

## انتخاب پرتفوی بهینه با استفاده از مدل برنامه‌ریزی توافقی در بورس اوراق

### بهادار تهران<sup>۱</sup>

نجمه راموز<sup>۲</sup>، زهرا اکبری آقمشهدی<sup>۳</sup>، علیرضا عاطفت دوست<sup>۴</sup>

#### چکیده

تاکنون مدل‌های مختلفی در زمینه انتخاب پرتفوی بهینه برای سرمایه‌گذاران، ارائه شده است. اکثر قریب به اتفاق این مدل‌ها در نهایت با ارائه مجموعه‌ای از پرتفوی‌های موجود در مرز کارا، فرآیند انتخاب را به پایان می‌رسانند و در بهترین حالت در ادامه فرآیند، با استخراج تابع مطلوبیت با توجه به ترجیحات سرمایه‌گذار از طریق گفتگوهای تعاملی تا حد امکان پرتفوی بهینه را متناسب با موقعیت‌های مالی و ویژگی‌های رفتاری و روانی افراد تعیین می‌نمایند. در عمل این امر به دلیل تفاوت‌های موجود در تابع مطلوبیت افراد بسیار مشکل و زمان‌بر می‌باشد. این مسئله، جایگاه مدل برنامه‌ریزی توافقی و قابلیت‌های ویژه مجموعه توافقی را به‌عنوان یکی از مدل‌های موجود در تصمیم‌گیری چند معیاره در انتخاب سبد سهام بهینه متمایز می‌سازد. در پژوهش حاضر، با نمونه‌گیری تصادفی به انتخاب تعداد ۲۰ شرکت که در سال‌های ۹۷-۹۵ در بورس اوراق بهادار فعال بوده‌اند اقدام گردیده است. با بررسی قدر مطلق تفاضل مجموع شاخص‌های سودآوری و ایمنی حاصل از بهینه‌سازی توابع مطلوبیت سرمایه‌گذاری از طریق مستقیم و مقایسه آن با نتایج حاصل از بهینه‌سازی انجام شده بر اساس روش برنامه‌ریزی توافقی، فرضیه پژوهش مورد تأیید قرار گرفت.

**واژه‌های کلیدی:** پرتفوی بهینه، مدل برنامه‌ریزی توافقی، مجموعه توافقی، بهینه توابع مطلوبیت.

طبقه‌بندی موضوعی: G11, D31, C44, C61

۱. کد DOI مقاله: 10.22051/jfm.2019.14649.1322

۲. استادیار گروه مدیریت بازرگانی دانشگاه قم، Email: nramooz@modares.ac.ir

۳. کارشناسی ارشد مدیریت مالی دانشگاه قم، Email: aq mashhadi@gmail.com

۴. استادیار گروه مدیریت و مهندسی صنایع دانشگاه شهاب دانش قم، Email: atefat@modares.ac.ir

## مقدمه

بازار سرمایه نقش مهمی در تخصیص کارای وجوه سرمایه‌ای ایفا می‌کند و به‌عنوان نهادی برای تجهیز منابع مالی شرکت‌ها و رشد اقتصادی کشور از اهمیت ویژه‌ای برخوردار می‌باشد. اهمیت مشارکت و حضور فعال سرمایه‌گذاران در این بازار به حدی است که ماهیت وجود بورس اوراق بهادار به سرمایه‌گذاری این اشخاص وابسته است. به عبارت بهتر، جذب سرمایه‌گذاران جدید و حفظ سرمایه‌گذاران فعلی در این بازار حیاتی است. برای تحقق این امر یکی از راهکارها کمک به اشخاص حقیقی و حقوقی جهت اخذ تصمیمات سرمایه‌گذاری صحیح‌تر و متناسب‌تر با ترجیحات آن‌ها می‌باشد. از این رو فرایند سرمایه‌گذاری از دیرباز به‌عنوان یکی از مسائل مهم موردتوجه سرمایه‌گذاران فردی، نهادی و تجزیه‌وتحلیل‌گران مالی بوده و خواهد بود (میری، محبوب قدسی، ۱۳۹۴). این فرایند، دو مبحث اصلی «تجزیه‌وتحلیل اوراق بهادار»<sup>۱</sup> و «مدیریت پرتفوی»<sup>۲</sup> را شامل می‌شود. تجزیه‌وتحلیل اوراق بهادار دربرگیرنده تخمین مزایای تک‌تک سرمایه‌گذاری‌هاست، درحالی‌که مدیریت پرتفوی شامل تجزیه‌وتحلیل ترکیب سرمایه‌گذاری‌ها و مدیریت نگهداری مجموعه‌ای از سرمایه‌گذاری‌ها می‌باشد (راعی و پویان فر، ۱۳۹۳، ۱۰۱).

یکی از فروض اولیه و پذیرفته‌شده در خصوص اشخاص سرمایه‌گذار فرض ریسک‌گریزی آن‌ها می‌باشد. درجه ریسک‌گریزی افراد باهم متفاوت بوده و تحت تأثیر عوامل متعددی قرار دارد (پرگ و بوجی، ۲۰۰۳). ولیکن آنچه مورد اتفاق همه‌ی اندیشمندان حوزه سرمایه‌گذاری می‌باشد، تأثیر درجه‌ی ریسک‌گریزی<sup>۳</sup> بر نوع انتخاب بهینه‌ی سرمایه‌گذاران می‌باشد (کالبرگ و زیمبا، ۱۹۸۳)؛ زیرا درجه ریسک‌گریزی بر تابع مطلوبیت افراد تأثیر گذاشته و شکل این تابع را تحت تأثیر قرار می‌دهد (لی روی، ۲۰۱۴). از همین رو انتخاب بهینه‌ی افراد از بین پرتفوی‌های مرز کارا به‌واسطه‌ی شکل تابع مطلوبیت سرمایه‌گذار که تا حدود زیادی منحصر به فرد می‌باشد، تعیین می‌شود (مارکوویتز، ۱۹۵۲). به دلیل مشکلات متعدد مربوط به استخراج توابع مطلوبیت خاص هر

۱. SECURITY ANALYSIS

۲. PORTFOLIO MANAGMENT

۳. RISK AVERSION

۴. KALLBERG & ZIEMBA

۵. LEROY

۶. MARKOWITZ

سرمایه‌گذار، پژوهشگران متعددی سعی نمودند با استفاده از اصول و تکنیک‌های مربوط به تصمیم‌گیری چند معیاره و هم‌چنین علم اقتصاد خرد بر این مسائل فائق آیند. یکی دیگر از این پژوهش‌های مربوط به تعمیم اصول تصمیم‌گیری گروهی که توسط یو در سال ۱۹۷۳ ارائه شد، به تصمیمات مربوط به انتخاب سبد سهام بهینه است. با همین هدف در پژوهش حاضر از مدل برنامه‌ریزی توافقی در انتخاب سبد سهام استفاده شده و نتایج حاصل با روش حداکثر سازی توابع مطلوبیت به روش مستقیم مقایسه می‌گردد.

### مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش

با توجه به اینکه مطالعه‌ی حاضر پژوهشی بین‌رشته‌ای می‌باشد، قاعدتاً مبانی نظری مربوطه نیز از حوزه‌های مختلف جمع‌آوری گردید. برای این منظور، بررسی اجمالی پیرامون مباحث مربوط به فرایند سرمایه‌گذاری، مدل‌های انتخاب پرتفوی، تئوری مطلوبیت انتظاری و مدل‌های تصمیم‌گیری چند معیاره و به‌طور خاص برنامه‌ریزی توافقی و مجموعه توافقی و پژوهش‌های انجام گرفته در این زمینه، در برنامه کار قرار گرفت.

### تعبیر اقتصادی مدل برنامه‌ریزی توافقی

ابتدا به تعریفی جامع از عبارت ترکیبات مصرف تعادلی پرداخته می‌شود؛ زیرا اساس متریک‌های مورد استفاده در برنامه‌ریزی توافقی یعنی  $p=1$  و  $p=\infty$  تعیین‌کننده‌ی مرزهای مجموعه توافقی می‌باشند و متریک بی‌نهایت به منزله‌ی تمایل افراد به حفظ موقعیت و وضعیت متعادل می‌باشد یا به عبارت بهتر تمایل به حفظ ترکیبات مصرف تعادلی را نشان می‌دهد. به همین دلیل ترکیب  $(x_1, x_2)$  زمانی که مصرف هر دوی این کالاها تقریباً نزدیک به نقطه‌ی ایدئال باشد؛ ترکیبی کاملاً متعادل است. به عبارتی رابطه‌ی ۱ برقرار می‌باشد.

$$w_1(x_1^* - x_1) = w_2(x_2^* - x_2) \quad (\text{رابطه ۱})$$

$x_1^*$ : مقدار کالای  $x_1$  زمانی که کل بودجه به آن کالا تخصیص یافته است.

$x_2^*$ : مقدار کالای  $x_2$  زمانی که کل بودجه به آن کالا تخصیص یافته است.

$w_1$ : نسبتی از بودجه که به مصرف کالای  $x_1$  تخصیص یافته است.

$w_2$ : نسبتی از بودجه که به مصرف کالای  $x_2$  تخصیص یافته است.

بر روی منحنی مطلوبیت یکسان  $Z(x_1, x_2) = Z$ ؛ رابطه‌ی ۱ برقرار است.

$$Z'_{x_1} dx_1 + Z'_{x_2} dx_2 = 0 \quad \text{رابطه (۲)}$$

بر اساس رابطه‌ی ۲ زمانی که  $(x_1, x_2)$  ترکیبی متعادل باشد، رابطه‌ی ۳ برقرار خواهد بود.

$$|w_1 dx_1| = |w_2 dx_2| \quad \text{رابطه (۳)}$$

در این موقعیت، تصمیم‌گیرنده می‌تواند یک واحد نهایی از  $x_1$  را به ازای یک واحد نهایی از  $x_2$  بدون تغییر در سطح مطلوبیت حاصل از مصرف ترکیب فعلی، معاوضه نماید (رومرو و بالسترو، ۱۹۹۱). در نقطه‌ی مصرف متعادل (مسیر تعادلی) در فضای سرمایه‌گذاری، سرمایه‌گذار مایل خواهد بود یک واحد نهایی از شاخص سودآوری را با یک واحد نهایی از شاخص ایمنی معاوضه نماید، اگر  $w_1 = w_2 = 1$  باشد (بالسترو و پلاسانتاماریا، ۲۰۰۱). اگر  $w_1 = \frac{1}{x_1^*}$  و  $w_2 = \frac{1}{x_2^*}$  در نظر گرفته شود، در ترکیبات مصرف متعادل رابطه‌های ۴ و ۵ برقرار است:

$$w_1 x_1 = w_2 x_2 \quad \text{رابطه (۴)}$$

$$x_1 / x_1^* = x_2 / x_2^* \quad \text{رابطه (۵)}$$

برقراری رابطه‌های ۴ و ۵ همان ویژگی متعادل بودن می‌باشد که در پارادایم جانشین بودن مجموعه توافقی و بهینه توابع مطلوبیت به طریق لاگرانژ، حائز اهمیت می‌باشد (رومرو، ۱۹۹۶).

در ترکیبات مصرف متعادل ( $I_\infty$ ) رابطه‌ی ۶ همواره برقرار است.

رابطه ۶

$$MRS = W_1/W_2$$

$$\text{If } W_1 X_1 \sim W_2 X_2 \rightarrow \left| W_1 dX_1 \frac{dX_2}{W_2} \right| \sim 1$$

$$\text{If } W_1 X_1 = W_2 X_2 \rightarrow |W_1 dX_1 + W_2 dX_2| = 0$$

۱. Ballesterro & Pla-Santamaria

۲. Romero

$$Z'_{X_1}/Z'_{X_2} \sim W_1/W_2 \rightarrow MRS = W_1/W_2$$

از روابط فوق، می‌توان نتیجه گرفت که مقدار بیشینه‌ی تابع  $Z$  به طریق لاگرانژ، به احتمال قوی به فاصله  $[L_1$  و  $L_\infty]$  تعلق دارد؛ بنابراین می‌توان گفت CP جانشین مناسبی برای بهینه‌سازی کلاسیک به طریق لاگرانژ می‌باشد (بالسترو و رومرو<sup>۱</sup>، ۱۹۹۱).

### تئوری مطلوبیت و انتخاب پرتفوی بهینه

حداکثر سازی مطلوبیت مورد انتظار به‌طور دامنه‌داری در مباحث مربوط به تجزیه و تحلیل پرتفوی‌های بهینه به کار گرفته شده است. مدل  $M-V$  نیز بر اساس مفهوم حداکثر سازی مطلوبیت انتظاری بنا نهاده شده است (هانا و چن<sup>۲</sup>، ۱۹۹۷) مطلوبیت انتظاری چارچوبی برای بررسی دیدگاه افراد نسبت به ریسک را فراهم می‌کند (لی روی و ورنر<sup>۳</sup>، ۲۰۱۴). در رفتار انتخاب عامل اقتصادی، دو مسئله حائز اهمیت است؛ اول اینکه نتایج تصمیمات ممکن است متغیری تصادفی باشد (مانند سرمایه‌گذاری تحت شرایط عدم اطمینان). دوم اینکه بسیاری از تصمیمات سرمایه‌گذاران، پیامدهای مهمی برای آینده آن‌ها به همراه دارد که این‌گونه تصمیمات نه تنها بر روی مطلوبیت فعلی سرمایه‌گذار تأثیرگذار می‌باشد؛ به همان اندازه بر روی مطلوبیت آینده سرمایه‌گذار مؤثر خواهد بود. مدل فون نویمان و مورگنشرن (VNM) اساس اخذ تصمیم در شرایط عدم اطمینان به صورت مطلوبیتی که باید حداکثر گردد، قابل تعریف است. با در نظر گرفتن این فرض که سرمایه‌گذاران بر اساس معیار میانگین- واریانس، اقدام به انتخاب پرتفوی بهینه می‌نمایند، پرتفوی حاصل، پرتفویی خواهد بود که تابع مطلوبیت سرمایه‌گذاران به ازای انتخاب آن، حداکثر می‌گردد (استرادا<sup>۴</sup>، ۲۰۰۲). با وجود اینکه لحاظ نمودن توابع مطلوبیت برای شخص سرمایه‌گذار و روش حداکثر سازی غیرمستقیم این توابع به طریق لاگرانژ<sup>۵</sup>، منجر به انتخاب‌های دقیقی برای سرمایه‌گذار می‌شود ولی به

۱. Ballestero & Romero

۲. Hanna & Chen

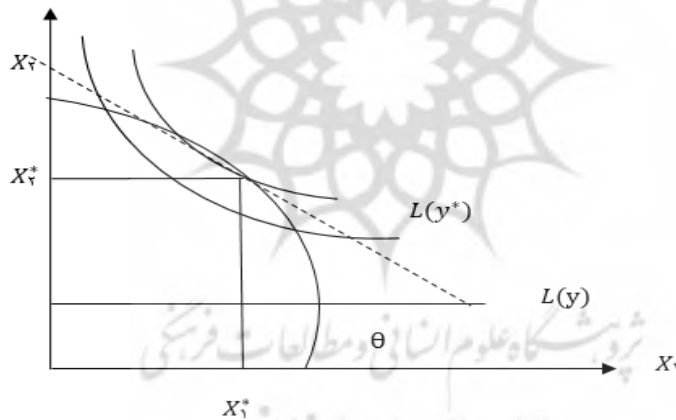
۳. LeRoy & Werner

۴. Estrada

۵. روش لاگرانژ، متدی قوی و قاعده‌مند برای حل مسائل بهینه‌سازی مقید در اقتصاد می‌باشد.

دلیل مشکلاتی همچون بالا بودن حجم محاسبات و محاسبات تکراری، تقریب توابع مطلوبیت اهمیت زیادی پیدا کردند (کرول و مارکوویتز، ۱۹۸۴).  
روش لاگرانژ به عنوان یکی از مهم ترین روش ها برای یافتن نقاط بهینه ی توابع مطلوبیت قید شده به کار می رود. شرایط قید شده و طریقه ی به دست آوردن نقاط بهینه طبق رابطه ۷ می باشد (جل، ۲۰۱۱).

$$\begin{aligned} & \text{Max } F(X_1, X_2) && \text{رابطه ۷} \\ & \text{S. tg}(X_1, X_2) = 0 \\ & L(X_1, X_2, \lambda) = f(X_1, X_2) + \lambda g(X_1, X_2) \\ & \frac{\partial L}{\partial X_1} = 0 \\ & \frac{\partial L}{\partial X_2} = 0 \\ & \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{aligned}$$



شکل ۱. بهینه سازی به طریق لاگرانژ

به اعتقاد مارکوویتز پرتفوی بهینه در محلی از مرز کارا واقع می شود که توابع مطلوبیت سرمایه گذار با مرز کارا مماس می گردد. توابع مطلوبیتی که در این تحقیق به کار گرفته شده است بر

اساس کاهش درجه ریسک گریزی مطابق با مطالعه کرول (۱۹۸۴) و آمیلون<sup>۱</sup> (۲۰۰۱) به شرح جدول ذیل در نظر گرفته شد.

جدول ۱. توابع مطلوبیت منتخب و بیان پارامترهای مربوطه

تابع مطلوبیت $U(w)$	مقادیر پارامترها	ریسک گریزی مطلق آرو و پرت	ریسک گریزی نسبی آرو و پرت
$\ln(\alpha+w)$	$\alpha=0$ $\alpha=0.5$	کاهشی	$\alpha > 0$ افزایشی $\alpha = 0$ ثابت $\alpha < 0$ کاهشی
$-e^{-\alpha w}, \alpha > 0$	$\alpha=2$ $\alpha=5$	ثابت	ثابت
$(\alpha + w)^\beta, 0 < \beta < 1$	$\alpha=-0.8, \beta=0.$ $\alpha=-0.5, \beta=0.2$	کاهشی	$\alpha > 0$ افزایشی $\alpha = 0$ ثابت $\alpha < 0$ کاهشی
$\ln(\beta + \ln(\alpha+w))$	$\alpha=0.5, \beta=0.7$ $\alpha=-0.3, \beta=1.5$	کاهشی	$\alpha > 0$ کاهشی $\alpha \leq 0$ کاهشی $\alpha < 0$ کاهشی

همان‌طور که در جدول ۱ مشخص می‌باشد توابع مطلوبیت منتخب از نوع لگاریتمی، نمایی منفی و نمایی می‌باشد. تابع مطلوبیت لگاریتمی عبارت است از:

$$U(y) = \ln(y + \alpha), \quad -\alpha < y \quad (\text{رابطه ۸})$$

اگر  $y < -\alpha$  باشد ریسک گریزی مطلق کاهشی و برابر  $\frac{1}{(y+\alpha)}$  است. اگر  $\alpha$  برابر یک باشد، ریسک گریزی نسبی برابر یک است. ریسک پذیری برابر  $t(y) = y + \alpha$  می‌باشد.

توابع مطلوبیت نمایی (توانی) نیز یکی از انواع توابع مطلوبیت پر کاربرد در مباحث مدیریت مایل و سرمایه گذاری است. شکل عمومی این دسته از توابع در رابطه ۹ نشان داده شده است.

$$u(y) = \frac{1}{\gamma} (\alpha + \gamma y)^{1-\frac{1}{\gamma}}, \quad -\alpha < \gamma y \quad \text{رابطه ۹}$$

اگر  $\gamma \neq 1$  و  $\gamma = 0$  باشد، ریسک گریزی مطلق برابر  $\frac{1}{(\alpha + \gamma y)}$  است و اگر  $\gamma > 0$  باشد، ریسک گریزی مطلق کاهشی است. در غیر این صورت اگر  $\gamma < 0$  باشد ریسک گریزی مطلق افزایشی است. اگر  $\alpha = 0$  باشد ریسک گریزی نسبی برابر  $\gamma$  است. برای محاسبه ریسک پذیری از رابطه  $t(y) = \alpha + \gamma y$  استفاده می شود (لی رو، ۲۰۱۴، ۸۹).

توابع مطلوبیت نمایی منفی یکی از انواع توابع مطلوبیت نمایی است که در رابطه ۱۰ نشان داده شده است.

$$u(y) = -e^{-\alpha y} \quad \text{رابطه ۱۰}$$

از ویژگی این نوع توابع مطلوبیت، ریسک گریزی مطلق ثابت است که برابر با  $\frac{1}{\alpha}$  می باشد (لی رو، ۲۰۱۴، ۸۹).

توابع مطلوبیت نمایی، لگاریتمی، نمایی منفی توابع مطلوبیت ریسک پذیر خطی هستند و پارامتر  $\gamma$  (  $\gamma = 0$  برای توابع مطلوبیت نمایی منفی و  $\gamma = 1$  توابع مطلوبیت لگاریتمی) شیب تابع ریسک پذیری می باشد (لی رو، ۲۰۱۴، ۹۰).

در مباحث مربوط به بهینه سازی مطلوبیت مورد انتظار در فضای سرمایه گذاری تابع هدف و محدودیت ها به صورت رابطه زیر در نظر گرفته شد.

$$\begin{aligned} & \text{Max } E[U(1 + \sum_{i=1}^n x_i r_i)] \\ & \text{s.t } x_i \geq 0 \quad i=1, \dots, n \\ & \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1 \end{aligned} \quad \text{رابطه ۱۱}$$

در رابطه ی فوق تابع مطلوبیت مورد انتظار سرمایه گذار به صورت ثروتی که می بایست حداکثر گردد، تعریف شده است.  $r_i$  همان بازده سهام منتخب و  $\sum_{i=1}^n x_i$  همان محدودیت مربوط به مجموع سرمایه گذاری در سهام منتخب که نبایستی از یک بزرگ تر باشد، می باشد.

#### سرمایه گذار استاندارد (متوسط)

آنچه استفاده از برنامه ریزی توافقی را در انتخاب سبد سهام حائز اهمیت نموده است عملیاتی نمودن مفهوم ریسک سرمایه گذاران با لحاظ نمودن خانواده ای از متریک ها می باشد. در پژوهش های



کلاسیک اقتصاد برای نشان دادن درجه ریسک‌گریزی از معیارهای معروف و شناخته‌شده ریسک نسبی و مطلق آرو و پرت (۱۹۷۱) استفاده می‌شود. آنچه مسلم است هیچ‌یک از سرمایه‌گذاران مانند هم نبوده و طبقات مختلف سرمایه‌گذاران، نیازهای مدل‌سازی متفاوتی را می‌طلبند (هانا و چن، ۱۹۹۷) و برای انتخاب پرتفوی بهینه ترکیب‌های مختلفی از دو شاخص ریسک و بازده را در نظر می‌گیرند. پارامتر ریسک را می‌توان به‌عنوان یکی از دغدغه‌های اصلی سرمایه‌گذاران دانست. اهمیت این شاخص تا جایی است که می‌توان سرمایه‌گذاران را بر اساس آن به انواع مختلفی طبقه‌بندی نمود. پژوهش جامع بوجی و پرگ سعی در تخمین هم‌زمان درجه ریسک‌گریزی و نرخ تنزیل زمانی برای هر سرمایه‌گذار، نمودند. نتیجه پژوهش مزبور نشان داد ریسک‌گریزی با عواملی مانند میزان درآمد، سطح تحصیلات، سن، جنسیت، گرایش‌های مذهبی و ... در ارتباط است (بوجی و پرگ، ۲۰۰۳) و سرمایه‌گذاران را به سه دسته تقسیم کرده‌اند: سرمایه‌گذار متمایل به سمت شاخص سودآوری، سرمایه‌گذار متمایل به سمت شاخص ایمنی و سرمایه‌گذار استاندارد<sup>۱</sup>. بالسترو و رومرو (۱۹۹۶)، ضمن برشمردن ویژگی‌های سرمایه‌گذار استاندارد (متعارف) به‌عنوان فردی که به دنبال حفظ موقعیت متعادل خود از نظر شاخص ایمنی و سودآوری است،  $L_{\infty}$  را به‌عنوان نقطه مرجع و هدف عام مطلوب کلیه سرمایه‌گذاران، معرفی نمودند (بالسترو و رومرو، ۱۳۸۱، ۱۹۹۶). به عبارت بهتر، همه انسان‌ها موقعیت‌های متعادل را به‌عنوان ترکیبی متوازن (متعادل) از عناصر می‌دانند و هیچ‌کس غیر از انسان‌های غیرمنطقی، تمایلی به ایجاد موقعیت‌های بسیار ناهماهنگ از نظر ترکیب ندارد. به عبارت بهتر یکی از اصول بارز انسان، ایجاد ترکیب‌های هماهنگ، متوازن و متعادل از عناصر می‌باشد. این واقعیت، توضیح‌دهنده این مسئله است که چرا  $L_{\infty}$  به‌عنوان یک هدف عمومی برای کلیه سرمایه‌گذاران قابل طرح می‌باشد (بالسترو و پلاسانتاماریا، ۲۰۰۱) البته در این حالت تنها رفتار ریسک‌گریزانه سرمایه‌گذار استاندارد در موقعیت متوازن مورد توجه قرار می‌گیرد. به عبارت بهتر سرمایه‌گذار استاندارد فردی است که مطلوبیت نهایی ریسک و بازده در نقطه‌ی مرجع<sup>۲</sup> برای وی یکسان است (بالسترو و رومرو، ص ۱۳۸۲، ۱۹۹۶).

یکی از مهم‌ترین مسائل دنیای سرمایه‌گذاری انتخاب پرتفوی بهینه متناسب با رجحان‌های سرمایه‌گذاران می‌باشد، به همین دلیل تاکنون تحقیقات متعدد و دامنه‌داری در این زمینه انجام شده و همچنان در حال انجام می‌باشد. در این بین مدل میانگین-واریانس مارکوویتز مهم‌ترین مدل

۱. Average investor

۲. Reference point

برنامه‌ریزی پرتفوی تک دوره‌ای می‌باشد که در سال ۱۹۵۲ به جامعه مالی معرفی گردید (مارکویتز، ۱۹۵۲). مارکویتز نشان داد که سرمایه‌گذار استاندارد (متعارف) سعی در حداکثر سازی مطلوبیت مورد انتظار<sup>۱</sup> خود دارد و سرمایه‌گذاران، انتخاب خود را از بین پرتفوی‌های غیر مسلط مرز کارا انجام می‌دهند. همچنین اگر تابع توزیع بازده‌ها نرمال باشد، معیارهای میانگین-واریانس، معیارهای معتبر و کارا برای هر نوع تابع مطلوبیت می‌باشد (همان منبع). به‌طور کلی مدل میانگین-واریانس زمانی که تابع مطلوبیت سرمایه‌گذار مقعر باشد و تابع توزیع بازده دارای‌ها نرمال باشد به عبارتی از ویژگی‌های تابع مطلوبیت انتظاری فون نویمان - مورگنشرن پیروی کند، صادق می‌باشد (کرول و مارکویتز، ۱۹۸۴). مطابق با مدل میانگین-واریانس (M-V) مارکویتز، یک فرد با معین کردن سطح مشخصی از ریسک، می‌تواند حداکثر بازده سرمایه‌گذاری را از طریق حداکثر کردن بازده مورد انتظار پرتفوی به دست آورد یا به ازای سطح مشخصی از بازده، یک فرد می‌تواند حداقل ریسک سرمایه‌گذاری را از طریق حداقل سازی واریانس پرتفوی به دست آورد (چن و هانگ<sup>۲</sup>، ۲۰۰۹). مدل تمام کوواریانس مارکویتز تنها قادر به تعیین مرز کارا می‌باشند (بالسترو و رومرو، ۱۹۹۷). این مدل پرتفوی بهینه را مشخص نمی‌کند بلکه مجموعه‌ای از پرتفوی‌های کارا را بر روی منحنی مرز کارا مشخص می‌نماید که همگی آن‌ها با توجه به ریسک و بازده مورد انتظار، پرتفوی بهینه هستند و سرمایه‌گذار انتخاب خود را از بین پرتفوی‌های غیر مسلط مرز کارا و با توجه به شکل تابع مطلوبیت خود (مرز کارای پاراتوبی) انجام می‌دهد (جونز<sup>۳</sup>، ۲۰۰۰). به دلیل مسائل و مشکلات مدل مارکویتز پژوهشگران دیگری موضوع بهینه‌سازی سبد سهام را بررسی نمودند. پژوهشگرانی چون کالبرگ و زیмба در سال ۱۹۸۳ نشان دادند در صورتی که درجه‌ی ریسک‌گریزی مطلق سرمایه‌گذاران مشابه باشد، سرمایه‌گذاران با داشتن هر نوع تابع مطلوبیتی، پرتفوی‌های بهینه‌ی مشابهی را برمی‌گزینند (کالبرگ و زیмба، ۱۹۸۳) همچنین چارنز و کوپر (۱۹۶۱) و سپس ایجیری مدل برنامه‌ریزی آرمانی<sup>۴</sup> (GP) در مسائل مالی را ارائه نمودند. ولیکن دلایل مهمی جهت استفاده از مدل‌های دیگر، غیر از GP وجود دارد. بر اساس مفاهیم مالی، دلیل اصلی این است که GP قادر به تعیین تقریبی از تابع مطلوبیت سرمایه‌گذار نیست؛ یعنی تابع مطلوبیتی که با ریسک‌گریزی

۱. Expected utility

۲. Chen & Huang

۳. Jones

۴. Goal programming

مشخص می‌گردد (بالسترو، ۲۰۰۴). با توجه به عدم توانایی مدل‌های مذکور در انتخاب پرتفوی بهینه طرح مدلی که هر دو وظیفه‌ی تعیین مرز کارا و انتخاب بهترین مجموعه سرمایه‌گذاری را به‌طور هم‌زمان انجام دهد، ضروری به نظر می‌رسد (بالسترو و رومرو، ۱۹۹۷). از همین رو از دهه ۹۰ میلادی استفاده از مدل برنامه‌ریزی توافقی که از تکنیک‌های تصمیم‌گیری گروهی می‌باشد (یو، ۱۹۷۳) به دلیل ویژگی‌های خاص مجموعه توافقی در مطالعات انجام‌شده با موضوع انتخاب پرتفوی بهینه شروع گردید و تاکنون هم روند تکاملی خود را طی نموده است (بالسترو و رومرو، ۱۹۹۶). برنامه‌ریزی توافقی<sup>۱</sup> (CP) یک رویکرد تصمیم‌گیری چند معیاره شناخته‌شده و معروف می‌باشد که اولین بار توسط یو و زلنی (۱۹۷۳) مطرح گردید. CP تکنیک برنامه‌ریزی ریاضی با قابلیت بررسی اهداف چندگانه، در شرایطی که در آن سطح بالای تضاد میان معیارها اجازه بهینه‌سازی هم‌زمان تمامی اهداف در نظر گرفته‌شده را نمی‌دهد، می‌باشد. اساس و شالوده CP تعیین نقطه‌ایده‌آل به‌عنوان نقطه مرجع می‌باشد که سایر معیارها در مقایسه با این نقطه به مقدار بهینه خود می‌رسند (بالسترو و رومرو، ۱۹۹۱). برنامه‌ریزی توافقی یک مجموعه‌ی گسسته (مجزا) از راه‌حل‌ها را مطابق با فاصله‌ی این راه‌حل‌ها از راه‌حل ایده‌آل رتبه‌بندی می‌کند (پرودانویس<sup>۲</sup>، ۲۰۰۱). با پژوهشی که توسط بالسترو و رومرو در سال ۱۹۹۱ انجام گرفت، راه برای توسعه و استفاده روزافزون برنامه‌ریزی توافقی در مسائل اقتصادی و مالی هموار شد. این پژوهشگران با انجام پژوهشی ارتباط تابع مطلوبیت و برنامه‌ریزی توافقی را بررسی نمودند. نتایج حاصل از کار این دو پژوهشگر نشان داد که برنامه‌ریزی توافقی جانشین خوبی برای بهینه‌سازی کلاسیک است. بالسترو و رومرو (۱۹۹۳) در پژوهشی دیگری به بررسی سیستم ارزش‌گذاری در برنامه‌ریزی توافقی پرداختند. این پژوهشگران سیستم ارزش‌گذاری خاصی را پیشنهاد نمودند که به‌عنوان یک تعدیل‌کننده به‌صورت نسبی و معکوس باعث ایده‌آل شدن قیمت سایه‌ای در سناریوهای اقتصادی می‌باشد. بالسترو و رومرو در سال ۱۹۹۶ ضمن به‌کارگیری CP در مسئله‌ی انتخاب پرتفوی، فرض سرمایه‌گذار استاندارد<sup>۳</sup> (متوسط) را در تحلیل خود به کار بردند. یکی از مهم‌ترین مسائل در انتخاب پرتفوی بهینه داشتن اطلاعاتی از ترجیحات سرمایه‌گذاران در خصوص معیارهای ریسک و بازده می‌باشد. در چارچوب CP، متریک‌ها برای نشان دادن فاصله موجود بین نقطه‌ی ایده‌آل نرمالایز شده و نقاط مرز کارای ترسیم

۱. Compromise programming

۲. Prodanovic

۳. Average investor

شده به روش (NISE<sup>۱</sup>)، به کار می‌رود. به عبارت بهتر، مفهوم فاصله به‌عنوان معیار اندازه‌گیری ترجیحات سرمایه‌گذاران در نظر گرفته می‌شود. نتایج حاصل از کار این پژوهشگران نشان داد که مجموعه‌ی توافقی یک جایگزین مناسب نسبت به روش‌های سنتی مورد استفاده برای انتخاب اوراق بهادار است. بالسترو در سال ۱۹۹۷ به بررسی ارتباط متریک‌ها با درجه ریسک‌گریزی سرمایه‌گذاران پرداخت. این روش ما را به برآورد مناسبی از متریک (p) متناسب با درجه‌ی ریسک‌گریزی افراد رهنمون می‌سازد. در سال ۲۰۰۱ پلاسانتاماریا از CP در انتخاب پرتفوی شرکت‌های سرمایه‌گذاری با لحاظ نمودن هزینه‌های معاملاتی در بورس اوراق بهادار مادرید اقدام نمود. در سال ۲۰۰۴ این دو پژوهشگر از CP در انتخاب پرتفوی برای شرکت‌های سرمایه‌گذاری استفاده کردند. با این توضیحات می‌توان گفت تأیید فرض جانشین بودن مجموعه‌ی توافقی به‌عنوان محدوده‌ای که نقاط بهینه توابع مطلوبیت سرمایه‌گذاران در آن واقع می‌شود به افزایش دانش کاربردی در زمینه‌ی انتخاب بهینه افراد منجر خواهد شد. با توجه به توضیحات مطروحه، فرضیه پژوهش به‌صورت ذیل بیان گردید:

«پرتفوی‌های بهینه محاسبه‌شده با استفاده از مدل برنامه‌ریزی توافقی، تقریب مناسبی از رفتار سرمایه‌گذار متعارف (استاندارد) می‌باشد»

## روش‌شناسی پژوهش

پژوهش حاضر بر اساس هدف کاربردی، بر اساس نوع رویکرد، کمی، بر اساس نحوه‌ی گردآوری داده‌ها در گروه پژوهش‌های توصیفی و پژوهش اسنادی-کتابخانه‌ای و طرح پژوهش، تجربی میدانی می‌باشد. با توجه به اینکه پژوهش انجام‌شده، مطالعه‌ای بین‌رشته‌ای می‌باشد جهت تئوری پردازی و همچنین تحلیل داده‌ها از تکنیک CP و توابع مطلوبیت استفاده شده است. برنامه‌نویسی با استفاده از نرم‌افزار MATLAB2014 برای مشخص نمودن نقاط کارای گوشه‌ای، با تکنیک موسوم به تخمین مجموعه غیرمرجح (NISE) با هدف ترسیم مرز کارا به کار گرفته شد. با استفاده از داده‌های مربوط به ریسک و بازده سهام منتخب، ماتریس کوواریانس بازده با استفاده از نرم‌افزار صفحه گسترده‌ی اکسل تهیه شد. نمونه آماری در این پژوهش ۲۰ شرکت پذیرفته‌شده در بورس اوراق بهادار می‌باشند که به‌صورت تصادفی ساده از بین شرکت‌های

۱. Non-inferior set estimation method

پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران انتخاب شده‌اند. در خصوص حجم نمونه باید گفت با توجه به اینکه پژوهش حاضر به بررسی و اجرای یک تکنیک ریاضی در انتخاب سبد سهام می‌باشد نیازی به انتخاب نمونه‌های با تعداد بالا در این خصوص وجود نداشته است و صرفاً تشکیل سبد سهام مدنظر می‌باشد. از طرفی افزایش تعداد سهام به صورت فزاینده‌ای بر مشکلات اجرای برنامه‌های متعدد نرم‌افزاری تهیه شده می‌افزاید؛ بنابراین با وجود اطلاع از کاهش تعمیم‌پذیری نتایج، تعداد شرکت‌های نمونه ۲۰ شرکت انتخاب گردید.

### تجزیه و تحلیل داده‌ها و آزمون فرضیه

#### اجرای مدل

چگونگی انتخاب پرتفوی در چارچوب مدل برنامه‌ریزی توافقی در رابطه‌ی ۷ آمده است.

$$\text{Min } L_p = [w_1 \cdot |E^* - E|^p + w_2 \cdot |V - V^*|^p] \quad (12)$$

$$\text{St } Y \in X$$

(۱۳) به ازای  $P=1$  رابطه ۸ به دست می‌آید

$$\text{Max } W_1 \cdot E - W_2 \cdot V$$

$$\text{St } Y \in X$$

با حل معادله‌ی ۸،  $L_1$  تعیین می‌شود و به ازای  $p=\infty$  رابطه‌ی ۹ به دست می‌آید.

$$\text{Max } [W_1(E^* - E), W_2(V - V^*)] \quad (14)$$

با حل معادله‌ی ۹،  $L_\infty$  تعیین می‌شود.

$$\text{Min } D = \text{Min Max}[W_1, W_2(V - V^*)] \quad (15)$$

$$\text{St } Y \in X$$

بر اساس پژوهش انجام شده توسط کوهن و زلنی (۱۹۷۹)، معادله‌ی ۱۱ معادل رابطه ۱۰ می‌باشد.

$$\text{Min } D \quad (16)$$

$$\text{St } W_1(E^* - E) \leq D$$

$$W_2(V - V^*) \leq D$$

$$Y \in X$$

#### جدول ۲. علائم اختصاری به کاررفته در مدل برنامه‌ریزی توافقی

تعریف علائم اختصاری	
$E$ : بازده مورد انتظار پرتفوی	$X_i$ : کسری از پرتفوی که در سهام، سرمایه‌گذاری شده است.

تعریف علائم اختصاری	
V: واریانس بازده	X: مجموعه‌ی محدودیت‌های مدل
U(E,V): تابع مطلوبیت سرمایه‌گذاری در فضای E-V	$W_1, W_2$ : وزن‌هایی که به E, V نسبت داده می‌شود.
E*: ارزش ایدئال (آرمانی) برای E	P: پارامتری که خانواده‌ی توابع فاصله و در اینجا درجه ریسک‌گریزی را مشخص می‌کند
V*: ارزش ایدئال (آرمانی) برای V	$L_1, L_\infty$ : بهترین جواب‌های توافقی به ازای متریک ۱ و $\infty$ ، محدوده‌های مجموعه‌های توافقی را مشخص می‌کنند.
E*: ارزش ضد ایدئال برای E	V*: ارزش ضد ایدئال برای V

برای استفاده از مدل برنامه‌ریزی توافقی در اولین مرحله لازم است که نقطه‌ی ایده‌آل در مسئله‌ی انتخاب پرتفوی در فضای ریسک و بازده تعریف گردد. طبق تعریف، نقطه‌ی ایده‌آل پرتفویی با حداقل ریسک و حداکثر بازده می‌باشد. برای ایجاد قابلیت مقایسه، دو معیار مزبور بر اساس روابط ۱۲ و ۱۳ نرمالایز می‌گردند تا به شاخص‌هایی تبدیل شوند که هر دو با عبارت «بیشتر، بهتر است».

$$\theta_1 = \frac{E - E^*}{E^* - E_*} \quad (17)$$

(شاخص سودآوری)

$$\theta_2 = 1 - \frac{V - V^*}{V_* - V^*} = \frac{V_* - V}{V_* - V^*} \quad (18)$$

(شاخص ریسک)

با به کارگیری اصول CP و تعیین نقطه‌ی ایده‌آل، مرز کارای پاراتویی بر اساس دو معیار میانگین بازده اوراق بهادار انتخابی و ریسک این اوراق، در شکل ۱ ترسیم شد. ویژگی مهم مدل مطرح‌شده، وزن دهی به هر یک از معیارها می‌باشد. در این پژوهش از روش NISE<sup>۱</sup> و ۱۷ نقطه برای ترسیم مرز کارا استفاده شده است. دلیل استفاده از این روش، عدم نیاز به داشتن اطلاعات ترجیحی افراد در مورد ریسک و بازده و قابلیت ترسیم مرز کارا با حداقل نقاط می‌باشد. این روش یکی از تکنیک‌های وزن دهی می‌باشد و واژه‌ی NISE بر کارایی پاراتویی دلالت دارد (کاستا و رهمن<sup>۲</sup>، ۲۰۰۵). در این روش در ابتدا به بهینه‌سازی هر یک از توابع هدف به‌طور جداگانه اقدام نموده که این فرآیند منجر به ایجاد نقاط A و B در فضای هدف می‌گردد. شیب پاره‌خط بین هر دو نقطه‌ی مجاور به‌عنوان وزن‌های تابع هدف اصلی در مسئله‌ی جدید محسوب می‌شود (کوهن و شر، ۱۹۷۹).

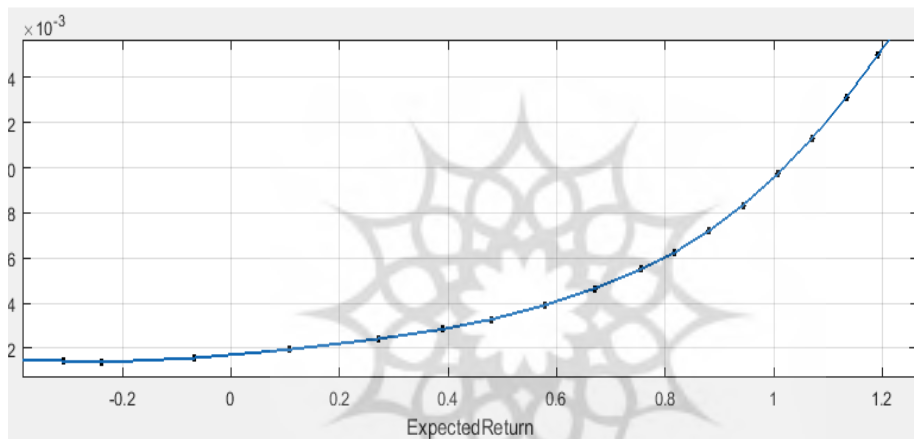
۱. علاقمندان برای مطالعه‌ی بیشتر در مورد این تکنیک می‌توانند به مقاله کاربرد روش تخمین مجموعه‌ی غیر مرجح در انتخاب پرتفوی بهینه‌نوشته‌ی دکتر عادل آذر، نجمه راموز و علیرضا عاطقت دوست (۱۳۹۱) مجله پژوهش‌های مدیریت صنعتی شماره ۲ مراجعه نمایند.

۲. Costa & Rehman,

در شروع کار مدل اساسی انتخاب پرتفوی در رابطه‌ی ۱۹ را در نظر می‌گیریم. نتایج حاصل از بهینه‌سازی تابع هدف در جدول شماره ۳ آمده است.

$$\begin{aligned} & \text{Max } W_1E - W_2V \\ & \text{S.t } \sum_{i=1}^{20} x_i = 1 \end{aligned} \quad (19)$$

در مرحله‌ی بعد برای ترسیم مرز کارا از الگوریتم تخمین مجموعه‌ی غیر مرجح استفاده شد. برنامه‌ی نرم‌افزاری موردنیاز برای انجام این مرحله با استفاده از نرم‌افزار MATLAB2014 تهیه گردید.



شکل ۲. نمایش مرز کارا به روش NISE

جدول ۳. ترکیب‌های مختلف سرمایه‌گذاری و ریسک و بازده متناسب با هر مورد

X20	X19	X18	X17	X16	X15	X14	X13	X12	X11	X10	X9	X8	X7	X6	X5	X4	X3	X2	X1
0.01	0.02	۰.۰۶	0.07	*	۰.۰۷	*	۰.۰۹	*	*	۰.۰۴	*	*	۰.۰۵	۰.۱۹	۰.۱۸	*	۰.۱۱	*	۰.۱۱
0.05	0.01	۰.۰۵	۰.۰۵	۰.۰۵	۰.۰۵	*	۰.۰۵	*	*	۰.۱۸	*	*	۰.۰۵	۰.۱۸	۰.۰۵	*	۰.۰۵	*	۰.۱۸
0.04	0.03	0.1	0.09	*	۰.۰۶	*	۰.۰۹	*	*	۰.۲۵	*	*	۰.۰۵	۰.۰۵	*	*	۰.۰۸	*	۰.۱۶
0.04	0.03	0.12	0.09	*	۰.۰۶	*	۰.۰۹	*	*	۰.۰۵	*	*	۰.۰۴	۰.۰۵	۰.۰۶	*	۰.۱۹	*	۰.۱۸
0.04	0.03	0.18	0.14	*	۰.۰۵	*	۰.۱۲	*	*	۰.۰۹	*	*	۰.۰۳	۰.۰۴	۰.۰۸	*	۰.۰۸	*	۰.۱۲
0.04	0.04	0.21	0.09	*	۰.۰۴	*	۰.۰۸	*	*	۰.۰۸	*	*	۰.۰۳	۰.۰۴	۰.۰۷	*	۰.۰۵	*	۰.۲۳
0.04	0.02	0.27	0.17	*	۰.۰۳	*	۰.۱۳	*	*	۰.۱۲	*	*	۰.۰۲	۰.۰۲	۰.۰۸	*	۰.۰۴	*	۰.۰۶
0.04	0.02	0.01	0.17	*	۰.۰۲	*	۰.۱۲	*	*	۰.۰۸	*	*	۰.۰۱	۰.۰۲	۰.۰۲	*	۰.۰۳	*	۰.۴۶

0.03	0.02	0.39	0.15	*	۰,۰۱	*	۰,۰۹	*	*	۰,۱۶	*	*	۰,۰۱	۰,۰۱	۰,۰۷	*	۰,۰۲	*	۰,۰۴
0.03	0.04	0.49	0.05	*	۰,۰۲	*	۰,۰۴	*	*	۰,۰۸	*	*	۰,۰۲	۰,۰۲	۰,۰۴	*	۰,۰۳	*	۰,۰۴
0.02	0.02	0.49	0.11	*	۰,۰۱	*	۰,۰۶	*	*	۰,۱۷	*	*	۰,۰۱	۰,۰۱	۰,۰۵	*	۰,۰۱	*	۰,۰۴
0.02	0.02	0.49	0.1	*	۰,۰۱	*	۰,۰۶	*	*	۰,۱۷	*	*	۰,۰۱	۰,۰۱	۰,۰۵	*	۰,۰۵	*	۰,۰۱
0.01	0.01	0.65	0.04	*	*	*	۰,۰۲	*	۰,۰۱	۰,۰۲	*	*	*	*	۰,۰۳	*	۰,۰۲	*	*
0.01	0.01	0.61	0.05	*	۰,۰۱	*	۰,۰۳	*	*	۰,۰۲	*	*	۰,۰۱	۰,۰۳	۰,۰۳	*	۰,۰۱	*	*
0	0	0.75	0.01	*	*	*	۰,۰۱	*	۰,۰۱	۰,۰۲	*	*	*	*	۰,۰۱	*	*	*	۰,۰۱
0	0	0.83	0.01	*	*	*	۰,۰۱	*	*	۰,۱۳	*	*	*	*	۰,۰۱	*	*	*	۰,۰۱
*	*	1	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*

در مرحله‌ی سوم، مجموعه‌ی توافقی مشخص می‌گردد. به عبارت بهتر در این مرحله مرزهای مجموعه‌ی توافقی یعنی  $L_1$  و  $L_\infty$  تعیین می‌شوند. به این منظور مقادیر مربوط به ریسک و بازده پرتفوی‌های حاصل را نرمالایز نموده و شاخص‌های سودآوری و ایمنی محاسبه شد. نتایج این مرحله در جدول ۴ آمده است.

جدول ۴. اطلاعات مربوط به شاخص‌های سودآوری و ایمنی

TETA1+TETA2	TETA2	TETA1	ریسک	بازده	ردیف
1.00	1.00	0.00	0.09	0.00	1
0.89	0.85	0.04	0.11	0.05	2
0.90	0.82	0.08	0.12	0.10	3
0.87	0.78	0.09	0.12	0.11	4
0.83	0.69	0.14	0.14	0.17	5
0.80	0.65	0.15	0.14	0.18	6
0.71	0.55	0.16	0.16	0.19	7
0.71	0.51	0.20	0.16	0.24	8
0.69	0.49	0.20	0.17	0.23	9
0.65	0.42	0.23	0.18	0.27	10
0.77	0.41	0.35	0.18	0.42	11
(L-INF) 0.82	0.41	0.41	0.18	0.49	12
0.94	0.37	0.57	0.19	0.68	13
0.80	0.22	0.58	0.21	0.69	14
(L1) 1.03	0.20	0.84	0.21	1.00	15



TETA1+TETA2	TETA2	TETA1	ریسک	بازده	ردیف
0.96	0.10	0.86	0.22	1.02	16
1.00	0.00	1.00	0.24	1.19	17

حداکثر مقدار مربوط به مجموع شاخص‌های سودآوری و ایمنی به ردیف ۱۵ در جدول ۴ تعلق دارد که نشان‌دهنده‌ی پرتفویی با بازده ۱۰۰ درصد و ریسکی برابر با ۲۱ درصد می‌باشد. بنابراین مختصات نقطه‌ی  $L_1$  به‌عنوان یکی از مرزهای مجموعه‌ی توافقی مشخص گردید. بنا بر تعریف  $L_{\infty}$  که مرز دیگر مجموعه‌ی توافقی می‌باشد؛ نقطه‌ای است که در آن، شاخص‌های سودآوری و ایمنی مقدار تقریباً برابری خواهند داشت. با انجام یک محاسبه‌ی ساده، نقطه‌ی  $L_{\infty}$  با مختصاتی برابر با ۴۹ درصد برای بازده و ۱۸ برای ریسک به دست آمد. در ادامه برای اجرای روش حداکثر سازی مطلوبیت به طریق مستقیم با توجه به طیف توابع مطلوبیت منتخب در جدول ۱ برنامه‌ای با استفاده از نرم‌افزار MATLAB2014 تهیه گردید. نتایج حاصل در جدول ۵ آمده است.

جدول ۵. برای اجرای روش حداکثر سازی مطلوبیت به طریق مستقیم

توابع مطلوبیت	سه‌م ۱	سه‌م ۲	سه‌م ۳	سه‌م ۴	سه‌م ۵	سه‌م ۶	سه‌م ۷	سه‌م ۸	سه‌م ۹	سه‌م ۱۰
$\ln(w)$	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰,۲۴
$\ln(w-0.5)$	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	0.33
$-e^{-2w}$	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	0.38
$-e^{-5w}$	0	۰	۰	۰	۰	0.02	۰	۰	۰	0.026
$(w - 0.8)^{0.1}$	۰	۰	۰	0.1	0.1	0.05	0.01	0.05	۰	۰
$(w - 0.5)^{0.2}$	۰	۰	۰	۰	0.03	۰	0.02	۰	۰	0.21
$\ln(0.7 + \ln(w+0.5))$	۰	۰	۰	0.05	0.05	۰	۰	۰	0.16	۰,۲
$\ln(1.5 + \ln(w-0.3))$	0	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	0.1	0.4

ادامه جدول ۵

توابع مطلوبیت	سهام ۱۱	سهام ۱۲	سهام ۱۳	سهام ۱۴	سهام ۱۵	سهام ۱۶	سهام ۱۷	سهام ۱۸	سهام ۱۹	سهام ۲۰
$\ln(w)$	۰	۰,۳۴	۰	۰,۳	۰	۰	۰	0.12	۰	۰
$\ln(w-0.5)$	۰	۰	0.02	۰	۰	۰	0.1	0.49	۰	0.06
$-e^{-2w}$	۰	۰	۰	۰	۰	۰	0.1	0.33	۰	0.19
$-e^{-5w}$	۰	۰	۰,۲۳	۰	۰	0.24	0.2	0	۰	0.28
$(w-0.8)^{0.4}$	0.09	۰	0.06	۰	0.01	۰	0.1	0.39	0.02	۰,۰۲
$(w-0.5)^{0.2}$	۰	۰	0.02	۰	۰	۰	0.04	0.65	0.01	0.01
$\ln(0.7+w)$	۰	۰	۰	0.18	۰	۰	0.36	۰	۰	۰
$\ln(w+0.5)$	۰	۰	۰	۰	0.11	۰	0.32	0.07	۰	۰
$\ln(1.5+w)$	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
$\ln(w-0.3)$	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰

نتایج اجرای مدل‌های ذکر شده در بازار سرمایه‌ی ایران نشان داد که پرتفوی حاصل از به کارگیری مدل برنامه‌ریزی توافقی، بازده ای در دامنه‌ی ۴۹ درصد الی ۱۰۰ درصد دارند. ریسک پرتفوی‌های مذکور در دامنه‌ی ۱۸ تا ۲۱ درصد قرار می‌گیرد. خلاصه‌ی نتایج حاصل از اجرای روش مدل حداکثر سازی مطلوبیت به طریق مستقیم و نتایج مربوط به مجموعه‌ی توافقی در جدول ۶ آمده است.

جدول ۶. مقایسه‌ی نتایج حاصل از حداکثر سازی توابع مطلوبیت

و مرزهای مجموعه‌ی توافقی

پرتفوی‌های حاصل در مجموعه‌ی توافقی			پرتفوی‌های حاصل از روش حداکثر سازی مطلوبیت به طریق مستقیم		
بازده	ریسک	بازده	ریسک	بازده	توابع مطلوبیت
$L_1$	۱	۰,۲۱	۱,۲۵	۰,۳۷	$\ln(w)$
$L_\infty$	0.49	0.18	۱,۱۸	۰,۳۱	$\ln(w-0.5)$
			۱,۱۵	۰,۲۹	$-e^{-2w}$

پرتفوی‌های حاصل از روش حداکثر سازی مطلوبیت به طریق مستقیم			پرتفوی‌های حاصل در مجموعه‌ی توافقی		
توابع مطلوبیت	ریسک	بازده	ریسک	بازده	بازده
$-e^{-5w}$	۰,۲۷	۱,۰۹			
$(w - 0.8)^{0.1}$	۰,۲۵	۱,۰۶			
$(w - 0.5)^{0.2}$	۰,۱۹	۰,۹۸			
$\ln(0.7 + \ln(w + 0.5))$	۰,۱۲	۰,۶۵			
$\ln(1.5 + \ln(w - 0.3))$	۰,۱	۰,۴۶			

با نرمالایز نمودن شاخص ریسک و تبدیل آن به شاخص ایمنی، مجموع شاخص سودآوری و ایمنی در این نقطه برابر با ۱,۰۱ می‌باشد. مجموع شاخص‌های ایمنی و سودآوری به ازای توابع مطلوبیت منتخب در جدول ۷ آمده است.

جدول ۷. بررسی تفاضل قدر مطلق توابع مطلوبیت منتخب با مجموعه توافقی بر اساس شاخص‌های سودآوری و ایمنی

توابع مطلوبیت	مجموع شاخص ایمنی و سودآوری	قدر مطلق تفاضل مجموع شاخص‌ها نسبت به مجموعه توافقی
$\ln(w)$	1	0.03
$\ln(w-0.5)$	0.91	0.12
$-e^{-2w}$	0.93	0.1
$-e^{-5w}$	0.9	0.13
$(w - 0.8)^{0.1}$	0.95	0.08
$(w - 0.5)^{0.2}$	1.01	0.02
$\ln(0.7 + \ln(w+0.5))$	0.76	0.27
$\ln(1.5 + \ln(w-0.3))$	1	0.03

### نتیجه‌گیری و بحث

نتایج حاصل از تحقیق نشان می‌دهد، استفاده از مدل برنامه‌ریزی توافقی منجر به انتخاب‌های بهینه‌ای با ریسک کمتر می‌گردد بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که پرتفوی‌های حاصل از به کارگیری مدل برنامه‌ریزی توافقی، پرتفوی‌های مناسب‌تری برای سرمایه‌گذاران می‌باشند.

پرتفوی‌های منتخب به روش حداکثر سازی مطلوبیت به طریق مستقیم، به ازای توابع مطلوبیت  $U=(w - 0.8)^{0.1}$  دارای ریسکی معادل ۲۵ درصد و بازدهی برابر با ۱۰۶ درصد می‌باشد. با توجه به مجموع شاخص‌های سودآوری و ایمنی به ازای این تابع مطلوبیت ۰,۹۵ می‌باشد و قدر مطلق تفاضل مجموع به دست آمده از مجموعه توافقی برابر با ۰,۰۸ می‌باشد.

به ازای تابع مطلوبیت  $U=(w - 0.5)^{0.2}$  ریسک محاسبه شده ۱۹ و بازده ۹۸ درصد می‌باشد؛ و قدر مطلق تفاضل مجموع به دست آمده از مجموعه توافقی برابر با ۰,۰۲ می‌باشد. که کمترین میزان اختلاف را دارد.

پرتفوی‌های حاصل از توابع  $U = \ln(0.7 + \ln(w+0.5))$  بیشترین اختلاف را از پرتفوی‌های انتخابی با روش برنامه‌ریزی توافقی دارا می‌باشند. این میزان اختلاف ۰,۲۷۰ می‌باشد.

از آنجایی که مجموعه‌ی توافقی به عنوان انتخاب‌های سرمایه‌گذاران استاندارد در نظر گرفته شده است، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که دو تابع مذکور یعنی  $U=(w - 0.8)^{0.1}$  و

$U = (w - 0.5)^{0.2}$  در بین توابع منتخب را می‌توان به‌عنوان توابع مطلوبیت سرمایه‌گذار استاندارد، در نظر گرفت و به ازای این توابع، فرضیه پژوهش مورد تأیید قرار گرفت. با توجه به اینکه توابع مطلوبیت منتخب در این پژوهش مطابق با مطالعه کرول (۱۹۸۴) و آلمین (۲۰۰۱) برحسب درجه ریسک‌گریزی از بالا به پایین مرتب‌شده‌اند انتظار می‌رفت به ازای توابع مطلوبیت منتخب ردیف‌های انتهایی پرتفوی‌های حاصل دارای بازده و ریسک کمتری باشند. نتایج پژوهش حاضر نیز همان‌طور که در جدول شماره ۶ نشان داده شده است، مؤید همین موضوع می‌باشد.

با توجه به اینکه توابع مطلوبیتی که ریسک و بازده متناظر با آن‌ها در داخل مجموعه‌ی توافقی قرار می‌گیرند تر نظر درجه ریسک‌گریزی در طیف میانه قرار دارند می‌توان چنین نتیجه‌گیری نمود که مجموعه‌ی توافقی نیز تا حد زیادی نشان‌دهنده‌ی انتخاب‌های سرمایه‌گذاران با درجه ریسک‌گریزی متوسط می‌باشد.

پیشنهاد‌های پژوهش در دو محور کاربردی و راهبردی به شرح زیر ارائه می‌گردد: بر اساس نتایج حاصل از پژوهش حاضر، با توجه به اینکه توابع مطلوبیت دارای اشکال بسیار متنوع می‌باشند پیشنهاد می‌شود مطالعه‌ی با انتخاب طیف‌های متعددی از توابع مطلوبیت مجدداً انجام شود.

با توجه به این نکته که انحرافات پایین‌تر از میانگین به‌عنوان انحرافات نامطلوب مطرح می‌باشد و انحرافات بالاتر از میانگین نه‌تنها نامطلوب نمی‌باشند، بلکه خواسته‌ی کلیه‌ی سرمایه‌گذاران نیز هستند. استفاده از معیار نیم‌واریانس که فقط انحرافات پایین‌تر از میانگین را به‌عنوان معیار ریسک در نظر می‌گیرد؛ معیار واقعی‌تری برای سنجش ریسک می‌باشد و در نهایت منجر به اخذ تصمیمات صحیح‌تری می‌گردد.

از بعد راهبردی توجه به هزینه‌های معاملاتی به‌عنوان یکی از عوامل مهم در مباحث انتخاب پرتفوی بهینه ضروری می‌باشد. در این مدل هزینه‌های معاملاتی در نظر گرفته نشده است، قطعاً وارد شدن هزینه‌های معاملاتی در تابع هدف مدل، تأثیر زیادی در انتخاب‌های بهینه‌ی سرمایه‌گذاران خواهد داشت.

ترکیب منطقی فازی با مدل برنامه‌ریزی توافقی امکان بیان پارامترهای نادقیق مدل را به سرمایه‌گذار خواهد داد. برای فازی کردن مدل برنامه‌ریزی توافقی می‌توان متریک‌ها و توابع مربوط به بهترین و بدترین حالت را به‌طور فازی در نظر گرفت.

## منابع

- Amilon, Henrik.(2001). Comparison of mean-variance and exact utility maximization in stock portfolio selection. Lund University.
- Amiri,M.and Mahboob Ghodsi,M(2015). «Fuzzy Linear Programming Model Optimum Portfolio Selection Problem». Quarterly Financial Engineering and Securities Management journal. Volume 6, No 23, summer 2015, Page 105-118 [In Persian]
- Azar, A.and Ramouz,N.Atefatdoost,A.(2014). « The Application of Non-inferior Set Estimation (NISE) Method in Optimum Portfolio Selection (Case Study: Tehran Security Exchange). *Financial Research Journal* 1, Volume 14, Issue 2, Winter 2014, Page 1-14 [In Persian]
- Ballestero, E. (1997). Utility functions: A compromise programming approach to specification and optimization. *Journal of Multi - Criteria Decision Analysis*, 6(1), 11-16.
- Ballestero, E. and D. Plà-Santamaría. (2003)."Portfolio selection on the Madrid exchange: A compromise programming model." *International Transactions in Operational Research* 10.1: 33-51.
- Ballestero, Enrique and Romero, Carlos. (1996). "Compromise programming Applied to the portfolio Problem", *Journal of the Operational Research Society*. Vol. 41, pp. 1378-1386.
- Ballestero, Enrique, and Carlos Romero. (1991)."A theorem connecting utility function optimization and compromise programming." *Operations Research Letters* 10.7: 421-427.
- Ballestero, Enrique, and Carlos Romero.(1993). "Weighting in compromise programming: A theorem on shadow prices." *Operations Research Letters*13.5:325-329.
- Ballestero, Enrique, and Carlos Romero.(1994). "Utility optimization when the utility function is virtually unknown." *Theory and Decision* 37.2: 233-243.
- Ballestero, Enrique, and David Pla-Santamaria.(2004)."Selecting portfolios for mutual funds." *Omega* 32.5: 385-394.
- Ballestero, Enrique.. (1997)."Selecting the CP metric: A risk aversion approach"*European Journal of Operational Research* 97.3: 593-596.
- Charnes, A. & W. W. Cooper (1961). Management Models and Industrial Applications of Linear Programming. John Wiley & Sons, Inc, New York.
- Chen, Liang-Hsuan, and Lindsay Huang. (2009). "Portfolio optimization of equity mutual funds with fuzzy return rates and risks.." *Expert Systems with Applications* 36.2: 3720-3727.
- Cohon, J. L. Church, R. L. & Sheer, D. P. (1979). Generating multiobjective trade - offs: An algorithm for bicriterion problems. *Water Resources Research*, 15(5), 1001-1010.

- Cohon, J. L. Church, R. L. & Sheer, D. P. (1979). Generating multiobjective trade-offs: An algorithm for bicriterion problems. *Water Resources Research*, 15(5), 1001-1010.
- Costa, F. P. & Rehman, T. (2005). Unravelling the rationale of overgrazing and stocking rates in the beef production systems of Central Brazil using a bi-criteria compromise programming model. *Agricultural Systems*, 83(3), 277-295.
- Estrada, Javier. (2004). "Mean-Semivariance Behaviour: An Alternative Behavioural Model.." *Journal of Emerging Market Finance* 3.3: 231-248.
- Hanna, Sherman D. and Peng Chen. (1997). "Subjective and objective risk tolerance: Implications for optimal portfolios.." *Financial Counseling and Planning*.
- Jehle, Geoffrey Alexander. (2011). *Advanced microeconomic theory*. Pearson Education India.
- Jones, Charles P. (2000). "Investment: Analysis and Management, New York: John Willey and Sons."
- Kallberg, J. G. & Ziemba, W. T. (1983). Comparison of alternative utility functions in portfolio selection problems. *Management Science*, 29(11), 1257-1276.
- Kroll, Y. Levy, H. & Markowitz, H. M. (1984). Mean - variance versus direct utility maximization. *The Journal of Finance*, 39(1), 47-61.
- LeRoy, S. F. & Werner, J. (2014). *Principles of financial economics*. Cambridge University Press.
- LeRoy, Stephen F. and Jan Werner. (2014). *Principles of financial economics*. Cambridge University Press.
- Markowitz, Harry. (1952). "Portfolio selection." *The journal of finance* 7.1: 77-91.
- Prodanovic, Predrag. (2001). "Fuzzy set ranking methods and multiple expert decision making". Department of Civil and Environmental Engineering, The University of Western Ontario.
- Raei, R. and Pouyanfar, A. «Advanced Investment Management (2014). samt press. [In Persian]
- Van Praag, Bernard MS, and Adam S. Booiij. (2003). "Risk aversion and the subjective time discount rate: A joint approach."
- Yu, Po-Lung. (1973). "A class of solutions for group decision problems." *Management Science* 19.8: 936-946.