فصلنامه بورس اوراق بهادار
سال اول/ شماره۱ / بهار ۸۷
ص ۱۹۰-۱۶۷

# قیمت گذاری ریسکهای مالی و بیمه ای تحت تبدیل وَنگ

احمد صلاح نژاد قلعه جوقی[۱]

## چکیده

به طور کلی مدلهایی که برای قیمت‌گذاری داراییها و ریسکهای مالی به کار می‌روند، بر پایه برخی فرضیات بنا نهاده شده‌اند. مدلهای قیمت‌گذاری مالی همچون CAPM، بلاک و شولز همگی به فرض توزیع آماری مثل Lognormal برای قیمت آینده و Normal برای نرخ بازده، وابسته هستند. چنین فرضی اغلب در عمل قابل دستیابی نیست و نبود آن نیز بر صحت نتایج قیمت‌گذاری تاثیر نامطلوبی خواهد داشت. از سوی دیگر بسیاری از ریسکهای مالی و بیمه‌ای به لحاظ نوع قراردادها مانند قرارداد اختیار معامله[۲] و بیمه‌نامه اتکایی Stop-loss به یکدیگر شباهت دارند. هر دو قرارداد، شامل یک پرداخت تصادفی در سررسید با توجه به قیمت از پیش تعیین شده[۳] برای Option و یا یک سقف پرداخت خسارت[۴] برای قرارداد بیمه ای Stop loss هستند. این شباهتها موجب علاقه‌مندی بسیاری از محققین برای یافتن مدل مناسبی برای قیمت‌گذاری یکپارچه ریسکهای مالی و بیمه‌ای شده است.

---

۱. فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد رشته آمار بیمه از دانشگاه علامه طباطبائی

2. Option
3. Strike price
4. Policy limit

در این مقاله قصد داریم با بررسی تلاشهای انجام شده روشی را در راستای یکپارچه سازی چارچوب قیمت‌گذاری ریسکهای مالی و بیمه‌ای، ارائه کنیم. در این روش با استفاده از تبدیل ونگ:

$$F^*(x) = \Phi[\Phi^{-1}[F(x)] + \alpha]$$

توزیع ریسک به توزیعی جدید و با محوریت تعیین "پارامتر ریسک" تبدیل می‌شود که در آن F تابع توزیع قیمت یا خسارت و $\alpha$ پارامتر ریسک است. با استفاده از این روش، تکنیک جدیدی برای برداشتن فرض توزیع از مدلهای مالی نظیر بلاک و شولز ، نیز حاصل می‌شود. چارچوب قیمت‌گذاری حاصل از تبدیل ونگ در هر دو حالت تئوریک و عملی می‌تواند نتایج CAPM و مدل بلاک و شولز را با فرضیات لازم، بازیابی کند. در عین حال در زمینه براوردهای تجربی و قیمت‌گذاری مشتقات و اوراق بهادار، تکنیک جدیدی را ارائه می‌کند.

**واژگان کلیدی**: ریسکهای مالی، ریسکهای بیمه ای، تبدیل ونگ، پارامتر ریسک، قرارداد اختیار معامله، بیمه نامه اتکایی، مشتقات مالی، توزیع خسارت، توزیع قیمت

طبقه‌بندی موضوعی: G12-G13



## ـ مقدمه

قیمت‌گذاری ریسکها و داراییهای مالی یکی از اصلیترین و مهمترین موضوعات مورد توجه برای مؤسسات مالی و شرکتهای بیمه است. در واقع این موضوع یکی از ابتدایی‌ترین ضرورتها برای فعالیت این مؤسسات محسوب می‌شود. بر این اساس، از گذشته نیاز زیادی به تحلیل و اندازه‌گیری ریسک احساس شده است که منجر به پیشنهاد و استفاده از مدلها و روشهای بسیار متنوع برای این امر شده است.

اگر چه این روشها، بهترین روشهای موجود محسوب شده‌اند، ولی برای استفاده در معاملات واقعی بازارهای مالی، کارایی کافی نداشته‌اند، زیرا محدودیتهای بسیاری به عنوان فرضهای اولیه در آنها تعریف شده‌اند.

از سویی دیگر در سالهای اخیر نیاز به پایه‌ریزی یک روش جامع و قابل انعطاف برای قیمت‌گذاری انواع قراردادهای بیمه در شرکتهای بیمه احساس شده است، که این امر موجب برگزاری سمینارهای متعددی در مجامع علمی شده است.

مدلهای قیمت‌گذاری مالی خود نیز در نبود فرضهای مربوط به توزیع ، ناکارا عمل می‌کنند. دستیابی به فرضهای این مدلها نیز در دنیای واقعی بسیار سخت است.

بنابراین مسئله اصلی در این مقاله، عدم وجود چارچوبی یکپارچه برای روش قیمت‌گذاری داراییها و تعهدات است. و در درجه دوم وجود نواقص و نارساییهای مدلهای موجود در تقابل با وضعیتها و شرایط واقعی (و نه تئوریک) بازار است.

توابع پرداخت و شرایط قراردادهای بیمه از بسیاری جهات همانند قراردادهای مالی هستند، معهذا روشهای قیمت‌گذاری مالی علیرغم شباهتی که بین بسیاری از ریسکهای مالی و بیمه‌ای هست، برای قیمت‌گذاری ریسکهای بیمه‌ای ناکارا هستند، زیرا به توزیع قیمت دارایی وابسته هستند و این در حالیست که ریسکهای بیمه‌ای طیف گسترده‌ای از توزیعهای استاندارد و غیر استاندارد را در برمی‌گیرند. از سوی دیگر، با توجه به نزدیکی و ارتباط تنگاتنگ و رو به رشد مؤسسات بیمه و مؤسسات مالی در سراسر جهان، فعالیتهای یک شرکت بیمه به عنوان یک نهاد مالی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد و مؤسسات بیمه برای ارزیابی تعهدات آینده خود نیازمند استفاده از تکنیکهای مالی برای سرمایه‌گذاری هستند. به این ترتیب، یافتن روشی یکپارچه برای قیمت‌گذاری و ارزیابی داراییهای مالی و تعهدات بیمه ای از ضروریات جدی به شمار می رود.

این تحقیق بر اساس روشها و مدلهای اساسی قیمت‌گذاری ریسکها پایه‌ریزی شده است و تمامی فرضیات استاندارد، در این روش نیز به کار گرفته شده است. در زمینه قیمت‌گذاری مالی، اصلیترین فرض در روش حاصل از تبدیل ونگ , همان "ارزیابی خنثی[5] " است و در زمینه قیمت‌گذاری بیمه‌ای، تمامی فرضهای مربوط به محاسبات قیمت ریسک بیمه‌ای (حق بیمه) اعم از Risk Loading ، و Additivity ، فرض نبود آربیتراژ در بازار بیمه و سایر خواص اصل حق بیمه مورد توجه قرار گرفته است.

انتظار می رود در پایان این مقاله به موارد زیر دست یابیم:

معرفی یکی از جدیدترین چارچوبهای کارا برای اصلاح روشهای قیمت‌گذاری ریسکهای مالی و بیمه‌ای.

قیمت‌گذاری تمامی انواع داراییهای مالی و تعهدات بیمه‌ای به صورت یکپارچه که شامل تمام توزیعهای آماری برای قراردادهای قابل معامله و غیر قابل معامله است.

رهاسازی برخی از فرضهای ساختاری مدلهای مالی برای قیمت‌گذاری اوراق بهادار، که معمولا در عمل قابل دستیابی نیستند.

بررسی نتایج روش قیمت‌گذاری حاصل از تبدیل ونگ در عمل و ارائه تکنیکهای کاربردی.

در این مقاله، ابتدا چند مدل مهم و سنتی از قبیل CAPM، بلاک و شولز را به صورت مختصر بررسی می کنیم و سپس این روشها قیمت گذاری را با روش Wang با استفاده از داده های واقعی مقایسه می‌کنیم. سپس روش قیمتگذاری Wang برای قیمت گذاری قرارداد اختیار معامله[6] در حالتهای کاربردی و همچنین محاسبه حق بیمه انواع متنوع قراردادهای بیمه معرفی شده و مورد آزمایش و استفاده قرار می گیرد. در بخش قیمت گذاری ریسکهای مالی، این امر با

[5] Risk Neutral Valuation
[6] Option

جمع آوری داده های خاصی از سهام برخی شرکتها از بورس اوراق بهادار تهران و چند بورس خارجی انجام شده است. و در بخش کاربرد بیمه ای، روش قیمت گذاری و محاسبه حق بیمه با تبدیل ونگ، با جمع آوری داده های خسارت از چند شرکت بیمه داخلی پیاده سازی شده است.

به موازات تحقیقات انجام شده در این مقاله، یک بسته نرم افزاری با کاربرد محدود نیز توسط مولف برای انجام محاسبات مرتبط، با قابلیت محاسبه قیمت مشتقات مختلف داراییها و اوراق بهادار مخصوصا قرارداد اختیار معامله وهمچنین محاسبه حق بیمه برای انواع قراردادهای بیمه، با استفاده از روش ونگ، آماده سازی شده است که قابلیت توسعه برای استفاده های عملی و وسیع را نیز داراست.

## مدلهای قیمت‌گذاری مالی

در این بخش ۲ مدل مهم از مدلهای قیمتگذاری داراییها شامل CAPM، بلاک و شولز را به طور خلاصه بررسی می کنیم. به منظور ذکر برخی مفاهیم و تعاریف مقدماتی ضروری است.

یک ریسک مالی را می توان به شکلهای مختلفی تعریف کرد. ریسکهای مالی بسته به نحوه معاملات و طبیعت بازارها انواع مختلف دارند که مهمترین آنها عبارتند از: ریسک بازار[۷]، ریسک اعتباری[۸] و ریسک نرخ بهره[۹]. ریسک مورد نظر برای قیمتگذاری در این مقاله ریسک بازار است که به صورت زیر تعریف می شود:

---

[7] Market Risk (Systematic Risk)
[8] Credit Risk
[9] Interest Rate Risk

تعریف (ریسک بازار): قسمتی از هر ریسک سرمایه گذاری که با ایجاد تنوع[10] در داراییهای پورتفو قابل اجتناب نیست و به صورت کواریانس بین بازده سرمایه گذاری و بازده پورتفوی بازار اندازه گیری می شود.

به عبارت دیگر ریسک بازار، بخشی از کل ریسک سرمایه گذاری ناشی از شرایط اقتصادی بازار است و بوسیله ایجاد تنوع در نوع داراییهای انتخاب شده در ÷ورتفوی سرمایه گذاری قابل حذف نیست.

از سوی دیگر "ریسک بیمه ای" به طور ساده به "متغیر تصادفی خسارت" در بیمه اشاره دارد که با استفاده از ارزش اقتصادی قابل ارزیابی و جبران باشد. این تعریف از ریسک بیمه ای، ما را به مفهوم بیمه های خسارتی یا اصطلاحا بیمه های غیرزندگی می رساند.

## مدلهای قیمت‌گذاری مالی

عموما مدلهای قیمتگذاری مالی چگونگی نقش بازارهای مالی و تاثیر آن را در تصمیم گیری افراد برای خرید و فروش، قیمتگذاری و مدیریت سبد دارایی، نشان می دهند. مهمترین عوامل تاثیرگذار در این تصمیمگیری، میزان ریسک و بازده است. مدل قیمتگذاری دارایی‌های مالی یا همان CAPM چگونگی تاثیر و ارتباط ریسک را با نرخ بازده مورد انتظارسرمایه گذاری و بالطبع، قیمت داراییها نشان می دهد. با وجو برخی محدودیتها CAPM همچنان بیشترین کاربرد را در موارد عملی دارد.

اگر $r_i$ نرخ بازده دارایی $i$ در سبد سرمایه گذاری، $r_M$ نرخ بازده کل بازار[11] و $r_f$ نرخ بازده بدون-ریسک[12] باشد، معادله CAPM به صورت زیر است:

---

[10] Diversification

[11] Market Portfolio Rate of Return

[12] Risk-free Interest Rate

$$E(r_i) = r_f + \beta_i \left[ E(r_M) - r_f \right]$$

که در آن ضریب $\beta$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\beta_i = \frac{Cov(r_i, r_M)}{\sigma_M^2} \qquad , \qquad \beta_M = 1.$$

برخی از مهمترین فرضهای اساسی که CAPM بر آنها اتکا دارد، به صورت زیر است:

۱) همه سرمایه گذاران ریسک گریز[۱۳] هستند و در انتخاب داراییهای پورتفوی سرمایه گذاری خود به روش میاگین-واریانس مارکوتیز[۱۴] پایبندند.

۲) سرمایه گذاران می تواند به مقدار نامحدودی وام با نرخ بهره بدون ریسک دریافت یا واگذار کنند.

۳) سرمایه گذاران درباره پارامترها و نوع توزیع متغیر تصادفی نرخ بازده اوراق بهادار و داراییها و نرمال بودن توزیع توام آن، اتفاق نظر دارند.

۴) تعداد سرمایه گذاران و داراییها به حد کافی زیاد است و هیچ کدام از آنها نمی توانند به تنهایی بر قیمت یک دارایی تاثیر بگذارند.

آنچه که مسلم است، در کاراترین بازارهای مالی نیز این شرایط به نحو مطلوب به وجود نمی آیند، بنابراین قیمتهای ارزیابی شده با CAPM ممکن است در بسیاری موارد با واقعیت فاصله داشته باشند.



---

13 Risk Averse
14 Matrkowitz Mean-Variance Diversified Portfolio

یکی دیگر از مدلهای مالی مهم، مدل بلاک و شولز است که برای قیمتگذاری قراردادهای اختیار معامله با سررسید معین پیشنهاد شده و مورد استفاده قرار می گیرد. مدل بلاک و شولز نیز با احراز برخی فرضیات و شرایط حاصل می شود. یکی از مهمترین فرضها در این مدل این است که قیمت آینده دارایی تحت قرارداد اختیار معامله، دارای توزیع Lognormal به صورت زیر باشد:

$$S_T \quad LN\left[\ln S_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T - t) \ , \ \sigma\sqrt{T - t}\right]$$

که در آن $S_t$ قیمت فعلی دارایی، $\sigma$ انحراف معیار بازده دارایی[۱۵]، $\mu$ بازده مورد انتظار دارایی و $(T - t)$ زمان باقیمانده تا سررسید قرارداد است.

قیمت هر اوراق بهاداری مانند قرارداد اختیار معامله، برابر ارزش فعلی آن قسمت از توزیع قیمت آینده دارایی اصلی است که قرارداد اختیار معامله برای خرید یا فروش آن، مورد استفاده قرار خواهد گرفت. با فرض محاسبه این ارزش فعلی با نرخ تنزیل حاصل از نرخ بهره بدو ریسک و به طور کلی به کارگیری روش ارزیابی خنثی برای محاسبه قیمت، قیمت یک قرارداد اختیار خرید[۱۶] یک دارایی در سررسید مشخص، با استفاده از فرمول بلاک و شولز به صورت زیر بدست آمده است:

$$P(S \ , \ T - t) = S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2)$$

به ترتیبی که $d_1$ و $d_2$ در آن به شرح زیر هستند:

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r_f + \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \qquad , \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}$$

[15] Volatility
[16] European Call Option

همانطور که واضح است، فرمول بلاک و شولز به میزان $\mu$ بازده مورد انتظار دارایی، ضریب $\beta$ ی دارایی و میزان ریسک بازار آن بستگی ندارد. بنابراین در این فرمول هیچ نشانی از ریسک گریزی یا ریسکپذیری قیمتگذار مشاهده نمی شود و به همین دلیل با روش قیمت گذاری خنثی مطابقت کامل دارد.

## قیمت گذاری ریسکهای بیمه‌ای

قیمت یک ریسک بیمه ای همان حق بیمه ای است که بیمه گر از بیمه گذار برای پوشش بیمه ای که می دهد، دریافت می کند. برای محاسبه قیمت یک ریسک بیمه ای از طریق حق بیمه، به قاعده ای[۱۷] برای تعیین حق بیمه نیاز داریم. چنین قاعده ای اصل حق بیمه[۱۸] نامیده و معمولا با $H[.]$ نشان داده می شود. تمرکز ما در این مقاله روی حق بیمه هاییست که شامل میانگین خسارتهای تحت بیمه و یک بارگذاری ریسک[۱۹] (برای جبران عدم اطمینان موجود در نرسیدن میانگین آماری خسارتهای مورد انتظار به خسارتهای واقعی می باشد) است. به این ترتیب برای تابع $H[.]$ خواهیم داشت:

$$H[X] \geq E[X] \quad \Rightarrow \quad H[X] = E[X] + \underbrace{\alpha E[X]}_{\text{Risk Loading}}$$

اغلب محاسبان فنی بیمه[۲۰] برای اصول حق بیمه پیشنهاد شده، خصوصیاتی را قائل شده اند که بعدا در اصل حق بیمه ونگ به آنها خواهیم پرداخت.

---

[17] Rule
[18] Premium Principle
[19] Risk Loading
[20] Actuaries

## مدلهای مالی برای قیمت‌گذاری بیمه

همانطور که قبلا اشاره کردیم به دلیل برخی شباهتها در قراردادهای مالی و بیمه، برخی از محققین سعی کرده اند مدلهای مالی را در بیمه به کار برند که به ۲ مورد از این تلاشها به اختصار اشاره می شود.

## CAPM برای بیمه[۲۱]

مهمترین شاخص این مدل به صورت بازده کل دارایی[۲۲] (ROE) یک شرکت بیمه تعریف می شود. ROE به صورت زیر حاصل می شود:

$$ROE = \frac{Y}{W} = r_a \frac{A}{W} + r_u \frac{P}{W} = r_a(\frac{L}{W} + 1) + r_u \frac{P}{W}$$
$$\Rightarrow \qquad ROE = r_a(ks + 1) + r_u s$$

که در آن Y درآمد خالص، W کل دارایی، A میزان داراییهای سرمایه ای (سرمایه + تعهدات)، P میزان حق بیمه جمع آوری شده و L میزان تعهدات است. همچنین $r_a$ نشانگر نرخ سود سرمایه گذاری از داراییهای سرمایه ای و $r_u$ نشانگر نرخ سود مستقیم حاصل از قراردادهای بیمه (بخشی از حق بیمه) است.

از سوی دیگر، نرخ بازده کل دارایی بیمه گر در بازار بیمه با استفاده از فرمول CAPM نیز به صورت زیر قابل دستیابی است؛

$$E(ROE) = r_f + \beta_{ROE}[E(r_M - r_f)]$$

به این ترتیب فرمول CAPM برای بیمه به صورت زیر خواهد بود:

---

21 Insurance CAPM
22 Return On Equity (ROE)

$$E(r_u) = -kr_f + \beta_u [E(r_M - r_f)]$$

چنین مدلی برای استفاده های عملی، دارای نارساییها و محدودیتهای زیر است:

مشکل بودن ارزیابی و انتخاب ROE.

مشکل بودن براورد فاکتور k که به میزان تعهدات آینده بستگی دارد.

مدل مذکور احتمال ورشکستگی[۲۳] را در پارامترها و روابط بین آنها به حساب نمی آورد و این با با فرض عدم ورشکستگی[۲۴] در محاسبات بیمه منافات دارد.

به دلیل عدم تقارن توزیع نرخ بازده در بلند مدت، این نرخ از توزیع نرمال تبعیت نمی کند.

## مدل قیمت‌گذاری اختیار معامله برای بیمه[۲۵]

یک قرارداد بیمه به دلیل داشتن محتوای مشترک در پرداخت تصادفی در آینـده، مـی توانـد مانند یکی از مشتقات مالی تفسیر شود. این پرداخت بـه تغییـرات ارزش دارایـی تحـت معاملـه و داراییها (یا تعهدات) دیگر بستگی دارد. بنابرای قیمت یک قرارداد تـابعی از قیمـت دارایـی تحـت معامله، شبیه آنچه که در قرارداد اختیار معامله وجود دارد، خواهد بود. به شباهت زیر توجه کنید:

قیمت قرارداد اختیار معامله:

$$P(S_t, K) = \int_K^{\infty} (S_T - K) f(S_T) dS_T$$

حق بیمه بیمه اتکایی[۲۶]:

$$P = \int_K^{\infty} (x - K) f(x) dx$$

---

23 Ruin Probability
24 No Bankruptcy Assumption
25 Option Pricing Model for Insurance
26 Stop-Loss Reinsurance Premium

با این وجود استفاده از مدل قیمتگذاری اختیار معامله برای تعیین حق بیمه قرارداد بیمه اتکایی با برخی از مفروضات ناسازگاری اساسی داردکه استفاده از آنرا به این منظور با مشکل مواجه می کنند. این ناسازگاریها به شرح زیر هستند:

**۱) پوشش ریسک[27]:**

قیمت محاسبه شده در نظریه قیمتگذاری قرارداد اختیار معامله و فرمول بلاک و شولز برابر است با حداقل هزینه لازم برای انتخاب پورتفویی که پوششدهی ریسک شده. در حالیکه هیچ ریسک بیمه ای و هیچ پورتفویی از آن به طور کامل و مطلق قابل پوششدهی نیست، زیرا احتمال ورشکستگی (عدم پوشش دهی ریسک) همیشه عددی غیر صفر است.

**۲) محاسبه ارزش فعلی با نرخ تنزیل[28]:**

روش ارزیابی خنثی برای قیمتگذاری قراردادهای اختیار معامله و داراییها به استفاده از نرخ بازده بدون ریسک برای یافتن ارزش فعلی ارزشهای آتی می انجامد. در حالیکه محاسبان فنی بیمه نرخ بازده تصحیح شده ریسک[29] را به جای نرخ بازده بدون ریسک به کار می برند، زیرا ارزیابی آنها لزوما خنثی نیست و می تواند به ریسک گریزی بیمه گر بستگی داشته باشد.

**۳) تفاوتهای مربوط به توزیع[30]**

تبدیل وَنگ

تبدیل ونگ یکی از حالتهای خاص عملگرهای پیچشی[31] است، که تابع توزیع یا حیات را برای متغیر تصادفی خسارت یا قیمت، به توزیعی جدید، تبدیل می‌کند. اگر تابع تبدیل را با g نشان دهیم، چنین تبدیلی به صورت عمومی باید ۴ خاصیت زیر را دارا باشد:

---

[27] Hedging
[28] Discount Rate
[29] Risk Adjusted Interest rate
[30] Distributional Differences

۱) $0 \le g(u) \le 1$ و $g(0)=0$ و $g(1)=1$

۲) تابع $g$ صعودی است (وقتی مشتق موجود باشد، $0 \le g'(u)$).

۳) وقتی مشتق دوم موجود باشد، $0 \le g''(u)$.

۴) $g'(0)=\infty$.

اگر $g(u) = \Phi[\Phi^{-1}(u) + \alpha]$ ، تبدیل ونگ به فرمهای هم ارز زیر برای متغیر تصادفی خسارت و دارایی، با توابع توزیع و حیات آنه به شکل زیر در می‌آید:

الف) برای متغیر تصادفی خسارت $X$:

$$S_X^*(t)=\Phi\left\{\Phi^{-1}(S_X(t))+\alpha\right\} \equiv F_X^*(t)=\Phi\left\{\Phi^{-1}(F_X(t))-\alpha\right\}$$

ب) برای متغیر تصادفی دارایی $A$:

$$S_A^*(t)=\Phi\left\{\Phi^{-1}(S_A(t))-\alpha\right\} \equiv F_A^*(t)=\Phi\left\{\Phi^{-1}(F_A(t))+\alpha\right\}$$

که در آن $\alpha$ پارامتر ریسک تبدیل است.

بر این اساس فرمول اصل حق بیمه ونگ بر اساس تبدیل ونگ به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$H[X;\alpha]=\int_0^{\infty} g[S_X(x)]\,dx = \int_0^{\infty}\{\Phi\,[\Phi^{-1}(S_X(x))+\alpha]\}\,dx$$

اصل قیمتگذاری ونگ بیشتر خواص لازم را برای قیمتگذاری مناسب ریسکهای مالی و بیمه‌ای داراست. خاصیتهای این اصل به شرح زیر خواهد بود:

[31] Distortion Operator

یکی از مهمترین خاصیتهای اصول قیمتگذاری جمع‌پذیری[32] آنهاست که این خاصیت مهمترین عامل برای تحقق شرایط نبود آربیتراژ در بازارهای مالی و بیمه‌ای است. مدل قیمتگذاری حاصل از تبدیل ونگ در حالت کلی جمعپذیر نیست، بنابراین نمی‌تواند شرایط نبود آربیتراژ را در بازار محقق سازد.

با اینحال این مدل برای ریسکهای همنوا[33] که مجموعه بزرگی از ریسکهای بیمه موجود در قراردادهای بیمه و بیشتر مشتقات مالی را شامل می‌شوند، جمعپذیر است. به عبارت دیگر، از جنبه عملی اغلب قریب به اتفاق قراردادها شامل ریسکهای همنوا هستند و مدل قیمتگذاری ونگ برای آنها جمعپذیر است. به عنوان مثال قرارداد اختیار خرید در بازارهای مالی و قرارداد بیمه‌های اتکایی، لایه‌های خسارت بیمه و تمام قراردادهای شامل فرانشیز در بازارهای بیمه نسبت به ریسک پایه (متغیر تصادفی خسارت) همنوا هستند.

نکته مهم این است که برای قیمتگذاری برخی از مشتقات مالی که شامل ریسکهای غیر همنوا هستند چه باید کرد؟ قرارداد اختیار فروش[34] یکی از این موارد است. پاسخ این سوال در استفاده از تساوی فروش-خرید[35] قرارداد اختیار معامله نهفته است. برای قیمت گذاری قرارداد اختیار فروش، با استفاده از مدل ونگ، قیمت اختیار خرید را محاسبه می‌کنیم و سپس با استفاده از تساوی فروش-خرید، قیمت اختیار فروش را بدست می‌آوریم. قیمت بدست آمده با شرط نبود آربیتراژ در بازار سازگاری دارد.

---

32 Additivity
33 Comonotonic Risks
34 Put Option
35 Put-Call Parity

## بازیابی CAPM و مدل Black-Scholes تحت تبدیل ونگ

یکی از خاصیتهای دیگر تبدیل ونگ، حفظ توزیع متغیرهای تصادفی نرمال و لاگ‌نرمال پس از تبدیل است، به ترتیبی که تنها تغییر در پارامتر مکانی[۳۶] توزیع رخ می‌دهد.

یادآوری۱: اگر $X$ دارای توزیع نرمال با پارامترهای $(\mu\ ,\ \sigma^2)$ باشد، تحت تبدیل ونگ، $X^*$ دارای توزیع نرمال با پارامترهای $(\mu-\alpha\sigma\ ,\ \sigma^2)$ خواهد بود.

یادآوری۲: اگر $X$ دارای توزیع لاگ‌نرمال با پارامترهای $(\mu\ ,\ \sigma^2)$ باشد، تحت تبدیل ونگ، $X^*$ دارای توزیع لاگ‌نرمال با پارامترهای $(\mu-\alpha\sigma\ ,\ \sigma^2)$ خواهد بود.

حاصل تبدیل ونگ بر متغیر تصادفی نرخ بازده، طبق تعریف این تبدیل، نرخ بازده تصحیح ریسک شده خواهد بود. با فرض توزیع نرمال برای نرخ بازده و انتخاب پارامتر ریسک $\alpha=\dfrac{E(r_i)-r_f}{\sigma(r_i)}$ برای دارایی $i$ خواهیم داشت:

$$H[r_i,-\alpha]=E(r_i)-\frac{E(r_i)-r_f}{\sigma(r_i)}\sigma(r_i)=r_f$$

و در حالت چند دوره‌ای نرخ بازده تصحیح ریسک شده به صورت زیر است:

$$H[r_i(T),-\alpha]=E(r_i(T))-\alpha_i\sigma(r_i(T))=T.E(r_i)-\alpha_i T.\sigma(r_i)=T.r_f$$

بنابراین تحت فرض نرمالیتی نرخ بازده، نتایج حاصل از تبدیل این نرخ با نتایج CAPM سازگار است.

---
[36] Location Parameter

با فرض توزیع لاگ‌نرمال برای قیمت آینده دارایی $i$ به صورت زیر؛

$$X_i(T) \sim LogNormal\left\{\ln X_i(0) + (\mu - \frac{\sigma_i^2}{2})T, \sigma_i^2 T\right\}$$

مدل بلاک و شولز هم با تبدیل ونگ قابل بازیابی است.

با انتخاب پارامتر ریسک تبدیل بـه صـورت، $\alpha_i = \frac{\mu_i - r_f}{\sigma_i}\sqrt{T}$ و اعمـال تبـدیل بـر متغیر تصادفی قیمت آینده دارایی، داریم؛

$$\frac{X_i^*(T)}{X_i(0)} \sim LogNormal\left\{(r_f - \frac{\sigma_i^2}{2})T, \sigma_i^2 T\right\}$$

با استفاده از این توزیع تبدیل یافته و محاسبه قیمت تابع پرداخت قرارداد اختیار خرید، قیمت این قرارداد به صورت زیر حاصل می‌شود؛

$$Price = e^{-r_f T} H[C(T,K); -\alpha] = X(0)\Phi(d_1) - e^{-r_f T} K\Phi(d_2)$$

که در آن،

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r_f + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad , \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

این فرمول حاصل از تبدیل ونگ، با فرمول بلاک و شولز دقیقا مطابقت دارد.

## قیمت‌گذاری بدون فرضهای توزیع با استفاده از روش ونگ

یکی از بزرگترین مزیتهای تبدیل ونگ این است که برای قیمتگذاری بـه فرضـهای توزیـع نرمال برای نرخ بازده و توزیع لاگ‌نرمال برای قیمت دارایی وابسته نیست.

با استفاده از تبدیل ونگ می‌توان چارچوب قیمتگذاری مدل CAPM را بـرای توزیعهـای غیـر نرمال نیز گسترش داد، چنین نتیجه با ارزشی با تبدیل ضریب همبستگی بـازده دارایـی و بـازده بـازار تحت تبدیل ونگ، حاصل می‌شود.

می‌توانیم فرمول CAPM را برای پارامتر ریسک بازار[۳۷] برحـسب ضـریب همبـستگی بـه صورت زیر بازنویسی کنیم؛

$$\alpha_i = \left( \frac{E(r_i) - r_f}{\sigma(r_i)} \right) = \frac{\beta_i \{E(r_M) - r_f\}}{\sigma(r_i)}$$
$$= \frac{Cov(r_i, r_M)}{\sigma^2(r_M)} \cdot \frac{E(r_M) - r_f}{\sigma(r_i)}$$
$$= \frac{Cov(r_i, r_M)}{\sigma(r_M)\sigma(r_i)} \cdot \frac{E(r_M) - r_f}{\sigma(r_M)}$$
$$= \rho_{i,M} \cdot \alpha_M$$

ضریب همبستگی پیرسون، میزان واقعی همبستگی دو متغیر غیر نرمال را نشان نمی‌دهـد، و مثالهای زیادی در مقالات درباره این نارسایی وجود دارد. در صورتی که نرخ بازده دارایـی و نـرخ بازده بازار نرمال نباشند، (جایی که CAPM کارایی خـود را از دسـت مـی‌دهـد!) بـا اسـتفاده از ویرایش خاص از تبدیل ونگ می‌توان این دو متغیر را تبدیل کرد و شکل تبدیل یافته CAPM را به صورت زیر حاصل کرد.

$$\alpha_i^* = \rho_{i,M}^* \cdot \alpha_M = \rho_{U,V} \cdot \alpha_M$$

به ترتیبی که، $U = \Phi^{-1}\left(F_{r_i}(r_i)\right)$ و $V = \Phi^{-1}\left(F_{r_M}(r_M)\right)$.

---

[37] Market Price of Risk

ضریب همبستگی تبدیل یافته $\rho^{*}_{i,M}$ اندازه واقعی همبستگی بین این دو متغیر را به روشنی و با دقت بیشتر نشان می‌دهد. بر این اساس، این ضریب تبدیل شده پارامتر ریسک و ارتباط آنرا برای براورد نرخ بازده سرمایه‌گذاری به درستی محاسبه و تبیین می‌کند.

## کاربردهای عملی

در این قسمت یک مورد از کاربردهای عملی تبدیل ونگ را برای محاسبه قیمت یک قرارداد اختیار معامله فرضی برای سهام شرکت سرمایه‌گذاری بانک ملی (وبانک[۳۸]) تشریح می‌کنیم. برای این امر داده‌های مربوط به شاخص قیمت این سهام در فاصله ۲۸ سپتامبر ۱۹۹۷ تا ۲۲ ژانویه ۲۰۰۷ در ۲۲۵۹ روز معامله جمع‌آوری شده است.

فرآیند کاربردی برای محاسبه قیمت اختیار معامله به صورت کلی به شرح زیر است:

۱) برآورد تابع توزیع $\hat{F}(x)$ و تابع چگالی $\hat{f}(x)$ شاخص قیمت سهام یا دارایی مورد نظر با استفاده از روشهای برآورد یابی نلسون ـ آلن و کاپلن ـ میر برای فرمهای مختلف داده‌ها.

۲) برآورد پارامتر ریسک $\alpha$ برای تبدیل ونگ با استفاده از روشهای تکراری[۳۹] مانند نیوتن و رابسون . برای یافتن این برآورد، قید اساسی زیر را به کار می‌بریم؛

- با در نظر گرفتن روش ارزیابی خنثی، در روش تکراری با اختصاص یک مقدار اولیه به $\alpha$ و تغییر مقادیر آن، جواب به ترتیبی به دست می‌آید که تساوی زیر برقرار باشد:

ارزش فعلی متوسط قیمت مورد انتظار دارایی = قیمت واقعی کنونی دارایی در بازار

بدیهی است که بر اساس روش ارزیابی خنثی، ارزش فعلی قیمت، با استفاده از نرخ تنزیل بدون ریسک باید محاسبه شود.

---

[38] Vbank

[39] Iteration Method

۳) با استفاده از مقدار براورد شده $\hat{\alpha}$ ، تابع توزیع و چگالی تبدیل یافته $\hat{F}^*(x)=g[F(x)]$ و $\hat{f}^*(x)$ را محاسبه می‌کنیم.

۴) ستون مقادیر تابع پرداخت[۴۰] سررسید را براساس قیمت توافقی[۴۱]، محاسبه می‌کنیم. به عنوان مثال، مقادیر تابع پرداخت قرارداد اختیار خرید در سررسید با قیمت از پیش تعیین شده $K$ ، تحت تابع $y(x)=max(x-K,0)$ بدست می‌آید.

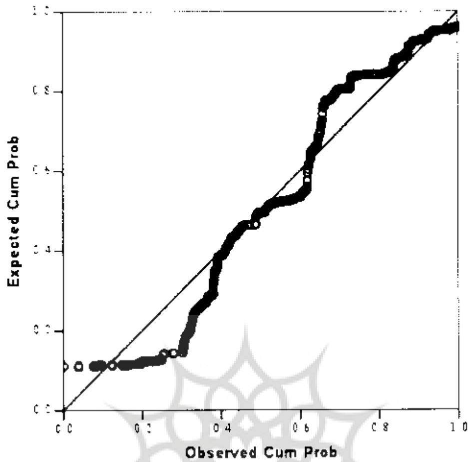
۵) محاسبه متوسط تابع پرداخت در سررسید، تحت تبدیل ونگ با پارمتر ریسک برآورد شده $\hat{\alpha}$ و با استفاده از تابع چگالی تبدیل یافته.

۶) محاسبه ارزش فعلی متوسط پرداخت سررسید با بکارگیری نرخ بازده بدون ریسک.

اولین قدم برای انتخاب روش قیمتگذاری این قرارداد برای سهام "وبانک"، این است که توزیع قیمت سهام را بررسی کنیم. با رسم نمودار P-P برای داده‌های شاخص قیمت و انجام آزمون کولموگروف و اسمیرنوف می‌توان تبعیت این داده‌ها را از توزیع لاگ‌نرمال بررسی کرد.



[40] Payoff Function
[41] Strike Price




**نمودار P-P برای داده‌های شاخص قیمت سهام "وبانک"**

**نتایج آزمون کولموگروف و اسمیرنوف :**

$$N = 2259 \qquad K\text{-}S\ statistic = 7.558 \qquad p\text{-}value = 0.000$$

که نشاندهنده عدم تبعیت شاخص قیمت از توزیع لاگ‌نرمال است. بنابراین، استفاده از مدل بلاک و شولز قیمت قرارداد اختیار خرید برای این سهام نادرست و نادقیق خواهد بود.

برای محاسبه قیمت یک قرارداد اختیار خرید، فرضیات زیر را اختیار می‌کنیم:

۱) قیمت فعلی سهام در بازار = ۹۶۰,۵۹۴۴ ریال
۲) زمان سررسید = ۶ ماه = ۰,۵ سال
۳) بازه زمانی روزهای معامله = ۱ روز کاری = ۰,۰۰۴ سال (با فرض ۲۵۰ روز کاری در سال!)
۴) قیمت از پیش تعیین شده برای حق خرید = ۹۰۰ ریال
۵) نرخ بازده بدون ریسک = ۱۵,۵٪

قیمت این سهم در ۲ سال گذشته سیر نزولی داشته است و انتخاب قیمت توافقی شده کمتر از قیمت فعلی آن منطقی به نظر می‌رسد.

جدول صفحه بعد فرآیند محاسبه قیمت را با استفاده از روش تبدیل ونگ به طور کامل نشان می‌دهد. ستون (۲) جدول، مقادیر مرتب شده شاخص قیمت سهام "وبانک"، ستون (۳) فراوانی مشاهده شده برای هر قیمت و ستون (۴) ، برآورد تابع توزیع شاخص قیمت را با استفاده از روش کاپلن و میر نشان می‌دهد. با بکارگیری روش تکراری نیوتن و رابسون طبق فرآیند کاربردی محاسبه قیمت، براورد پارامتر ریسک به کار رفته در تبدیل ونگ برابر $\hat{\alpha} = -0.5930708$ بدست می‌آید که در انتهای ستون (۶) درج شده است. ستونهای (۵) و (۶)، به ترتیب براورد تابع توزیع و تابع چگالی تبدیل یافته را با پارامتر مذکور نشان می‌دهند.

| (1) num. | price (2) $x$ | (3) Freq. | (4) $F(x)$ | (5) $F^*(x)$ | (6) $f^*(x)$ | payoff (7) $y(x)$ | (8) $f^*(x)y(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 119.3888 | 1 | 0.00044 | 0.00004 | 0.00004 | 0 | 0 |
| 2 | 119.4444 | 169 | 0.07525 | 0.02114 | 0.02109 | 0 | 0 |
| 3 | 119.5555 | 1 | 0.07570 | 0.02130 | 0.00016 | 0 | 0 |
| 4 | 119.6111 | 1 | 0.07614 | 0.02145 | 0.00016 | 0 | 0 |
| 5 | 119.6666 | 1 | 0.07658 | 0.02161 | 0.00016 | 0 | 0 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 562 | 899.23175 | 1 | 0.68437 | 0.45497 | 0.00049 | 0 | 0 |
| 563 | 900.67607 | 1 | 0.68482 | 0.45547 | 0.00049 | 0.67607 | 0.00033 |
| 564 | 902.55782 | 1 | 0.68526 | 0.45596 | 0.00049 | 2.55782 | 0.00126 |
| 565 | 903.27591 | 1 | 0.68570 | 0.45646 | 0.00049 | 3.27591 | 0.00162 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 893 | 2367.29005 | 1 | 0.99867 | 0.99207 | 0.00215 | 1467.29005 | 3.15044 |
| 894 | 2380.28374 | 1 | 0.99911 | 0.99435 | 0.00228 | 1480.28374 | 3.37913 |
| 895 | 2392.98235 | 1 | 0.99956 | 0.99685 | 0.00250 | 1492.98235 | 3.73247 |
| 896 | 2398.35373 | 1 | 1.00000 | 1.00000 | 0.00315 | 1498.35373 | 4.72241 |
| Estimated $\alpha$ | | | | | -0.59307 | | |
| Expected future | 655.6413 | | | | 1038.001 | | 390.834 |
| Current price | 606.7482 | | | | 960.5944 | | 361.688 |

در ستون (۷) مقادیر تابع پرداخت برای اختیار خرید این سهام با توجه به قیمت از پیش تعیین شده ۹۰۰ ریال، درج شده است. ستون(۸) نیز حاصلضرب براورد تابع چگالی تبدیل یافته و مقادیر تابع پرداخت را نشان می‌دهد که مجموع آن، میانگین مورد انتظار تابع پرداخت اختیار خرید، در ۶ ماه آینده و برابر $E[S_T\ , K] = 390.834$ خواهد بود. بدیهی است که با محاسبه ارزش فعلی این مقدار با استفاده از نرخ بازده بدون ریسک ۱۵٫۵٪ ، قیمت این اختیار خرید برابر است با؛

$$Call_{Wang}(0.5,\ 900) = e^{-rt} E[S_T\ , k] = e^{-0.075}(390.834) = 361.688$$

و با استفاده از تساوی فروش-خرید برای این اختیار خرید، می‌توان قیمت قرارداد اختیار فروش آن را نیز به صورت زیر حاصل کرد.

$$\begin{aligned} Call_{Wang}(0.5,900) - Put_{Wang}(0.5,900) &= S_t - Ke^{-r_f T} \\ Put_{Wang}(0.5,900) &= Call_{Wang}(0.5,900) + Ke^{-r_f T} - S_t \\ &= 361.688 + 900e^{-0.075}(0.5) - 960.5944 \\ &= 233.9781 \end{aligned}$$

## نتایج

الف) روش قیمتگذاری ونگ نتایج مدلهای مالی *CAPM* و *Black-Scholes* را تحت فرضهای اساسی این مدلها، به هر دو صورت نظری و عملی بازیابی می‌کند.

ب) در شرایطی که فرض توزیع برای نرخ بازده سرمایه‌گذاری و قیمت دارایی، محقق نمی‌شود استفاده از روش ونگ، نتایج دقیقتر و قابل اتکاتری به دست می‌دهد.

ج) برای بازارهای غیر کامل همانند بازار بورس تهران که شرایط واقعی فاصله بسیار زیـادی با شرایط تئوریک مدلهای قیمتگذاری دارند، استفاده از مدل ونگ برای قیمتگذاری اوراق بهـادار مناسبتر است.

## منابع و مأخذ:

[1] Zvi Bodie and Alan J. Marcus Alex Kane, *Investment*, 6th ed., McGrow Hill, 2004.

[2] John C. Hall, *Options, futures, and other derivatives*, 4th ed., Prentice Hall International, Upper Saddle River, New Jersey, 07458, 2003.

[3] M. Hamada and M. Sherris, *Contingent claim pricing using probability distortion operators: methods from insurance risk pricing and their relationship to financial theory*, (2002).

[4] Stuart A. Klugman, Harry H. Panjer, and Gordon E. Willmot, *Loss models: From data to decisions*, 2nd ed., Wiley Interscience, Hoboken, New Jersey, USA, 2004.

[5] Shaun S. Wang, *Insurance pricing and increased limits ratemaking by proportional hazards transforms*, Insurance: Mathematics and Economics 17 (1995), 43–54.

[6] Shaun S. Wang, *Premium calculation by transforming the layer premium density*, ASTIN Bulletin 26 (1996), no. 1, 71–92.

[7] Shaun S. Wang, *A class of distortion operators for pricing financial and insurance risks*, Journal of Risk and Insurance 67 (2000), no. 1, 15–36.

[8] Shaun S. Wang, *A universal framework for pricing financial and insurance risks*, ASTIN Bulletin 32 (2002), no. 2, 213–234.