ارائه‌ی دو روش جدید در ترسیم گره و مقایسه‌ی آنها

احمد امین‌پور[۱]، محمدرضا اولیا[۲]، رضا ابوئی[۳]، بیتا حاجبی[۴] (نویسنده مسئول)

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۱۲/۲۰ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۰۳/۱۸

چکیده

در این مقاله دو روش جدید پارامتریک برای ترسیم گره ارائه شده است. روش‌های متداول رسم گره، شامل روش سنتی (روش زیر ساختی شعاعی) و هانکین، پارامتریک نیستند. این محدودیت باعث ایجاد پیچیدگی و زمان‌بر بودن ترسیم گره می‌شود. برای رفع این محدودیت، روش‌های پیشنهادی ما جهت رسم گره پارامتریک است. با توجه به آن که احتمال آسیب به اطراف یک نقش هندسی نسبت به مرکزش بیشتر است، در زمان مرمت با رسم نقوش از مرکز و تعریف خطوط شکل به گونه‌ی پارامتریک بر اساس طول دهانه‌ی مرکزی، می‌توان از مرکز، سایر قسمت‌هایش را نیز رسم کرد که این امکان در روش‌های پارامتریک پیشنهادی وجود دارد. در این مقاله سوال اصلی این است که آیا می‌توان با استفاده از دو روش پیشنهادی قسمت‌های آسیب‌دیده‌ی یک گره را بازیابی کرد که نتایج، حاکی از رضایتبخش بودن این روش و همچنین کاهش پیچیدگی‌های محاسباتی رسم گره است. هدف از این تحقیق، یافتن راه‌های جدید برای رسم گره می‌باشد، مطالعه‌ی این پژوهش کتابخانه‌ای و روش آن یافته اندوزی و تحلیل محتوا، جستجو در روابط ریاضی و مثلثاتی خطوط گره، یافتن الگوریتم مناسب برنامه‌نویسی برای گره و نهایتاً ترسیم گره‌ی مورد نظر می‌باشد. نتایج این پژوهش، حاکی از یافتن دو روش جدید قابل اجرا برای ترسیم گره بر روی سطوح مستوی و منحنی است که در مرمت گره‌های سنتی کاربرد خواهد داشت. مقایسه‌ی روش‌های ارائه شده با روش‌های متداول کنونی نشان می‌دهد روش‌های پارامتریک پیشنهادی، پیچیدگی محاسباتی را کمتر نموده به طوری که در روش پیشنهادی دوم کاربر می‌تواند با استفاده از تعداد اضلاع شمسه‌ی گره و طول دهانه‌ی مورد نظر، گره را به راحتی رسم کند. در مقایسه‌ی دو روش پیشنهادی، امکان ویرایش ترسیم گره با جابه‌جایی نقطه‌ی برخورد از میانه به مکان دیگر و یا تبدیل یک نقطه به دو نقطه روی یال چندضلعی‌ها، حسن روش اول نسبت به روش دوم می‌باشد.

واژه‌های کلیدی

ترسیم گره، شبکه‌ی زیرساختی هانکین، اضافه ابزار گراس هاپر، برنامه‌نویسی تصویری.

۱. استادیار، دانشگاه هنر اصفهان

۲. استادیار، دانشگاه یزد

۳. استادیار، دانشگاه هنر اصفهان

۴. دانشجوی دکتری مرمت و احیاء بناها و بافت‌های تاریخی، دانشگاه هنر اصفهان، اصفهان، ایران

۱- مقدمه

گره در بنا، پارچه، فرش و صنایع دیگر کاربرد دارد. از نظر شکل اقسامی دارد که بیشتر از روی شکل آن نامگذاری می‌شود. در این مقاله گره‌هایی مورد نظر است که در ابنیه به کار می‌رود. گره‌هایی که در ابنیه به کار رفته است بیشتر در کتیبه‌ها، سردرها، گنبدها، طاق‌ها بوده و با فنون مختلف مثل بنایی و نجاری و با استفاده از مصالحی مانند گچ، آجر، چوب، کاشی و آینه در معماری اجرا شده است. ویژگی اصلی گره وجود هندسه‌ی دقیق و قواعد ترسیمی در طراحی و اجرای آن می‌باشد. قواعد ترسیمی روش‌های سنتی سینه به سینه از نسلی از معماران به نسل‌های بعدی منتقل شده و عملیات طراحی و محاسبات ترسیمی گره بسیار پیچیده و زمان‌بر بوده است. گره بیشتر در زمینه‌های مسطح اجرا شده و محاسبات ترسیمی گره در سطوح غیرمسطح بسیار پیچیده‌تر و زمان‌برتر بوده است. مرمت گره‌های سنتی آسیب‌دیده به خصوص در احجام غیر مسطح، بسیار پیچیده و سخت می‌باشد. در این مقاله پرسش این است که آیا راه‌حل‌های جدیدی پیدا می‌شود که پیچیدگی محاسبات در طراحی گره‌ها و دشواری مرمت گره‌های تخریب شده در بناهای سنتی را کمتر کند که نتایج، رضایت‌بخش است. هدف این پژوهش یافتن روش‌های جدید و معرفی آنها جهت رفع پیچیدگی محاسبات و مرمت گره‌ها است. در این مقاله، ضمن معرفی اجمالی بعضی از روش‌های شناخته شده‌ی سنتی و متداول در گذشته، دو روش جدید پیشنهادی توسط نگارندگان ارائه و سپس مقایسه می‌شود و ویژگی‌های هر یک، مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. لازم به ذکر است که این روش‌های پیشنهادی کاستی‌ها و محدودیت‌های روش‌های موجود را برطرف می‌کند. مراحل تحقیق به ترتیب در بخش دوم، روش تحقیق، در بخش سوم معرفی روش‌های موجود رسم گره، در بخش چهارم روش ترسیم پیشنهادی اول، در بخش پنجم روش ترسیم پیشنهادی دوم، در بخش ششم مقایسه‌ی روش‌ها و در بخش هفتم نتایج بررسی می‌شوند.

۲- روش تحقیق

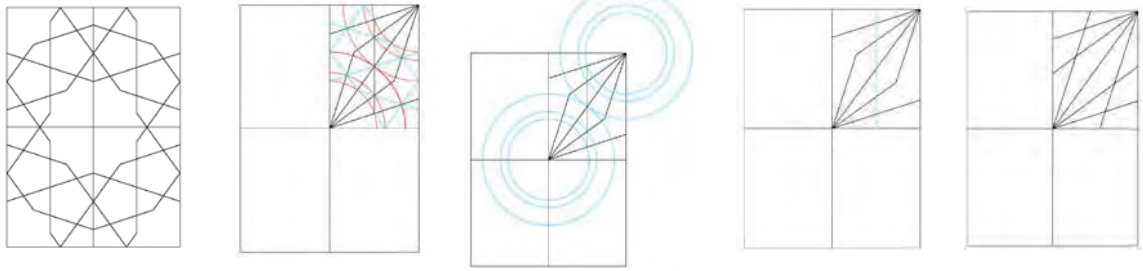
نوع مطالعه در این پژوهش کتابخانه‌ای و روش مورد استفاده یافته‌اندوزی و تحلیل محتوا به استناد کتب مربوط به ترسیم گره بوده است. سپس بررسی و یافتن فرمول‌های محاسباتی ریاضی و مثلثاتی برای رسم گره‌های سنتی، یافتن الگوریتم مناسب برنامه‌نویسی پیشنهادی برای رسم گره‌ها و نهایتاً ترسیم گره به دو روش پیشنهادی بوده و بعد مقایسه‌ی تطبیقی روش‌های ترسیمی گره‌های سنتی با روش‌های ترسیمی پیشنهادی گره‌ها و بالاخره مقایسه‌ی تطبیقی دو روش پیشنهادی ترسیم گره بوده است.

۳- معرفی روش‌های موجود رسم گره

در روش‌های ترسیم اشکال هندسی که در رساله‌های هندسه‌ی عملی مشاهده می‌شود مثل رساله فی تداخل الاشکال المتشابهه و المتوافقه[1] بیشتر از شبکه‌های شعاعی با دوایر هم‌مرکز استفاده شده است، این روش در رساله‌ی «عبدالرحمن صوفی» مربوط به قرن چهارم هجری درباره‌ی «هندسه‌ی پرگاری» نیز دیده می‌شود که بیشتر مرتبط با تقسیم محیط دایره به قسمت‌های مساوی و ترسیم چندضلعی‌های منتظم است. در این رساله شیوه‌های اساسی برای تقسیم و تکثیر متناسب با استفاده از پرگار و دهانه‌ی ثابت مطرح می‌شود[2] در نقشه‌های «میرزا اکبر خان» متعلق به دوره‌ی قاجار برای رسم نقوش هندسی از روش شعاعی استفاده شده‌است. در کتب معاصر فارسی نظیر «احیای هنرهای از یاد رفته»، «گره چینی» و «گره و کاربندی» روش شعاعی روش غالب و مرسوم است. «عصام السعید و عایشه پارمان» نیز در کتاب نقش‌های هندسی در هنر اسلامی بر مبنای شبکه زیرساختی شعاعی عمل کرده‌اند. روش دیگر شبکه زیرساختی است که اولین بار توسط «هانکین» ارائه شد. در ادامه هر کدام از روش‌ها به صورت جداگانه معرفی می‌شوند.

۳-۱- روش زیر ساختی شعاعی

در این بخش به معرفی روش زیرساختی شعاعی که «شعرباف» آن را بیان کرده و به نظر می‌رسد یکی از روش‌های متداول سنتی در گذشته بوده، پرداخته می‌شود. یکی از انواع نقوش هندسی گره کند دو پنج است. برای ترسیم آن، ابتدا شبکه زیرساختی گره در ربع یک زمینه‌ی کامل (واگیره) از گره ترسیم می‌شود. واگیره کوچکترین جزء قابل تکرار هر گره است که در یک چهارچوب مشخص محاط می‌شود. عرض واگیره به اندازه دلخواه در نظر گرفته می‌شود، سپس از دو سر آن دو خط عمود اخراج شده و تشکیل یک مستطیل می‌دهد. زاویه‌ی ۹۰ درجه در رئوس روبروی هم از نظر قطری به ۵ قسمت مساوی تقسیم می‌گردد و زوایا از هر دو رأس روبروی هم، ترسیم می‌شود. بعد عمودمنصف قاعده ترسیم گردیده تا خطوط زاویه را قطع کند. پس از آن دایره‌هایی به مرکز رئوس و شعاع نقاط برخورد خط عمود منصف با زوایا ترسیم گردیده و سپس نقاط مانند شکل ۱ به هم متصل می‌شود (شعرباف، ۱۳۷۲: ۳۷).



شکل ۱. مراحل ترسیم گره کند دو پنج با استفاده از روش شعاعی: الف) تقسیم زوایای قائم به پنج قسمت مساوی؛ ب) ترسیم عمودمنصف؛ پ) رسم دایره‌هایی به مرکز رئوس و شعاع نقاط برخورد خط عمودمنصف با زوایا؛ ت) اتصال نقاط مشخص شده در شکل؛ ث) شکل نهایی (شعرباف، ۱۳۷۲: ۳۷).

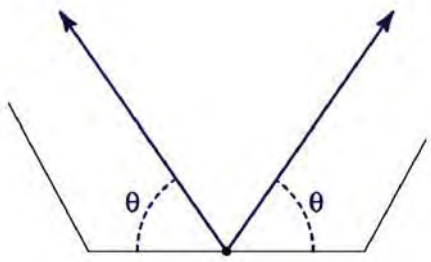
۳-۲-روش زیر ساختی شبکه‌ای

الگوهای ستاره‌ای اسلامی که از تزیینات کاخ الحمرا در گرانادا دسته‌بندی شده است توسط «بورگوین»[۳] جمع‌آوری شده است (Bourgoin, 1973). در این کتاب الگوها بیشتر به کمک خطوط راهنما تدوین شده است. در کتاب «هنرهای تزیینی در مراکش» یک طرح دستی از ستاره‌ی هشت‌نقطه‌ای و شش‌ضلعی‌هایی که دورش کشیده شده وجود دارد و باقی‌مانده‌ی طرح با شکل‌های اضافی پر شده است (Castera, 1999). نظریه‌ی استفاده از شبکه‌ی چندضلعی به عنوان یک راهنما برای ساختار الگوهای ستاره‌ای یک نقطه‌نظر مشترک است که تحقیقات بسیاری از محققان را به هم مرتبط می‌سازد و ظاهراً جنبه‌ی تاریخی نیز داشته است. دلیل این مدعا در نقشه‌های موجود در طومار توپکاپی دیده می‌شود (نجیب اوغلو، ۱۳۷۹).

- «هانکین»، در مقاله‌ی «طراحی الگوهای هندسی در هنرهای اسلامی»، به بررسی نقوش یک حمام ترکی پرداخته است. در این حمام، الگوهای ستاره‌ای به همراه شبکه‌های کمرنگ ترسیم شده است. این امر، وجود شبکه‌ی راهنما را برای نقوش حمام اثبات می‌کند (Hankin, 1925). «جی بونر»[۴]، یک معمار در نیومکزیک وقت و انرژی زیادی را صرف طبقه‌بندی و تولید الگوهای ستاره اسلامی کرده است و جزئیات کارش را در یک دست‌نوشته‌ی چاپ نشده، ذکر کرده است. کار او نیز شبیه روش هانکین است. بونر نشان می‌دهد که چگونه می‌توان فضای وسیعی از الگوهای ستاره‌ای را به روش هانکین بدست آورد. بونر استفاده از دو نقطه‌ی برخورد به جای یک نقطه را برای ویرایش روش هانکین پیشنهاد می‌دهد (Bonner, 2000). «گرانبوم» و «شفارد»[۵] چگونگی بیرون کشیدن محتوای هندسی از یک الگو که طرح نامیده می‌شود و نحوه‌ی گسترش آن، را بررسی کردند (Grunbaum and Shefard, 1992). «کرگ کاپلان» در رساله‌ی دکتری خود به بیان روشی ترکیبی بر اساس روش زیرساختی شبکه‌ای پرداخته است که این روش در قالب نرم‌افزار تاپرات ارائه شده است (Kaplan, 2002).

۳-۲-۱-شبکه زیرساختی هانکین

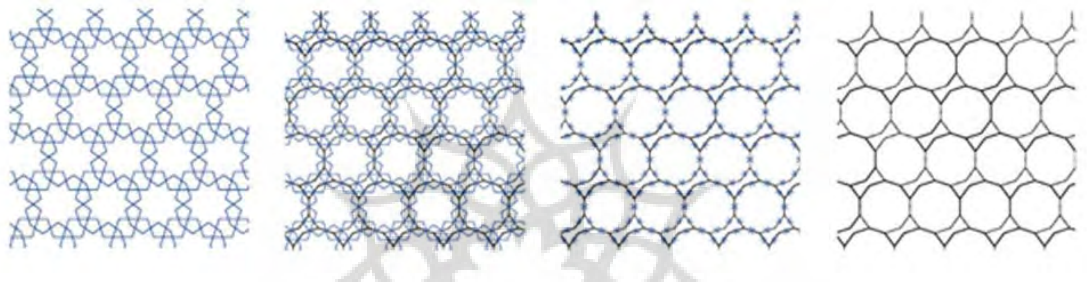
رویکرد چگونگی تولید و رشد الگوهای ستاره‌ای در تزیینات اسلامی در غرب، اولین بار در مقالاتی از هانکین تحت عناوین «طراحی الگوهای هندسی در هنرهای اسلامی»، «مثال‌هایی از روش‌های ترسیم الگوهای هندسی اسلامی» و «بعضی طرح‌های پیچیده‌ی اسلامی» دنبال شد Hankin, 1925, 1934, (1936). هانکین اولین بار روش شبکه‌ی زیرساختی چندضلعی‌ها را درمقاله‌ی «طراحی الگوهای هندسی هنر اسلامی» ارائه کرد. توصیف هانکین از این تکنیک، یک نقطه‌ی آغاز برای رویکرد الگوریتمیک فراهم می‌کند. او اشاره می‌کند: «در ساختن چنین الگوهایی لازم است سطح با شبکه‌ی چندضلعی‌ها دربرگرفته شود. سپس از میان هر کدام از یال‌های چندضلعی‌ها دو خط کشیده شود. این خط‌ها از هم می‌گذرد و شبیه به یک x ادامه پیدا می‌کند تا جایی که به خطوط مشابه گذرنده از دیگر یال‌ها برسد» (Hankin, 1925: 4). تنها متغیر این مدل، زاویه‌ی لبه‌های برآمده با لبه‌ی چندضلعی‌ها (زاویه‌ی برخورد) می‌باشد (شکل ۲).



شکل ۲. قرارگیری خطوط x شکل در میانه‌ی اضلاع چندضلعی با زاویه‌ی برخورد معین نسبت به اضلاع چندضلعی (Kaplan, 2002: 52).

این الگوریتم روی چندضلعی‌های منتظم بهتر عمل می‌کند. هنگامی که چندضلعی‌ها کنار هم قرار می‌گیرند، خطوط x شکل روی اضلاع آن بر هم منطبق است، چون که خطوط برخورد همگی به شکل x رشد می‌کند.

باید توجه داشت که اگر زاویه بین اضلاع چندضلعی a درجه باشد و زاویه برخورد خطوط (a/۲) -۱۸۰ درجه باشد، خطوط برآمده از اضلاع چندضلعی روی هم منطبق خواهد بود و تا زمانی که زاویه بین ۰ درجه تا این مقدار و یا این مقدار تا ۹۰ درجه باشد، برخورد ممکن می‌شود (شکل ۳). در واقع روش هانکین بدین‌گونه است که شبکه‌های چندضلعی ابتدا رسم می‌گردد، سپس از میان هر کدام از یال‌های چندضلعی خطوطی با زوایای مختلف استخراج می‌شود. روش‌های دیگری، مثل روش لی (مسیریابی) و روش گرانبوم و شفارد- که در آن شبکه‌ی چندضلعی منتظم رسم و رئوس آن نام‌گذاری می‌شود و هر رأس v(i) به v(i+d) به طوری‌که ۱<d<(n/۲)، اتصال می‌یابد- وجود دارد (Kaplan, 2002: 62). این روش‌ها برای رسم نقوش هندسی با زوایای ناسازگار مناسب نیست، در حالی که روش هانکین برای رسم نقوش با زاویه‌ی ناسازگار مناسب‌تر است. روش پارامتریک روشی است که شکل‌ها بر اساس یک سری روابط و تعدادی متغیر، رسم می‌شوند. روش‌های گفته شده، پارامتریک نیستند و باید نسبت به متغیرها محاسبه‌ای صورت گیرد تا نقوش با تعداد اضلاع و دهانه‌ی مشخص بدست آید.



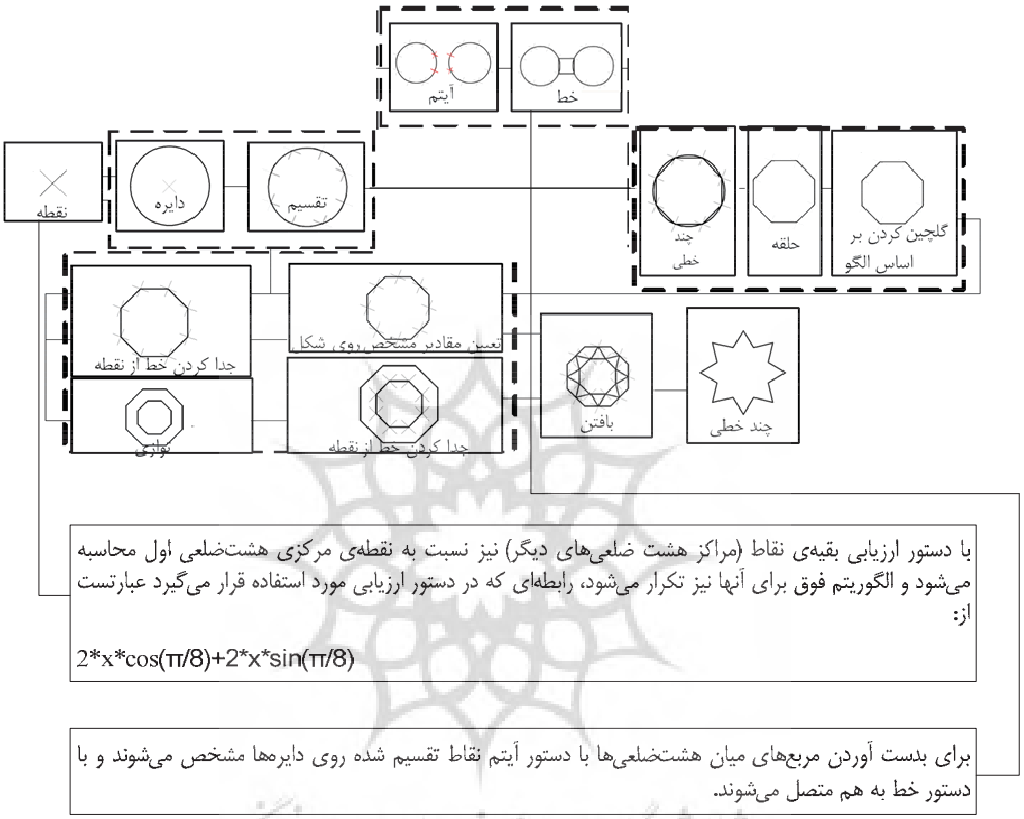
(الف) (ب) (ج) (د)

شکل ۳. یک نمایش از روش هانکین: الف) شبکه چندضلعی؛ ب) نقاط برخورد خطوط در میانه‌ی اضلاع؛ ج) رشد خطوط x شکل برآمده از نقاط و ادامه آنها تا رسیدن به خطوط بر آمده از اضلاع دیگر؛ د) الگوی ستاره‌ای (Kaplan, 2002: 53).

۴- روش ترسیم پیشنهادی اول

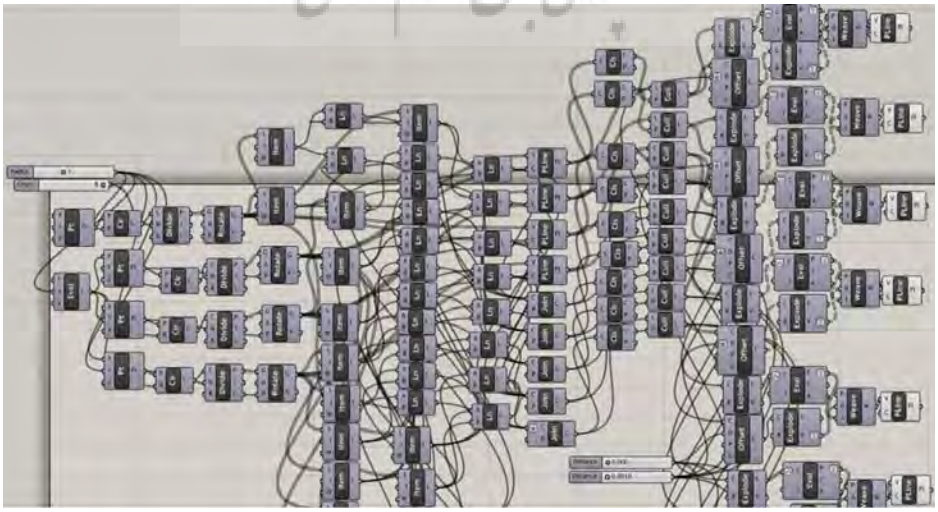
برای ترسیم نقوش هندسی به صورت پارامتریک، ابتدا الگوریتم آن در اضافه ابزار[۶] گراس‌هاپر[۷] مربوط به نرم‌افزار راینو به عنوان یک زبان برنامه‌نویسی تصویری[۸] توسط نگارندگان نوشته می‌شود. با این‌کار این امکان وجود دارد که بتوان نقوش را بر اساس قواعد و الگوهای جاری آنها ترسیم و به عبارتی آنها را پارامتریک تعریف کرد. ابتدا باید توجه کرد برای رسم گره‌های مورد نظر، کدام شبکه بر آنها محیط است، سپس باید روابطی برای تبدیل این شبکه به گره‌های مختلف، توسط نگارندگان تعریف گردد. در این مرحله، برای رسم گره‌ی شکل ۶ ابتدا نقطه‌ای به عنوان مبنا تعیین می‌شود، سپس دایره‌ای به مرکز نقطه مورد نظر و با شعاع متغیر، ترسیم می‌شود با دستور «دیواید (تقسیم)»[۹] محیط این دایره به هشت قسمت مساوی تقسیم شده و سپس نقاط حاصل با دستور «پلی‌لاین (چندخطی)»[۱۰] و « جوین (اتصال)»[۱۱] به یکدیگر متصل می‌گردد و هشت‌ضلعی به وجود می‌آید. برای رسم هشت‌ضلعی‌های دیگر، از دستور «اِوَلوایت (ارزیابی)»[۱۲] استفاده می‌شود، به گونه‌ای که متغیر x با متغیر شعاع دایره برابر شده و مقدار نهایی رابطه‌ی $2x \cdot \cos(\frac{\pi}{8}) + 2x \cdot \sin(\frac{\pi}{8})$، یک‌بار به بعد x نقطه‌ی دوم، یک‌بار به بعد y نقطه سوم و یک‌بار به دو بعد x و y نقطه‌ی چهارم داده می‌شود (شکل ۷). پس از آن به مرکز نقاط حاصل به شیوه‌ای که برای اولین هشت‌ضلعی توضیح داده شد، هشت‌ضلعی‌های دیگر نیز رسم می‌شود. بین این هشت‌ضلعی‌ها، مربع‌هایی نیز ایجاد می‌شود که برای بدست آوردن آنها با دستور «آیتم (مورد) »[۱۳]، رئوس مربع‌ها مشخص می‌شود و در مرحله‌ی بعد با دستور «لاین (خط)»[۱۴] به هم متصل می‌گردد. مربع‌ها با دستور «کلوزد (حلقه)»[۱۵] و «کال (گلچین کردن بر اساس الگو)»[۱۶] به صورت حلقه‌های بسته تعریف می‌شود. بعد از آن میانه‌ی اضلاع مربع‌ها و هشت‌ضلعی‌های ایجاد شده با دستور «اِوَل (تعیین مقادیر مشخص روی شکل)»[۱۷] با پارامتر ۰/۵ جدا می‌شود و نقاط حاصل با نقاط مربع‌ها و هشت‌ضلعی‌های «آفست (متوازی) [۱۸]» شده در مرحله‌ی بعد متصل می‌شود. برای این کار، «پلی‌لاین (چندخطی)»، یکبار «اکسپلود

(جدایی خط از نقطه)»[19] می‌شود و با دستور «اِوَل (تعیین مقادیر مشخص روی شکل)»، میانه‌ی اضلاع آن مشخص می‌شود، سپس «پلی‌لاین (چندخطی)» یکبار دیگر «آفست (متوازی) » و «اکسپلود (جدایی خط از نقطه)» می‌شود و نقاط حاصل که شامل نقاط میانی اضلاع مربع و هشت-ضلعی‌هاست و نقاط «اکسپلود (جدایی خط از نقطه)» شده با دستور «ویو (بافتن)»[20] به هم متصل می‌شوند و در نهایت با دستور «پلی‌لاین (چندخطی)» شکل‌های مورد نظر حاصل می‌شوند (اشکال۴ و ۵). در این روش با تغییر میزان «آفست (متوازی) »، زاویه‌ی خطوط x شکل حاصل، تغییر پیدا می‌کند و با تغییر این مقدار همان‌طور که در شکل ۶ دیده می‌شود، شکل‌های گوناگون حاصل می‌گردد.

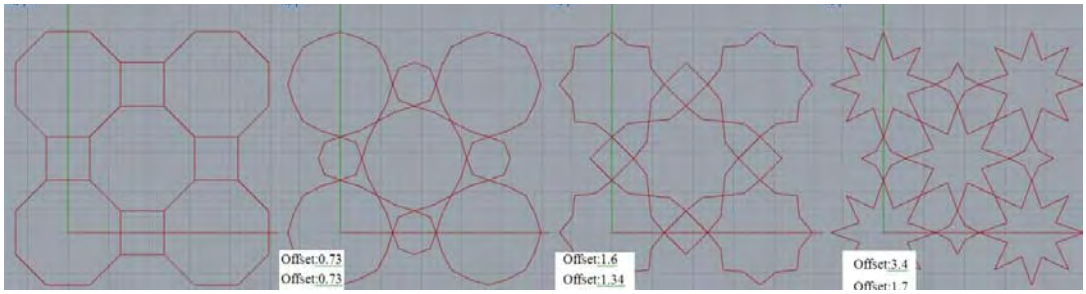


شکل ۴. الگوریتم تصویری گره حاصل از شبکه‌های چندضلعی

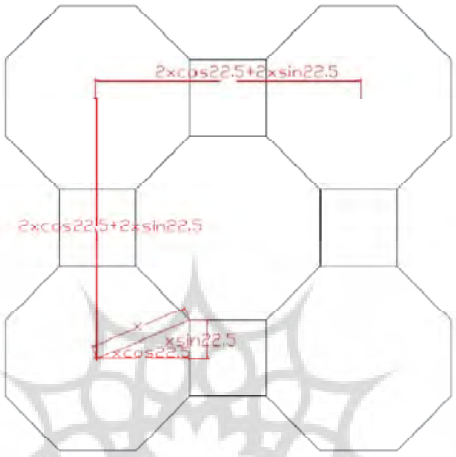
لازم به ذکر است، زبان برنامه نویسی گراس هاپر، شامل کامپوننت‌هایی است. این کامپوننت‌ها دارای چند ورودی و چند خروجی است. مثلاً کامپوننت دایره دارای دو ورودی نقطه‌ی مرکزی و شعاع متغیر است. خروجی آن به صورت یک دایره است.



شکل ۵. برنامه‌نویسی برای گره حاصل از شبکه‌ی چندضلعی (نگارندگان).

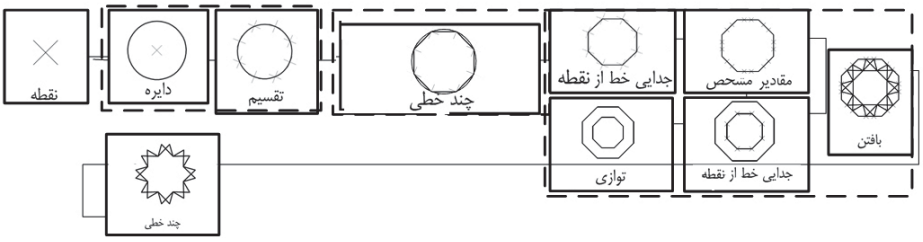


شکل ۶. خروجی حاصل از برنامه‌نویسی برای نقوش هندسی حاصل از شبکه‌ی چندضلعی با پارامترهای مختلف (نگارندگان)

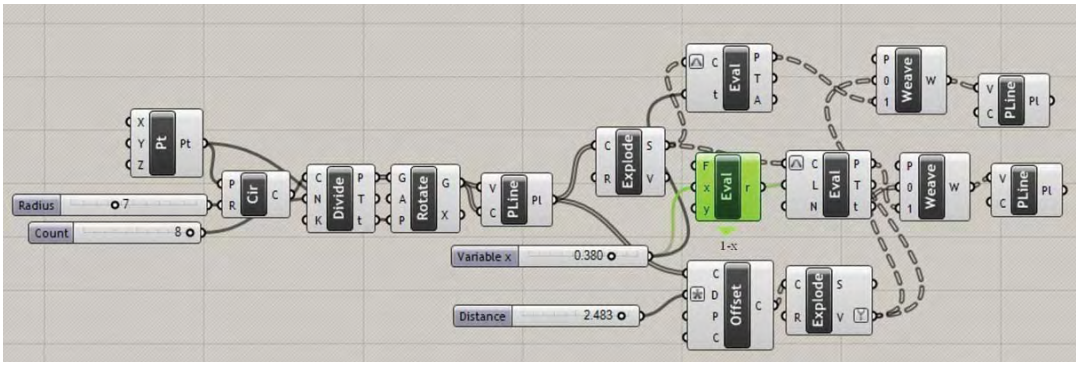


شکل ۷. قرارگیری هشت‌ضلعی‌ها و روابط مثلثاتی بین آنها (نگارندگان)

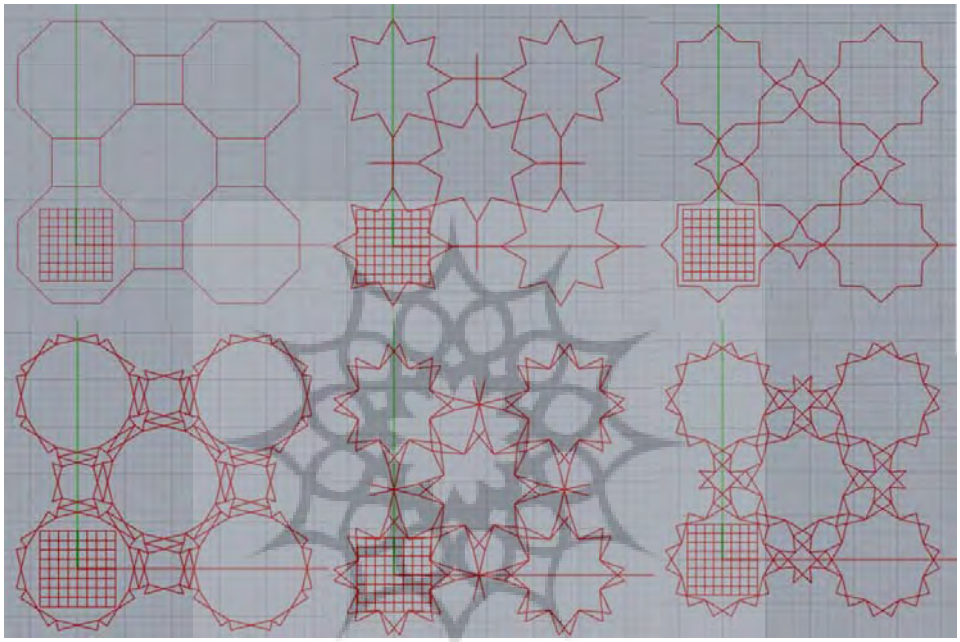
برای ایجاد اشکال متنوع، می‌توان تغییراتی نظیر تبدیل نقطه‌ی میانی اضلاع چندضلعی به دو نقطه را انجام داد. در مواردی که نقطه‌ی میانی چندضلعی‌ها، به دو نقطه تغییر می‌یابد، شکل به گونه‌ای دیگر است. برای این کار مانند برنامه‌نویسی شکل ۵، ابتدا نقطه‌ای به عنوان مبنا تعیین و سپس دایره‌ای به مرکز نقطه‌ی مورد نظر و با شعاع متغیر در نظر گرفته می‌شود. سپس با دستور «دیواید (تقسیم)»، محیط این دایره به هشت قسمت مساوی تقسیم شده و سپس نقاط حاصل با دستور «پلی‌لاین (چندخطی)» و «جوین (اتصال)» به یکدیگر متصل می‌گردد و هشت‌ضلعی به‌وجود می‌آید. بقیه‌ی هشت‌ضلعی‌ها و مربع‌های میان هشت‌ضلعی‌ها مطابق آنچه برای شکل‌های۴ و ۵ و ۶ توضیح داده شد، ترسیم می‌شود. در ادامه «پلی‌لاین (چندخطی)»ها که شامل هشت‌ضلعی‌هاست،«اکسپلود (جدایی خط از نقطه)» می‌شود. سپس برای بدست آوردن دو نقطه، نقاط با متغیر x و متغیر x-۱ به طوری که x بین ۰ تا ۰/۵ تغییر می‌کند، با دستور« اِوَل (تعیین مقادیر مشخص روی شکل)» روی پال‌های چندضلعی جدا می‌شود. (شکل ۸، ۹ و ۱۰) و دو نقطه‌ای که قرار است روی اضلاع چندضلعی حرکت کند به نقاط «آفست» شده، متصل می‌گردد. بدین معنا که «پلی‌لاین (چندخطی)»، «آفست (متوازی)» و «اکسپلود (جدایی خط از نقطه)» می‌شود و دو نقطه‌ی حاصل و نقاط «اکسپلود (جدایی خط از نقطه)» شده با دستور «ویو (بافتن)» به هم متصل می‌شوند و در نهایت با دستور پلی‌لاین (چند خطی) شکل‌های مورد نظر حاصل می‌شوند.



شکل ۸. الگوریتم نقوش هندسی حاصل از شبکه‌ی چندضلعی (نگارندگان)

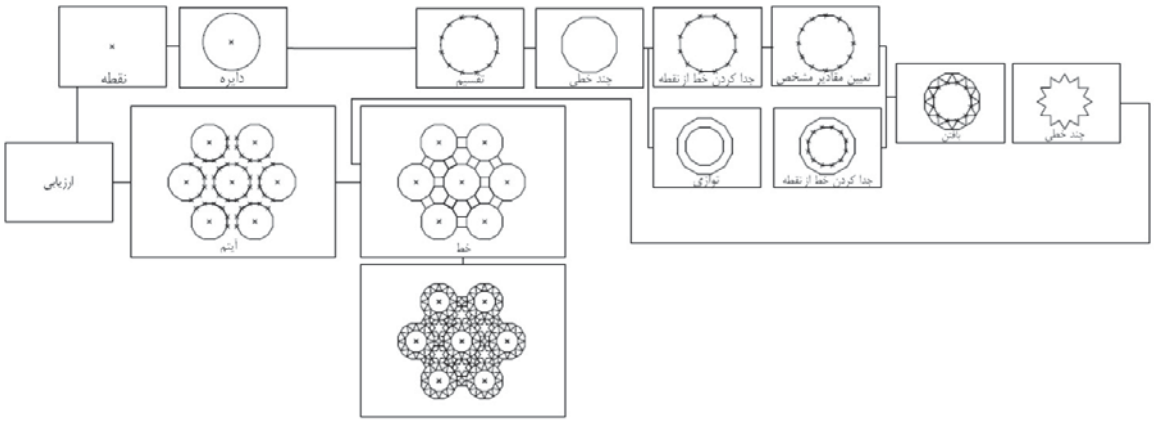


شکل ۹. برنامه‌نویسی برای نقوش هندسی حاصل از شبکه‌ی چندضلعی (نگارندگان)

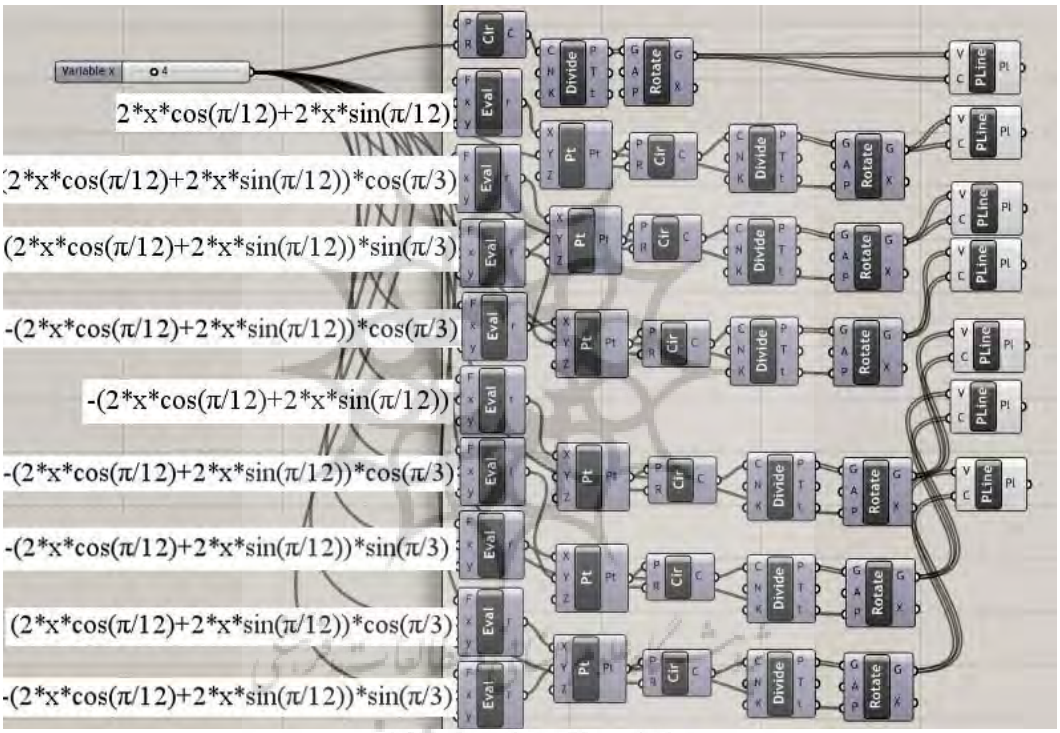


شکل ۱۰. نقوش هندسی بدست آمده از شبکه‌های چندضلعی (نگارندگان)

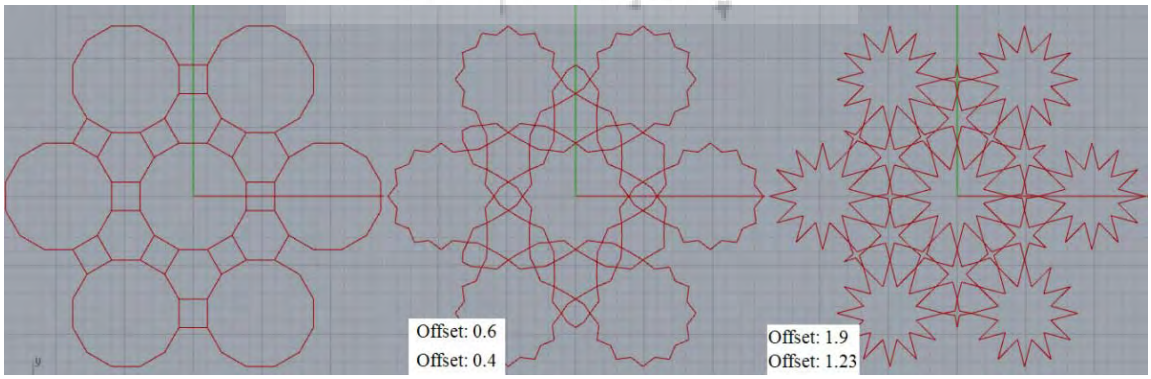
برای بدست آوردن شبکه‌ی دوازده‌ضلعی شکل ۱۳ لازم است، دایره‌ای به شعاع متغیر در نظر گرفته شود. در ادامه مانند شکل‌های قبل، محیط این دایره به قسمت‌های مساوی تقسیم و نقاط حاصل از تقسیم با دستور «پلی‌لاین (چندخطی)» به هم متصل می‌شود. برای دوازده‌ضلعی‌های دیگر از رابطه‌های مثلثاتی که در شکل ۱۲ توسط نگارندگان نوشته شده، استفاده می‌شود تا طول و عرض نقاط مرکزی آنها بدست آید. چگونگی محاسبه‌ی روابط مثلثاتی بین دوازده‌ضلعی‌ها و نسبت دو دوازده‌ضلعی نسبت به دوازده‌ضلعی مرکزی در شکل ۱۴ نشان داده شده است که با توجه به این که بقیه‌ی دوازده‌ضلعی‌ها نسبت به دوازده‌ضلعی مرکز قرینه‌اند، فقط روابط‌شان در شکل ۱۲ نوشته شده است و در شکل ۱۴ نیازی به نشان دادن نیست. همان‌طور که دیده می‌شود، شکل‌های متنوعی از یک الگوریتم (شکل ۱۱) حاصل می‌گردد، در واقع با وجود این‌که دستور یکی است، طبق شرایط مختلف (زمینه (چندضلعی‌ها) و میزان فاصله‌ی «آفست (متوازی)» شده) شکل‌های گوناگون ایجاد می‌شود. بعد از آنکه دوازده‌ضلعی‌ها ترسیم شدند، بقیه‌ی مراحل الگوریتم مشابه شکل‌های قبل می‌باشد که در شکل ۱۱ نشان داده شده است.



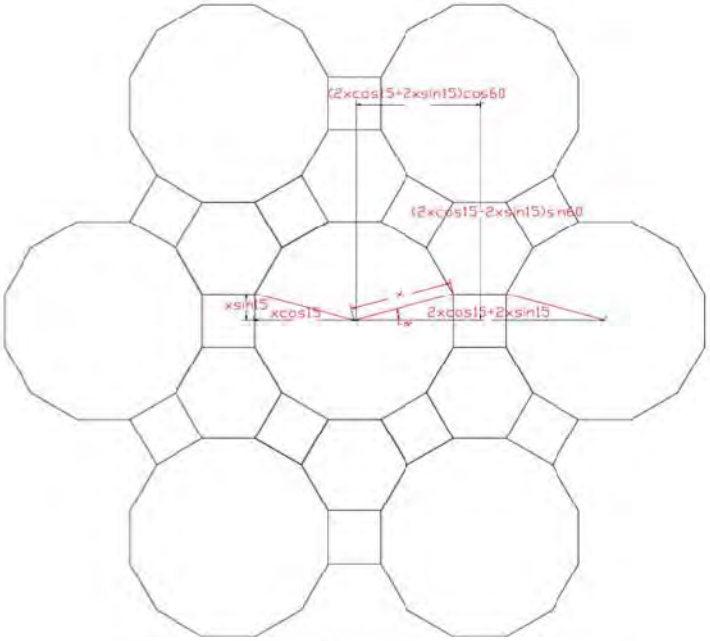
شکل ۱۱. الگوریتم نقوش هندسی حاصل از شبکه‌های چندضلعی (نگارندگان)



شکل ۱۲. برنامه نویسی برای شبکه‌های چندضلعی (نگارندگان).

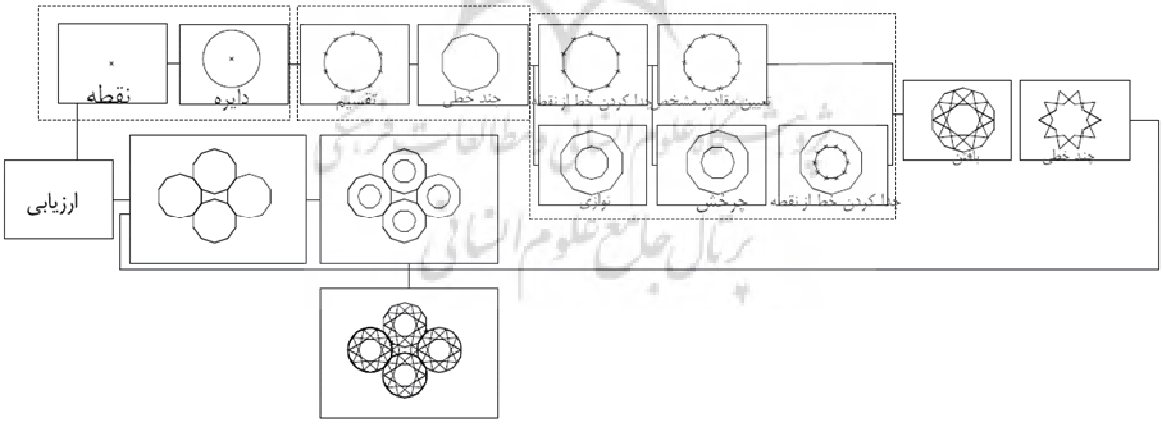


شکل ۱۳. نقوش هندسی بدست آمده از شبکه‌های چندضلعی (نگارندگان).



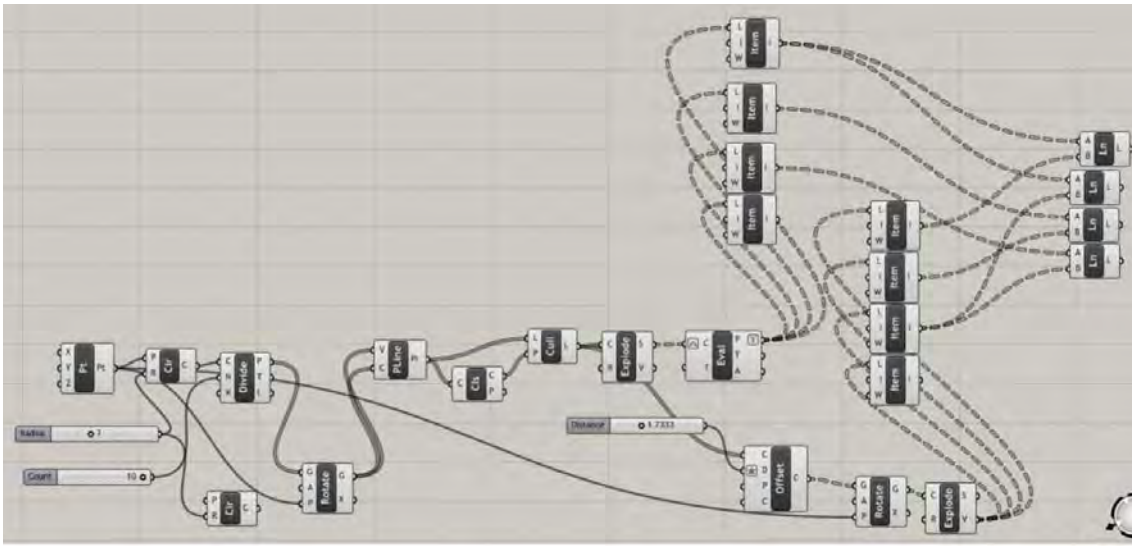
شکل ۱۴. روابط مثلثاتی بین دوازده‌ضلعی‌ها و دوازده‌ضلعی مرکز

در مورد گره‌ی کند دو پنج نیز، دستور ترسیم مانند ترسیم‌های قبلی است با این تفاوت که بعد از این‌که شبکه‌ی ده‌ضلعی، «آفست (متوازی)» شد، به اندازه‌ی $\frac{\pi}{10}$ چرخش می‌یابد، سپس نقاط مرکز یال‌ها یکی در میان به نقاط چرخش یافته متصل می‌شود (تصویر۱۵ و ۱۶). میزان «آفست (متوازی)» در این مرحله، بین ۰ تا ۵ تغییر می‌کند. دو «آفست (متوازی)» دیگر برای شکل گیوه‌ی ایجاد شده بین چندضلعی‌ها از ۰/۸ تا ۱/۳ می‌باشد که در شکل ۱۷ میزان آنها به ترتیب مشخص گردیده است.

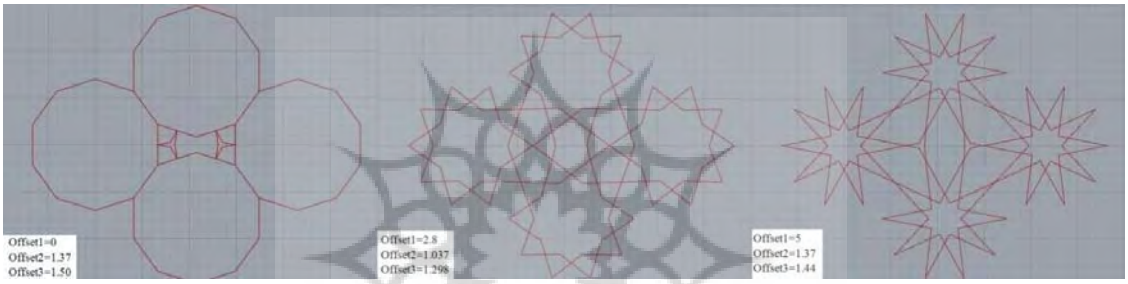


شکل ۱۵. الگوریتم برای گره کند دو پنج حاصل از شبکه‌ی چندضلعی (نگارندگان).

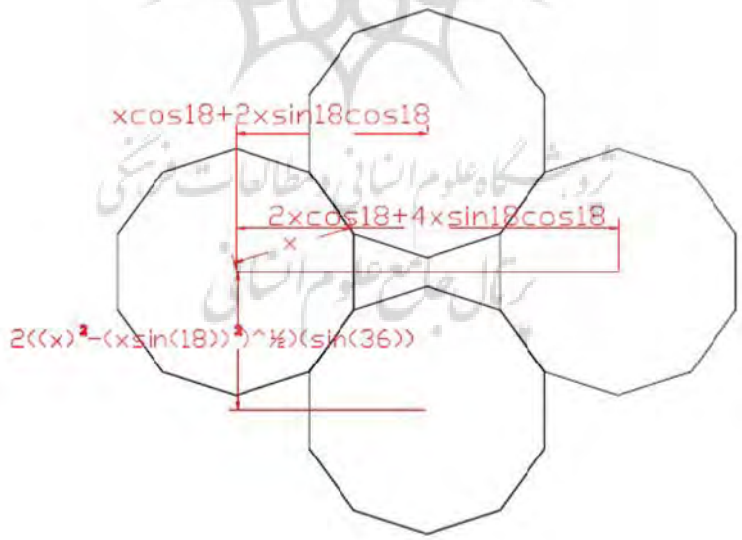
در شکل ۱۸، چهار عدد ده‌ضلعی یکسان مشخص شده است، چنانچه فاصله‌ی رأس هر ده‌ضلعی تا مرکز آن را x بنامیم، فواصل مختلف هشت‌ضلعی‌ها نسبت به هم بدست می‌آید.



شکل ۱۶. برنامه نویسی برای گره کند دوپنج



شکل ۱۷. گره کند دو پنج بدست آمده از شبکه‌های چندضلعی (نگارندگان)

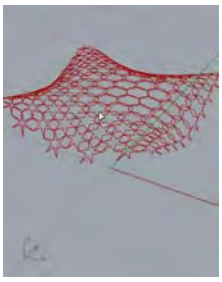


شکل ۱۸. روابط مثلثاتی بین ده‌ضلعی‌ها

آنچه تا به حال گفته شد، رسم نقوش روی سطح صاف است. در این روش، امکان قرار دادن نقاط گره روی سطوح منحنی نیز وجود دارد، در فرمول سطوح منحنی مثل سطح زینی با فرمول $z = \cos(x^2 - y^2)$ و یا سطح منحنی مشابه نیمه‌کروی با فرمول $z = \cos(x^2 + y^2)$، بازه‌ی اعداد باید بین ۱- تا ۱ باشد (شکل ۱۹ تا ۲۱).

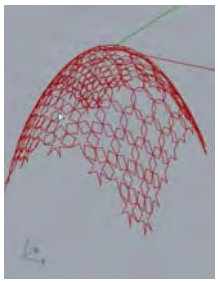
از این جهت شبکه‌ای مربعی با فاصله‌ای کمتر از ۱ واحد تعریف می‌شود، در مرحله‌ی بعد نقاط مرکزی هر کدام از

سلول‌های شبکه مشخص می‌شود، سپس بعد z نقاط با دستور «اِوَلوایِت (ارزیابی)»، طبق هر یک از فرمول‌های منحنی ذکر شده و گرفتن دو بعد x و y ورودی از نقاط مرکزی شبکه، محاسبه می‌شود و بعد نقاط حاصل با دستور «سرفیس‌گرید (شبکه‌ی سطحی)»[۲۱] به صورت یک سطح منحنی پیوسته در می‌آید. در نهایت نقش مورد نظر روی سطح مورد نظر با دستور «سرفیس مورف (شکل سطحی)»[۲۲] منتقل می‌شود (شکل ۱۹). برای نمونه، در شکل ۲۳ نقش سمت راست شکل‌های ۶ و ۱۳ با همین شیوه بر روی کره قرار گرفته است.



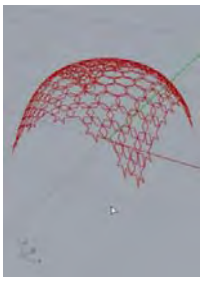
$z = \cos(x^2 - y^2)$

شکل ۱۹. نمودار زینی (نگارندگان)



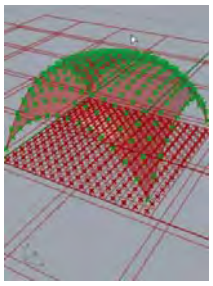
$z = -(x^2 + y^2)$

شکل ۲۰. نمودار منحنی (نگارندگان)

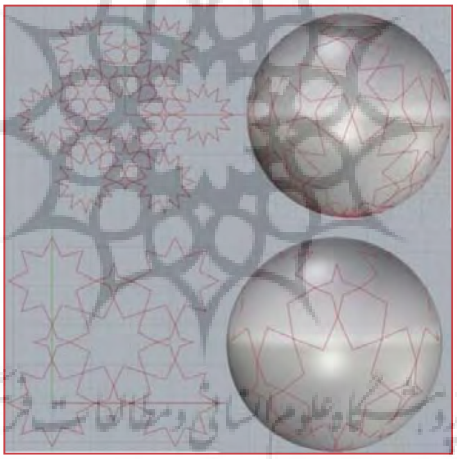


$z = \cos(x^2 + y^2)$

شکل ۲۱. نمودار منحنی (نگارندگان)



شکل ۲۲. انتقال نقاط از شبکه‌ی مربعی به روی منحنی (نگارندگان)



شکل ۲۳. تصویر نقوش هندسی بر روی کره (نگارندگان)

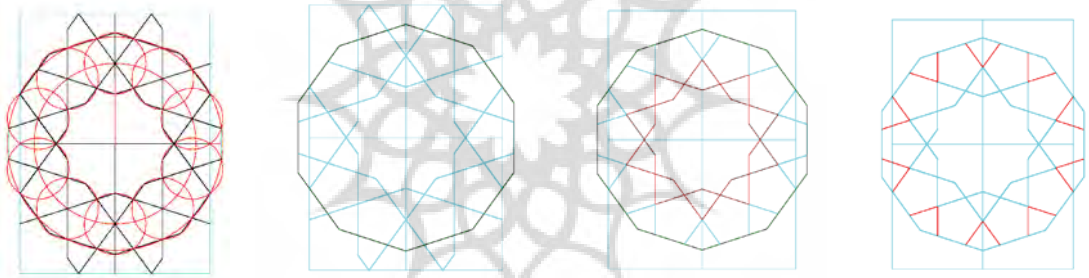
لازم به ذکر است که ترسیم گره بر روی احجام سه بعدی مانند گنبدها با روش‌های معمول دشوار می‌باشد به طوری که در طول حرکت بر روی سطح گنبد، شعاع و قطاع و ابعاد گنبد تغییر می‌کند و باعث تغییرات غیرخطی در شکل گره می‌شود که ترسیم شکل‌های متنوع گره بر روی سطوح گنبد بسیار سخت می‌شود. روش‌های موجود با توجه به این محدودیت‌ها، روش‌هایی پیچیده و زمان‌بری هستند. نکته‌ی مهم آن است که در زمان بروز آسیب به بنا که نیاز به مرمت آن باشد خیلی سخت می‌توان با روش‌های سنتی، قسمت‌های آسیب‌دیده را مجدداً ترسیم نمود. زیرا هم وقت زیادی برای ترسیم و محاسبات لازم است و هم این محاسبات به دلیل تغییر شعاع و قطاع و ارتفاع بسیار مشکل‌تر از محاسبات برای ترسیم گره روی سطوح مسطح است و مهم‌تر اینکه به سادگی نمی‌توان آن محاسبات را بارها انجام داد. در این هنگام حسن روش پارامتریک مشخص می‌شود زیرا با یکبار الگوریتم نویسی، به‌سادگی می‌توان گره را بر روی اشیای غیرمسطحی مانند کره و گنبد ترسیم نمود و به راحتی با تغییر پارامترها شکل را در عرض صدم ثانیه‌ای، با تغییر پارامترها با دقت ده‌هزارم واحد، ترسیم نمود. به‌طوری که با سرعت و با دقت بسیار خوبی می‌توان گره‌ی ترسیمی را بر روی گره‌ی مورد نیاز به مرمت تطبیق داد. در شکل‌های ۱۹ تا ۲۳ نمونه‌ای از کشیدن گره بر روی اشکال سه بعدی منحنی وجود دارد که همان طور که مشاهده می‌شود پس از انجام یک بار برنامه‌نویسی با

تغییر پارامترها مدل‌های مختلف گره بر روی آن در مدت زمان اندکی به شکل‌های مختلف ترسیم شده است.

۵- روش ترسیم پیشنهادی دوم:

در این بخش، سعی شده، تفسیری از زایایی نقوش هندسی شکسته به ویژه گره، به وسیله‌ی روش‌های ریاضی به صورت پارامتریک بیان شود. روش پیشنهادی دوم این پژوهش بر حسب متغیرهایی مثل تعداد اضلاع نقش درونی گره مورد نظر (مثل شمسه گره) و طول دهانه گره مورد نظر بیان می‌گردد. با این کار چون زاویه تابعی از تعداد اضلاع شمسه است و در محاسبه از قبل لحاظ شده، نیازی به محاسبه‌ی مجدد آن توسط کاربر نیست و با در نظر گرفتن تعداد اضلاع و طول دهانه گره می‌توان شکل را ترسیم کرد. در روش پیشنهادی دوم این پژوهش، مشکلات روش هانکین- مثل محاسبات شبکه‌های چندضلعی، نوع آنها، زاویه‌ی برخورد و در بعضی موارد نامنتظم شدن اضلاع مرتفع خواهد شد.

برای این کار ابتدا به طور موردی گره‌ی کند دو پنج در زمینه‌ی ده‌ضلعی که در بخش قبلی از روش شعاعی ترسیم شد به عنوان یک گره‌ی زایا تحلیل می‌شود. تحلیلی روی ویژگی‌های ریاضی و روابط بین اجزای آن انجام می‌شود و با تعریف متغیرهایی که در سطر اول شکل ۲۸ بیان شده، سعی می‌شود رابطه‌ای پارامتریک برای ترسیم این گره بیان شود. در واقع می‌توان با تحلیل ریاضی بین نقاط هر شکل، خطوط آن را به عنوان تابعی از متغیرهایی مثل تعداد اضلاع نقش درونی مثل شمسه و طول دهانه‌ی مورد نظر، در نظر گرفت. برای این کار می‌توان شکل را به صورت زیر تجزیه کرد: در شکل ۲۴ می‌توان خطوط را به سه دسته تقسیم نمود و هر دسته از خطوط را بر اساس دو نقطه‌ی ابتدایی و انتهایی آن که خود نقاط بر اساس روابط مثلثاتی تعریف شده‌اند، به عنوان یک تابع نوشت. در ابتدا، تحلیل نشان می‌دهد که نقاط روی سه دسته دایره که در شکل۲۴ (د) به رنگ صورتی هستند واقع شده‌اند.



(الف) (ب) (ج) (د)

شکل ۲۴. چند دسته کردن خطوط گره (نگارندگان).

خطوط به سه دسته‌ی کلی قابل تقسیم است:

الف) خطوط سبز که ده‌ضلعی محیطی گره را شامل می‌شوند و روی دایره‌ی بیرونی واقعند و به رنگ سبز نمایش داده شده‌اند (شکل ۲۴ (ج)).

ب) خطوط قرمز که از نقاط روی دایره‌ی درونی به نقاط روی دایره‌های کوچک میانی اتصال دارند (شکل ۲۴ (ب)).

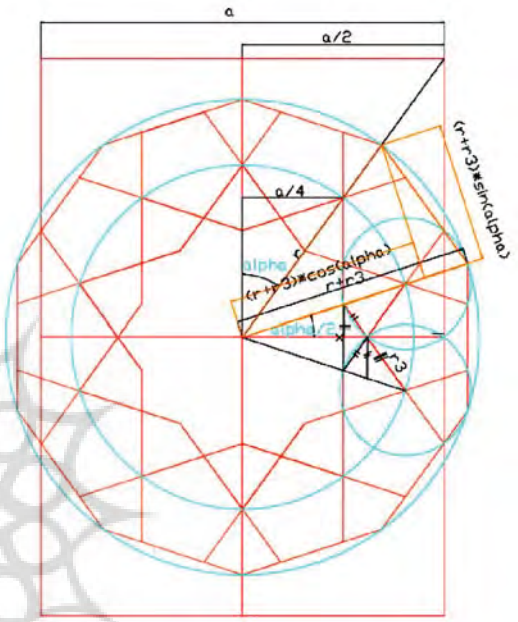
ج) خطوط قرمز که از نقاط مرکز دایره‌های کوچک میانی به نقاط روی ده‌ضلعی اتصال دارند (شکل ۲۴ (الف)).

همان طور که در شکل ۲۵ دیده می‌شود، دهانه‌ی مورد نظر a، می‌باشد. واگیره‌ی گره، مستطیلی به عرض $\frac{a}{2}$ و طول $\frac{b}{2}$ ($b>a$) و شعاع دایره‌ی میانی r و شعاع دایره‌های کوچک میانی r_3 و زاویه‌ی بین پره‌های شمسه نیز α می‌باشد. شایان ذکر است همه‌ی متغیرهای مزبور تابعی از a و تعداد اضلاع شمسه (n) می‌باشند به طوری که بر اساس روابط مثلثاتی $b=\frac{a}{\tan(\alpha)}$ و $r=4\cdot a\cdot\sin(\alpha)$ می‌باشد.

همان‌طور که در شکل ۲۵ دیده می‌شود برای بدست آوردن r_3 می‌توان از مشابهت مثلثها استفاده کرد و r_3 را برابر x دانست و می‌توان رابطه‌ای بین x و a برقرار کرد: $r_3=(\frac{a}{2})\cdot\sin(\frac{\alpha}{2})$ و زاویه‌ی α بر اساس تعداد اضلاع شمسه برابر است با $\frac{(4.180)}{n}$.

نقاط ابتدا و انتهای خطوط دسته‌ی اول که در شکل ۲۵ به رنگ سبز مشخص شده است یکی از اضلاع ده‌ضلعی محیطی گره را تشکیل می‌دهد، روی دایره‌ی بیرونی با شعاع $r+r_3$ می‌باشند. با توجه به این که مرکز دایره به عنوان مرکز مختصات است، محور x را خطی که مرکز دایره‌ی

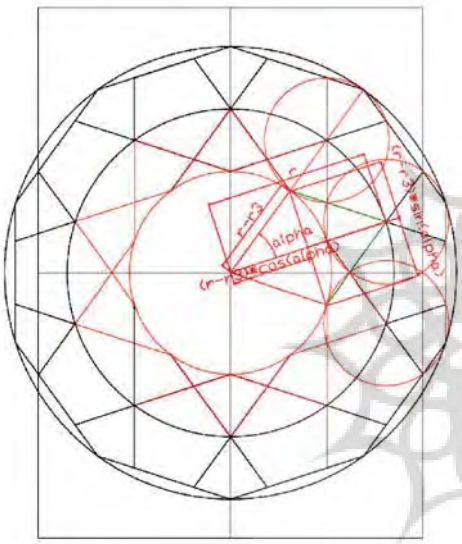
میانی را به مرکز دایره‌های کوچک میانی متصل می‌کند و خط عمود بر آن به عنوان محور y تعریف می‌شود (شکل ۲۵). نقطه‌ی ابتدایی خطوط دسته‌ی اول روی محور x به مختصات $\begin{bmatrix} r+r_3 \\ 0 \end{bmatrix}$ و نقطه‌ی انتهایی این خطوط به مختصات $\begin{bmatrix} (r+r_3)\cdot\cos(\alpha) \\ (r+r_3)\cdot\sin(\alpha) \end{bmatrix}$ می‌باشد.



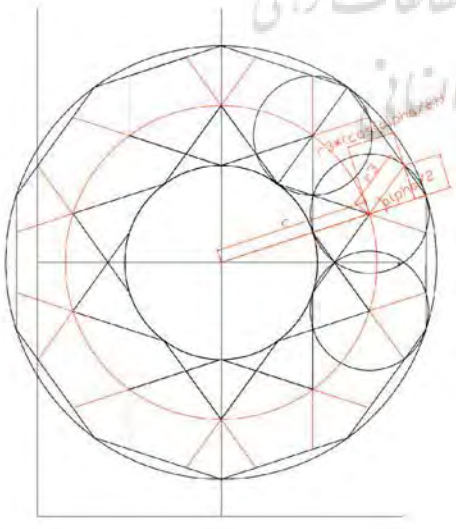
شکل ۲۵- خطوط دسته اول به رنگ سبز (نگارندگان)

نقاط ابتدای خطوط دسته‌ی دوم که در شکل ۲۶ به رنگ سبز مشخص شده است، مرکز دایره‌های کوچک روی دایره‌ی میانی به شعاع r و نقاط انتهایی روی دایره‌ی درونی صورتی به شعاع $r-r_3$ واقع هستند. همان‌طور که گفته شد، محور x خط واصل بین مرکز دایره‌ی میانی و مرکز دایره‌های کوچک میانی است و به همین‌رو، نقطه‌ی ابتدایی خطوط دسته‌ی دوم به مختصات $\begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$ و نقطه‌ی انتهایی این خطوط به مختصات $\begin{bmatrix} (r-r_3)\cdot\cos(\alpha) \\ \pm(r-r_3)\cdot\sin(\alpha) \end{bmatrix}$ می‌باشد (شکل ۲۶).

نقاط ابتدایی خطوط دسته سوم که به رنگ سبز در شکل ۲۷ نمایش داده شده است مرکز دایره‌های کوچک روی دایره‌ی میانی به شعاع r و نقاط انتهایی روی دایره‌های کوچک میانی هستند. یکی از نقاط خطوط دسته اول روی محور x با مختصات $\begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$ و نقطه‌ی انتهایی $\begin{bmatrix} r+(r_3\cdot(\cos(\alpha))) \\ \pm r_3\cdot\sin(\alpha) \end{bmatrix}$ می‌باشد (شکل ۲۷). با توجه به این که خطوط بر اساس تعداد اضلاع به صورت متقارن چرخش یافته‌اند، پس از تعریف هر دسته از خطوط، می‌توان یک حلقه[۲۳] تعریف کرد، در هر مرحله از تکرار این حلقه، یک خط به تعداد اضلاع شمسه‌ی داخل گره چرخیده می‌شود. تمام موارد گفته شده در بالا در زبان GDL در محیط Graphisoft ArchiCad 16 نوشته شده‌است (شکل ۲۸). با تغییر مقادیر تعداد اضلاع شمسه (n) می‌توان اشکال متفاوت گره را مشاهده کرد (شکل ۲۹). لازم به ذکر است این گره در دهضلعی محاط شده است.



شکل ۲۶. خطوط دسته‌ی دوم به رنگ سبز (نگارندگان).



شکل ۲۷. خطوط دسته سوم به رنگ سبز (نگارندگان).

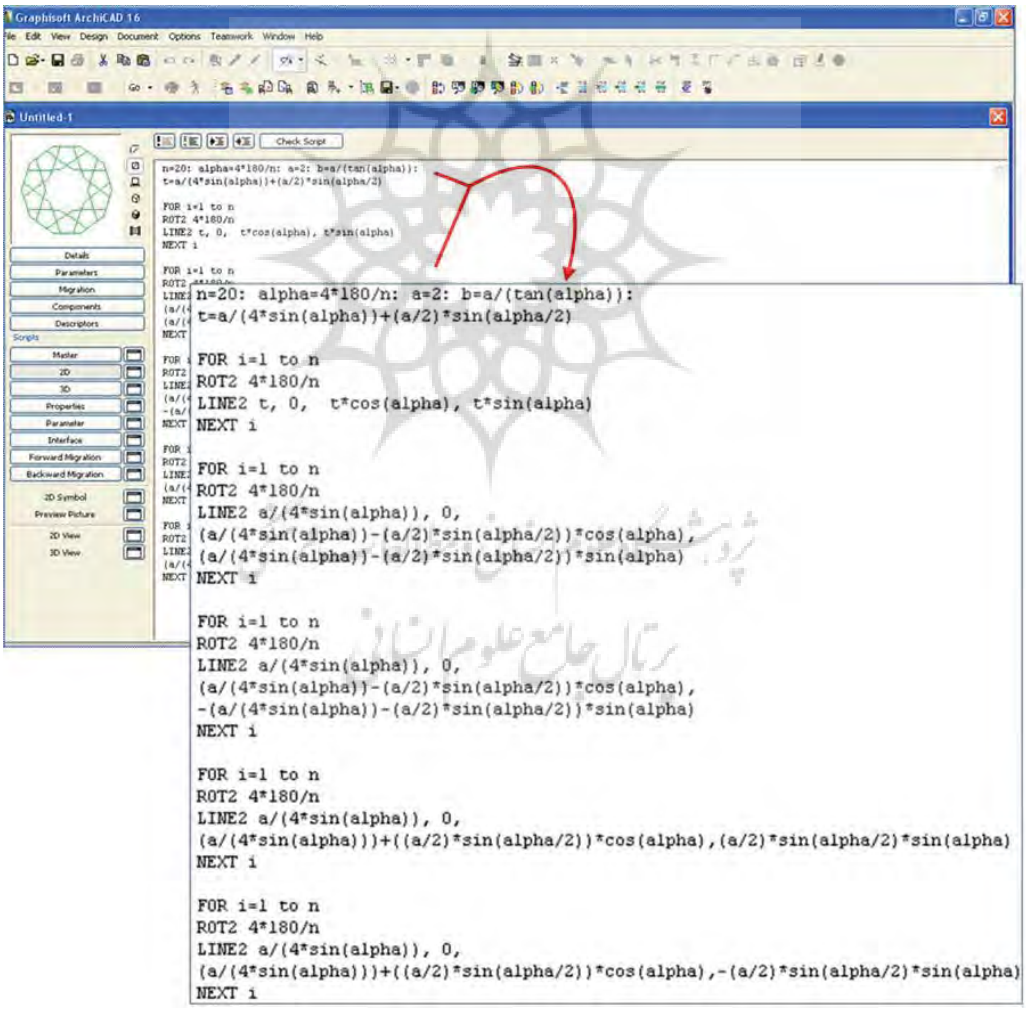
۶- مقایسه‌ی دو روش پیشنهادی:

در جدول ۱ قابلیت‌های دو روش پیشنهادی، با یکدیگر مقایسه می‌شوند. در روش پیشنهادی اول، تعیین نوع شبکه‌های چندضلعی و میزان فاصله‌ی نقاط میانی یال‌های شبکه‌ی چندضلعی تا چندضلعی‌های درونی که «آفست» شده اهمیت دارد.

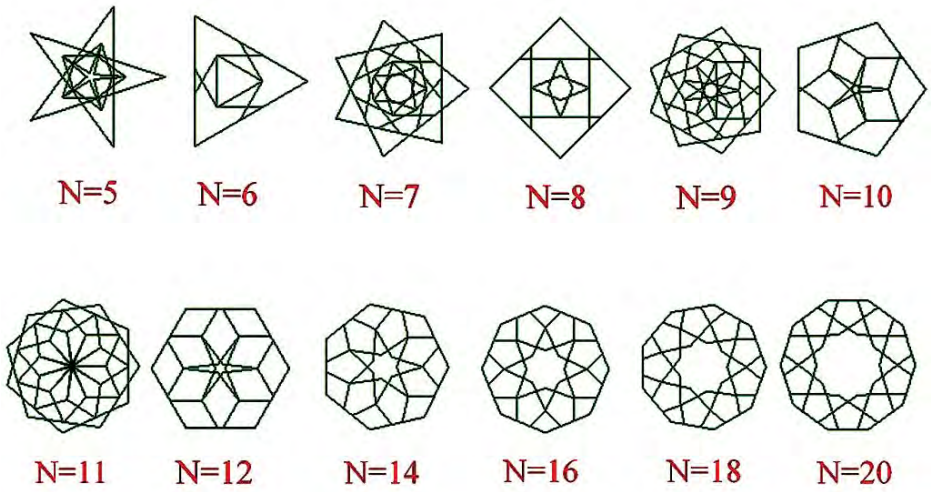
حسن روش پیشنهادی اول امکان ویرایش ترسیم با جابه‌جایی نقطه برخورد از میانه به مکان دیگر و یا تبدیل یک نقطه به دو نقطه -که در شکل ۱۰ دیده شد- روی یال چندضلعی‌ها می‌باشد که این امکان در روش دوم وجود ندارد.

در روش اول، امکان این که پس از تعریف هر دسته از خطوط، بتوان یک حلقه تعریف کرد که به طور نمونه در یک تابع تکرارشونده یک خط به تعداد اضلاع بتواند در هر مرحله چرخیده شود، وجود ندارد، ولی این امکان در روش دوم وجود دارد، به طوری که در روش دوم پس از تعریف هر دسته از خطوط، آنها به تعداد اضلاع در هر مرحله چرخیده می‌شود و شکل مورد نظر حاصل می‌شود.

در روش اول، پارامترها غیرمستقیم هستند. باید از قبل نوع شبکه‌ی چندضلعی تعیین گردد و میزان فاصله‌ی نقاط میانی یال‌های شبکه‌ی چندضلعی تا چندضلعی‌های درونی که آفست شده محاسبه شود ولی حسن روش دوم این است که، پارامترها مستقیم هستند و نیازی به محاسبات پیچیده نیست و با دانستن طول دهانه و تعداد اضلاع شمسه می‌توان شکل را بدست آورد چون قبلاً محاسبات توسط نگارندگان انجام شده است.



شکل ۲۸. برنامه‌نویسی خطوط گره به عنوان تابعی از تعداد اضلاع و دهانه در محیط Graphisoft ArchiCad 16 حاصل روش پیشنهادی (نگارندگان)



شکل ۲۹. اشکال متفاوت گره با تغییر مقادیر تعداد اضلاع شمسه (n) حاصل روش پیشنهادی (نگارندگان)

در روش پیشنهادی اول، امکان ایجاد اشکال مختلف با تغییر میزان فاصله‌ی نقاط میانی یال‌های شبکه‌ی چندضلعی تا چندضلعی‌های درونی که «آفست (متوازی)» شده وجود دارد که این امکان در روش پیشنهادی دوم، با تغییر طول دهانه و تعداد اضلاع شمسه‌ی گره مورد نظر وجود دارد. در جدول ۲ روش‌های موجود ترسیم گره با روش‌های پارامتریک جدید که توسط نگارندگان ارائه شده مقایسه می‌شوند.

جدول ۲: مقایسه‌ی روش‌های موجود ترسیم گره با روش‌های پارامتریک جدید پیشنهادی نگارندگان

محدودیت‌های روش‌های موجود	مزایای روش‌های پارامتریک پیشنهادی
زمان بر بودن و پیچیدگی محاسبات برای هربار ترسیم گره با تغییر پارامترهایی نظیر طول دهانه و تعداد اضلاع شمسه، از ابتدا نیاز به انجام محاسبات دارد.	سهولت در ترسیم گره با یکبار برنامه نویسی، در عرض کمتر از صدم ثانیه‌ای، اثر تغییر پارامترها روی رسم گره مشخص می‌شود.
دقت آن نیازمند محاسبات دقیق و وقت بیشتر است.	دقت این روش‌ها در حد ده هزارم واحد است و به طور پیوسته با تغییر پله‌هایی گسسته به اندازه ده هزارم واحد، شکل جدید ترسیم می‌شود.
رسم گره بر روی سطوح سه بعدی نظیر کره و گنبد بسیار پیچیده می شود.	رسم گره را بر روی سطوح سه بعدی ساده کرده است.
مرمت گره‌هایی که بر روی سطوح سه بعدی ترسیم شده‌اند با روش سنتی بسیار مشکل است چون یافتن قسمت‌های از دست رفته نیازمند چندین بار محاسبه است.	مرمت گره‌های روی سطوح سه بعدی را ساده نموده به نحوی که با تغییر پارامتر در مدت زمان اندک گره‌ی جدید ترسیم می‌شود و می‌توان آن را با طرح گره‌ی نیازمند به مرمت تطبیق داد و از آن برای بازسازی گره استفاده نمود.

۷- نتیجه‌گیری

کاربرد پارامتریک کردن رسم نقوش از این جنبه حائز اهمیت است که در هنگام مرمت، امکان ترسیم قسمت‌های اطراف نقوش از مرکز آن را فراهم می‌کند. به طور کلی باید توجه داشت که احتمال آسیب‌پذیری در اطراف نقوش هندسی در بناهای سنتی نسبت به قسمت‌های مرکزی آنها بیشتر است، بنابراین روشی مناسب است که بتوان قسمت‌های اطراف یک نقش را بر اساس قسمت‌های مرکزی آن ترسیم کرد. که این امر از طریق شیوه‌های ترسیمی پارامتریک حاصل می‌شود. در زمان مرمت با رسم نقوش از مرکز و تعریف خطوط شکل به گونه‌ی پارامتریک بر اساس طول دهانه‌ی مرکزی، می‌توان از مرکز، سایر قسمت‌هایش را نیز رسم کرد که این امکان در روش اول با تنظیم میزان «آفست» به وجود می‌آید در حالی که در روش دوم با تعیین تعداد اضلاع و طول دهانه‌ی مورد نظر امکان‌پذیر می‌شود.

برای رسم یک گره ممکن است نیاز باشد پارامترهای مختلف تغییر کنند که شرایطی حاصل شود تا گره‌ی مطلوب ترسیم شود. در روش‌های غیرپارامتریک سنتی برای هر بار

ترسیم یک گره با چند پارامتر باید کلیه‌ی محاسبات از ابتدا انجام شود به طوری که تغییر پارامترها به خصوص در سطوح غیر مسطح کاری بسیار دشوار است. این در حالیست که در روش پیشنهادی ما، با یک بار برنامه نویسی، با تغییر پارامترها در چند صدم ثانیه، گره‌ی جدید رسم می‌شود و به این صورت می‌توان گره‌ی رسم شده را با گره‌ی مورد مرمت تطبیق داد و از روی آن قسمت‌های آسیب دیده را مرمت نمود.

در این پژوهش، نشان داده شد، دو روش پیشنهادی قابل اجرا بوده و سرعت و دقت ترسیم گره را بالا می‌برد به طوری که مرمت گره‌ی آسیب دیده را به خصوص در احجام سه بعدی ساده‌تر می‌کند و این حسن روش‌های پارامتریک نسبت به روش‌های معمول است.

پی‌نوشت

۱. رساله‌ای منضم به ترجمه کتاب ابوالوفا بوزجانی مربوط به قرن چهارم هجری است.

۲. «ابوالوفا» و «عبدالرحمن» هر دو درباره روش پرگار با دهانه‌ی ثابت بحث کرده‌اند. این موضوع در اروپای دوره نوزایی و همچنین در نیمه قرن هجدهم میلادی دوباره متوجه هندسه دانانی چون لئوناردو داوینچی، جیرولامو کاردانو، نیکولو تارتاگلیا و لودویکو فراری قرار گرفته است (میر ابوالقاسمی و باقری، ۱۳۸۲: ۱۴۲-۸۹).

3. Bourgoin
4. Jay Bonner
5. Grunbaum and Shephard
6. Plugin
7. Grasshopper
8. Visual
9. Divide
10. Poly Line
11. Join
12. Evaluate
13. Item
14. Line
15. Closed
16. Cull
17. Eval (Evaluate Curve)
18. Offset
19. Explode
20. Weave
21. Surface Grid
22. Surface Morph
23. Loop

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی

فهرست منابع

- بوزجانی، ابوالوفا (۱۳۷۶)، هندسه‌ی ایرانی کاربرد هندسه در عمل، برگردان متن و گردآوری سید علیرضا جذبی، سروش. تهران.
- رئیس‌زاده، مهناز؛ مفید، حسین (۱۳۷۴)، احیای هنرهای از یاد رفته، انتشارات مولی، تهران.
- سعید، عصام؛ پرمان، عایشه (۱۳۷۷)، نقش‌های هندسی در هنرهای اسلامی، مترجم: مسعود رجب نیا، سروش، تهران:
- شعرباف، اصغر (۱۳۷۲)، گره و کاربندی، انتشارات سازمان میراث فرهنگی کشور، تهران.
- میرابوالقاسمی، سید محمدتقی؛ باقری، محمد (۱۳۸۲)، رساله عبدالرحمان صوفی درباره‌ی هندسه‌ی پرگاری، تاریخ علم، ۱، صص،۱۴۲-۸۹.
- نجیب اوغلو، گلرو (۱۳۷۹)، هندسه و تزیین در معماری اسلامی، مترجم: مهرداد قیومی، روزنه، تهران.
- Bonner, Francis (2000). Islamic Geometric Patterns: Their Historical Development and Traditional Methods of Derivation.
- Bourgoin, Jules (1973). Arabic Geometrical Pattern and Design, Dover Publications.
- Cast´era, Jean-Marc (1999). Arabesques: Decorative Art in Morocco, ACR Edition.
- Gombrich, Ernst (1998). The Sense of Order: A Study in the Psychology of Decorative Art, PhaidonPress Limited, Second Edition.
- Gr¨unbaum, Branko, Shephard, Geoffrey (1987). Tilings and Patterns, New York: W. H. Freeman Company.
- Gr¨unbaum, Branko, Shephard, Geoffrey (1992). Interlace Patterns in Islamic and Moorish Art, Leonardo, Vol. 25, pp. 331–339.
- Hankin EH, (1925). The Drawing of Geometric Patterns in Saracenic Art, Memoirs of the Archaeological Society of India, Vol. 15, Government of India.

- Hankin E. Hanbury (1925). Examples of Methods of Drawing Geometrical Arabesque Pattern, The Mathematical Gazette, pp. 371–373.
- Hankin E. Hanbury (1934). Some Difficult Saracenic Designs II, The Mathematical Gazette, pp.165-168.
- Hankin E. Hanbury (1936). Some Difficult Saracenic Designs III, The Mathematical Gazette, pp. 318–319.
- Kaplan Craig S., (2002). Computer Graphics and Geometric Ornamental Design, PhD Dissertation Thesis, University of Washington.

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی