نویسنده مسؤول)
گروه ریاضی، واحد گرمی، دانشگاه آزاد اسلامی، گرمی، ایران
Email:rasuljahed@gmail.com

تاریخ دریافت: ۹۷/۰۸/۲۰ * تاریخ پذیرش ۹۸/۰۶/۲۷

چکیده

انتخاب تأمین کننده‌ی مناسب برای برون‌سپاری اکنون یکی از مهم‌ترین تصمیمات بخش خرید است. این تصمیمات بخش مهمی از مدیریت تولید و تدارکات برای بسیاری از بنگاه‌ها هستند. بعلاوه، تأمین کنندگان را می‌توان به صورت نسبی از دیدگاه‌های خوشبینانه و بدبینانه ارزیابی و انتخاب کرد. روش تحلیل پوششی داده‌ها برای اندازه‌گیری کارایی سیستم‌های تولیدی به کار می‌رود که ورودی‌های متعددی را مصرف می‌کنند و خروجی‌های متعددی را تولید می‌نمایند. در شرایط نرمال، مطلوب این است که ورودی‌های کمتری مصرف شوند و خروجی‌های بیشتری تولید شوند، زیرا این کار منجر به کارایی بالاتری می‌شود. این مقاله یک رویکرد جدید «تحلیل پوششی داده‌ها با مرز دوگانه» را برای ارزیابی و انتخاب تأمین کنندگان پیشنهاد می‌کند. رویکرد تحلیل پوششی داده‌ها با مرز دوگانه، می‌تواند بهترین تأمین کننده را در حضور محدودیت‌های وزنی، عوامل غیرقابل کنترل، و داده‌های اصلی و ترتیبی شناسایی کند. در این رویکرد، پیشنهاد می‌شود که هر دو کارایی خوشبینانه و بدبینانه نسبی را در قالب یک کارایی میانگین هندسی ادغام کنیم. کارایی میانگین هندسی نشان دهنده‌ی عملکرد کلی هر تأمین کننده می‌باشد. مشاهده می‌شود که کارایی میانگین هندسی قدرت افتراق بیشتری نسبت به هر کدام از دو کارایی خوشبینانه و بدبینانه دارد. یک مثال عددی کاربرد روش پیشنهادی را نشان می‌دهد.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها؛ انتخاب تأمین کنندگان؛ محدودیت وزنی؛ عوامل غیرقابل کنترل؛ داده‌های اصلی و ترتیبی؛ کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه.

۱- مقدمه

امروزه شرکت‌های تولیدی با رقابت شدید جهانی مواجه هستند، و در نتیجه، فشاری باورنکردنی برای کاهش هزینه و زمان توسعه‌ی محصول جدید بر آن‌ها وارد می‌شود. این مطلب کاملاً شناخته شده است که بخش قابل توجهی از هزینه‌ی یک محصول متوسط مهندسی، قیمت مواد خام، اجزا و امکانات دیگر است؛ به طور متوسط، خرید کالاها و خدمات توسط تولید کنندگان ۵۵٪ درآمد آن‌ها را به خود اختصاص می‌دهد (Akarte, Surendra, Ravi, & Rangaraj, 2001). به این ترتیب، خرید یکی از تعیین کننده‌ترین و حیاتی‌ترین فعالیت‌های تجارت است، زیرا تأثیر قابل توجهی بر امور مالی، عملیات و رقابتی بودن سازمان دارد. در این زمینه، برون‌سپاری به سرعت در حال کسب اهمیت بیشتر است. بنابراین، بسیاری از سازمان‌ها اکنون منابع بیشتری را به فعالیت‌های برون‌سپاری اختصاص می‌دهند، تا موقعیت رقابتی خود را افزایش دهند. انتخاب یک تأمین کننده‌ی مناسب برای برون‌سپاری یکی از مهم‌ترین تصمیمات بخش خرید است، زیرا باید اهداف راهبردی را جدای از نیازهای عملیاتی سازمان اجرا کند.

تصمیم گیرندگان ممکن است در مسایل انتخاب تأمین کننده دارای قضاوت‌های ارزش باشند که می‌توان آن‌ها را از قبل فرمول‌بندی کرد، و لذا باید آن‌ها را در انتخاب تأمین کننده در نظر گرفت. این قضاوت‌های ارزش می‌توانند منعکس کننده‌ی اطلاعات شناخته شده در مورد چگونگی رفتار عوامل استفاده شده توسط تأمین کنندگان و/یا باورها یا ترجیحات پذیرفته شده در مورد ارزش نسبی ورودی‌ها، خروجی‌ها و یا حتی تأمین کنندگان باشد. از سوی دیگر، در کاربردهای عملی، تأمین کنندگان غالباً باید با برخی عوامل غیرقابل کنترل کار کنند (عوامل غیرقابل کنترل به عواملی گفته می‌شود که مقادیر آن‌ها از بیرون تثبیت شده است، و تصمیم گیرنده نمی‌تواند آن‌ها را کم و زیاد کند). در چنین مواردی، اطلاعات درباره‌ی اینکه یک عامل تعیین شده از بیرون تا چه حد قابل تغییر است، برای تأمین کننده معنی‌دار نیست. بانکر و موری در تحلیلی از شبکه‌ی رستوران‌های غذای فوری، تأثیر ورودی‌های تعیین شده از بیرون را که قابل کنترل نیستند، نشان دادند (Banker & Morey, 1986).

داده‌های نادقیق بدان معنا است که در مورد برخی داده‌ها تنها می‌دانیم که در محدوده‌ی کران‌های مشخصی واقع هستند و در مورد برخی دیگر از داده‌ها فقط روابط ترتیبی داده شده است. کوک و همکاران نشان دادند که چگونه می‌توان تحلیل پوششی داده‌ها[1] (DEA) را بسط داد تا با داده‌های ترتیبی کار کند (Cook, Kress, & Seiford, 1993, 1996). برای کار با تمام جنبه‌های داده‌های نادقیق، کوپر و همکاران مجموعه‌ای از مفاهیم و روش‌ها را پیشنهاد کردند که به نام «DEAی نادقیق» نامیده می‌شود (Cooper, Park, & Yu, 1999; Zhu, 2003b). از آن زمان تا کنون، بهبودها، بسط‌ها و کاربردهای چندی گزارش شده است (Amirteimoori, 2015; Azizi & Ganjeh Ajirlu, 2011; Azizi, Kordrostami, & Azizi, 2013; Cook & Zhu, 2006; Cooper, Park, & Yu, 2001a, 2001b; Despotis & Smirlis, 2002; Ebrahimi & Toloo, 2019; Jahed, Amirteimoori, & Azizi, 2015; Kao & Lin, 2011, 2012; Kao & Liu 2009; Park, Kim, Park, & Park, 1999; W. Liu, Wang, & Lyu, 2017; Shabani, Visani, Barbieri, Dullaert, & Vigo, 2019; Smirlis, Maragos, & Despotis, 2006; Zhou, et al., 2019; Zhu, 2003a, 2003b, 2004). این مطالعات روش‌های مختلفی را برای حل یک مسئله‌ی DEAی نادقیق غیرخطی ایجاد کرده‌اند، زیرا برخی از ورودی‌ها و خروجی‌ها متغیرهای تصمیم مجهول هستند که مقادیر آن‌ها باید در مدل معلوم شود.

برخی از رویکردهای برنامه‌ریزی ریاضی در گذشته برای انتخاب تأمین کننده مورد استفاده قرار گرفته‌اند. وانگ و همکاران برای در نظر گرفتن هر دو نوع داده‌های اصلی و ترتیبی در انتخاب تأمین کننده، روشی را بر مبنای فرآیند تحلیل سلسله‌مراتبی[2] (AHP) و برنامه‌ریزی آرمانی ایجاد کردند (G. Wang, Huang, & Dismukes, 2004). بهوتا و هیوق رویکردهای هزینه‌ی کل مالکیت و AHP را نشان دادند و آن‌ها را با هم مقایسه کردند (Bhutta, 2002). آن‌ها نتیجه‌گیری کردند که

---

[1] Data Envelopment Analysis (DEA)
[2] Analytic Hierarchy Process (AHP)

هزینه‌ی کل مالکیت برای موقعیت‌هایی که هزینه اولویت بالایی دارد و داده‌های هزینه‌ی مفصل برای مقایسه در دسترس است، مناسبت بهتری دارد. در مورد AHP، در مواردی که چندین هدف متناقض وجود دارد، و هزینه با همه‌ی اهمیت، عامل اصلی محسوب نمی‌شود، مناسب‌تر است. لیو و های برای تصمیم‌گیری در مورد رتبه‌بندی کلی تأمین کنندگان، پس از تعیین وزن‌ها در یک رتبه‌ی انتخابی، مجموع وزنی تعداد رأی رتبه‌ی انتخاب را مقایسه کردند (Liu & Hai, 2005). آن‌ها روش وزن‌دهی جدیدی را به جای مقایسه‌ی زوجی AHP برای انتخاب تأمین کنندگان ارائه کردند. آن‌ها روشی ساده‌تر از AHP را ارائه کردند که فرآیند تحلیل سلسله‌مراتبی رأی‌دهی نامیده می‌شود و رویکرد سیستماتیک به دست آوردن وزن‌ها مورد استفاده و نمره‌دهی عملکرد تأمین کنندگان را فراهم می‌کند. لیکن AHP دو عیب عمده دارد. اولاً ذهنی بودن AHP یک نقطه‌ی ضعف است. ثانیاً AHP نمی‌تواند روابط بینابینی در داخل معیارهای مدل را در خود جای دهد.

چن و همکاران یک رویکرد تصمیم‌گیری فازی را برای کار با مسئله‌ی انتخاب تأمین کننده در سیستم زنجیره‌ی تأمین ارائه کردند (Chen, Lin, & Huang, 2006). آن‌ها برای سنجش نمره‌ها و وزن‌های معیارها از مقادیر زبان‌شناختی استفاده کردند. این نمره‌های زبان‌شناختی را می‌توان به صورت اعداد فازی ذوزنقه‌ای یا مثلثی بیان کرد. آنگاه یک مدل تصمیم‌گیری چندشاخصی مبتنی بر نظریه‌ی مجموعه‌های فازی برای کار با مسایل انتخاب تأمین کننده در سیستم زنجیره‌ی تأمین پیشنهاد می‌شود. بر اساس مفهوم تکنیک ترجیح ترتیب بر اساس شباهت به جواب ایده‌آل، یک ضریب نزدیکی برای تعیین رتبه‌ی همه‌ی تأمین کنندگان با محاسبه‌ی فاصله از جواب ایده‌آل فازی مثبت و جواب ایده‌آل فازی منفی به طور همزمان تعریف می‌شود.

هیومفقیس و همکاران چارچوبی را برای تلفیق عوامل محیطی در فرآیند انتخاب تأمین کننده معرفی کردند (Humphreys, Wong, & Chan, 2003). آن‌ها یک ابزار پشتیبانی تصمیم ایجاد کردند که به شرکت‌ها کمک می‌کند که معیارهای محیطی را در فرآیند انتخاب تأمین کننده‌ی خود تلفیق کنند. بعد، یک چارچوب فرآیند انتخاب تأمین کننده که عملکرد محیطی را نیز در بر می‌گیرد، ایجاد می‌شود. در چارچوب آن‌ها، کاربر باید وزن دسته‌های زیست‌محیطی را ارائه کند تا نشان دهنده‌ی اهمیت آن در تحلیل باشد.

به خاطر پیچیدگی فرآیند تصمیم‌گیری در انتخاب تأمین کننده، تمام مقالات فوق‌الذکر متکی بر روشی برای اختصاص وزن به اندازه‌های عملکردی مختلف هستند. مشکل اصلی در تعیین وزن‌های دلخواه آن است که آن‌ها ذهنی هستند، و غالباً برای تصمیم گیرنده دشوار است که اعداد دقیقی را برای ترجیحات در نظر بگیرد. وقتی که تعداد معیارهای عملکردی افزایش می‌یابد، سنجش اطلاعات وزنی برای تصمیم گیرنده تبدیل به کار بسیار پرزحمتی می‌شود. بنابراین، یک تکنیک ریاضی قوی‌تر که نیازی به اطلاعات زیاد و دقیق از تصمیم گیرنده نداشته باشد، می‌تواند فرآیند ارزیابی تأمین کننده را تقویت کند. برای این منظور، وبر نشان داد که می‌توان از DEA برای ارزیابی فروشندگان از نظر معیارهای متعدد استفاده کرد و مقادیر محکی را می‌توان برای این کار استفاده کرد، شناسایی نمود (Weber, 1996). وبر و همکاران رویکردی را برای ارزیابی تعداد فروشندگان جهت استفاده در یک موقعیت تدارکاتی با استفاده از برنامه‌ریزی چندهدفی و DEA ارائه کردند (Weber, Current, & Desai, 2000). رویکرد آن‌ها به این صورت است که جواب‌های کمیت سفارش فروشنده (که به آن سوپرفروشنده گفته می‌شود) با استفاده از برنامه‌ریزی چندهدفی تعیین می‌شود، و بعد کارایی این سوپرفروشنده‌ها از نظر معیارهای مختلف با استفاده از DEA ارزیابی می‌شود. براقلیا و پترونی یک نظریه‌ی مطلوبیت چندشاخصی بر مبنای استفاده از DEA با هدف کمک به مدیران خرید برای تدوین راهبردهای موفق سپارش در بازار در حال تغییر ارائه کردند (Braglia & Petroni, 2000). لیو و همکاران برای ارزیابی عملکرد تجمیعی تأمین کنندگان، استفاده از DEA را پیشنهاد کردند (Liu, Ding, & Lall, 2000). روش آن‌ها پژوهش وبر را در استفاده از DEA برای ارزیابی تأمین کننده جهت یک محصول منفرد بسط می‌دهد. فورکر و مندز یک روش تحلیلی را برای محک‌زنی با استفاده از DEA پیشنهاد کردند که می‌تواند به شرکت‌ها کمک کند که کاراترین تأمین کنندگان، تأمین کننده‌ی دارای کاربردی‌ترین برنامه‌ی مدیریت کامل کیفیت در میان تأمین کنندگان کاراتر، و تأمین کنندگانی که روی مرز کارا نیستند ولی می‌توانند با تقلید روش‌های بهترین تأمین کنندگان همتای خود به طرف مرز بروند، را شناسایی کنند (Forker & Mendez, 2001). تالوری و سارکیز روی فرآیند ارزیابی و پایش عملکرد تأمین کنندگان، که به حفظ پیوندهای مؤثر

مشتری–تأمین کننده کمک می‌کند، تمرکز کردند (Talluri & Sarkis, 2002). آن‌ها تلاش کردند قدرت افتراقی مدل BCC را که به وسیله‌ی بانکر و همکاران ایجاد شده است، بهبود بخشند (Banker, Charnes, & Cooper, 1984). تالوری و همکاران برای انتخاب تأمین کننده‌ی مناسب، یک رویکرد DEAی مقید به شانس را در حضور معیارهای متعدد عملکرد که نامطمئن هستند، پیشنهاد کردند (Talluri, Narasimhan, & Nair, 2006). برای انتخاب بهترین تأمین کنندگان در حضور هر دو نوع داده‌های اصلی و ترتیبی، فرضی‌پور صائن روشی را که مبتنی بر DEAی نادقیق است، پیشنهاد کرد (Farzipoor Saen, 2007).

با این حال، همه‌ی مراجع فوق‌الذکر مبتنی بر قدرت کنترل کامل معیارهای تصمیم‌گیری هستند و انتخاب تأمین کننده را در حضور هم محدودیت‌های وزنی و هم عوامل غیرقابل کنترل در نظر نگرفته‌اند. گرچه لیو و همکاران پیشنهاد کردند که از DEA برای انتخاب تأمین کننده در حضور عوامل غیرقابل کنترل استفاده شود، ولی مدلی را معرفی نکردند که انتخاب تأمین کننده را هم در حضور محدودیت‌های وزنی و هم در حضور عوامل غیرقابل کنترل انجام دهد (Liu, et al., 2000). به عبارت دیگر، آن‌ها محدودیت‌های وزنی را در نظر نگرفته‌اند. برای انتخاب بهترین فناوری، فرضی‌پور صائن مدلی را برای در نظر گرفتن عوامل غیرقابل کنترل بررسی کرد (2006bFarzipoor Saen, 2006a ,). لیکن وی هم محدودیت‌های وزنی و هم داده‌های اصلی و ترتیبی را در نظر نگرفته است. به همین ترتیب، فرضی‌پور صائن برای انتخاب تأمین کنندگان یک جفت مدل DEAی نادقیق با عوامل غیرقابل کنترل را پیشنهاد کرد (Farzipoor Saen, 2009). لیکن او محدودیت‌های وزنی را در نظر نگرفته است. همچنین، فرضی‌پور صائن مسئله‌ی انتخاب تأمین کنندگان را در حضور داده‌های اصلی و ترتیبی، محدودیت‌هایی وزنی، و عوامل غیرقابل کنترل از دیدگاه خوشبینانه بررسی کرده است (Farzipoor Saen, 2009).

اکثر مطالعات فوق‌الذکر فقط می‌توانند کارایی خوشبینانه را محاسبه کنند، و کارایی بدبینانه را باید به طور جداگانه محاسبه کرد. به علاوه، رابطه‌ی بین کارایی کلی و کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه که به طور شهودی انتظار می‌رود وجود داشته باشد، نامعلوم است. لازم به ذکر است که کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه دو راس عملکرد هر واحد تصمیم‌گیری[3] (DMU) را اندازه‌گیری می‌کنند؛ هر روش ارزیابی که فقط یکی از آن‌ها را در نظر گرفته باشد، دچار سوگیری است (Azizi & Fathi Ajirlu, 2010 ; W. Liu & Wang, 2018; Seyedalizadeh Ganji, Rassafi, & Bandari, 2019; Seyedalizadeh Ganji, Rassafi, & Xu, 2019). برای تعیین عملکرد کلی هر DMU باید هر کدام از آن‌ها را همزمان در نظر گرفت (Azizi & Wang, 2013Azizi, 2011 ;). تنها مدل مضربی وانگ و همکاران قادر است به طور همزمان کارایی کلی و کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه را اندازه‌گیری کند و نشان می‌دهد که اندازه‌ی کارایی کلی، متوسط هندسی کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه است (Y.-M. Wang, Chin, & Yang, 2007). کارایی متوسط هندسی را می‌توان به عنوان یک اندازه‌ی عملکرد کلی هر DMU تلقی کرد. لذا هدف مقاله‌ی حاضر آن است که مدل‌هایی برای ارزیابی و انتخاب تأمین کنندگان در حضور محدودیت‌های وزنی، عوامل غیرقابل کنترل و داده‌های اصلی و ترتیبی ایجاد کند. این مدل‌ها از شکل مضربی مدل DEAی متعارف ایجاد می‌شوند و لذا به آسانی قابل درک هستند. مزیت اصلی مدل‌های پیشنهادی آن است که نیازمند وزن‌های دقیق از تصمیم گیرنده نیستند و محدودیت‌های وزنی، عوامل غیرقابل کنترل و داده‌های اصلی و ترتیبی را همزمان در نظر می‌گیرند.

۲- مواد و روش‌ها

وانگ و همکاران یک روش رتبه‌بندی را برای DMUها پیشنهاد کردند (Y.-M. Wang, Luo, & Liang, 2009). روش آن‌ها DMUها را با تحمیل یک محدودیت وزنی کمینه‌ی مناسب بر تمام ورودی‌ها و خروجی‌ها که توسط تصمیم گیرنده تعیین می‌شود، رتبه‌بندی می‌کند.

در این قسمت، مدل‌هایی که عوامل غیرقابل کنترل، داده‌های اصلی و ترتیبی، و محدودیت‌های وزنی را در نظر می‌گیرند، معرفی

[3] Decision-Making Unit (DMU)

می‌شوند. در مدل‌های پیشنهادی، نمره‌ی کارایی نهایی برای هر DMU به وسیله‌ی یک بازه که کران‌های آن بهترین کارایی کران پایین و بهترین کارایی کران بالای هر DMU هستند، مشخص خواهد شد.

فرض کنید n DMU باید ارزیابی شوند. هر DMU m ورودی را مصرف و s خروجی را تولید می‌کند. به طور خاص، DMU_j مقادیر $X_j = \{x_{ij}\}$ از ورودی‌ها ($i = 1,\dots,m$) را مصرف می‌کند و مقادیر $Y_j = \{y_{rj}\}$ از خروجی‌ها ($r = 1,\dots,s$) را تولید می‌کند. بدون از دست رفتن کلیت موضوع، فرض می‌شود که همه‌ی داده‌های ورودی و خروجی x_{ij} و y_{rj} ($i = 1,\dots,m$؛ $r = 1,\dots,s$؛ $j = 1,\dots,n$) را به علت وجود عدم اطمینان نمی‌توان به طور دقیق به دست آورد. فقط می‌دانیم که این داده‌ها در بین کران‌های بالا و پایین بازه‌های $[x_{ij}^L, x_{ij}^U]$ و $[y_{rj}^L, y_{rj}^U]$ قرار دارند، که در اینجا $x_{ij}^L > 0$ و $y_{rj}^L > 0$. برای کار با چنین وضعیت نامطمئنی، زوج مدل‌های برنامه‌ریزی خطی زیر ایجاد شده‌اند که کران‌های بالا و پایین بازه‌ی کارایی خوشبینانه‌ی هر DMU را تعیین می‌کنند (Y.-M. Wang, Greatbanks, & Yang, 2005):

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \theta_o^U = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}^U \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^U - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^L \le 0, \quad j = 1,\dots,n, \\
& \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}^L = 1, \\
& u_r, v_i \ge 0, \quad r = 1,\dots,s; \quad i = 1,\dots,m.
\end{aligned} \tag{1}
$$

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \theta_o^L = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}^L \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^U - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^L \le 0, \quad j = 1,\dots,n, \\
& \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}^U = 1, \\
& u_r, v_i \ge 0, \quad r = 1,\dots,s; \quad i = 1,\dots,m.
\end{aligned} \tag{2}
$$

که در اینجا اندیس پایین o نشان دهنده‌ی DMUی تحت ارزیابی است (که با نماد DMU_o نشان داده می‌شود)؛ u_r ($r = 1,\dots,s$) و v_i ($i = 1,\dots,m$) وزن‌های اختصاص داده شده به خروجی‌ها و ورودی‌ها هستند؛ θ_o^U نشان دهنده‌ی کران بالای بهترین کارایی نسبی یا کارایی خوشبینانه‌ی DMU_o است در زمانی که همه‌ی DMUها در وضعیت بهترین فعالیت تولیدی هستند، در حالی که θ_o^L نشان دهنده‌ی کران پایین بهترین کارایی نسبی یا کارایی خوشبینانه‌ی DMU_o است. اینها بازه‌ی بهترین کارایی نسبی ممکن یا بازه‌ی کارایی خوشبینانه‌ی $[\theta_o^L, \theta_o^U]$ را تشکیل می‌دهند. اگر مجموعه‌ای از وزن‌های مثبت وجود داشته باشند که باعث شود $\theta_o^{U*} = 1$، آنگاه DMU_o کارای DEA یا کارای خوشبینانه نامیده می‌شود؛ در غیر این صورت، به آن غیرکارای DEA یا غیرکارای خوشبینانه می‌گویند.

یک DMUی کارای خوشبینانه را که توسط مدل (۱) شناسایی شده است، مثلاً DMU_o، در نظر بگیرید. برای این DMU_o، معادله و نامعادله‌های زیر برقرار است:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}^U - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}^L = 0 \\
& \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^U - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^L \le 0, \quad j = 1,\dots,n \\
& u_r, v_i \ge 0, \quad r = 1,\dots,s; \quad i = 1,\dots,m.
\end{aligned} \tag{3}
$$

به آسانی می‌توان در یافت که تعداد بی‌نهایتی وزن ورودی و خروجی وجود دارند که می‌توانند شروط فوق را تأمین کنند، زیرا ku_r و kv_i برای هر $k > 0$ همگی جواب‌های (۳) خواهند بود، مادام که u_r ($r = 1,\dots,s$) و v_i ($i = 1,\dots,m$) جواب آن باشند. برای اینکه از این حالت دلبخواه بودن اجتناب شود، باید معادله‌ای مانند $\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}^L = 1$ یا $\sum_{i=1}^{m} v_i (\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^L) = 1$ به (۳) اضافه شود، تا محکی برای مقایسه‌ی وزن‌های ورودی و خروجی DMUهای مختلف ایجاد

شود. از آنجا که معادله‌ی $\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}^L = 1$ از یک DMUی کارای خوشبینانه به DMUی دیگر متفاوت است، و این سبب می‌شود که وزن‌های ورودی و خروجی DMUهای مختلف کمابیش غیرقابل مقایسه باشد، لذا معادله‌ی $\sum_{i=1}^{m} v_i (\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^L) = 1$ برای اضافه کردن انتخاب می‌شود.

فرض کنید ψ^* بیشینه‌کمینه (maximin) وزن ورودی و خروجی DMU_o باشد، یعنی $\psi^* = \max_{u_r, v_i}\{\min(\min_r u_r, \min_i v_i)\}$. مدل زیر ساخته شده است تا مقدار ψ^* را برای هر DMUی کارای خوشبینانه مشخص کند.

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \theta_o^U = \psi \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^U - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^L \le 0, \quad j = 1,\dots,n \\
& \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}^U - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}^L = 0, \\
& \sum_{i=1}^{m} v_i (\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^L) = 1, \\
& u_r, v_i \ge \psi, \quad r = 1,\dots,s; \quad i = 1,\dots,m.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

معنای مدل (۴) آن است که کمینه‌ی وزن ورودی و خروجی DMU_o کارای خوشبینانه بیشینه‌سازی شود، در حالی که کارایی آن بدون تغییر باقی می‌ماند. به عبارت دیگر، ψ^* بیشینه‌کمینه‌ی وزن است که می‌تواند DMU_o را کارای خوشبینانه نگه دارد. اما وزن بیشینه‌کمینه که با مدل (۴) تعیین می‌شود، نسبت به واحد تغییرناپذیر نیست. برای غلبه بر این مشکل و حذف اثرات تغییر واحد اندازه‌گیری بر بزرگی وزن‌های بیشینه‌کمینه، همه‌ی ورودی‌ها و خروجی‌ها نرمال‌سازی می‌شوند. نرمال‌سازی ورودی‌ها و خروجی‌ها را می‌توان با معادلات زیر انجام داد:

$$
\begin{cases}
\hat{x}_{ij}^U = x_{ij}^U / \sum_{k=1}^{n} x_{ik}^U & j = 1,\dots,n; \quad i = 1,\dots,m, \\
\hat{x}_{ij}^L = x_{ij}^L / \sum_{k=1}^{n} x_{ik}^L & j = 1,\dots,n; \quad i = 1,\dots,m, \\
\hat{y}_{rj}^U = y_{rj}^U / \sum_{k=1}^{n} y_{rk}^U & j = 1,\dots,n; \quad r = 1,\dots,s, \\
\hat{y}_{rj}^L = y_{rj}^L / \sum_{k=1}^{n} y_{rk}^L & j = 1,\dots,n; \quad r = 1,\dots,s,
\end{cases}
\tag{5}
$$

ورودی‌ها تبدیل شده شروط $\sum_{j=1}^{n} \hat{x}_{ij}^L = 1$ را برای $i = 1,\dots,m$ تأمین می‌کنند، که سبب می‌شود که مدل (۴) کوتاه‌تر شود، به این صورت:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \theta_o^U = \psi \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r \hat{y}_{rj}^U - \sum_{i=1}^{m} v_i \hat{x}_{ij}^L \le 0, \quad j = 1,\dots,n, \\
& \sum_{r=1}^{s} u_r \hat{y}_{ro}^U - \sum_{i=1}^{m} v_i \hat{x}_{io}^L = 0, \\
& \sum_{i=1}^{m} v_i = 1, \\
& u_r, v_i \ge \psi, \quad r = 1,\dots,s; \quad i = 1,\dots,m.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

که در اینجا $\hat{x}_{ij}^U$ و $\hat{x}_{ij}^L$ ($i = 1,\dots,m$؛ $j = 1,\dots,n$) و $\hat{y}_{rj}^U$ ($r = 1,\dots,s$؛ $j = 1,\dots,n$) داده‌های ورودی و خروجی نرمال‌سازی شده هستند. با حل مدل (۶) برای هر DMUی کارای خوشبینانه، مجموعه‌ای از وزن‌های بیشینه‌کمینه، $\psi_{i_1}^*, \dots, \psi_{i_k}^*$، برای هر DMUی کارای خوشبینانه به دست می‌آید، که در اینجا $i_1, \dots, i_k$ اندیس‌های K DMUی کارای خوشبینانه هستند.

در اینجا، تحمیل یک محدودیت وزنی کمینه w را بر همه‌ی ورودی‌ها و خروجی‌ها در نظر بگیرید، تا DMUها را به طور کامل

از یکدیگر افتراق داد. مدل‌های کارایی جدید با محدودیت وزنی w بـه صـورت زیـر سـاخته مـی‌شـوند (Farzipoor Saen, 2009):

$$\begin{aligned} \max \quad & \hat{\theta}_o^U = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r \hat{y}_{ro}^U}{\sum_{i=1}^{m} v_i \hat{x}_{io}^L} \\ \text{s.t.} \quad & \hat{\theta}_j^U = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r \hat{y}_{rj}^U}{\sum_{i=1}^{m} v_i \hat{x}_{ij}^L} \le 1, \quad j = 1,\dots,n, \\ & \sum_{i=1}^{m} v_i = 1, \\ & u_r, v_i \ge w, \quad r = 1,\dots,s; \quad i = 1,\dots,m. \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & \hat{\theta}_o^L = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r \hat{y}_{ro}^L}{\sum_{i=1}^{m} v_i \hat{x}_{io}^U} \\ \text{s.t.} \quad & \hat{\theta}_j^U = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r \hat{y}_{rj}^U}{\sum_{i=1}^{m} v_i \hat{x}_{ij}^L} \le 1, \quad j = 1,\dots,n, \\ & \sum_{i=1}^{m} v_i = 1, \\ & u_r, v_i \ge w, \quad r = 1,\dots,s; \quad i = 1,\dots,m. \end{aligned} \tag{8}$$

مدل‌های (۷) و (۸) از یکی دو جهت با مدل‌های (۱) و (۲) متفاوت هستند. یک تفاوت قابـل توجـه در میـان آن‌هـا در معادلـه‌ی $\sum_{i=1}^{m} v_i = 1$ است، که برای اجتناب از دلبخواه بودن تعیین وزن‌هـای ورودی و خروجـی اضـافه شـده اسـت. بـدون معادلـه‌ی $\sum_{i=1}^{m} v_i = 1$، محدودیت وزنی کمینه‌ی w بی‌معنا خواهد شد، زیرا هر گونـه وزن ورودی و خروجـی را مـی‌تـوان بـه صـورتی مقیاس کرد که در شرط محدودیت وزنی کمینه صدق کند، و تعداد بی‌نهایتی جواب برای مدل‌های (۷) و (۸) وجود خواهد داشت، مگر اینکه $\sum_{i=1}^{m} v_i \hat{x}_{io}^L$ و $\sum_{i=1}^{m} v_i \hat{x}_{io}^U$ به عنوان یک منظور شود. لیکن این تعیین بین DMUهای مختلف متفـاوت اسـت، و لذا وزن‌های ورودی و خروجی DMUهای مختلف غیرقابل مقایسه خواهند بود، چرا که از قیود متفاوتی گرفته شده‌انـد. دومـین تفاوت عمده بین این مدل‌ها محدودیت وزنی کمینه‌ی w است، که در مدل‌های (۱) و (۲) لازم نیست. سومین تفاوت بـین ایـن مدل‌ها نرمال‌سازی داده‌های ورودی و خروجی است که برای مدل‌های (۷) و (۸) لازم است، ولی برای مـدل‌هـای (۱) و (۲) لازم نیست.

فرض کنید داشته باشیم:

$$\begin{aligned} & z = 1 / \sum_{i=1}^{m} v_i \hat{x}_{io}^U = 1 / \sum_{i=1}^{m} v_i \hat{x}_{io}^L \\ & \tilde{u}_r = u_r \cdot z, \quad r = 1,\dots,s \\ & \tilde{v}_i = v_i \cdot z, \quad i = 1,\dots,m \end{aligned} \tag{9}$$

از طریق تبدیل‌های فوق، مدل‌های (۷) و (۸) را می‌توان به مدل‌های برنامه‌ریزی خطی معادل تبدیل کرد، که در زیـر نشـان داده شده‌اند (Farzipoor Saen, 2009):

$$\begin{aligned}
\max \quad & \hat{\theta}_o^U = \sum\nolimits_{r=1}^{s} \tilde{u}_r \hat{y}_{ro}^U \\
\text{s.t.} \quad & \sum\nolimits_{r=1}^{s} \tilde{u}_r \hat{y}_{rj}^U - \sum\nolimits_{i=1}^{m} \tilde{v}_i \hat{x}_{ij}^L \le 0, \quad j = 1,\dots,n, \\
& \sum\nolimits_{i=1}^{m} \tilde{v}_i \hat{x}_{io}^L = 1, \\
& \sum\nolimits_{i=1}^{m} \tilde{v}_i = z, \\
& z \ge 0, \\
& \tilde{u}_r, \tilde{v}_i \ge w \cdot z, \quad r = 1,\dots,s; \quad i = 1,\dots,m.
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
\max \quad & \hat{\theta}_o^L = \sum\nolimits_{r=1}^{s} \tilde{u}_r \hat{y}_{ro}^L \\
\text{s.t.} \quad & \sum\nolimits_{r=1}^{s} \tilde{u}_r \hat{y}_{rj}^U - \sum\nolimits_{i=1}^{m} \tilde{v}_i \hat{x}_{ij}^L \le 0, \quad j = 1,\dots,n, \\
& \sum\nolimits_{i=1}^{m} \tilde{v}_i \hat{x}_{io}^U = 1, \\
& \sum\nolimits_{i=1}^{m} \tilde{v}_i = z, \\
& z \ge 0, \\
& \tilde{u}_r, \tilde{v}_i \ge w \cdot z, \quad r = 1,\dots,s; \quad i = 1,\dots,m.
\end{aligned} \tag{11}$$

و یا به صورت

$$\begin{aligned}
\max \quad & \hat{\theta}_o^U = \sum\nolimits_{r=1}^{s} \tilde{u}_r \hat{y}_{ro}^U \\
\text{s.t.} \quad & \sum\nolimits_{r=1}^{s} \tilde{u}_r \hat{y}_{rj}^U - \sum\nolimits_{i=1}^{m} \tilde{v}_i \hat{x}_{ij}^L \le 0, \quad j = 1,\dots,n, \\
& \sum\nolimits_{i=1}^{m} \tilde{v}_i \hat{x}_{io}^L = 1, \\
& \tilde{u}_r - w \sum\nolimits_{i=1}^{m} \tilde{v}_i \ge 0, \quad r = 1,\dots,s, \\
& \tilde{v}_i - w \sum\nolimits_{l=1}^{m} \tilde{v}_l \ge 0, \quad i = 1,\dots,m, \\
& \tilde{u}_r, \tilde{v}_i \ge 0, \quad r = 1,\dots,s; \quad i = 1,\dots,m.
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
\max \quad & \hat{\theta}_o^L = \sum\nolimits_{r=1}^{s} \tilde{u}_r \hat{y}_{ro}^L \\
\text{s.t.} \quad & \sum\nolimits_{r=1}^{s} \tilde{u}_r \hat{y}_{rj}^U - \sum\nolimits_{i=1}^{m} \tilde{v}_i \hat{x}_{ij}^L \le 0, \quad j = 1,\dots,n, \\
& \sum\nolimits_{i=1}^{m} \tilde{v}_i \hat{x}_{io}^U = 1, \\
& \tilde{u}_r - w \sum\nolimits_{i=1}^{m} \tilde{v}_i \ge 0, \quad r = 1,\dots,s, \\
& \tilde{v}_i - w \sum\nolimits_{l=1}^{m} \tilde{v}_l \ge 0, \quad i = 1,\dots,m, \\
& \tilde{u}_r, \tilde{v}_i \ge 0, \quad r = 1,\dots,s; \quad i = 1,\dots,m.
\end{aligned} \tag{13}$$

که در اینجا $\tilde{u}_r$ ($r = 1,\dots,s$)، $\tilde{v}_i$ ($i = 1,\dots,m$)، و z متغیرهای تصمیم هستند.

ایده‌ی در نظر گرفتن محدودیت‌های وزنی نخستین بار در سیاق تعیین کران‌های وزن‌های فاکتورها در مسئله‌ی مضـربی DEA مطرح شد. این منجر به تشکیل مدل‌هـای نسـبت مخروطـی (Charnes, Cooper, Wei, & Huang, 1989) و ناحیـه‌ی اطمینان[۴] (AR) (Thompson, Langemeier, Lee, Lee, & Thrall, 1990) شد.

محدودیت‌هایی مانند $\gamma_r \tilde{u}_{r+1} \le \tilde{u}_r \le \delta_r \tilde{u}_{r+1}$ و $\alpha_i \tilde{v}_{i+1} \le \tilde{v}_i \le \beta_i \tilde{v}_{i+1}$ نوع I AR نامیده می‌شـوند، کـه در اینجـا α_i، β_i،

---

[4] Assurance Region (AR)

γ_r، و δ_r پارامترهای ارائه شده توسط تصمیم گیرنده هستند. بنابراین، $\tilde{v}_i - w\sum_{l=1}^{m}\tilde{v}_l \geq 0$ را می‌تـوان AR نـوع I دانسـت. محدودیت‌های روی نسبت‌های بین وزن‌های ورودی و خروجی، AR نوع II نامیده می‌شـوند. بنـابراین، $\tilde{u}_r - w\sum_{i=1}^{m}\tilde{v}_i \geq 0$، AR نوع II است.

حال فرض کنید که متغیرهای ورودی را بتوان به دو زیرمجموعه‌ی متغیرهای قابل کنتـرل (D) و غیرقابـل کنتـرل (N) تقسـیم کرد. به این ترتیب،

$$I = \{1,\dots,m\} = D \cup N, \quad D \cap N = \varnothing \tag{14}$$

برای تعمیم مدل‌های پیشنهادی، ابتدا باید اجازه دهیم که هر DMU وضعیت متغیرهای قابل کنترل و غیرقابـل کنتـرل را نظـر بگیرد. در این حالت، مدل‌های زیر پیشنهاد می‌شوند:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \theta_o^U = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}^U - \sum_{i\in N} v_i x_{io}^L \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^U - \sum_{i\in N} v_i x_{ij}^L - \sum_{i\in D} v_i x_{ij}^L \leq 0, \quad j=1,\dots,n, \\
& \sum_{i\in D} v_i x_{io}^L = 1, \\
& v_i \geq \varepsilon,\ i\in D; \quad v_i \geq 0,\ i\in N; \quad u_r \geq \varepsilon,\ r=1,\dots,s.
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
\max \quad & \theta_o^L = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}^L - \sum_{i\in N} v_i x_{io}^U \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^U - \sum_{i\in N} v_i x_{ij}^L - \sum_{i\in D} v_i x_{ij}^L \leq 0, \quad j=1,\dots,n, \\
& \sum_{i\in D} v_i x_{io}^U = 1, \\
& v_i \geq \varepsilon,\ i\in D; \quad v_i \geq 0,\ i\in N; \quad u_r \geq \varepsilon,\ r=1,\dots,s.
\end{aligned} \tag{16}$$

همچنین، مدل زیر ساخته شده است تا مقدار ψ^* را برای هر DMUی کارای خوشبینانه مشخص کند:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \theta_o^U = \psi \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r \hat{y}_{rj}^U - \sum_{i\in D} v_i \hat{x}_{ij}^L - \sum_{i\in N} v_i \hat{x}_{ij}^L \leq 0, \quad j=1,\dots,n, \\
& \sum_{r=1}^{s} u_r \hat{y}_{ro}^U - \sum_{i\in D} v_i \hat{x}_{ij}^L - \sum_{i\in N} v_i \hat{x}_{ij}^L = 0, \\
& \sum_{i\in D} v_i = 1, \\
& v_i \geq \psi,\ i\in D; \quad v_i \geq 0,\ i\in N; \quad u_r \geq \psi,\ r=1,\dots,s.
\end{aligned} \tag{17}$$

بالاخره، مدل‌های پیشنهادی در زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \hat{\theta}_o^U = \sum_{r=1}^{s} \tilde{u}_r \hat{y}_{ro}^U - \sum_{i \in N} \tilde{v}_i \hat{x}_{io}^L \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^{s} \tilde{u}_r \hat{y}_{rj}^U - \sum_{i \in D} \tilde{v}_i \hat{x}_{ij}^L - \sum_{i \in N} \tilde{v}_i \hat{x}_{ij}^L \le 0, \quad j = 1,\dots,n, \\
& \sum_{i \in D} \tilde{v}_i \hat{x}_{io}^L = 1, \\
& \tilde{u}_r - w \sum_{i \in D} \tilde{v}_i \ge 0, \quad r = 1,\dots,s, \\
& \tilde{v}_i - w \sum_{l \in D} \tilde{v}_l \ge 0, \quad i \in D, \\
& \tilde{v}_i \ge \varepsilon, i \in D; \quad \tilde{v}_i \ge 0, i \in N; \quad \tilde{u}_r \ge \varepsilon, r = 1,\dots,s.
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
\max \quad & \hat{\theta}_o^L = \sum_{r=1}^{s} \tilde{u}_r \hat{y}_{ro}^L - \sum_{i \in N} \tilde{v}_i \hat{x}_{io}^U \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^{s} \tilde{u}_r \hat{y}_{rj}^U - \sum_{i \in D} \tilde{v}_i \hat{x}_{ij}^L - \sum_{i \in N} \tilde{v}_i \hat{x}_{ij}^L \le 0, \quad j = 1,\dots,n, \\
& \sum_{i \in D} \tilde{v}_i \hat{x}_{io}^U = 1, \\
& \tilde{u}_r - w \sum_{i \in D} \tilde{v}_i \ge 0, \quad r = 1,\dots,s, \\
& \tilde{v}_i - w \sum_{l \in D} \tilde{v}_l \ge 0, \quad i \in D, \\
& \tilde{v}_i \ge \varepsilon, i \in D; \quad \tilde{v}_i \ge 0, i \in N; \quad \tilde{u}_r \ge \varepsilon, r = 1,\dots,s.
\end{aligned} \tag{19}$$

که در اینجا ε بی‌نهایت کوچک غیرارشمیدسی است. به طوری که می‌توان دید، ورودی‌های غیرقابل کنترل، ولی نه ورودی‌های قابل کنترل، وارد هدف (۱۸) و (۱۹) می‌شوند. مقادیر مضربی همراه با این ورودی‌های غیرقابل کنترل ممکن است صفر باشد، ولی متغیرهای دیگر باید همیشه مثبت باشد.

برای قضاوت در مورد اینکه یک DMU کارای خوشبینانه است یا نه، تعریف زیر ارائه می‌شود:

تعریف ۱: یک DMU، DMU_o، کارای خوشبینانه گفته می‌شود اگر بهترین کارایی کران بالای ممکن آن $\hat{\theta}_o^{U^*} = 1$ باشد؛ در غیر این صورت، اگر $\hat{\theta}_o^{U^*} < 1$ باشد، به آن غیرکارای خوشبینانه گفته می‌شود.

چارچوب با ماهیت ورودی، که مبتنی بر مجموعه‌ی نیازمندی ورودی و مرز ناکارایی آن است، در صدد آن است که ضمن حفظ خروجی، حداکثر در حد فعلی، مقادیر ورودی را حتی‌الامکان افزایش دهد. که بر این واقعیت تأکید می‌کند که سطح خروجی بدون تغییر می‌ماند، و مقادیر ورودی به صورت متناسب افزایش داده می‌شوند، تا مرز تولید ناکارا حاصل شود. برآورد کننده‌ی DEA برای مجموعه‌ی امکان تولید ناکارا، اصطلاحاً کارایی بدبینانه و یا بدترین کارایی نسبی نامیده می‌شود. برای یک DMUی خاص، مثلاً DMU_o، کارایی‌های بدبینانه را می‌توان از مدل‌های DEAی زیر محاسبه کرد (Azizi & Ganjeh Ajirlu, 2011):

$$\begin{aligned}
\min \quad & \varphi_o^L = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}^L \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^L - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^U \ge 0, \quad j = 1,\dots,n, \\
& \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}^U = 1, \\
& u_r, v_i \ge 0, \quad r = 1,\dots,s; \quad i = 1,\dots,m.
\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
\min \quad & \varphi_o^U = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}^U \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^L - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^U \geq 0, \quad j = 1,\dots,n, \\
& \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}^L = 1, \\
& u_r, v_i \geq 0, \quad r = 1,\dots,s; \quad i = 1,\dots,m.
\end{aligned} \tag{21}$$

در مدل‌های (۲۰) و (۲۱)، φ_o^L کارایی بدبینانه تحت نامطلوب‌ترین موقعیت و φ_o^U کارایی بدبینانه تحت مطلوب‌ترین موقعیت برای DMU_o می‌باشند. آن‌ها برای DMU_o بازه‌ی کارایی بدبینانه‌ی $[\varphi_o^L, \varphi_o^U]$ را ارائه می‌کنند. زمانی که مجموعه‌ای از وزن‌های مثبت وجود داشته باشند تا $\varphi_o^{L*} = 1$ را تأمین کند، می‌گوییم که DMU_o ناکارای DEA یا ناکارای بدبینانه است. در غیر این صورت، می‌گوییم که DMU_o غیرناکارای DEA یا غیرناکارای بدبینانه است.

مدل‌های DEAی بازه‌ای که در آن هم داده‌های نادقیق و هم عوامل غیرقابل کنترل وجود دارند، به صورت زیر داده می‌شوند:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \varphi_o^L = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}^L - \sum_{i \in N} v_i x_{io}^U \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^L - \sum_{i \in N} v_i x_{ij}^U - \sum_{i \in D} v_i x_{ij}^U \geq 0, \quad j = 1,\dots,n, \\
& \sum_{i \in D} v_i x_{io}^U = 1, \\
& v_i \geq \varepsilon, i \in D; \quad v_i \geq 0, i \in N; \quad u_r \geq \varepsilon, r = 1,\dots,s.
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
\min \quad & \varphi_o^U = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}^U - \sum_{i \in N} v_i x_{io}^L \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^L - \sum_{i \in N} v_i x_{ij}^U - \sum_{i \in D} v_i x_{ij}^U \geq 0, \quad j = 1,\dots,n, \\
& \sum_{i \in D} v_i x_{io}^L = 1, \\
& v_i \geq \varepsilon, i \in D; \quad v_i \geq 0, i \in N; \quad u_r \geq \varepsilon, r = 1,\dots,s.
\end{aligned} \tag{23}$$

همچنین، مدل زیر ساخته شده است تا مقدار ψ^* را برای هر DMUی ناکارای بدبینانه در حضور متغیرهای قابل کنترل و غیرقابل کنترل مشخص کند:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \varphi_o^L = \psi \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r \hat{y}_{rj}^L - \sum_{i \in N} v_i \hat{x}_{ij}^U - \sum_{i \in D} v_i \hat{x}_{ij}^U \geq 0, \quad j = 1,\dots,n, \\
& \sum_{r=1}^{s} u_r \hat{y}_{rj}^L - \sum_{i \in N} v_i \hat{x}_{ij}^U - \sum_{i \in D} v_i \hat{x}_{ij}^U = 0, \\
& \sum_{i \in D} v_i = 1, \\
& v_i \geq \psi, i \in D; \quad v_i \geq 0, i \in N; \quad u_r \geq \psi, r = 1,\dots,s.
\end{aligned} \tag{24}$$

و بالاخره، برای اندازه‌گیری بازه‌ی کارایی بدبینانه‌ی DMUها، مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی برای مدل‌های DEAی بدبینانه با عوامل غیرقابل کنترل و محدودیت‌های وزنی، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \hat{\varphi}_o^L = \sum_{r=1}^{s} \tilde{u}_r \hat{y}_{ro}^L - \sum_{i\in N} \tilde{v}_i \hat{x}_{io}^U \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^{s} \tilde{u}_r \hat{y}_{rj}^L - \sum_{i\in D} \tilde{v}_i \hat{x}_{ij}^U - \sum_{i\in N} \tilde{v}_i \hat{x}_{ij}^U \le 0, \quad j=1,\dots,n, \\
& \sum_{i\in D} \tilde{v}_i \hat{x}_{io}^U = 1, \\
& \tilde{u}_r - w\sum_{i\in D} \tilde{v}_i \ge 0, \quad r=1,\dots,s, \\
& \tilde{v}_i - w\sum_{l\in D} \tilde{v}_l \ge 0, \quad i\in D, \\
& \tilde{v}_i \ge \varepsilon,\, i\in D; \quad \tilde{v}_i \ge 0,\, i\in N; \quad \tilde{u}_r \ge \varepsilon,\, r=1,\dots,s.
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
\min \quad & \hat{\varphi}_o^U = \sum_{r=1}^{s} \tilde{u}_r \hat{y}_{ro}^U - \sum_{i\in N} \tilde{v}_i \hat{x}_{io}^L \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^{s} \tilde{u}_r \hat{y}_{rj}^L - \sum_{i\in D} \tilde{v}_i \hat{x}_{ij}^U - \sum_{i\in N} \tilde{v}_i \hat{x}_{ij}^U \le 0, \quad j=1,\dots,n, \\
& \sum_{i\in D} \tilde{v}_i \hat{x}_{io}^L = 1, \\
& \tilde{u}_r - w\sum_{i\in D} \tilde{v}_i \ge 0, \quad r=1,\dots,s, \\
& \tilde{v}_i - w\sum_{l\in D} \tilde{v}_l \ge 0, \quad i\in D, \\
& \tilde{v}_i \ge \varepsilon,\, i\in D; \quad \tilde{v}_i \ge 0,\, i\in N; \quad \tilde{u}_r \ge \varepsilon,\, r=1,\dots,s.
\end{aligned} \tag{26}$$

برای قضاوت در مورد اینکه یک DMU کارای بدبینانه است یا نه، تعریف زیر ارائه می‌شود:

تعریف ۲: DMU_o ناکارای بدبینانه است، اگر بدترین کارایی نسبی کران پایین آن $\hat{\varphi}_o^{L*} = 1$ باشد؛ در غیر این صورت، اگر $\hat{\varphi}_o^{L*} > 1$ باشد، گفته می‌شود که غیرناکارای بدبینانه است.

بنابراین، مدل‌های یکپارچه معرفی شدند که مستقیماً با محدودیت‌های وزنی، داده‌های نادقیق و عوامل غیرقابل کنترل کار می‌کنند.

در ادامه، روش تبدیل اطلاعات ترجیح ترتیبی به داده‌های بازه‌ای بحث می‌شود، به طوری که مدل‌های پیشنهادی را بتوان برای این موقعیت‌ها نیز به کار برد (Y.-M. Wang, Greatbanks, et al., 2005). فرض کنید برخی داده‌های ورودی و/یا خروجی برای DMUها به صورت اطلاعات ترجیح ترتیبی داده شده است. معمولاً سه نوع اطلاعات ترجیح ترتیبی ممکن است وجود داشته باشد: (۱) اطلاعات ترجیح ترتیبی قوی، مانند $x_{ij} > x_{ik}$ یا $y_{rj} > y_{rk}$، که می‌توان آن را به صورت $x_{ij} \ge \xi_i x_{ik}$ و $y_{rj} \ge \chi_r y_{rk}$ بیان کرد، که در اینجا $\xi_i > 1$ و $\chi_r > 1$ پارامترهای مربوط به درجه‌ی شدت ترجیح هستند که به وسیله‌ی تصمیم گیرنده تعیین می‌شوند؛ (۲) اطلاعات ترجیح ترتیبی ضعیف، مانند $x_{ip} \ge x_{iq}$ یا $y_{rp} \ge y_{rq}$؛ و (۳) رابطه‌ی بی‌تفاوتی، مانند $x_{il} = x_{it}$ یا $y_{rl} = y_{rt}$.

حال، تبدیل اطلاعات ترجیح ترتیبی را مثلاً درباره‌ی y_{rj} ($j = 1,\dots,n$) در نظر بگیرید. اطلاعات ترجیح ترتیبی درباره‌ی داده‌های ورودی و دیگر داده‌های خروجی به همین ترتیب قابل تبدیل است.

برای اطلاعات ترجیح ترتیبی ضعیف $y_{r1} \ge y_{r2} \ge \cdots \ge y_{rn}$، روابط ترتیبی زیر را پس از تبدیل مقیاس داریم:

$$1 \ge \hat{y}_{r1} \ge \hat{y}_{r2} \ge \cdots \ge \hat{y}_{rn} \ge \sigma_r \tag{27}$$

که در اینجا σ_r یک عدد مثبت کوچک است که منعکس کننده‌ی نسبت کمینه‌ی ممکن $\{y_{rj} \mid j = 1,\dots,n\}$ به بیشینه‌ی ممکن آن است. تصمیم گیرنده می‌تواند برآورد تقریبی آن را ارائه کند. برای راحتی به آن پارامتر نسبت گفته می‌شود. بازه‌ی مجاز

حاصله برای هر $\hat{y}_{rj}$ به صورت زیر داده می‌شود:

$$\hat{y}_{rj} \in [\sigma_r, 1], \quad j = 1, \dots, n \tag{28}$$

برای اطلاعات ترجیح ترتیبی قوی $y_{r1} > y_{r2} > \cdots > y_{rn}$، رابطه‌ی ترتیبی زیر پس از تبدیل مقیاس وجود دارد:

$$1 \geq \hat{y}_{r1}, \quad \hat{y}_{rj} \geq \chi_r \hat{y}_{r,j+1}, \quad j = 1, \dots, n-1 \quad \text{و} \; \hat{y}_{rn} \geq \sigma_r \tag{29}$$

که در اینجا χ_r یک پارامتر شدت ترجیح داده شده توسط تصمیم گیرنده است که در رابطه‌ی $\chi_r > 1$ صدق می‌کند، و σ_r پارامتر نسبت است که آن هم توسط تصمیم گیرنده داده می‌شود. بازه‌ی مجاز حاصله برای هر $\hat{y}_{rj}$ به صورت زیر داده می‌شود:

$$\hat{y}_{rj} \in [\sigma_r \chi_r^{n-j}, \chi_r^{1-j}], \quad j = 1, \dots, n, \quad \sigma_r \leq \chi_r^{1-n} \; \text{با} \tag{30}$$

و بالاخره، برای رابطه‌ی بی‌تفاوتی، بازه‌های مجاز همان‌هایی هستند که برای اطلاعات ترجیح ترتیبی ضعیف به دست می‌آیند. از طریق تبدیل مقیاس فوق و برآورد بازه‌های مجاز، اطلاعات ترجیح ترتیبی به داده‌های بازه‌ای تبدیل می‌شود، و لذا می‌توان آن را در مدل‌های DEAی پیشنهادی الحاق کرد.

کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه از دیدگاه‌های مختلفی اندازه‌گیری می‌شوند، که منجر به دو نمره‌دهی متفاوت برای تأمین کنندگان می‌شوند (Azizi & Jahed, 2011; Y.-M. Wang & Chin, 2009). لذا یک اندازه‌ی عملکرد کلی مورد نیاز است تا نمره‌ی کلی تأمین کنندگان به دست آید. در اینجا، ما از اندازه‌ی عملکرد کلی که توسط وانگ و همکاران برای نمره‌دهی DMUها در حضور داده‌های قطعی که به صورت زیر پیشنهاد شده است، استفاده می‌کنیم (Y.-M. Wang, et al., 2007):

$$\phi_j = \sqrt{\varphi_j^* \cdot \theta_j^*}, \quad j = 1, \dots, n \tag{31}$$

که در اینجا θ_j^* و φ_j^* به ترتیب مقدار کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه‌ی DMU_j هستند. روشن است که اندازه‌ی عملکرد کلی تعریف شده در (۳۱)، بزرگی دو کارایی را همزمان در نظر می‌گیرد.

فرض کنید $\theta_j^* = [\theta_j^{L*}, \theta_j^{U*}]$ و $\varphi_j^* = [\varphi_j^{L*}, \varphi_j^{U*}]$ به ترتیب بازه‌ی کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه‌ی DMU_j باشند. بر اساس قواعد عملیاتی روی داده‌های بازه‌ای، داریم (Moore & Bierbaum, 1979):

$$\begin{aligned} \phi_j &= \sqrt{[\theta_j^{L*}, \theta_j^{U*}] \cdot [\varphi_j^{L*}, \varphi_j^{U*}]} = \sqrt{[\theta_j^{L*} \cdot \varphi_j^{L*}, \theta_j^{U*} \cdot \varphi_j^{U*}]} \\ &= \left[\sqrt{\theta_j^{L*} \cdot \varphi_j^{L*}}, \sqrt{\theta_j^{U*} \cdot \varphi_j^{U*}}\right], \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{32}$$

بدیهی است که ϕ_j ($j = 1, \dots, n$) نیز باید یک عدد بازه‌ای باشد، که آن را با $[\phi_j^L, \phi_j^U]$ ($j = 1, \dots, n$) نشان می‌دهیم. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} \phi_j^L &= \sqrt{\theta_j^{L*} \cdot \varphi_j^{L*}}, \quad j = 1, \dots, n, \\ \phi_j^U &= \sqrt{\theta_j^{U*} \cdot \varphi_j^{U*}}, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{33}$$

برای راحتی، روشی را که عملکرد کلی هر تأمین کننده را نسبت به هر دو کارایی خوشبینانه و بدبینانه تعیین می‌کند، روش «DEA با مرز دوگانه» می‌نامیم. مرز تولید کارا مجموعه‌ای از تأمین کنندگان کارای خوشبینانه را مشخص می‌کند که عملکرد نسبتاً خوبی دارند، در حالی که مرز تولید ناکارا مجموعه‌ای از تأمین کنندگان ناکارای بدبینانه را مشخص می‌کند که به نسبت، عملکرد ضعیف‌تری دارند. بهترین تأمین کننده را معمولاً می‌توان از میان تأمین کنندگان کارای خوشبینانه انتخاب کرد.

از آنجا که نمره‌ی کارایی نهایی هر تأمین کننده با یک بازه مشخص می‌شود، لذا یک رویکرد رتبه‌بندی ساده ولی عملی برای مقایسه و رتبه‌بندی کارایی‌های تأمین کنندگان مورد نیاز است. برای رتبه‌بندی اعداد بازه‌ای قبلاً چند رویکرد توسعه داده شده‌اند، ولی همگی آن‌ها معایبی دارند. خصوصاً وقتی که اعداد بازه‌ای مرکز یکسان ولی عرض‌های متفاوت دارند، همگی آن‌ها از افتراق دادن این اعداد عاجز هستند. ما از «رویکرد مبتنی بر درجه‌ی ترجیح» که توسط وانگ و همکاران توسعه یافته است، برای مقایسه و رتبه‌بندی بازه‌ی کارایی تأمین کنندگان استفاده می‌کنیم (Y.-M. Wang, Yang, & Xu, 2005a, 2005b).

رویکرد درجه‌ی ترجیح توسط وانگ و همکاران ایجاد شده است (Y.-M. Wang, Yang, et al., 2005a). این رویکرد

ویژگی‌های جذابی دارد، و می‌توان از آن برای مقایسه و رتبه‌بندی بازه‌های کارایی تأمین کنندگان حتی در صورتی که دارای مرکز مساوی ولی عرض متفاوت باشند، استفاده کرد. این رویکرد در زیر خلاصه شده است.

فرض کنید $a=[a^L,a^U]$ و $b=[b^L,b^U]$ دو عدد بازه‌ای باشند. به میزان بزرگ‌تر بودن یک عدد بازه‌ای از عدد بازه‌ای دیگر، *درجه‌ی ترجیح* آن می‌گوییم. بر این اساس، تعاریف و خاصیت‌های زیر را داریم.

تعریف ۳: درجه‌ی ترجیح a بر b (یا $a>b$) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P(a>b)=\frac{\max(0,a^U-b^L)-\max(0,a^L-b^U)}{(a^U-a^L)+(b^U-b^L)} \tag{34}$$

درجه‌ی ترجیح b بر a (یا $b>a$) را نیز می‌توان به همان صورت تعریف کرد. یعنی:

$$P(b>a)=\frac{\max(0,b^U-a^L)-\max(0,b^L-a^U)}{(a^U-a^L)+(b^U-b^L)} \tag{35}$$

بدیهی است که $P(a>b)+P(b>a)=1$ و $P(a>b)=P(b>a)\equiv 0.5$ وقتی که $a=b$، یعنی $a^L=b^L$ و $a^U=b^U$.

تعریف ۴: اگر $P(a>b)>P(b>a)$، آنگاه گفته می‌شود که a از b به میزان $P(a>b)$ بالاتر است، که با نماد $a\overset{P(a>b)}{\succ}b$ نشان داده می‌شود؛ اگر $P(a>b)=P(b>a)=0.5$، آنگاه گفته می‌شود که a نسبت به b بی‌تفاوت است، که به صورت $a\sim b$ نشان داده می‌شود؛ اگر $P(b>a)>P(a>b)$، آنگاه گفته می‌شود که a از b به میزان $P(b>a)$ پایین‌تر است، که با نماد $a\overset{P(b>a)}{\prec}b$ نشان داده می‌شود.

خاصیت ۱: $P(a>b)=1$، اگر و تنها اگر $a^L\ge b^U$.

خاصیت ۲: اگر $a^L\ge b^L$ و $a^U\ge b^U$، آنگاه $P(a>b)\ge 0.5$ و $P(b>a)\le 0.5$.

خاصیت ۳: اگر b در درون a قرار داشته باشد، یعنی $a^L\le b^L$ و $a^U\ge b^U$، آنگاه $P(a>b)\ge 0.5$ اگر و تنها اگر $\frac{a^L+a^U}{2}\ge\frac{b^L+b^U}{2}$.

خاصیت ۴: اگر $P(a>b)\ge 0.5$ و $P(b>c)\ge 0.5$، آنگاه $P(a>c)\ge 0.5$.

چهار خاصیت فوق در مقایسه‌ی اعداد بازه‌ای بسیار مفیدند. خاصیت ۱ نشان می‌دهد که اگر دو عدد بازه‌ای همپوشانی نداشته باشند، آنگاه بازه‌ای که در انتهای بالایی است، ۱۰۰ درصد بر عدد بازه‌ای در انتهای پایین غلبه خواهد داشت. خاصیت ۲ با قاعده‌ی مقایسه‌ی اعداد بازه‌ای رتبه‌بندی همسازی دارد. خاصیت ۳ مقایسه‌ی دو عدد بازه‌ای را وقتی که یک عدد بازه‌ای در داخل دیگری قرار گرفته است، نشان می‌دهد. خاصیت ۴ نشان می‌دهد که روابط ترجیح تراگذر هستند. با کمک تراگذری، یک ترتیب رتبه‌بندی کامل اعداد بازه‌ای را می‌توان ایجاد کرد. فرآیند رتبه‌بندی در زیر نشان داده شده است:

مرحله‌ی ۱: ماتریس درجه‌ی ترجیح را حساب کنید:

$$M_P=\begin{array}{c} \\ \theta_1\\ \theta_2\\ \vdots\\ \theta_n\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\theta_1 & \theta_2 & \cdots & \theta_n\end{array}\\ \begin{bmatrix} - & p_{12} & \cdots & p_{1n}\\ p_{21} & - & \cdots & p_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & -\end{bmatrix}\end{array} \tag{36}$$

که در اینجا داریم:

$$p_{ij}=P(\theta_i>\theta_j)=\frac{\max(0,\theta_i^U-\theta_j^L)-\max(0,\theta_i^L-\theta_j^U)}{(\theta_i^U-\theta_i^L)+(\theta_j^U-\theta_j^L)},\quad i,j=1,\dots n; i\ne j \tag{37}$$

مرحله‌ی ۲: سطری از ماتریس درجه‌ی ترجیح را پیدا کنید که تمام عناصر آن غیر از عنصر قطری بزرگ‌تر یا مساوی ۰/۵ باشد. اگر این سطر متناظر با θ_i باشد، آنگاه θ_i مرجح‌ترین عدد بازه‌ای است.

مرحله‌ی ۳: سطر شماره‌ی i و ستون شماره‌ی i (و لذا θ_i) را از ماتریس حذف کنید. در ماتریس کاهش یافته، اگر θ_j مرجح‌ترین عدد بازه‌ای در میان بازه‌های باقیمانده باشد، آنگاه θ_j باید رتبه‌ی دوم را دریافت کند، که با $\theta_i \overset{p_{ij}}{>} \theta_j$ نشان داده می‌شود، در صورتی که $p_{ij} > 0.5$ ، و یا $\theta_i \sim \theta_j$ در صورتی که $p_{ij} = p_{ji} = 0.5$.

مرحله‌ی ۴: سطر شماره‌ی j و ستون شماره‌ی j را از ماتریس کاهش یافته برای بررسی بیشتر حذف کنید و فرآیند فوق را تکرار کنید تا آنکه تمام بازه‌ها رتبه‌بندی شوند.

مثال عددی: مجموعه‌ی داده‌ها برای این مثال از تالوری و بیکر گرفته شده است، و حاوی مشخصات ۱۸ تأمین کننده است (Talluri & Baker, 2002). ورودی‌های عدد اصلی *هزینه‌ی کل ارسال*[۵] (x_1) و *مسافت*[۶] (x_3) هستند. مسافت عموماً یک متغیر ورودی غیرقابل کنترل محسوب می‌شود. *شهرت تأمین کننده*[۷] (x_2) به عنوان یک ورودی کیفی در نظر گرفته شده است. این متغیر کیفی روی یک مقیاس ترتیبی اندازه‌گیری می‌شود، به طوری که مثلاً شهرت تأمین کننده‌ی ۱۸ در بالاترین رتبه است، و تأمین کننده‌ی ۱۷ از همه پایین‌تر است. خروجی داده‌ای کراندار استفاده شده در این مطالعه، *تعداد صورتحساب‌های دریافت شده از تأمین کننده بدون خطا*[۸] (y_1) است. جدول ۱ مشخصات تأمین کنندگان را نشان می‌دهد. در این مثال مقدار بی‌نهایت کوچک غیرارشمیدسی $\varepsilon = 10^{-4}$ منظور شده است.

فرض کنید پارامتر شدت ترجیح و پارامتر نسبت درباره‌ی اطلاعات ترجیح ترتیبی قوی به ترتیب به صورت $\xi_2 = 1.05$ و $\sigma_2 = 0.05$ برآورد شده باشند. با استفاده از تکنیک تبدیل شرح داده شده در قسمت قبل، یک برآورد بازه‌ای برای شهرت هر تأمین کننده می‌توان به دست آورد، که در ستون آخر جدول ۱ نشان داده شده است.

با اجرای مدل (۱)، نمرات کارایی خوشبینانه‌ی تأمین کنندگان را به دست می‌آوریم. با توجه نمرات به دست آمده، می‌توان دریافت که دو تأمین کننده، یعنی تأمین کنندگان شماره‌ی ۱۱ و ۱۴ بر حسب مدل (۱)، کارای خوشبینانه می‌باشند. شانزده تأمین کننده‌ی باقیمانده با نمرات کارایی نسبی کمتر از یک غیرکارای خوشبینانه دانسته می‌شوند. همچنین، با اجرای مدل (۲۰)، نمرات کارایی بدبینانه‌ی تأمین کنندگان را به دست می‌آوریم. از دیدگاه کارایی بدبینانه، سه تأمین کننده یعنی تأمین کنندگان شماره‌ی ۳، ۷ و ۱۵ بر حسب مدل (۲۰)، ناکارای بدبینانه می‌باشند. پانزده تأمین کننده‌ی باقیمانده با نمرات کارایی نسبی بیشتر از یک غیرناکارای بدبینانه دانسته می‌شوند.

به منظور استفاده از روش پیشنهادی، ابتدا داده‌های ورودی و خروجی جدول ۱ را بر اساس معادلات (۵) نرمال‌سازی می‌کنیم، تا تأثیر تبدیل مقیاس داده‌های ورودی و خروجی بر وزن‌های بیشینه‌کمینه از میان بر داشته شود. حالا برای تعیین یک محدودیت وزنی مینیمم به منظور انجام ارزیابی همه‌ی هجده DMU، مدل‌های (۱۷) و (۲۴) را برای هر DMU اجرا می‌کنیم. با اجرای مدل (۱۷)، محدودیت وزنی کمینه روی وزن‌های ورودی و خروجی w برای DMU_{11} عدد ۰/۵ و برای DMU_{14} عدد ۰/۴۹۷۲ تعیین شده است. همچنین، با اجرای مدل (۲۴)، محدودیت وزنی کمینه روی وزن‌های ورودی و خروجی w برای DMU_3 عدد ۰/۰۹۲۱ و برای DMU_7 و DMU_{15} عدد ۰/۵ تعیین شده است. جدول ۲ بازه‌های کارایی هجده DMU را که بر اساس مدل‌های (۱۸)، (۱۹)، (۲۵) و (۲۶) با مقادیر محدودیت وزنی مینیمم w به دست آمده است، نشان می‌دهد. با افزایش مقدار محدودیت وزنی مینیمم از ۰/۴۹۷۲ به ۰/۵، DMU_{14} اولین واحدی هست که از جمع واحدهای کارای خوشبینانه خارج می‌شود. بنابراین، هدف روش ارزیابی پیشنهادی این است که تا حد امکان آزادی واحدهای کارای خوشبینانه را در انتخاب وزن‌های ورودی و خروجی کاهش دهد.

---

[5] Total Cost of shipments
[6] Distance
[7] Supplier reputation
[8] Number of bills received from the supplier without errors

جدول شماره‌ی (**1**): مشخصات مربوط به ۱۸ تأمین کننده.

DMU	ورودی‌ها			خروجی (y_{1j})	داده‌های ترتیبی تبدیل شده (x_{2j})
	x_{1j} (\$۱۰۰۰)	x_{2j} [a]	x_{3j} (km)		
۱	۲۵۳	۵	۲۴۹	[۵۰, ۶۵]	[۰/۵۳۳۰ ,۰/۰۶۰۸]
۲	۲۶۸	۱۰	۶۴۳	[۶۰, ۷۰]	[۰/۶۷۶۸ ,۰/۰۷۷۶]
۳	۲۵۹	۳	۷۱۴	[۴۰, ۵۰]	[۰/۴۸۱۰ ,۰/۰۵۵۱]
۴	۱۸۰	۶	۱۸۰۹	[۱۰۰, ۱۶۰]	[۰/۵۵۶۸ ,۰/۰۶۳۸]
۵	۲۵۷	۴	۲۳۸	[۴۵, ۵۵]	[۰/۵۰۵۱ ,۰/۰۵۷۹]
۶	۲۴۸	۲	۲۴۱	[۸۵, ۱۱۵]	[۰/۴۵۸۱ ,۰/۰۵۲۵]
۷	۲۷۲	۸	۱۴۰۴	[۷۰, ۹۵]	[۰/۶۱۳۹ ,۰/۰۷۰۴]
۸	۳۳۰	۱۱	۹۸۴	[۱۰۰, ۱۸۰]	[۰/۷۱۰۷ ,۰/۰۸۱۴]
۹	۳۲۷	۹	۶۴۱	[۹۰, ۱۲۰]	[۰/۶۴۴۶ ,۰/۰۷۳۹]
۱۰	۳۳۰	۷	۵۸۸	[۵۰, ۸۰]	[۰/۵۸۴۷ ,۰/۰۶۷۰]
۱۱	۳۲۱	۱۶	۲۴۱	[۲۵۰, ۳۰۰]	[۰/۹۰۷۰ ,۰/۱۰۳۹]
۱۲	۳۲۹	۱۴	۵۶۷	[۱۰۰, ۱۵۰]	[۰/۸۲۲۷ ,۰/۰۹۴۳]
۱۳	۲۸۱	۱۵	۵۶۷	[۸۰, ۱۲۰]	[۰/۸۶۳۸ ,۰/۰۹۹۰]
۱۴	۳۰۹	۱۳	۹۶۷	[۲۰۰, ۳۵۰]	[۰/۷۸۳۵ ,۰/۰۸۹۸]
۱۵	۲۹۱	۱۲	۶۳۵	[۴۰, ۵۵]	[۰/۷۴۶۲ ,۰/۰۸۵۵]
۱۶	۳۳۴	۱۷	۷۹۵	[۷۵, ۸۵]	[۰/۹۵۲۴ ,۰/۱۰۹۱]
۱۷	۲۴۹	۱	۶۸۹	[۹۰, ۱۸۰]	[۰/۴۳۶۲ ,۰/۰۵۰۰]
۱۸	۲۱۶	۱۸	۹۱۳	[۹۰, ۱۵۰]	[۱/۰۰۰۰ ,۰/۱۱۴۶]

[a] رتبه‌بندی به این صورت که ۱۸ ≡ بالاترین رتبه، ...، ۱ ≡ پایین‌ترین رتبه ($x_{2,18} > x_{2,16} > \cdots > x_{2,17}$).

نهایتاً، به منظور مقایسه و رتبه‌بندی بازه‌های کارایی هجده تأمین کننده، از رویکرد مبتنی بر درجه‌ی ترجیح که توسط وانگ و همکاران توسعه یافته است، استفاده می‌شود (Y.-M. Wang, Yang, et al., 2005a). جدول ۳، رتبه‌بندی هجده تأمین کننده را بر اساس دیدگاه‌های متفاوت نشان می‌دهد. به کمک نتایج رتبه‌بندی به دست آمده از بازه‌ی کارایی کلی، ارزیاب یا تصمیم گیرنده می‌تواند تأمین کننده‌ی شماره‌ی ۱۱ را به عنوان بهترین تأمین کننده انتخاب کند. ارزیاب یا تصمیم گیرنده به میزان ۵۰/۲۶ درصد رضایت دارد که DMU_{11} از DMU_{14} برتر است.

جدول شماره (۲): نمرات کارایی ۱۸ تأمین کننده با مقادیر محدودیت وزنی مینیمم

DMU	بازه‌ی کارایی خوشبینانه ($[\hat{\theta}_j^{L*}, \hat{\theta}_j^{U*}]$)	بازه‌ی کارایی بدبینانه ($[\hat{\varphi}_j^{L*}, \hat{\varphi}_j^{U*}]$)	بازه‌ی کارایی کلی ($[\phi_j^{L}, \phi_j^{U}]$)
۱	[۰/۱۳۰۲, ۰/۲۹۷۱]	[۱/۴۳۷۸, ۲/۷۱۲۰]	[۰/۴۳۲۷, ۰/۸۹۷۶]
۲	[۰/۱۴۷۲, ۰/۲۵۱۵]	[۱/۶۲۵۳, ۲/۷۶۵۷]	[۰/۴۸۹۱, ۰/۸۳۴۰]
۳	[۰/۱۰۱۵, ۰/۲۵۲۷]	[۱/۰۰۰۰, ۲/۰۴۴۱]	[۰/۳۱۸۶, ۰/۷۱۸۷]
۴	[۰/۳۷۳۱, ۰/۸۲۶۹]	[۲/۵۸۵۹, ۹/۱۳۰۹]	[۰/۹۸۲۲, ۲/۷۴۷۸]
۵	[۰/۱۱۵۱, ۰/۲۶۴۸]	[۱/۲۷۱۲, ۲/۲۶۶۰]	[۰/۳۸۲۵, ۰/۷۷۴۶]
۶	[۰/۲۲۷۳, ۰/۶۶۹۷]	[۲/۵۰۹۴, ۴/۸۵۰۳]	[۰/۷۵۵۲, ۱/۸۰۲۳]
۷	[۰/۱۷۰۳, ۰/۳۷۲۸]	[۱/۰۰۰۰, ۳/۶۶۴۴]	[۰/۴۱۲۷, ۱/۱۶۸۸]
۸	[۰/۲۰۵۳, ۰/۵۹۰۴]	[۲/۲۶۶۹, ۵/۵۳۷۱]	[۰/۶۸۲۲, ۱/۸۰۸۱]
۹	[۰/۱۸۲۵, ۰/۴۴۷۱]	[۲/۰۱۵۱, ۳/۸۳۸۵]	[۰/۶۰۶۴, ۱/۳۱۰۰]
۱۰	[۰/۱۰۰۵, ۰/۳۲۸۷]	[۱/۱۰۹۳, ۲/۵۳۵۸]	[۰/۳۳۳۹, ۰/۹۱۳۰]
۱۱	[۰/۵۷۶۳, ۱/۰۰۰۰]	[۵/۲۱۹۱, ۹/۶۵۸۲]	[۱/۷۳۴۳, ۳/۱۰۷۸]
۱۲	[۰/۲۰۳۳, ۰/۴۳۲۷]	[۲/۲۴۴۵, ۴/۷۱۱۷]	[۰/۶۷۵۵, ۱/۴۲۷۸]
۱۳	[۰/۱۸۹۶, ۰/۴۰۲۱]	[۱/۷۴۶۱, ۴/۴۳۹۸]	[۰/۵۷۵۴, ۱/۳۳۶۱]
۱۴	[۰/۴۵۲۲, ۱/۰۰۰۰]	[۴/۹۹۳۸, ۱۱/۰۴۲۳]	[۱/۵۰۲۷, ۳/۳۲۳۰]
۱۵	[۰/۰۹۰۶, ۰/۱۸۰۷]	[۱/۰۰۰۰, ۱/۹۹۵۱]	[۰/۳۰۱۰, ۰/۶۰۰۴]
۱۶	[۰/۱۴۷۶, ۰/۲۴۴۰]	[۱/۴۶۶۰, ۲/۶۹۴۷]	[۰/۴۶۵۲, ۰/۸۱۰۹]
۱۷	[۰/۲۴۵۹, ۰/۹۵۶۱]	[۲/۷۱۵۷, ۷/۲۹۵۲]	[۰/۸۱۷۲, ۲/۶۴۱۰]
۱۸	[۰/۲۷۹۸, ۰/۶۴۶۰]	[۱/۷۱۱۶, ۷/۱۳۳۶]	[۰/۶۹۲۰, ۲/۱۴۶۷]

جدول شماره (۳): رتبه‌بندی‌های ۱۸ تأمین کننده

DMU	رتبه بر حسب بازه‌ی کارایی خوشبینانه	رتبه بر حسب بازه‌ی کارایی بدبینانه	رتبه بر حسب بازه‌ی کارایی کلی
۱	۱۳	۱۴	۱۲
۲	۱۴	۱۲	۱۳
۳	۱۷	۱۷	۱۷
۴	۴	۳	۳
۵	۱۶	۱۶	۱۶
۶	۶	۷	۶
۷	۱۱	۱۱	۱۱
۸	۷	۶	۷
۹	۹	۱۰	۹
۱۰	۱۲	۱۵	۱۵
۱۱	۱	۲	۱
۱۲	۸	۸	۸
۱۳	۱۰	۹	۱۰
۱۴	۲	۱	۲
۱۵	۱۸	۱۸	۱۸
۱۶	۱۵	۱۳	۱۴
۱۷	۳	۴	۴
۱۸	۵	۵	۵

۳. بحث و نتایج

تصمیمات برون‌سپاری بخش لاینفک بخش لجستیک است. به طور سنتی اینها با تأمین مواد خام و قطعات و برخی خدمات مانند حمل و نقل سر و کار دارند. در سال‌های اخیر، با افزایش لجستیک پیمانکاری، بسیاری از بنگاه‌ها عملیاتی را که قبلاً در داخل شرکت انجام می‌شد، برون‌سپاری می‌کنند. مدیران تدارکات برای اینکه با این ارائه دهندگان طرف ثالث، قدرت رقابتی خود را حفظ کنند، باید در انجام وظایف خود از تکنیک‌های پیشرفته‌تر بهره بگیرند.

عدم توانایی افتراق یکی از معایب DEA است، که علاقه‌ی پژوهشی زیادی را در مقالات DEA موجب شده است. در این مقاله یک روش رتبه‌بندی را بسط دادیم که از طریق تحمیل یک محدودیت وزنی مینیمم بر وزن‌های ورودی و خروجی عمل می‌کند. می‌توان با اعمال محدودیت وزنی مینیمم مناسب بر وزن‌های ورودی و خروجی، بسته به نیاز ارزیاب، همه‌ی DMUها را به طور کامل یا ناقص رتبه‌بندی کرد. همچنین، مدل‌هایی را برای پیدا کردن وزن‌های ماکزیمین واحدهای کارای خوشبینانه و ناکارای بدبینانه ابداع کردیم که می‌توانند آن‌ها را تا حد ممکن کارای خوشبینانه و ناکارای بدبینانه نگه دارد. وزن‌های ماکزیمین اطلاعات بسیار مفیدی را برای تصمیم گیرنده یا ارزیاب ایجاد می‌کنند، که از این طریق، می‌تواند معین کند که چه محدودیت وزنی مینیممی باید بر وزن‌های ورودی و خروجی اعمال شود. مدل‌های جدیدی برای ارزیابی مجدد کارایی‌های DMUها ابداع شد. همچنین، اندازه‌های عملکرد کلی، برای یک ارزیابی و تصمیم‌گیری دقیق‌تر ایجاد شدند. یک مثال عددی با رویکرد پیشنهادی مورد بررسی قرار گرفت. نشان داده شد که رویکرد DEA با مرز دوگانه پیشنهادی می‌تواند همه‌ی DMUها را به صورت موفقیت‌آمیزی رتبه‌بندی کند، و لذا می‌تواند سهم جدیدی در DEA داشته باشد.

سپاس‌گزاری

مؤلفان مایل‌اند از یک بررسی کننده‌ی ناشناس به خاطر نظراتش که در بهبود مقاله بسیار ذی‌قیمت بود، تشکر کنند.

٤. منابع

1. Akarte, M. M., Surendra, N. V., Ravi, B., & Rangaraj, N. (2001). Web based casting supplier evaluation using analytical hierarchy process. *Journal of the Operational Research Society, 52*, 511-522.
2. Azizi, H. (2011). The interval efficiency based on the optimistic and pessimistic points of view. *Applied Mathematical Modelling, 35*, 2384-2393.
3. Azizi, H. (2013). A note on data envelopment analysis with missing values: an interval DEA approach. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 66*, 1817-1823.
4. Azizi, H., & Fathi Ajirlu, S. (2010). Measurement of overall performances of decision-making units using ideal and anti-ideal decision-making units. *Computers & Industrial Engineering, 59*, 411-418.
5. Azizi, H., & Ganjeh Ajirlu, H. (2011). Measurement of the worst practice of decision-making units in the presence of non-discretionary factors and imprecise data. *Applied Mathematical Modelling, 35*, 4149-4156.
6. Azizi, H., & Jahed, R. (2011). Improved data envelopment analysis models for evaluating interval efficiencies of decision-making units. *Computers & Industrial Engineering, 61*, 897-901.
7. Azizi, H., Kordrostami, S., & Amirteimoori, A. (2015). Slacks-based measures of efficiency in imprecise data envelopment analysis: An approach based on data envelopment analysis with double frontiers. *Computers & Industrial Engineering, 79*, 42-51.
8. Azizi, H., & Wang, Y.-M. (2013). Improved DEA models for measuring interval efficiencies of decision-making units. *Measurement, 46*, 1325-1332.
9. Banker, R. D., Charnes, A., & Cooper, W. W. (1984). Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis. *Management Science, 30*, 1078-1092.
10. Banker, R. D., & Morey, R. C. (1986). Efficiency Analysis for Exogenously Fixed Inputs and Outputs. *Operations Research, 34*, 513-521.
11. Bhutta, K. S. (2002). Supplier selection problem: a comparison of the total cost of ownership and analytic hierarchy process approaches. *Supply Chain Management: An International Journal, 7*, 126-135.
12. Braglia, M., & Petroni, A. (2000). A quality assurance-oriented methodology for handling trade-offs in supplier selection. *International Journal of Physical Distribution & Logistics Management, 30*, 96-112.
13. Charnes, A., Cooper, W. W., Wei, Q. L., & Huang, Z. M. (1989). Cone ratio data envelopment analysis and multi-objective programming. *International Journal of Systems Science, 20*, 1099-1118.
14. Chen, C.-T., Lin, C.-T., & Huang, S.-F. (2006). A fuzzy approach for supplier evaluation and selection in supply chain management. *International Journal of Production Economics, 102*, 289-301.
15. Cook, W. D., Kress, M., & Seiford, L. M. (1993). On the Use of Ordinal Data in Data Envelopment Analysis. *Journal of the Operational Research Society, 44*, 133-140.

16. Cook, W. D., Kress, M., & Seiford, L. M. (1996). Data Envelopment Analysis in the Presence of Both Quantitative and Qualitative Factors. *Journal of the Operational Research Society, 47*, 945-953.
17. Cook, W. D., & Zhu, J. (2006). Rank order data in DEA: A general framework. *European Journal of Operational Research, 174*, 1021-1038.
18. Cooper, W. W., Park, K. S., & Yu, G. (1999). IDEA and AR-IDEA: Models for Dealing with Imprecise Data in DEA. *Management Science, 45*, 597-607.
19. Cooper, W. W., Park, K. S., & Yu, G. (2001a). IDEA (Imprecise Data Envelopment Analysis) with CMDs (Column Maximum Decision Making Units). *Journal of the Operational Research Society, 52*, 176-181.
20. Cooper, W. W., Park, K. S., & Yu, G. (2001b). An Illustrative Application of Idea (Imprecise Data Envelopment Analysis) to a Korean Mobile Telecommunication Company. *Operations Research, 49*, 807-820.
21. Despotis, D. K., & Smirlis, Y. G. (2002). Data envelopment analysis with imprecise data. *European Journal of Operational Research, 140*, 24-36.
22. Ebrahimi, B., & Toloo, M. (2019). Efficiency bounds and efficiency classifications in imprecise DEA: An extension. *Journal of the Operational Research Society*, 1-14.
23. Farzipoor Saen, R. (2006a). An algorithm for ranking technology suppliers in the presence of nondiscretionary factors. *Applied Mathematics and Computation, 181*, 1616-1623.
24. Farzipoor Saen, R. (2006b). A decision model for selecting technology suppliers in the presence of nondiscretionary factors. *Applied Mathematics and Computation, 181*, 1609-1615.
25. Farzipoor Saen, R. (2007). Suppliers selection in the presence of both cardinal and ordinal data. *European Journal of Operational Research, 183*, 741-747.
26. Farzipoor Saen, R. (2009). Supplier selection by the pair of nondiscretionary factors-imprecise data envelopment analysis models. *Journal of the Operational Research Society, 60*, 1575-1582.
27. Farzipoor Saen, R. (2009). A decision model for ranking suppliers in the presence of cardinal and ordinal data, weight restrictions, and nondiscretionary factors. *Annals of Operations Research, 172*, 177-192.
28. Forker, L. B., & Mendez, D. (2001). An analytical method for benchmarking best peer suppliers. *International Journal of Operations & Production Management, 21*, 195-209.
29. Humphreys, P. K., Wong, Y. K., & Chan, F. T. S. (2003). Integrating environmental criteria into the supplier selection process. *Journal of Materials Processing Technology, 138*, 349-356.
30. Jahed, R., Amirteimoori, A., & Azizi, H. (2015). Performance measurement of decision-making units under uncertainty conditions: An approach based on double frontier analysis. *Measurement, 69*, 264-279.
31. Kao, C., & Lin, P.-H. (2011). Qualitative factors in data envelopment analysis: A fuzzy number approach. *European Journal of Operational Research, 211*, 586-593.
32. Kao, C., & Lin, P.-H. (2012). Efficiency of parallel production systems with fuzzy data. *Fuzzy Sets and Systems, 198*, 83-98.
33. Kao, C., & Liu, S.-T. (2009). Stochastic data envelopment analysis in measuring the efficiency of Taiwan commercial banks. *European Journal of Operational Research, 196*, 312-322.
34. Kim, S.-H., Park, C.-G., & Park, K.-S. (1999). An application of data envelopment analysis in telephone officesevaluation with partial data. *Computers & Operations Research, 26*, 59-72.

35. Liu, F.-H. F., & Hai, H. L. (2005). The voting analytic hierarchy process method for selecting supplier. *International Journal of Production Economics, 97*, 308-317.
36. Liu, J., Ding, F. Y., & Lall, V. (2000). Using data envelopment analysis to compare suppliers for supplier selection and performance improvement. *Supply Chain Management: An International Journal, 5*, 143-150.
37. Liu, W., & Wang, Y.-M. (2018). Ranking DMUs by using the upper and lower bounds of the normalized efficiency in data envelopment analysis. *Computers & Industrial Engineering, 125*, 135-143.
38. Liu, W., Wang, Y.-M., & Lyu, S. (2017). The upper and lower bound evaluation based on the quantile efficiency in stochastic data envelopment analysis. *Expert Systems with Applications, 85*, 14-24.
39. Moore, R. E., & Bierbaum, F. (1979). *Methods and Applications of Interval Analysis (SIAM Studies in Applied and Numerical Mathematics) (Siam Studies in Applied Mathematics, 2.)*: Soc for Industrial \& Applied Math.
40. Park, K. S. (2004). Simplification of the transformations and redundancy of assurance regions in IDEA (imprecise DEA). *Journal of the Operational Research Society, 55*, 1363-1366.
41. Seyedalizadeh Ganji, S., Rassafi, A. A., & Bandari, S. J. (2019). Application of evidential reasoning approach and OWA operator weights in road safety evaluation considering the best and worst practice frontiers. *Socio-Economic Planning Sciences*.
42. Seyedalizadeh Ganji, S., Rassafi, A. A., & Xu, D.-L. (2019). A double frontier DEA cross efficiency method aggregated by evidential reasoning approach for measuring road safety performance. *Measurement, 136*, 668-688.
43. Shabani, A., Visani, F., Barbieri, P., Dullaert, W., & Vigo, D. (2019). Reliable estimation of suppliers' total cost of ownership: An imprecise data envelopment analysis model with common weights. *Omega, 87*, 57-70.
44. Smirlis, Y. G., Maragos, E. K., & Despotis, D. K. (2006). Data envelopment analysis with missing values: An interval DEA approach. *Applied Mathematics and Computation, 177*, 1-10.
45. Talluri, S., & Baker, R. C. (2002). A multi-phase mathematical programming approach for effective supply chain design. *European Journal of Operational Research, 141*, 544-558.
46. Talluri, S., Narasimhan, R., & Nair, A. (2006). Vendor performance with supply risk: A chance-constrained DEA approach. *International Journal of Production Economics, 100*, 212-222.
47. Talluri, S., & Sarkis, J. (2002). A model for performance monitoring of suppliers. *International Journal of Production Research, 40*, 4257-4269.
48. Thompson, R. G., Langemeier, L. N., Lee, C.-T., Lee, E., & Thrall, R. M. (1990). The role of multiplier bounds in efficiency analysis with application to Kansas farming. *Journal of Econometrics, 46*, 93-108.
49. Wang, G., Huang, S. H., & Dismukes, J. P. (2004). Product-driven supply chain selection using integrated multi-criteria decision-making methodology. *International Journal of Production Economics, 91*, 1-15.
50. Wang, Y.-M., & Chin, K.-S. (2009). A new approach for the selection of advanced manufacturing technologies: DEA with double frontiers. *International Journal of Production Research, 47*, 6663-6679.
51. Wang, Y.-M., Chin, K.-S., & Yang, J.-B. (2007). Measuring the performances of decision-making units using geometric average efficiency. *Journal of the Operational Research Society, 58*, 929-937.

52. Wang, Y.-M., Greatbanks, R., & Yang, J.-B. (2005). Interval efficiency assessment using data envelopment analysis. *Fuzzy Sets and Systems*, *153*, 347-370.
53. Wang, Y.-M., Luo, Y., & Liang, L. (2009). Ranking decision making units by imposing a minimum weight restriction in the data envelopment analysis. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 223*, 469-484.
54. Wang, Y.-M., Yang, J.-B., & Xu, D.-L. (2005a). Interval weight generation approaches based on consistency test and interval comparison matrices. *Applied Mathematics and Computation, 167*, 252-273.
55. Wang, Y.-M., Yang, J.-B., & Xu, D.-L. (2005b). A preference aggregation method through the estimation of utility intervals. *Computers & Operations Research*, *32*, 2027-2049.
56. Weber, C. A. (1996). A data envelopment analysis approach to measuring vendor performance. *Supply Chain Management: An International Journal, 1*, 28-39.
57. Weber, C. A., Current, J., & Desai, A. (2000). An optimization approach to determining the number of vendors to employ. *Supply Chain Management: An International Journal, 5*, 90-98.
58. Zhou, X., Wang, Y., Chai, J., Wang, L., Wang, S., & Lev, B. (2019). Sustainable supply chain evaluation: A dynamic double frontier network DEA model with interval type-2 fuzzy data. *Information Sciences, 504*, 394-421.
59. Zhu, J. (2003a). Efficiency evaluation with strong ordinal input and output measures. *European Journal of Operational Research, 146*, 477-485.
60. Zhu, J. (2003b). Imprecise data envelopment analysis (IDEA): A review and improvement with an application. *European Journal of Operational Research*, *144*, 513-529.
61. Zhu, J. (2004). Imprecise DEA via Standard Linear DEA Models with a Revisit to a Korean Mobile Telecommunication Company. *Operations Research, 52*, 323-329.

Decision Models For Evaluation and Selection of Suppliers in the Presence of Cardinal And Ordinal Data, Weight Restrictions, and Non-Discretionary Factors: An Approach Based On DEA with Double Frontiers

Hossein Azizi
Department of Applied Mathematics, Parsabad Moghan Branch, Islamic Azad University, Parsabad Moghan, Iran
Rasul Jahed (Coressponding Author)
Department of Mathematics, Germi Branch, Islamic Azad University, Germi, Iran
Email: rasuljahed@gmail.com

Abstract
Selection of suppliers for outsourcing is now one of the most important decisions of the purchasing department. These decisions constitute an important part of the production and logistics management in many firms. On the other hand, suppliers can be evaluated and selected from optimistic and pessimistic perspectives. There is an argument that both points of view must be considered simultaneously, and any approach that considers only one perspective is biased. This paper proposes a new "data envelopment analysis (DEA) with double frontiers" approach for evaluation and selection of suppliers. The DEA with double frontiers approach can identify the best supplier in the presence of weight restrictions, non-discretionary factors, and cardinal and ordinal data. This paper proposes to integrate both efficiencies in the form of a geometric mean efficiency that measures the overall performance of each supplier. It is shown that geometric mean efficiency has more discriminative power than any of the optimistic and pessimistic efficiencies. A numerical example illustrates the application of the proposed method.
Keywords: Data envelopment analysis; Supplier selection; Weight restriction; Non-discretionary factors; Cardinal and ordinal data; Optimistic and pessimistic efficiencies.