«مجله مجتمع آموزش عالی قم»
سال اول ـ شماره چهارم ـ زمستان ۷۸
ص ۱۶۳ ـ ۱۷۷

کاربرد نظریهٔ بازی‌ها در علوم انسانی

علی عرب *

نظریه بازی‌ها درباره موقعیت‌های رقابتی بحث می‌کند که در آن دو یا چند رقیب هوشمند، در شرایط منافع متضاد، به رقابت می‌پردازند. در این رقابت بازیگران تعدادی (محدود یا نامحدود) انتخاب پیش رو دارند و هر بازیگر سعی دارد دریافت خود را بهینه سازد.

اگر چه نظریه بازی‌ها اساساً یک نظریه ریاضی است اما در این‌جا بیش‌تر از دیدگاه علوم انسانی و با گردآوری مثال‌های اقتصادی، تجاری، سیاسی و نظامی به آن می‌پردازیم.

در پایان به معادل بردن مسئله بازی‌ها و مسئله برنامه‌ریزی خطی پرداخته و مثالی را در این مورد، بیان می‌کنیم.

مقدمه

تصمیم‌گیری مهم‌ترین وظیفه مدیران است و انتخاب بهترین تصمیم از بین مجموعه تصمیم‌های ممکن، به خصوص وقتی‌که رقیبان آماده‌ای حضور داشته باشند، امری بس

---

*. عضو هیأت علمی آموزش عالی قم و دانشجوی دوره دانشوری.

حساس و سرنوشت‌ساز است. مقاله حاضر به بررسی نظریه بازی‌ها می‌پردازد که طبق آن باید تصمیم بهتر و آن هم در شرایط منافع متضاد، در مقابل رقیبان هوشمند اتخاذ گردد.

در تصمیم‌گیری برای حل یک مسئله اگر تصمیم گیرندگان بیش از یک نفر و دارای منافع متعارض باشند و با یکدیگر به رقابت بپردازند، مطالعه آن به نظریه بازیها مربوط می‌شود، که اساساً یک نظریه ریاضی است و در زمینه‌های اقتصادی، اجتماعی، سیاسی و نظامی مانند تاکتیک‌های جنگی ارتش‌های متخاصم، کاربرد وسیعی دارد و ما در این‌جا بیش‌تر از این دیدگاه به مسئله می‌پردازیم.

این نظریه اولین بار در سال ۱۹۲۸ توسط «جان فون لویمان» [1] پایه‌گذاری شده و بعد توسط خود او و «مورگن اشترن» [2] بسط و توسعه یافته است. بسیاری از زمینه‌های رقابتی که در عمل پیش می‌آیند بسیار پیچیده‌اند علاوه بر این که تحلیل آن‌ها به عوامل بسیاری بستگی دارد، مدل‌سازی آن‌ها نیز بسیار مشکل است.

بهمین علت، با حذف عوامل نه چندان مهم، برای مطالعه مدل ساده‌تری ساخته می‌شود که این مدل ساده شده را یک بازی می‌نامند.

مفاهیم کلیدی این نظریه عبارت‌اند از:

۱ـ بازی: فعالیتی است شامل مجموعه‌ای از قواعد و قراردادهای معین که بین دو یا چند نفر انجام می‌گیرد هرکدام پی‌آمدی (مثبت، منفی یا صفر) به همراه دارد، این مقادیر در هر بازی نه فقط به عمل یک بازیگر که به انتخاب دیگر بازیگران نیز بستگی دارد.

۲ـ بازیگر: [3] هر شرکت کننده در بازی را یک بازیگر می‌نامند که ممکن است تعداد آن‌ها دو نفر یا بیش‌تر باشد. فرض بر این است که همگی هوشمندانه بازی می‌کنند. بازی‌ها بصورت‌های دسته جمعی و یا غیر دسته جمعی صورت می‌گیرد که در صورت اول بازیگران می‌توانند با ائتلاف خود، تعداد بازی‌گران را کاهش دهند، مانند ائتلاف احزاب در انتخابات هم چنین بازیگران باید قواعد بازی را رعایت کنند.

نکته دیگر این که هر بازی‌گر تعدادی (محدود یا نامحدود) پیش رو دارد که به بیان دیگر استراتژی‌های بازیگران در طول بازی است و مجموعه این حرکت‌ها برای بازی‌گران شناخته شده است.

۳ـ استراتژی: [4] قاعده از پیش تعیین شده‌ای است که مشخص می‌کند هر بازی‌گر در مقابل حرکت دیگری چه واکنشی باید داشته باشد.[5] بازیگران استراتژی‌های خود را به

طور همزمان و بدون اطلاع از استراتژی طرف مقابل، انتخاب می‌کنند .

استراتژی آمیخته: ترکیبی از انتخاب‌های ممکن برای یک بازیگر است که بر اساس نوعی توزیع احتمال بین انتخاب‌ها صورت می‌گیرد و در طول بازی اعمال می‌شود؛ به بیان ریاضی، یک استراتژی آمیخته با M انتخاب به صورت بردار (x_m ... و $x_۲$ و $x=_۱$ x) است به طوری‌که $\sum x_i = ۱$ و $\chi_i \geq ۰$ و $i = ۱$ و ۲ ... m .

در یک استراتژی آمیخته اگر تنها یکی از xiها برابر ۱ بوده و بقیه صفر باشند آن را استراتژی خالص[۶] می‌نامند، در یک بازی دلخواه مثلاً ($\frac{۴}{۵}$ و ۰ و $\frac{۱}{۵}$) یک استراتژی آمیخته ولی (۰ ، ۰ ، ۱ ، ۰) یک استراتژی خالص می‌باشد.

بازی جمع صفر:[۷] در این نوع بازی کل مقداری که تعدادی از بازیگران به دست می‌آورند درست برابر مقداری است که بقیه بازیگران از دست می‌دهند. بعبارت دیگر، اگر در یک بازی n نفره V_iو $i= ۱ , ۲ , ... , ... , n$ مقدار برد هر بازیگر باشد خواهیم داشت: $\sum v_i = ۰$

بازی دو نفره جمع صفر:[۸] این نوع بازی‌ها که ساده‌ترین بازی‌ها است و ما در این بحث صرفاً به آن می‌پردازیم، فقط دو بازیگر در آن شرکت دارند و سود یکی درست برابر زیان دیگری می‌باشد. و آن‌چه که یک بازیگر به دست می‌آورد دقیقاً دیگری از دست می‌دهد. از این رو، تعداد انتخاب‌های دو بازیگر محدود است.

ماتریس پرداخت:[۹] انتخاب هر بازیگر پی‌آمدی (مثبت، منفی یا صفر) به همراه دارد؛ به ترتیب: اگر یک بازیگر که او را $P_۱$ می‌نامیم M انتخاب و بازیگر دیگر که او را بازیگر $P_۲$ می‌نامیم حق n انتخاب داشته باشد، چنان‌چه مقدار حاصل از انتخاب i، توسط بازیگر $P_۱$ ، $i = ۱, ۲, ..., m$ و در مقابل حرکت J از بازیگر $P_۲$ را $j = ۱, ۲, ..., n$ به a_{ij} نشان دهیم پس سطرهای ماتریس، انتخاب‌های $P_۱$ و ستون‌های، ماتریس انتخاب‌های $P_۲$ را نشان می‌دهند. معمولاً ماتریس پرداخت را بر حسب دریافت‌های بازیگری که در سمت راست ماتریس مشخص می‌شود تنظیم می‌نمایند و بازیگر دیگر در بالای ماتریس مشخص می‌شود. به این ترتیب یک ماتریس m×n به صورت زیر خواهیم داشت که آن را ماتریس بازی[۱۰] می‌نامند:

	استراتژی‌های P_2 / استراتژی‌های P_1	بازیگر P_2			
		۱	۲	.... j	.... n
	۱	a_{11}	a_{12}	.... aij	.... ain
	۲	a_{21}	a_{22}	.... a_2j	.... a_2n
بازیگر P_1	.				
	.				
	i	ai_1	ai_2	.... aij	.... ain
	.				
	.				
	m	am_1	am_2	.... amj	.... amn

این ماتریس را به صورت کلی $A=(aij)$ نشان می‌دهیم که در آن aij مقادیر حقیقی هستند؛ درایه‌های مثبت دریافت‌های P_1 و درایه‌های منفی پرداخت‌های P_1 را نشان می‌دهند و درایه‌های صفر یعنی پرداختی صورت نمی‌گیرد. بازیگران تمام مقادیر درایه‌ها و استراتژی‌های خود و بازیگر دیگر را می‌شناسند. P_1 سعی دارد که دریافت‌های خود را بیشینه کند و P_2 می‌کوشد تا در صورت پرداخت آن را کمینه نماید. بنابراین P_1 سعی دارد تا سطرهایی را انتخاب نماید که عناصر آن بیش‌تر از عناصر سطرهای دیگر باشد. در حالی‌که P_2 در جست و جوی ستونی با عناصر کم‌تر از ستون‌های دیگر است. ثابت می‌شود که اگر در چنین بازی‌هایی به هر یک از عناصر بازی عدد ثابتی اضافه کنیم در تحلیل بازی اثری ندارد و فقط به ارزش بازی همان مقدار افزوده می‌گردد. هم‌چنین ثابت می‌شود که بازی ماتریسی و مسئله برنامه‌ریزی خطی معادل هستند.[11]

قضیه اساسی بازی‌های ماتریسی: برای هر بازی ماتریسی استراتژی‌های بهینه بازیگران و مقدار V ارزش بازی وجود دارد.[12]

ماتریس بازی ممکن است از قبل تعریف شده و به طور استاندارد برای بازیگران

مشخص باشد، مانند ماتریس بازی شطرنج که در آن تعداد حرمت‌ها و امتیاز هر حرکت معین است. و یا ممکن است با توافق طرفین چنین ماتریسی قبل از بازی تعریف شود. در هر حال چون چنین ماتریسی برای بازی موجود است و حاوی همه اطلاعات بازی است، این بازی‌ها را بازی ماتریسی [۱۳] نیز می‌نامند.

در این‌جا با ذکر مثال‌هایی از بازی‌ها در زمینه مسائل اقتصادی، سیاسی و نظامی ماتریس این بازی‌ها را مشاهده می‌کنیم.

مثال ۱: در یک شهر دو مرکز تجاری وجود دارد، [۱۴] حدود ۷۰ ٪ جمعیت شهر نزدیک مرکز ۱ و ۳ ٪ بقیه نزدیک مرکز ۲ زندگی می‌کنند. دو بانک رقیب که یکی بزرگ و دیگری کوچک است برای باز کردن شعبه در این شهر برنامه‌ریزی می‌کنند آن‌ها برآورد کرده‌اند که اگر دو بانک در یک مرکز واقع شوند بانک بزرگ‌تر ۶۰ ٪ بازرگانی شهر را جذب می‌کند. از طرف دیگر اگر دو بانک در دو مرکز مختلف باشند بانک بزرگ‌تر ۸۰ ٪ بازرگانی مرکز خود و ۴۰ ٪ بازرگانی مرکز بانک کوچک‌تر را جذب می‌کند. ماتریس این بازی را تنظیم نمایید.

پاسخ: هر دو بانک بزرگ و کوچک می‌توانند در مرکز ۱ یا مرکز ۲ شعبه خود را باز کنند. بنابراین هر یک دو انتخاب پیش‌رو دارند که اگر در یک مرکز شعبه باز کنند دریافت‌های هر یک ۶۰ ٪ خواهد بود در صورتی‌که بانک بزرگ‌تر در مرکز و بانک کوچک‌تر در مرکز ۲ شعبه ایجاد نمایند، بانک بزرگ‌تر ۸۰ ٪ از بازرگانی مرکز ۱ را با ۷۰ ٪ جمعیت و ۴۰ ٪ از بازرگانی مرکز ۲ را با ۳۰ ٪ جمعیت جذب می‌کند، بنابراین بانک بزرگ‌تر برابر (۳۰ ٪) ۴۰ + (۷۰ ٪) ۸۰ یعنی ۶۸ ٪ بازرگانی شهر را به دست می‌آورد.

به همین ترتیب اگر بانک بزرگ‌تر در مرکز ۲ و بانک کوچک‌تر در مرکز ۱ واقع شود بانک بزرگ‌تر ۸۰ ٪ از بازرگانی مرکز ۲ را با ۳۰ ٪ جمعیت و ۴۰ ٪ از بازرگانی مرکز ۱ با ۷۰ ٪ جمعیت و در نتیجه برابر (۷۰ ٪) ۴۰ + (۳۰ ٪) ۸۰ یعنی ۵۲ ٪ بازرگانی شهر را به دست خواهد آورد. بنابراین ماتریس این بازی به صورت زیر در می‌آید:

		بانک کوچک	
		مرکز ۱	مرکز ۲
بانک بزرگ	مرکز ۱	۶۰	۶۸
P_1	مرکز ۲	۵۲	۶۰

مثال ۲: دو حزب سیاسی رقیب P_1 و P_2 از نظر اعضا و شهر در شرایط یکسان می‌باشند. هر دو حزب تصمیم دارند یک هفته قبل از انتخابات تبلیغات خود را با استفاده از آگهی های تبلیغاتی در روزنامه، رادیو و تلویزیون برای جلب آرا شروع نمایند. حزب P_1 با توجه به وضعیت سیاسی جامعه، ماتریس زیر را با بررسی‌ها و نظرسنجی‌ها تهیه کرده است. درایه‌های ماتریس نشان دهنده جذب یا از دست دادن آرا از حزب رقیب با استفاده از سه روش تبلیغی فوق است. حال هر یک از حزب‌ها چگونه می‌تواند بهترین روش را انتخاب کند؟ جذب آرای جدید به وسیله p_1 به معنی از دست دادن آرا برای حزب P_2 است.

		حزب P_2: ۱ روزنامه	۲ رادیو	۳ تلویزیون
حزب P1	۱ روزنامه	۴۰	۵۰	۷۰-
	۲ رادیو	۱۰	۲۵	۱۰-
	۳ تلویزیون	۱۰۰	۳۰	۶۰

در این بازی مثلاً اگر P_1 در روزنامه و P_2 در تلویزیون تبلیغ کند در این صورت ۷۰ رأی از P_1 به P_2 می‌پیوندد و یا اگر P_1 به وسیله رادیو و P_2 به وسیله تلویزیون تبلیغ نماید ۱۰ نفر از اعضای P_1 به P_2 می‌پیوندند.

مثال ۳: بازیگر P_1 دو انبار مهمات دارد که ارزش نظامی یکی از آن‌ها دو برابر دیگری است و P_2 مهاجمی است که می‌تواند تنها به یک انبار بی‌دفاع حمله کند و آن را نابود سازد.[15]

P_1 نیز از پیش آمدن حمله با خبر است، حال اگر P_1 در هر حال فقط توانایی دفاع از یکی از انبارها را داشته باشد ماتریس این بازی را بنویسید.

پاسخ: ماتریس این بازی با استفاده از مفروضات بالا چنین است:

		P_2	
		۱ حمله به انبار کوچک	۲ حمله به انبار بزرگ
P_1	۱ دفاع از انبار کوچک	۰ هر دو انبار سالم می‌مانند	-۲ انبار بزرگ نابود می‌شود
	۲ دفاع از انبار بزرگ	-۱ انبار کوچک نابود می‌شود	۰ هر دو انبار سالم می‌مانند

حال که با سه مثال تجاری، سیاسی نظامی تا حدودی با روش ساختی ماتریس بازی آشنا شده‌ایم به حل مسئله می‌پردازیم.

حل بازی: منظور از حل بازی به دست آوردن جواب بهینه[16] مسئله است؛ باید معلوم شود که هر بازیگر چه استراتژی را در طول بازی در پیش گیرد تا دریافت او را بیشینه و یا پرداختش را کمینه نماید. چنین استراتژی را استراتژی بهینه بازیگران می‌گویند که ممکن است به صورت استراتژی خالص یا استراتژی آمیخته باشد.

در ماتریس $A=(aij)$ اگر P_1 حرکت شماره i (سطر i ام) را انتخاب کند m ۰ ۰ ۰ ، ۲ ، ۱ =i بازیگر P_2 با انتخاب حرکت شماره J (n۰۰۰ و ۲ و ۱=J) طوری به او پاسخ می‌دهد که پرداخت aij به کمینه برمی‌گردد. بنابراین لازم است P_1 از هر سطر i ام کم‌ترین aij یعنی min aij را تعیین نموده و از بین آن‌ها که مقابل هر سطر ماتریس نوشته می‌شود بزرگ‌ترین این اعداد یعنی maxmin aij بیشینه کم‌ترین دریافت P_1 را تضمین خواهد کرد.

با این کار پی‌آمد بازی برای P_1 در هر بار- صرف‌نظر از اینکه P_2 چه حرکتی انجام دهد کم‌تر از این مقدار که آن را Max-Min می‌نامیم، نخواهد بود.

با استدلالی مشابه برای P_2 که علاقه‌مند به پرداخت کمینه است باید هر حرکت خود را بر اساس بیش‌ترین مقدار هر ستون قرار دهد. بنابراین باید از هر ستون بیش‌ترین مقدار aij یعنی max aij را که در پایین هر ستون نوشته می‌شود تعیین و از بین آن‌ها کمینه را مشخص کرد. بنابراین Min max aij کم‌ترین پرداختی را از بین بیش‌تر پرداخت‌ها او را تضمین خواهد کرد.

مقدار Max min aij را ارزش پایینی بازی و مقدار Min maxaij ارزش بالایی

بازی می‌نامند و همواره داریم

$\max\min a_{ij} \le \min\max a_{ij}$ و اگر این دو مقدار با هم مساوی باشند می‌گوییم بازی دارای نقطه زینی [۱۷] است. و این مقدار مشترک را ارزش بازی[۱۸] V می‌نامیم. در این حالت i استراتژی بهینه P_1 و J و استراتژی بهینه P_2 خواهد بود که استراتژی‌های خالص می‌باشند و آن را به صورت‌های (۰ ... ۰ , ۱ ,... ۰ , ۰) = i با عنصر ۱ در مؤلفه i ام و (۰ ... ۰ , ۱ ,... ۰ , ۰) =J با عنصر ۱ در مؤلفه J ام نشان می‌دهیم و محل تقاطع i و J ارزش بازی را تعیین می‌کند. ممکن است بازی دارای بیش از یک نقطه زینی باشد.

مثال ۴: نبرد دریای بیزمارک در جنگ جهانی دوم می‌تواند مثال مناسب برای بازی با نقطه زینی باشد.[۱۹] در مراحل بحرانی جنگ بر سر گینه جدید، گزارش‌های اطلاعاتی بیان می‌کردند که ژاپنی‌ها در حال اعزام ارتش و تجهیزات از بند رایال در شرق بریتانیا به طرف شهر لائه که در غرب بریتانیای جدید قرار دارد، می‌باشند. این حرکت می‌توانست از شمال بریتانیای جدید، جایی که می‌توان گفت به طور حتم از لحاظ دید و شرایط جوی در وضع نامطلوبی قرار داشت، صورت پذیرد و یا از جنوب جزیره که هوا صاف بود انجام شود. این سفر در هر دو صورت سه روز به طول می‌انجامید. ژنرال کنی از ارتش متفقین این حق انتخاب را داشت که اکثر هواپیماهای شناسایی خود را بر روی یکی از دو مسیر متمرکز و به محض رؤیت ستون نظامی، دشمن را قبل از رسیدن به شهر لائه بمباران کند. افراد ژنرال کنی از نظر تعداد روزهای بمباران، نتایج زیر را برای انتخاب‌های مختلف برآورد نمودند:

استراتژی ژنرال کنی	استراتژی‌های ژاپنی‌ها: ۱ مسیر شمالی	استراتژی‌های ژاپنی‌ها: ۲ مسیر جنوبی	کمینه سطر
			Max - Min ۲
۱ مسیر شمالی	۲	۲	۱
۲ مسیر جنوبی	۱	۳	
بیشینه ستون	۲	۳	
	Min - Max		

ماتریس این بازی ۲×۲ است که دارای نقطه زینی است. و داریم ۲ = Max-Min=Min-MAX. بنابراین استراتژی‌های بهینه بازیگران به صورت خالص (۰ و ۱) و ارزش بازی ۲ = V است؛ یعنی هر دو نماینده باید مسیر شمالی را انتخاب

می‌کردند. چنان‌که در عمل هم همینطور شد و هر دو فرمانده مسیر شمالی را انتخاب کردند.

مثال ۵: ماتریس ۳×۳ زیر مربوط به بازی است. استراتژی بهینه بازیگران و ارزش بازی را تعیین نمایید.

$$\begin{vmatrix} ۳ & ۵ & ۶ \\ ۲ & -۱ & ۳ \\ ۰ & ۷ & ۴ \end{vmatrix}$$

پاسخ:

$$\begin{array}{cccc|c} & & & & \text{کمترین سطر} \\ & \left| \begin{matrix} ۳ \\ ۲ \\ ۰ \end{matrix} \right. & \begin{matrix} ۵ \\ -۱ \\ ۷ \end{matrix} & \left. \begin{matrix} ۶ \\ ۳ \\ ۴ \end{matrix} \right| & \begin{matrix} ۳ \rightarrow \text{Max - Min} \\ -۱ \\ ۰ \end{matrix} \\ \text{بیشینه ستون} & ۳ & ۷ & ۴ & \end{array}$$

$$\downarrow$$

Min - Max

باز دارای نقطه زینی است و داریم

Max - Min = Min - Max = ۳

بنابراین ارزش بازی برابر ۳ = V است و استراتژی بهینه بازیگران به صورت استراتژی خالص (۰ , ۰ , ۱) برای هر دو بازیگر است؛ یعنی بازیگران باید سطر و ستون اول را انتخاب نمایند.

بازی بدون نقطه زینی

همه بازی‌ها دارای نقطه زینی نیستند بنابراین راه‌حل بالا در همه بازی‌ها کار بر ندارد در نتیجه باید در این گونه بازی‌ها به دنبال راه حل دیگری بود.

یک راه‌حل این است که ماتریس اصلی را تا حد امکان طبق قواعد معینی با حذف سطرها وستون‌های آن کاهش داد تا در انتها یک ماتریس ۲×۲ و یا m×۲ و یا ۲×n از آن باقی بماند. چنان چه بازی نقطه زینی نداشته باشد در این صورت هنگام مراحل کاهش ماتریس نقطه زینی برای ماتریس کاهش یافته پیدا شود واقعی نبوده و نباید به آن توجه

نمود.

اکنون قواعد کاهش یک ماتریس را بیان می‌کنیم که به قاعده استراتژی مغلوب [۲۰] نیز موسوم است. به طور کلی قواعد استراتژی مغلوب از این مفهوم ساده نتیجه می‌شود که در یک بازی تا وقتی‌که یک استراتژی به طور واضح نسبت به استراتژی‌های دیگر از نظر دریافت برتری داشته باشد آن را انتخاب نموده و از استراتژیهای دیگر که ما را از نظر دریافت در وضعیت نامطلوب‌تری قرار می‌دهد صرف‌نظر می‌کنیم.

۱) اگر عناصر سطری از ماتریس بازی به طور متناظر از عناصر سطر دیگر l از ماتریس بیش‌تر نباشد سطر i را می‌توان مغلوب سطر l دانسته و آن را حذف نمود.

۲) اگر عناصر ستون K از ماتریس بازی به طور متناظر از عناصر ستون L از ماتریس کم‌تر نباشد ستون K را می‌توان در مقابل ستون L حذف نمود.

۳) قاعده کاهش سطری و ستونی ماتریس بازی به طور میانگین نیز برقرار است؛ به این معنی که اگر عناصر سطری از ماتریس از میانگین عناصر سطرهای دیگر ماتریس بیش‌تر نباشد باز هم می‌توان آن سطر را حذف نمود. همین مطلب در مورد ستون‌های ماتریس بازی نیز مورد قبول است.

مثال ۷: بازی ماتریسی زیر را حل نمایید.

$$P_2:$$

$$P_1: \quad \begin{array}{c|ccc|} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{array}$$

پاسخ: این بازی نقطه زینی ندارد اما با استفاده از قاعده کاهش می‌توان ماتریس را کاهش داد.

اولاً، استراتژی ۱ مغلوب استراتژی ۳ برای بازیگر P_1 شده و حذف می‌شود، زیرا:

$$1 \le 2 \text{ و } -1 \le -1 \text{ و } -2 \le 0$$

بنابراین ماتریس کاهش یافته چنین است:

$$\begin{array}{c|ccc|} & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{array}$$

مجدداً در این ماتریس کاهش عناصر ستون ۳ به طور متناظر از عناصر ستون ۲ کمتر نیستند. بنابراین استراتژی ۳ مغلوب استراتژی ۲ شده و حذف می‌شود، زیرا داریم $-1 \geq 0$ و $1 \geq 1$. بنابراین آخرین ماتریس کاهش یافته ماتریس ۲×۲ زیر خواهد بود:

$$\begin{array}{c|cc|}
 & 1 & 2 \\
2 & -1 & 1 \\
3 & 2 & -1
\end{array}$$

اکنون به دو روش به حل این بازی میپردازیم که جواب بهین به دست آمده، جواب بهین بازی اصلی را نیز مشخص می‌کند.

یک راه‌حل بسیار ساده این است که قدر مطلق تفاضل هر سطر و ستون ماتریس کاهش یافته ۲×۲ را به ترتیب در مقابل و پایین سطر و ستون دیگر می‌نویسیم، سپس هر کدام از این اعداد را به مجموع آن‌ها در سطرها و ستون‌ها تقسیم می‌کنیم، به این ترتیب برای هر استراتژی نسبتی بدست می‌آید که به صورت استراتژی‌های آمیخته می‌باشند. هر سطر و ستون که در حین مراحل کاهش حذف شده باشد در استراتژی بهینه به جای آن صفر منظور خواهد شد.

$$\begin{array}{c|cc|ccc}
 & 1 & 2 & & & \\
2 & -1 & 1 & \longrightarrow 3 & \longrightarrow & \frac{3}{5} \\
3 & 2 & 1 & \longrightarrow 2 & \longrightarrow & \frac{2}{5} \\
 & 2 & 3 & & & \\
 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & & &
\end{array}$$

بنابراین استراتژی بهینه $p_1\,(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, 0)$ و استراتژی بهینه $p_2\,(0, \frac{3}{5}, \frac{2}{5})$ خواهد بود که استراتژی‌های آمیخته هستند.

در این‌جا مثلاً استراتژی بهینه p_1 به این معنا است که او باید $\frac{3}{5}$ یا ۶۰٪ کل زمان بازی را به انتخاب ۲ و ۴۰٪ بقیه زمان بازی را به انتخاب ۳ اختصاص دهد و همین‌طور بازیگر P_2 باید ۴۰٪ زمان بازی را به انتخاب ۱ و ۶۰٪ بقیه زمان بازی را به انتخاب ۲ اختصاص دهد. و V ارزش بازی، یعنی دریافت مورد انتظار P_1 از P_2 برابر $V = (\frac{3(-1) + 2(2)}{3+2}) = \frac{1}{5}$ می‌باشد.

راه‌حل دیگر با استفاده از برنامه‌ریزی خطی است و به این وسیله هر بازی ماتریسی از مرتبه m×n را که قبلاً معادل بودن آنها ذکر شده است می‌توان حل نمود. فرض می‌کنیم χ_1 و χ_2 و χ_3 به ترتیب احتمالات بازیگر P_1 برای انتخاب‌های اول و دوم و سوم ماتریس باشد و همین‌طور y_1 و y_2 و y_3 احتمالات نظیر برای P_2 باشند که همان فراوانی‌های نسبی هر استراتژی هستند. بازیگر P_1 می‌خواهد ارزش بازی یعنی V را بیشینه نماید به طوریکه $\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 = 1$ و چون $\chi_1 = 0$ پس $\chi_2 + \chi_3 = 1$ و همین‌طور برد مورد انتظارش وقتی که استراتژی‌های (χ_3 و χ_2) را در مقابل هر استراتژی خالص بازیگر بازی نماید حداقل مساوی V نماید. در این صورت مسئله معادل برنامه‌ریزی خطی ماتریس کاهش یافته اخیر به شکل زیر در می‌آید.

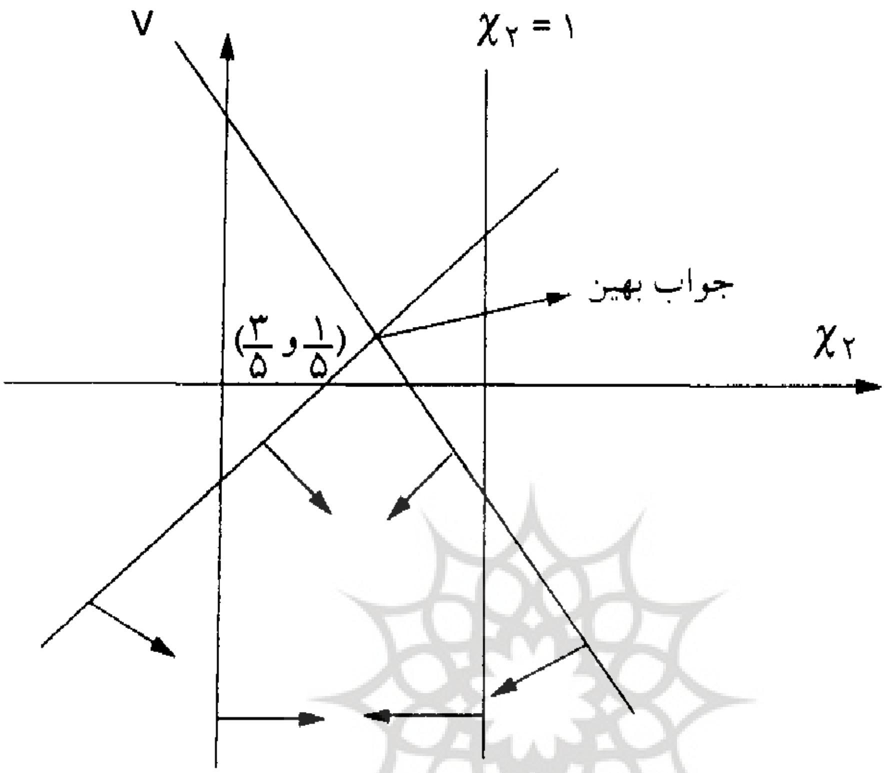
$$\text{Maximize } V$$

$$\text{Subject to} \quad \begin{aligned} -\chi_2 + \chi_3 &\geq V \\ -\chi_2 - \chi_3 &\geq V \\ \chi_2 + \chi_3 &= 1 \\ \chi_2 , \chi_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

برای حل آن از $\chi_2 + \chi_3 = 1$ خواهیم داشت $\chi_3 = 1 - \chi_2$ با جای‌گذاری در نامعادلات بالا خواهیم داشت.

$$\begin{aligned} 3\chi_3 + V &\leq 2 \\ 2\chi_2 - V &\geq 1 \\ 0 \leq \chi_2 &\leq 1 \end{aligned}$$

ناحیه جواب آن بر حسب متغیرهای χ_2 و V و جواب بهین آن به شکل زیر مشخص می‌گردد.



$\chi_2 = \frac{3}{5}$ و $V = \frac{1}{5}$ و در نتیجه $\chi_3 = \frac{3}{5}$ جواب بهین است.
بنابراین استراتژی بهینه بازیگر P_1 ($\frac{2}{5}$ و $\frac{3}{5}$ و ۰) می‌باشد.
مسئله برنامه‌ریز خطی مشابه برای بازیگر P_2 نیز چنین است.

Maximi ze V

Subject to
$$-y_1 + y_2 \le V$$
$$2y_1 - y_2 \le V$$
$$y_1 + y_2 = 1$$
$$y_1 \text{ و } y_2 \ge 0$$

و $y_3 = 0$ که به سادگی مانند مسئله بازیگر P_1 قابل حل است. استراتژی بهینه بازیگر P_2 به صورت $y_1 = \frac{2}{5}$ و $y_2 = \frac{3}{5}$، $(0 , \frac{3}{5} , \frac{2}{5})$ بدست می‌آید.

لازم به ذکر است که چنین مسئله‌ای را با هر تعداد متغیر می‌توان به روش سیمپکس و

با نرم‌افزارهای مربوطه مانند Q.S.B و یاC.M.M.S حل نمود. هم‌چنین اگر ماتریسی بازی کاهش یافته به شکل‌های $m\times ۲$ و یا $۲\times n$ ، $m,n \geq ۳$ درآید می‌توان آن را بروش ترسیمی حل نمود.[۲۱]

پی نوشت‌ها:

1. Jhon Van Neuman.
2. Morgen Stern.
3. Player.
4. Strategy.
5. Mixed Strategy.
6. Pure Strategy.
7. Zero - Sun Game.
8. Tow Person Zero - Sun Game.
9. Pay Off Matrix.
10 Game Matrix.

۱۱. سال. آی. گس، برنامه‌ریزی خطی (روش‌ها و کاربردها)، ترجمهٔ فائزه توتونیان (انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد، ۱۳۷۳) ص ۴۴۴-۴۴۶.

۱۲. همان.

۱۳. اس. اس. رائو، بهینه سازی تئوری‌ها و کاربرد، ترجمه سیدمحمدمهدی شهیدی‌پور (انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد، ۱۳۷۳) ص ۱۰۴۲-۱۰۴۴.

۱۴. ب. ک. گوپتا، نظریه بازی‌ها (استراتژی رقابتی)، ترجمه بیژن توسلی (مرکز انتشارات صنعت فولاد، ۱۳۷۱) ص ۲۰-۲۳.

۱۵. همان.

16. Optimal Solution.
17. Saddle Le Point.
18. Game Value.

۱۹. علی اکبر عرب‌مازار، تصمیم‌گیری کاربردی (انتشارات دانشگاه شهید بهشتی، ۱۳۶۹) ص ۲۲۸-۲۲۹.

20. Dominated Strategy.

۲۱. برای مطالعه بیش‌تر در این مورد ر.ک:

Hamdy Taha,Operation Research on Intraduction(University of Arkansas,1990)p.339-359 and Saul.I.Gass, An Illustrated Giuide to Linear Programming(Mc Graw Hill,1990) p.108-124.