



## ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیری بر اساس دیدگاه‌های خوشبینانه و بدبینانه

حسین عزیزی (نویسنده مسؤل)

گروه ریاضی کاربردی، واحد پارس‌آباد مغان، دانشگاه آزاد اسلامی، پارس‌آباد مغان، ایران

Email: azizhossein@gmail.com

مازیار صلاحی

استاد، گروه ریاضی کاربردی، دانشکده‌ی علوم ریاضی، دانشگاه گیلان، ایران

تاریخ دریافت: ۹۷/۱۰/۰۴ \* تاریخ پذیرش: ۹۸/۰۲/۰۴

### چکیده

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) روشی برای سنجش عملکرد گروهی از واحدهای تصمیم‌گیری (DMUها) است که از ورودی‌های متعدد برای تولید خروجی‌های متعدد استفاده می‌کنند. این روش عملکرد DMUها را با مینیمم‌سازی نسبت ورودی وزنی به خروجی وزنی هر DMU، به ترتیب، مشروط به این قید که هیچ یک از کارایی‌های DMUهای دیگر کوچک‌تر از یک نباشد، اندازه‌گیری می‌کند (در حالت یا ماهیت خروجی). کارایی‌هایی که به این ترتیب اندازه‌گیری می‌شوند، کارایی خوشبینانه یا بهترین کارایی نسبی نامیده می‌شوند. روش اندازه‌گیری کارایی خوشبینانه‌ی DMUها را خودارزیابی می‌نامند. در صورتی که نمره‌ی کارایی خودارزیابی یک DMU یک باشد، به آن کارایی خوشبینانه می‌گویند؛ در غیر این صورت، به آن غیرکارایی خوشبینانه می‌گویند. رویکرد مشابهی وجود دارد که از مفهوم مرز ناکارایی برای تعیین بدترین نمره‌ی کارایی نسبی که می‌توان به هر DMU اختصاص داد، استفاده می‌کند. DMUهای واقع روی مرز ناکارایی به‌عنوان ناکارایی بدبینانه تعیین می‌شوند، و آنهایی که روی مرز ناکارایی نیستند، به‌عنوان غیرناکارایی بدبینانه اعلام می‌شوند. در این مقاله، این بحث مطرح می‌شود که هر دو کارایی نسبی را باید با هم در نظر گرفت، و هر رویکردی که فقط یکی از آنها را در نظر گرفته باشد، دچار سوگیری خواهد بود. برای اندازه‌گیری عملکرد کلی DMUها، پیشنهاد می‌شود که هر دو کارایی را در قالب یک بازه ادغام، و مدل‌های DEAی پیشنهادی برای اندازه‌گیری کارایی را مدل‌های کراندار می‌نامیم. به این ترتیب، بازه‌ی کارایی تمام مقادیر ممکن کارایی را که منعکس‌کننده‌ی دیدگاه‌های مختلف هستند، در اختیار تصمیم‌گیرنده قرار می‌دهد. دو مثال عددی ارائه می‌شوند که مزایای مدل‌های DEAی پیشنهادی را نشان می‌دهند.

**کلمات کلیدی:** تحلیل پوششی داده‌ها؛ کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه؛ بازه‌ی کارایی؛ مدل‌های کراندار.

## ۱- مقدمه

هنگام اندازه‌گیری کارایی نسبی مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیری<sup>۱</sup> (DMUها)، مدل تحلیل پوششی داده‌های<sup>۲</sup> (DEA) Charnes و همکاران، مجموعه‌ای از مطلوب‌ترین وزن‌ها را برای اینکه هر DMU بهترین نمره‌ی کارایی را به دست آورد، پیدا می‌کند و از این نمرات به‌عنوان مبنایی برای مقایسه‌ی عملکرد کارایی DMUها استفاده می‌کنند (Charnes, Cooper, & Rhodes, 1978). بنابراین، مدل DEA آنها را می‌توان روش تحلیل بهترین کارایی نسبی یا تحلیل کارایی خوشبینانه دانست. یک DMU، کارایی DEA یا کارایی خوشبینانه گفته می‌شود، هرگاه بهترین کارایی نسبی آن برابر با یک باشد، در غیر این صورت، غیر کارایی DEA یا غیر کارایی خوشبینانه است. معمولاً تصور بر این است که DMUهای کارایی خوشبینانه عملکرد بهتری نسبت به DMUهای غیر کارایی خوشبینانه دارند.

از طرف دیگر، عملکرد DMUها را از دیدگاه بدبینانه نیز می‌توان اندازه‌گیری کرد. کارایی اندازه‌گیری شده از دیدگاه بدبینانه را بدترین کارایی نسبی یا کارایی بدبینانه می‌نامند، و اندازه‌ی آن در ماهیت خروجی، محدود به مقادیر کوچکتر یا مساوی یک است (Entani, Maeda, & Tanaka, 2002). هرگاه مقدار بدترین کارایی نسبی یک DMU برابر یک باشد، گفته می‌شود که آن DMU ناکارایی DEA یا ناکارایی بدبینانه است؛ در غیر این صورت، غیر ناکارایی DEA یا غیر ناکارایی بدبینانه است. معمولاً تصور بر این است که DMUهای ناکارایی بدبینانه عملکرد بدتری نسبت به DMUهای غیر ناکارایی بدبینانه دارند.

برای اینکه یک سنجش کلی از عملکرد هر DMU داشته باشیم باید هر دو کارایی خوشبینانه و بدبینانه را همزمان در نظر بگیریم. Entani و همکاران عملکرد DMUها را از هر دو دیدگاه خوشبینانه و بدبینانه مورد بررسی قرار دادند (Entani et al., 2002). در مدل‌های آنها، با استفاده از کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه، یک بازه تشکیل می‌شود. ایده‌ی آنها این بود که کارایی یک DMU، بازه‌ی بین مقادیر بدبینانه و خوشبینانه است. ولی مدل آنها در حالت ماهیت خروجی برای محاسبه‌ی کارایی خوشبینانه‌ی هر DMU، دارای یک عیب اساسی است و آن این است که برخی اطلاعات ورودی و خروجی را در نظر نمی‌گیرد، زیرا عملاً فقط داده‌های یک ورودی و یک خروجی از DMU مورد ارزیابی استفاده می‌شوند و بقیه‌ی داده‌های ورودی و خروجی مورد استفاده قرار نمی‌گیرند. به علاوه، مدل آنها نمی‌تواند DMUهایی را که کارایی خوشبینانه هستند، به‌صورت مکفی شناسایی کند. عزیزی نارسایی‌های مدل‌های DEAی بازه‌ای Entani و همکاران را در ماهیت ورودی بهبود داده است (Azizi, 2011; Entani et al., 2002). Wang و Yang یک زوج مدل کراندار را برای اندازه‌گیری عملکرد کلی هر DMU پیشنهاد کردند (Wang & Yang, 2007). مدل‌های کراندار، بیشترین استفاده را از همه‌ی اطلاعات ورودی و خروجی به عمل می‌آورند و کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه‌ی هر DMU را اندازه‌گیری می‌کنند. Foroughi و Aouni برای تعیین کران پایین بازه‌ی کارایی هر DMU، یک مدل برنامه‌ی خطی صحیح مختلط را پیشنهاد کردند (Foroughi & Aouni, 2012). مدل پیشنهادی آنها قادر به شناسایی تمام DMUهای ناکارایی بدبینانه نیست. Entani و Tanaka بازه‌ی کارایی یک DMU را با تعدیل ورودی‌ها و خروجی‌های داده شده‌ی آن بهبود دادند (Entani & Tanaka, 2006). همچنین، امیر تیموری و همکاران بازه‌ی کارایی هزینه‌ی یک DMU را با تعدیل ورودی‌ها و خروجی‌های مشاهده شده‌ی آن بهبود دادند (Amirteimoori, Kordrostami, & Rezaitabar, 2006).

Wang و Luo مسئله‌ی ارزیابی کارایی را به‌صورت متفاوتی بررسی کردند (Wang & Luo, 2006). آنها دو DMU مجازی یعنی DMU ایده‌آل (IDMU) و DMU آنتی‌ایده‌آل (ADMU) را وارد مدل‌های DEA کردند. دو DMU مجازی، IDMU و ADMU، برای ساخت دو مدل DEA به ترتیب برای محاسبه‌ی کارایی خوشبینانه و کارایی بدبینانه استفاده می‌شدند. این دو کارایی متمایز با استفاده از رویکرد مشهور روش ترجیح ترتیب بر اساس شباهت به جواب ایده‌آل (TOPSIS) در تصمیم‌گیری چندشاخصی تلفیق می‌شدند تا یک شاخص مرکب به نام نزدیکی نسبی به IDMU به دست آید. شاخص نزدیکی نسبی به‌عنوان مبنایی برای رتبه‌بندی DMUها استفاده می‌شود، و بر اساس آن یک رتبه‌بندی کلی برای DMUها

<sup>۱</sup>Decision-making units (DMUs)

<sup>۲</sup>Data envelopment analysis (DEA)

ایجاد می‌شود. ولی در اکثر موارد، مدل‌های آنها برای تمام DMUها از وزن‌های ثابتی استفاده می‌کنند. این رویکرد توسط محققین متعددی از جمله Wu (۲۰۰۶)، Chen (۲۰۱۲)، Xu و همکاران، Hatami-Marbini و همکاران و Mirhedayatian و همکاران بسط داده شده است (Hatami-Marbini, Saati, & Tavana, 2010; Chen, 2012; Mirhedayatian, Vahdat, Jafarian Jelodar, & Farzipoor Saen, 2013; Wu, 2006; Xu, Li, Liu, Fu, & Zheng, 2011). Wang و همکاران از کارایی متوسط هندسی برای ارزیابی عملکرد کلی هر DMU استفاده کردند (Wang, Chin, & Yang, 2007). کارایی متوسط هندسی، متوسط هندسی دو کارایی خوشبینانه و کارایی بدبینانه است، بنابراین، نسبت به هر کدام از این دو کارایی جامع‌تر است. Wang و Lan (۲۰۱۱)، Chin و همکاران، و Wang و Chin این رویکرد را بسط داده‌اند (Wang & Lan, Chin, Wang, Poon, & Yang, 2009; Wang & Chin, 2011). Wang و Chin یک اندازه‌ی جدیدی را برای ارزیابی عملکرد کلی DMUها پیشنهاد کردند (Wang & Chin, 2009). رویکرد DEAی پیشنهادی آنها توسط Ahmady و همکاران برای کار با داده‌های فازی استفاده شد (Ahmady, Azadi, Sadeghi, & Farzipoor Saen, 2013). امیرتیموری با استفاده از دو شاخص ایده‌آل و آنتی‌ایده‌آل که بر اساس مرزهای کارایی و ناکارایی تشکیل می‌شود، یک اندازه‌ی کارایی معرفی کرد (Amirteimoori, 2007). فلسفه‌ی این دو شاخص ماکزیمم کردن فاصله‌ی  $L_1$  وزنی یک DMU خاص نسبت به مرزهای کارایی و ناکارایی است. Wang و Lan بر اساس اصطلاحات بازده به مقیاس، بهره‌ورترین اندازه‌ی مقیاس یک DMU را از دو دیدگاه خوشبینانه و بدبینانه مورد بررسی قرار دادند (Wang & Lan, 2013). جاهد و همکاران از دو دیدگاه خوشبینانه و بدبینانه، کارایی‌های DMUهای تحت ارزیابی را به دست آوردند (Jahed, Amirteimoori, & Azizi, 2015). آنها نشان دادند که این دو نتیجه‌ی ارزیابی با یکدیگر تعارض دارند و بدون تردید یک‌سویه، غیر واقع‌گرایانه و غیر متقاعد کننده هستند. برای غلبه بر این مشکل، آنها یک اندازه‌ی عملکرد کلی جدیدی را پیشنهاد کردند که برای ادغام اندازه‌های به دست آمده از دیدگاه‌های خوشبینانه و بدبینانه استفاده می‌شود، و آن را برای شناسایی DMUی دارای بهترین عملکرد تحت شرایط عدم اطمینان به کار بردند. در این مقاله، نشان می‌دهیم مدل Entani و همکاران برای محاسبه‌ی کارایی خوشبینانه‌ی DMUها، دارای مشکلات اساسی می‌باشد. به همین منظور، مدل‌های جدیدی را ارائه می‌کنیم، به طوری که بتوان یک تحلیل با استفاده از مفهوم کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه انجام داد. مدل‌های DEAی پیشنهادی برای اندازه‌گیری بازه‌ی کارایی DMUها، دارای کران‌های بالا و پایین می‌باشند، به همین سبب آنها را مدل‌های کراندار می‌نامیم. در مقایسه با مدل‌های Entani و همکاران، مدل‌های کراندار پیشنهادی در این مقاله چندین مزایایی دارد، از جمله اینکه کارایی خوشبینانه‌ی هر DMU نسبت به همه‌ی DMUهای دیگر اندازه‌گیری می‌شود، و با استفاده از تمام اطلاعات ورودی و خروجی محاسبه می‌شود.

## ۲- مواد و روش‌ها

فرض کنید  $n$  تعداد DMU برای ارزیابی وجود دارند، که هر DMU نیز با  $m$  ورودی و  $s$  خروجی تشکیل شده است.  $x_{ij}$  (  $i=1, \dots, m$  ) و  $y_{rj}$  (  $r=1, \dots, s$  ) را مقدار ورودی و خروجی  $DMU_j$  (  $j=1, \dots, n$  ) تعریف می‌کنیم که همه‌ی آنها معلوم و نامنفی می‌باشند. به منظور تعیین کارایی  $DMU_j$  نسبت به DMUهای دیگر، Charnes و همکاران مدل CCR شناخته شده‌ی ارائه دادند که بهترین کارایی نسبی DMUها را در محدوده‌ی بزرگتر یا مساوی با یک به صورت زیر اندازه‌گیری می‌کند (Charnes et al., 1978):

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta_o = \frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}}{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}} \\ \text{s.t.} \quad & \theta_j = \frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}}{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}} \geq 1, \quad j=1, \dots, n, \\ & u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad r=1, \dots, s; \quad i=1, \dots, m, \end{aligned} \quad (1)$$

در مدل (۱)، زیرنویس « $o$ » نشانگر DMUی تحت ارزیابی است و  $v_i$  ( $i=1, \dots, m$ ) و  $u_r$  ( $r=1, \dots, s$ ) متغیرهای تصمیم‌گیری و  $\varepsilon$  بسیار کوچک غیرارشمیدسی است. به کمک تبدیل Charnes و Cooper می‌توان برنامه‌ریزی کسری (۱) را به صورت مدل برنامه‌ریزی خطی (LP) زیر نوشت (Charnes & Cooper, 1962):

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta_o = \sum_{i=1}^m v_i x_{io} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, \quad j=1, \dots, n, \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} = 1, \\ & u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad r=1, \dots, s; \quad i=1, \dots, m. \end{aligned} \quad (2)$$

اگر مجموعه‌ای از وزن‌های مثبت  $u_r^*$  ( $r=1, \dots, s$ ) و  $v_i^*$  ( $i=1, \dots, m$ ) وجود داشته باشند که باعث شود  $\theta_o^* = 1$ ، آنگاه DMU<sub>*o*</sub> کارای خوشبینانه نامیده می‌شود؛ در غیر این صورت، به آن غیر کارای خوشبینانه می‌گویند.

کارایی یک اندازه‌ی نسبی است و آن را در محدوده‌های مختلفی می‌توان اندازه‌گیری کرد. چارچوب با ماهیت خروجی، که مبتنی بر مجموعه‌ی نیازمندی خروجی و مرز ناکارایی آن است، در صدد آن است که ضمن حفظ ورودی، حداقل در حد فعلی، مقادیر خروجی را حتی‌الامکان کاهش دهد. که بر این واقعیت تأکید می‌کند که سطح ورودی بدون تغییر می‌ماند، و مقادیر خروجی به صورت متناسب کاهش داده می‌شوند، تا مرز ناکارایی حاصل شود. برآورد کننده‌ی DEA برای مجموعه‌ی امکان تولید ناکارا، که به صورت برآورد کننده‌های LP عملیاتی شد، به آن اصطلاحاً کارایی بدبینانه و یا بدترین کارایی نسبی می‌گویند. کارایی بدبینانه‌ی DMU<sub>*o*</sub> را می‌توان با مدل بدبینانه‌ی زیر اندازه‌گیری کرد (Jahanshahloo & Azizi & Ajirlu, 2011; Afzalinejad, 2006; Liu & Chen, 2009; Wang et al., 2007):

$$\begin{aligned} \max \quad & \varphi_o = \frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}}{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}} \\ \text{s.t.} \quad & \varphi_j = \frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}}{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}} \leq 1, \quad j=1, \dots, n, \\ & u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad r=1, \dots, s; \quad i=1, \dots, m, \end{aligned} \quad (3)$$

مدل (۳) با تغییری مجدد می‌تواند به مدل LP زیر تبدیل شود:

$$\begin{aligned} \max \quad & \varphi_o = \sum_{i=1}^m v_i x_{io} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \geq 0, \quad j=1, \dots, n, \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} = 1, \\ & u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad r=1, \dots, s; \quad i=1, \dots, m. \end{aligned} \quad (4)$$

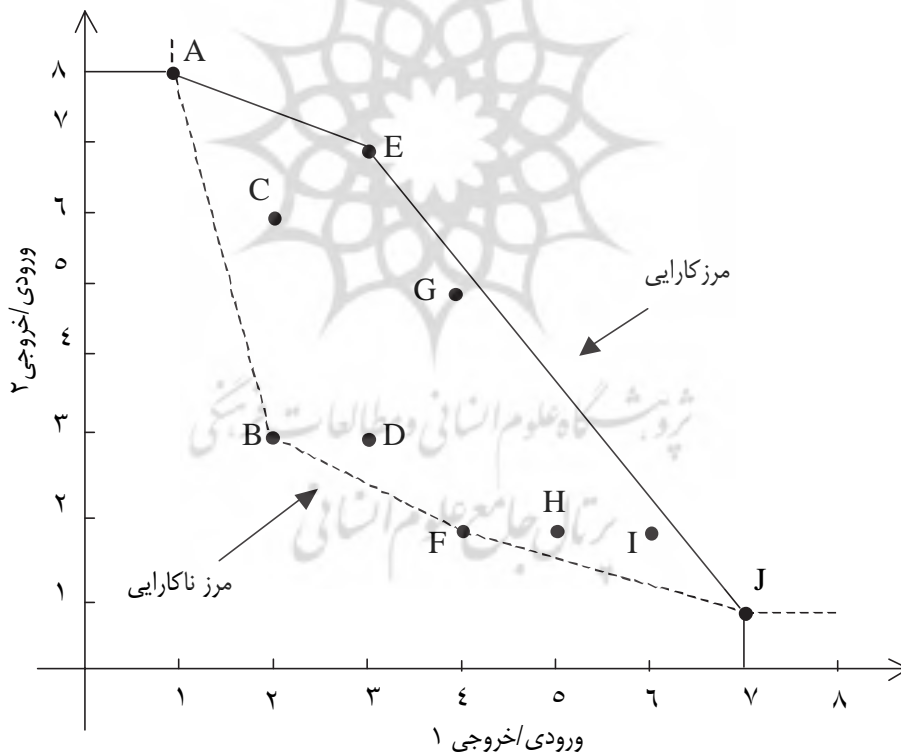
در صورتی که مجموعه‌ای از وزن‌های مثبت وجود داشته باشد که سبب شود  $\varphi_o^* = 1$  باشد، آنگاه گفته می‌شود که DMU<sub>*o*</sub> ناکارای بدبینانه است؛ در غیر این صورت، غیرناکارای بدبینانه است. واضح است که غیرناکارای بدبینانه لزوماً به معنای کارای خوشبینانه نیست. بر خلاف مدل‌های CCR (۱) و (۲)، که می‌توان به آنها مدل‌های خوشبینانه گفت، مدل‌های بدبینانه‌ی (۳) و (۴) در جستجوی مجموعه‌ای از نامطلوب‌ترین وزن‌ها برای هر DMU هستند.

برای نشان دادن تفاوت بین DMUهای کارای خوشبینانه، غیر کارای خوشبینانه، غیرناکارای بدبینانه، و ناکارای بدبینانه از یکدیگر، ما از داده‌های خروجی دوبردی و ورودی یک‌بردی استفاده می‌کنیم. مجموعه‌ی داده‌ها از مقاله‌ی Entani و همکاران گرفته شده است، و در جدول ۱ نشان داده شده است (Entani et al., 2002).

جدول شماره (۱): مجموعه داده‌ها برای ده DMU با یک ورودی و دو خروجی

DMU	ورودی	خروجی ۱	خروجی ۲
A	۱	۱	۸
B	۱	۲	۳
C	۱	۲	۶
D	۱	۳	۳
E	۱	۳	۷
F	۱	۴	۲
G	۱	۴	۵
H	۱	۵	۲
I	۱	۶	۲
J	۱	۷	۱

مرزهای کارایی و ناکارایی برای این مجموعه‌ی داده‌ها در شکل ۱ نشان داده شده است. به طوری که این شکل نشان می‌دهد، ۳ تا از DMUها روی مرز کارایی هستند که ما آنها را کارای خوشبینانه می‌نامیم و مابقی DMUها را نسبت به مرز کارایی، غیرکارای خوشبینانه می‌نامیم. همچنین، ۴ تا از DMUها روی مرز ناکارایی واقع شده‌اند که ما آنها را ناکارای بدبینانه می‌نامیم و مابقی DMUها را نسبت به مرز ناکارایی، غیرناکارای بدبینانه می‌نامیم. لازم به ذکر است که در اینجا واحدهای کارای خوشبینانه و ناکارای بدبینانه همپوشانی یعنی واحدهای مشترک نیز دارند.



شکل شماره (۱): مرزهای کارایی و ناکارایی برای ده DMU.

در ادامه مدل‌های Entani و همکاران را بررسی می‌کنیم. Entani و همکاران برای ایجاد یک بازه‌ی کارایی برای هر DMU، مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی کران‌های بالا و پایین زیر را برای  $DMU_o$  پیشنهاد کردند (Entani et al., 2002):

$$\max / \min \phi_o = \frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{io} / \sum_{r=1}^s u_r y_{ro}}{\max_j \left\{ \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} / \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} \right\}} \quad (5)$$

s.t.  $u_r, v_i \geq 0, \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m,$

مدل ماکزیمم‌سازی (۵) را می‌توان به مدل زیر تبدیل کرد، که مقدار بهینه‌ی آن با مقدار بهینه‌ی مدل (۳) برابر است، و می‌توان آن را از طریق مدل (۴) حل کرد:

$$\begin{aligned} \max \quad & \phi_o^U = \frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}}{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}} \\ \text{s.t.} \quad & \max_j \left\{ \frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}}{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}} \right\} = 1, \\ & u_r, v_i \geq 0, \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (6)$$

مدل مینیمم‌سازی (۵) را نیز می‌توان به مدل زیر تبدیل کرد:

$$\begin{aligned} \min \quad & \phi_o^L = \frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}}{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}} \\ \text{s.t.} \quad & \max_j \left\{ \frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}}{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}} \right\} = 1, \\ & u_r, v_i \geq 0, \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (7)$$

اما نمی‌توان آن را با یک مدل LP معادل جایگزین کرد، با فرض اینکه  $\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} / \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} = 1$  برای هر واحد ناکارای بدینانه، Entani و همکاران مدل (۷) را به  $p$  ( $j = J_1, \dots, J_p$ ) زیرمسئله‌ی بهینه‌سازی تقسیم کردند، که در آن  $p$  تعداد DMUهای ناکارای بدینانه است، و  $J_1, \dots, J_p$  DMUهایی هستند که ناکارای بدینانه هستند:

$$\begin{aligned} \min \quad & \phi_{oJ_1}^L = \sum_{i=1}^m v_i x_{io} / \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m v_i x_{iJ_1} / \sum_{r=1}^s u_r y_{rJ_1} = 1, \\ & u_r, v_i \geq 0, \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m, \\ & \vdots \\ \min \quad & \phi_{oJ_p}^L = \sum_{i=1}^m v_i x_{io} / \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m v_i x_{iJ_p} / \sum_{r=1}^s u_r y_{rJ_p} = 1, \\ & u_r, v_i \geq 0, \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (8)$$

که باز هم می‌توان آن را با تبدیل کردن به  $p$  مدل LP به شرح زیر، ساده‌تر کرد:

$$\begin{aligned} \min \phi_{oJ_1}^L &= \sum_{i=1}^m v_i x_{io} \\ \text{s.t. } \sum_{i=1}^m v_i x_{iJ_1} - \sum_{r=1}^s u_r y_{rJ_1} &= 0, \\ \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} &= 1, \\ u_r, v_i &\geq 0, \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{۹}$$

$$\begin{aligned} \min \phi_{oJ_p}^L &= \sum_{i=1}^m v_i x_{io} \\ \text{s.t. } \sum_{i=1}^m v_i x_{iJ_p} - \sum_{r=1}^s u_r y_{rJ_p} &= 0, \\ \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} &= 1, \\ u_r, v_i &\geq 0, \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

می‌توانیم این زیرمسائل را حل کنیم و مقدار مینیمم را روی مقادیر بهینه‌ی (۹) به‌عنوان کران پایین بازه‌ی کارایی  $DMU_o$  به دست آوریم. وقتی که  $j$  برابر با  $o$  است، واضح است که  $\phi_{oj}^{L*} = 1$ . لذا می‌توانیم کران پایین بازه‌ی کارایی  $DMU_o$  را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$\phi_o^{L*} = 1 \wedge \min_{j \neq o} \{ \phi_{oj}^{L*} \}, \tag{۱۰}$$

که در آن  $a \wedge b = \min\{a, b\}$ . بر این اساس، بازه‌ی کارایی  $DMU_o$  را با نماد  $[\phi_o^{L*}, \phi_o^{U*}]$  نشان می‌دهند، که در آن  $\phi_o^{U*}$  مقدار تابع هدف بهینه‌ی مدل (۶) است.

در زیرمسئله‌ی بهینه‌سازی (۹)، هر مدل LP فقط دو شرط خطی دارد. بنابراین، صرف نظر از اینکه تعداد ورودی‌ها و خروجی‌ها در مسئله‌ی مورد نظر چندتا باشد، فقط دو متغیر تصمیم می‌توانند غیر صفر باشند. یکی از آنها برای یک وزن ورودی و دیگری برای یک وزن خروجی است. بدین خاطر است که می‌گوییم روش Entani و همکاران کارایی خوشبینانه‌ی هر  $DMU$  را تنها با لحاظ کردن یک ورودی و یک خروجی اندازه‌گیری می‌کند. به علاوه، مدل (۷) یا زیرمسئله‌ی بهینه‌سازی (۹) قادر به شناسایی دقیق واحدهای کارایی خوشبینانه و مرز کارایی نیستند.

برای روشن شدن این مطلب، مثال عددی ارائه شده در ابتدای بخش ۲ را در نظر بگیرید. ابتدا به کمک مدل‌های (۲) و (۴)، کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه‌ی ده  $DMU$  را به دست می‌آوریم که در جدول ۲ نشان داده شده است. از جدول می‌توان به روشنی دریافت که سه تا از  $DMU$ ها، یعنی  $DMU_A$ ،  $DMU_E$  و  $DMU_J$  بر حسب مدل خوشبینانه‌ی (۲)، کارایی خوشبینانه هستند. این سه واحد کارایی خوشبینانه، بر روی هم یک مرز کارایی AEJ را تعیین می‌کنند، که در شکل ۱ نشان داده شده است. به طور معمول، تصور می‌شود که عملکرد سه واحد کارایی خوشبینانه باید بهتر از هفت واحد دیگر باشد که غیرکارایی خوشبینانه هستند. عملکرد ده  $DMU$  بر حسب کارایی خوشبینانه‌ی آنها به‌صورت زیر رتبه‌بندی می‌شود:

$$\begin{aligned} DMU_A \sim DMU_E \sim DMU_J &> DMU_G \sim DMU_I > DMU_H \\ &> DMU_C > DMU_F > DMU_D > DMU_B \end{aligned}$$

که در اینجا نماد " $\sim$ " نشان دهنده‌ی «بی‌تفاوت بودن» و نماد " $>$ " نشان دهنده‌ی «برتر بودن» است.

جدول شماره (۲): بازه‌ی کارایی مدل‌های **DEA**ی **Entani** و همکاران و کارایی‌های نسبی برای ده **DMU**

DMU	کارایی بدینانه	کارایی خوشبینانه	بازه‌ی کارایی مدل‌های <b>DEA</b> ی <b>Entani</b> و همکاران
A	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	[۰.۱۲۵۰, ۱.۰۰۰۰]
B	۱/۰۰۰۰	۱/۹۱۶۷	[۰.۳۳۳۳, ۱.۰۰۰۰]
C	-۰/۸۱۲۵	۱/۲۱۴۳	[۰.۱۶۶۷, ۰.۸۱۲۵]
D	-۰/۸۸۸۹	۱/۵۳۳۳	[۰.۳۳۳۳, ۰.۸۸۸۹]
E	-۰/۵۹۰۹	۱/۰۰۰۰	[۰.۱۴۲۹, ۰.۵۹۰۹]
F	۱/۰۰۰۰	۱/۴۳۷۵	[۰.۲۵۰۰, ۱.۰۰۰۰]
G	-۰/۵۷۱۴	۱/۰۴۵۵	[۰.۲۰۰۰, ۰.۵۷۱۴]
H	-۰/۹۰۹۱	۱/۲۱۰۵	[۰.۲۰۰۰, ۰.۹۰۹۱]
I	-۰/۸۳۳۳	۱/۰۴۵۵	[۰.۱۶۶۷, ۰.۸۳۳۳]
J	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	[۰.۱۴۲۹, ۱.۰۰۰۰]

از دیدگاه کارایی بدینانه، چهار **DMU** یعنی  $DMU_A$ ،  $DMU_B$ ،  $DMU_F$  و  $DMU_J$  بر حسب مدل بدینانه‌ی (۴)، ناکارای بدینانه هستند. آنها بر روی هم یک مرز ناکارایی **ABFJ** را تعریف می‌کنند که آن هم در شکل ۱ نشان داده شده است. تصور می‌شود که عملکرد این چهار واحد ناکارای بدینانه ضعیف‌تر از شش واحدی است که غیرناکارای بدینانه ارزیابی شده‌اند. عملکرد ده **DMU** بر حسب کارایی بدینانه‌ی آنها به صورت زیر رتبه‌بندی می‌شود:

$$DMU_G > DMU_E > DMU_C > DMU_I > DMU_D > DMU_H \\ \sim DMU_A \sim DMU_B \sim DMU_F \sim DMU_J$$

سنجش‌های فوق بر اساس دیدگاه‌های متفاوتی صورت گرفته‌اند و لذا ممکن است نتایج متفاوتی نیز داشته باشند. به عنوان مثال،  $DMU_J$  و  $DMU_A$  وقتی که از دیدگاه خوشبینانه ارزیابی می‌شوند، کارای خوشبینانه تلقی شده‌اند، یعنی از همه‌ی **DMU**های دیگر عملکرد بهتری دارند، در حالی که وقتی از دیدگاه بدینانه ارزیابی می‌شوند، ناکارای بدینانه هستند، یعنی عملکرد آنها از همه‌ی **DMU**های دیگر بدتر است. این دو نتیجه‌ی ارزیابی مسلماً با یکدیگر تعارض دارند. هر نتیجه‌گیری ارزیابی که فقط یکی از این دو دیدگاه را در نظر بگیرد، بدون تردید یک طرفه، غیر واقع‌گرایانه و غیرمتقاعد کننده خواهد بود. به منظور ارائه‌ی یک ارزیابی کلی از عملکرد هر **DMU**، **Entani** و همکاران هر دو دیدگاه خوشبینانه و بدینانه را همزمان در نظر گرفتند. نتایج مدل‌های **DEA**ی **Entani** و همکاران در ستون آخر جدول ۲ گزارش شده است. واضح است که زیرمسئله‌ی بهینه‌سازی (۹) آنها فقط  $DMU_A$  را تنها **DMU** کارای خوشبینانه‌ی شناسایی می‌کند که کمترین مقدار کران پایین بازه‌ی کارایی را در میان تمام **DMU**ها دارد، اما دو **DMU** کارای خوشبینانه‌ی دیگر را نمی‌تواند شناسایی کند. بنابراین، مرز تولید کارایی را نمی‌توان با رویکرد **Entani** و همکاران مشخص کرد.

با توجه به اینکه چهار تا از **DMU**ها یعنی  $DMU_A$ ،  $DMU_B$ ،  $DMU_F$  و  $DMU_J$  به صورت ناکارای بدینانه مشخص شده‌اند. **Entani** و همکاران به منظور تعیین کران پایین بازه‌ی کارایی هر **DMU**، از چهار مدل **LP** برای هر **DMU** استفاده کردند (در کل برای تعیین کران پایین بازه‌ی کارایی ده **DMU**، ۴۰ مدل **LP** باید حل شود). برای مثال  $DMU_A$  را در نظر بگیرید. برای تعیین کران پایین بازه‌ی کارایی این **DMU**، چهار مدل **LP** زیر باید حل شوند (رجوع کنید زیرمسئله‌ی بهینه‌سازی (۹)):

$$(LP1): \phi_{AA}^{L*} = \min v_1 \\ \text{s.t.} \begin{cases} u_1 + 8u_2 = 1, \\ v_1 - (u_1 + 8u_2) = 0, \\ u_1, u_2, v_1 \geq 0 \end{cases}$$



$$(LP2): \phi_{AB}^{L*} = \min v_1$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} u_1 + 8u_2 = 1, \\ v_1 - (2u_1 + 3u_2) = 0, \\ u_1, u_2, v_1 \geq 0 \end{cases}$$

$$(LP3): \phi_{AF}^{L*} = \min v_1$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} u_1 + 8u_2 = 1, \\ v_1 - (4u_1 + 2u_2) = 0, \\ u_1, u_2, v_1 \geq 0 \end{cases}$$

$$(LP4): \phi_{AJ}^{L*} = \min v_1$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} u_1 + 8u_2 = 1, \\ v_1 - (7u_1 + u_2) = 0, \\ u_1, u_2, v_1 \geq 0 \end{cases}$$

مجموعه جواب بهینه‌ی چهار مدل LP فوق به شرح زیر است:

$$\phi_{AA}^{L*} = 1, u_1^* = 0, u_2^* = 1/8, v_1^* = 1,$$

$$\phi_{AB}^{L*} = 3/8, u_1^* = 0, u_2^* = 1/8, v_1^* = 3/8,$$

$$\phi_{AF}^{L*} = 1/4, u_1^* = 0, u_2^* = 1/8, v_1^* = 1/4,$$

$$\phi_{AJ}^{L*} = 1/8, u_1^* = 0, u_2^* = 1/8, v_1^* = 1/8.$$

بنابراین، کران پایین بازه‌ی کارایی  $DMU_A$  از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\phi_A^{L*} = \min\{1, 3/8, 1/4, 1/8\} = 0.1250$$

کران پایین بازه‌ی کارایی نه  $DMU$ ی دیگر نیز به همین ترتیب محاسبه می‌شود (مجموعه‌ی وزن‌ها و کران پایین بازه‌ی کارایی  $DMU$ های دیگر در جدول ۳ گزارش شده است). همچنین، بر اساس چهار مجموعه‌ی وزن‌های ورودی و خروجی فوق، بسیار روشن است که فقط یک خروجی (خروجی ۱ یا خروجی ۲) در محاسبه‌ی کران پایین بازه‌ی کارایی دخالت دارد. به مجموعه دوم از وزن‌ها یعنی  $v_1^* = 3/8, u_2^* = 1/8, u_1^* = 0$  توجه خاصی می‌شود. در اینجا با استفاده از این مجموعه وزن‌ها، کارایی‌های زیر را برای  $DMU_F, DMU_H, DMU_I$  و  $DMU_J$  به دست آوردیم:

$$\phi_F = \phi_H = \phi_I = 3/2, \phi_J = 3$$

همه آنها بزرگتر از یک هستند. چنین نتایجی بدیهی است فرض  $\max_j \left\{ \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} / \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} \right\} = 1$  را نقض می‌کنند.

بنابراین، رویکرد پیشنهادی Entani و همکاران در حقیقت ناقص است.

جدول شماره (۳): مجموعه وزن‌های به دست آمده با استفاده از مسئله‌ی زیرپهینه‌سازی (۹).

$\phi_j^{L*}$	LP4			LP3			LP2			LP1			DM <sub>j</sub>
	$u_2^*$	$u_1^*$	$v_1^*$	$u_2^*$	$u_1^*$	$v_1^*$	$u_2^*$	$u_1^*$	$v_1^*$	$u_2^*$	$u_1^*$	$v_1^*$	
-/۱۲۵۰	-/۱۲۵	۰	-/۱۲۵	-/۱۲۵	۰	-/۲۵	-/۱۲۵	۰	-/۳۷۵	-/۱۲۵	۰	۱	A
-/۳۳۳۳	-/۳۳۳	۰	-/۳۳۳	-/۳۳۳	۰	-/۶۶۷	-/۳۳۳	۰	۱	۰	-/۵	-/۵	B
-/۱۶۶۷	-/۱۶۷	۰	-/۱۶۷	-/۱۶۷	۰	-/۳۳۳	-/۱۶۷	۰	-/۵	۰	-/۵	-/۵	C
-/۳۳۳۳	-/۳۳۳	۰	-/۳۳۳	-/۳۳۳	۰	-/۶۶۷	۰	-/۳۳۳	-/۶۶۷	۰	-/۳۳۳	-/۳۳۳	D
-/۱۴۲۹	-/۱۴۳	۰	-/۱۴۳	-/۱۴۳	۰	-/۲۵۶	-/۱۴۳	۰	-/۴۲۹	۰	-/۳۳۳	-/۳۳۳	E
-/۲۵۰۰	-/۵	۰	-/۵	-/۵	۰	۱	۰	-/۲۵	-/۵	۰	-/۲۵	-/۲۵	F
-/۲۰۰۰	-/۲	۰	-/۲	-/۲	۰	-/۴	۰	-/۲۵	-/۵	۰	-/۲۵	-/۲۵	G
-/۲۰۰۰	-/۵	۰	-/۵	۰	-/۲	-/۸	۰	-/۲	-/۴	۰	-/۲	-/۲	H
-/۱۶۶۷	-/۵	۰	-/۵	۰	-/۱۶۷	-/۶۶۷	۰	-/۱۶۷	-/۳۳۳	۰	-/۱۶۷	-/۱۶۷	I
-/۱۴۲۹	۱	۰	۱	۰	-/۱۴۳	-/۵۷۱	۰	-/۱۴۳	-/۲۸۶	۰	-/۱۴۳	-/۱۴۳	J

در ادامه مدل‌های DEA جدیدی برای تعیین بازه‌ی کارایی هر DMU ایجاد می‌کنیم تا بر نقایص فوق غلبه کنیم. از نظر تئوری، کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه باید یک بازه را تشکیل دهند (Entani et al., 2002; Azizi, 2011; Wang & Yang, 2007). برای این منظور، کارایی‌های خوشبینانه به دست آمده از مدل‌های (۱) و (۲) را باید تعدیل کرد. فرض کنید  $\alpha$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ) ضریب تعدیل باشد. در این صورت کارایی‌های خوشبینانه‌ی تعدیل شده را می‌توان به صورت  $\tilde{\theta}_j^* = \alpha \theta_j^*$  ( $j = 1, \dots, n$ ) نوشت، که باید شرط  $\tilde{\theta}_j^* = \alpha \theta_j^* \leq \phi_j^*$  ( $j = 1, \dots, n$ ) را تأمین کنند؛ یعنی  $\alpha \leq \min_{j=1, \dots, n} \{\phi_j^* / \theta_j^*\}$ . بر این اساس، بازه‌ی کارایی مربوط به  $DMU_j$  را می‌توان به صورت  $[\alpha \theta_j^*, \phi_j^*]$  ( $j = 1, \dots, n$ ) بیان کرد.

به منظور سنجش منطقی بازه‌ی کارایی DMUها، ابتدا IDMU را معرفی می‌کنیم.

**تعریف ۱:** IDMU یک DMU مجازی است که با مصرف کمترین مقدار ورودی، بیشترین مقدار خروجی را تولید می‌کند. با توجه به تعریف IDMU، ورودی و خروجی IDMU را با  $x_i^{\min}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) و  $y_r^{\max}$  ( $r = 1, \dots, s$ ) نشان می‌دهیم که  $x_i^{\min}$  نشان دهنده‌ی کمترین میزان ورودی  $i$ ام و  $y_r^{\max}$  نشان دهنده‌ی بیشترین میزان خروجی  $r$ ام می‌باشند. این مقادیر به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$x_i^{\min} = \min_j \{x_{ij}\}, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$y_r^{\max} = \max_j \{y_{rj}\}, \quad r = 1, \dots, s.$$

فرض کنید  $\phi_{IDMU}^*$  کارایی بدبینانه‌ی IDMU باشد. در این صورت می‌توان آن را از حل مدل برنامه‌ریزی کسری زیر به دست آورد:

$$\max \quad \phi_{IDMU} = \frac{\sum_{i=1}^m v_i x_i^{\min}}{\sum_{r=1}^s u_r y_r^{\max}}$$

$$\text{s.t.} \quad \phi_j = \frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}}{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n, \quad (11)$$

$$u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m,$$

به کمک تبدیل Cooper و Charnes، مدل برنامه‌ریزی کسری (۱۱) به مدل LP زیر تبدیل می‌شود و به راحتی قابل حل

خواهد بود (Charnes & Cooper, 1962):

$$\begin{aligned} \max \quad & \varphi_{IDMU} = \sum_{i=1}^m v_i x_i^{\min} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \geq 0, \quad j=1, \dots, n, \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_r^{\max} = 1, \\ & u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad r=1, \dots, s; \quad i=1, \dots, m. \end{aligned} \quad (12)$$

با توجه به مطالب فوق داریم:

$$\varphi_{IDMU}^* \leq \min_{j=1, \dots, n} \{\varphi_j^*\} \quad \text{و} \quad \theta_{\max}^* = \max_{j=1, \dots, n} \{\theta_j^*\}.$$

اکنون پارامتر  $\alpha$  را طوری تعیین می‌کنیم که برای تمام بازه‌ها  $[\alpha\theta_j^*, \varphi_j^*]$  ( $j=1, \dots, n$ )، شرط  $\alpha\theta_j^* \leq \varphi_j^*$  برقرار باشد:

$$\min_{j=1, \dots, n} \{\varphi_j^* / \theta_j^*\} \geq \frac{\min_{j=1, \dots, n} \{\varphi_j^*\}}{\max_{j=1, \dots, n} \{\theta_j^*\}} \geq \frac{\varphi_{IDMU}^*}{\theta_{\max}^*},$$

اگر قرار دهیم  $\alpha = \varphi_{IDMU}^* / \theta_{\max}^*$ ، در این صورت مشکلی در تعیین  $\alpha$  نخواهیم داشت. بنابراین، کارایی DMUها را می‌توانیم در محدوده‌ی بازه‌ی  $[\alpha, 1]$  به دست آوریم. دو مدل برنامه‌ریزی کسری زیر منعکس کننده این ایده است:

$$\begin{aligned} \max / \min \quad & \psi_o = \frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}}{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}} \\ \text{s.t.} \quad & \alpha \leq \frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}}{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}} \leq 1, \quad j=1, \dots, n, \\ & u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad r=1, \dots, s; \quad i=1, \dots, m, \end{aligned} \quad (13)$$

مدل‌های فوق می‌توانند به دو مدل LP زیر تبدیل شوند:

$$\begin{aligned} \max / \min \quad & \psi_o = \sum_{i=1}^m v_i x_{io} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s u_r (\alpha y_{rj}) - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, \quad j=1, \dots, n, \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \geq 0, \quad j=1, \dots, n, \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} = 1, \\ & u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad r=1, \dots, s; \quad i=1, \dots, m. \end{aligned} \quad (14)$$

هر دو مدل (۱۳) و (۱۴) مدل‌های کراندار نامیده می‌شوند. فرض کنید که  $\psi_o^{L^*}$  و  $\psi_o^{U^*}$  به ترتیب ماکزیمم و مینیمم تابع هدف مدل (۱۴) باشند. در این صورت، آنها با همدیگر یک بازه‌ی کارایی را تشکیل می‌دهند که کران بالای آن از دیدگاه بدبینانه و کران پایین آن از دیدگاه خوشبینانه برای  $DMU_o$  اندازه‌گیری شده است. بنابراین، محدوده‌ی کارایی  $DMU_o$  است، و آن را با نماد  $[\psi_o^{L^*}, \psi_o^{U^*}]$  نشان می‌دهیم. با حل مدل‌های (۱۴) می‌توانیم بهترین و بدترین کارایی‌های نسبی تمام DMUها و کارایی‌های بازه‌ی آنها را (یعنی  $[\psi_j^{L^*}, \psi_j^{U^*}]$  ( $j=1, \dots, n$ )) پیدا کنیم. در رابطه با بازه‌ی کارایی  $[\alpha\theta_o^*, \varphi_o^*] = [\psi_o^{L^*}, \psi_o^{U^*}]$  تعاریف زیر را داریم:

۳ در مدل‌های (۱۴)، مدل ماکزیمم‌سازی معادل مدل (۴) می‌باشد. همچنین، مقدار بهینه‌ی مدل مینیمم‌سازی معادل  $\alpha$  برابر مقدار بهینه‌ی مدل (۲) می‌باشد.

**تعریف ۲:**  $DMU_o$  را ناکارای بدبینانه می‌گوییم اگر و تنها اگر  $\psi_o^{U*} = 1$ ، در غیر این صورت آن را غیرناکارای بدبینانه می‌گوییم.

**تعریف ۳:**  $DMU_o$  را کارای خوشبینانه می‌گوییم اگر و تنها اگر  $\psi_o^{L*} = \alpha$ ، در غیر این صورت آن را غیرکارای خوشبینانه می‌گوییم.

**تعریف ۴:**  $DMU_o$  را نامعین می‌گوییم اگر و تنها اگر نه کارای خوشبینانه و نه ناکارای بدبینانه باشد.

**تعریف ۵:**  $DMU_o$  را ویژه می‌گوییم اگر و تنها اگر هم کارای خوشبینانه و هم ناکارای بدبینانه باشد.

برای مقایسه‌ی مدل‌های کراندار پیشنهادی با مدل‌های Entani و همکاران، مثال عددی ارائه شده در ابتدای بخش را در نظر بگیرید. ابتدا مقادیر ورودی‌ها و خروجی‌های IDMU را مشخص می‌کنیم که این مقادیر به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$x_1^{\min} = \min_j \{x_{1j}\} = 1, \quad y_1^{\max} = \max_j \{y_{1j}\} = 7, \quad y_2^{\max} = \max_j \{y_{2j}\} = 8$$

سپس، کارایی بدبینانه‌ی IDMU را به کمک مدل (۱۲) محاسبه می‌کنیم که مقدار آن برابر است با  $\phi_{IDMU}^* = 0.3478$ . در نهایت، برای به دست آوردن بازه‌ی کارایی هر DMU، با استفاده از مدل‌های کراندار (۱۴)،  $\alpha$  را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\theta_{\max}^* = 1.9167 \quad \text{و} \quad \phi_{IDMU}^* = 0.3478 \Rightarrow \alpha = \frac{0.3478}{1.9167} = 0.1814$$

سپس، با اجرای مدل‌های (۱۴) برای هر DMU، بازه‌ی کارایی آنها را به دست می‌آوریم، که در جدول ۴ نشان داده شده است. از جدول ۴ به طور واضح دیده می‌شود که مدل‌های کراندار (۱۴)، نه تنها سه DMU کارای خوشبینانه را به طور دقیق مشخص می‌کند بلکه چهار DMU ناکارای بدبینانه را هم به طور کامل مشخص می‌کند ( $DMU_A$ ،  $DMU_E$  و  $DMU_J$  کارای خوشبینانه شناسایی شده‌اند و  $DMU_A$ ،  $DMU_B$ ،  $DMU_C$  و  $DMU_F$  ناکارای بدبینانه شناسایی شده‌اند). چنین نتایج ارزیابی، کاملاً با نتایج به دست آمده از مدل خوشبینانه‌ی (۲) و مدل بدبینانه‌ی (۴) سازگار می‌باشد. جدول شماره (۴): بازه‌ی کارایی ده DMU با استفاده از مدل‌های کراندار (۱۴).

بازه‌ی کارایی	DMU
[۰.۱۸۱۴, ۱.۰۰۰۰]	A
[۰.۳۴۷۷, ۱.۰۰۰۰]	B
[۰.۲۲۰۳, ۰.۸۱۲۵]	C
[۰.۳۷۸۱, ۰.۸۸۸۹]	D
[۰.۱۸۱۴, ۰.۵۹۰۹]	E
[۰.۲۶۰۸, ۱.۰۰۰۰]	F
[۰.۱۸۹۶, ۰.۵۷۱۴]	G
[۰.۲۱۹۶, ۰.۹۰۹۱]	H
[۰.۱۸۹۶, ۰.۸۳۳۳]	I
[۰.۱۸۱۴, ۱.۰۰۰۰]	J

در این مثال هر دو  $DMU_A$  و  $DMU_J$  به صورت کارای خوشبینانه و ناکارای بدبینانه ارزیابی شده‌اند. این پدیده نشان می‌دهد که دو مرز تولید متفاوت مشترکاً از دو DMU خاص عبور می‌کنند (رجوع کنید شکل ۱). معمولاً DMU‌های کارای خوشبینانه عملکرد خوبی دارند. اما به این معنی نیست که هر DMU کارای خوشبینانه بهترین است. همچنین DMU‌های ناکارای بدبینانه معمولاً ضعیف عمل می‌کنند، اما نه اینکه هر DMU ناکارای بدبینانه بدترین کارکرد را انجام می‌دهد. بنابراین، وقتی که یک DMU هم کارای خوشبینانه و هم ناکارای بدبینانه باشد، به این مفهوم است که DMU نه بهترین است و نه بدترین. در ادامه، مدل‌های کراندار پیشنهادی را برای تحلیل فعالیت‌های بانک‌های پس‌انداز اسپانیا مورد استفاده قرار می‌دهیم. تمام

بانک‌های پس‌انداز اسپانیا، که تعدادشان جمعاً ۴۷ بانک است، در این مجموعه‌ی داده‌ها گنجانده شده‌اند (Serrano-Cinca, MarMoliero, & Chaparro, 2004).

بانک‌های پس‌انداز از بازیگران اصلی در صحنه‌ی سیستم مالی اسپانیا هستند. این بانک‌ها در قرن نوزدهم به صورت تعاونی‌های حمایت متقابل منشأ گرفتند، ولی در طول زمان تبدیل به مؤسسه‌ای شده‌اند که جهت‌گیری آنها به سمت پس‌اندازهای اندک و سرمایه‌گذاری‌های کوچک است. این بانک‌ها به صورت منطقه‌ای هستند و تعهد شدیدی نسبت به محل خود و مؤسسات محلی خود دارند. به عنوان مثال، آنها معمولاً پروژه‌های دولتی محلی را تأمین اعتبار می‌کنند. این بانک‌ها، با استثنای معدود، معمولاً مالک یا سهامدار مشخصی ندارند. ساختار حقوقی آنها بسیار غیرعادی است. آنها از نظر حقوقی متعهد به ارتقای رفاه اجتماعی هستند. برای این کار، آنها به ایجاد بنگاه‌های جدید کمک می‌کنند، برای توسعه‌ی اجتماعی محل سرمایه‌گذاری می‌کنند، و نقش پیشتازی در فعالیت‌های اجتماعی دارند. ولی علیرغم این ساختار خاص، و شاید هم به خاطر آن، این بانک‌ها بسیار موفق‌اند. آنها ۵۷٪ همه‌ی سپرده‌های اسپانیا را به خود اختصاص می‌دهند، و در این زمینه از بانک‌های تجاری جلوتر هستند. در اسپانیا، بانک‌های پس‌انداز از نظر قانونی موظف‌اند «ضریب توانایی مالی» را در یک سطح حداقل نگه دارند. بانک اسپانیا کنترل می‌کند که این شرط حتماً رعایت شود.

یک مؤسسه‌ی مالی را می‌توان به عنوان یک واحد تولیدی در نظر گرفت که از ورودی‌ها برای تولید خروجی‌ها استفاده می‌کند. یک بانک پس‌انداز اسپانیایی مایل است نشان دهد که مدیریت مؤثری دارد، در استفاده از فناوری الکترونیکی به جلو نگاه می‌کند، و در ارائه‌ی اطلاعات مالی و غیره شفاف است.

امروزه معمولاً بنگاه‌ها حضور فعالی در اینترنت دارند. وب فرصت بسیار خوبی برای ایجاد وجهه برای شرکت، ارائه‌ی اطلاعات و دستیابی به آخرین زوایای بازار فراهم می‌کند. به عنوان یک بخش بنیادی از این حضور، شرکت‌ها می‌توانند دسترسی دوردست به انواع خدمات را فراهم کنند. یک مشتری از هر نقطه‌ای در دنیا می‌تواند سفارش بدهد، استعلام کند و یا عقیده‌ی خود را ابراز کند. استفاده از اینترنت به عنوان یک ابزار سرویس اطلاعاتی و دوردست خصوصاً در مورد بانک‌های پس‌انداز اسپانیا حایز اهمیت است. فقدان مالک و سهام‌دار بدان معنا است که این مؤسسات در حقیقت، مستقیماً به جامعه‌ی محلی پاسخگو هستند. برای آنها خیلی مهم است که «دوستدار جامعه» باشند. معنای این مطلب آن است که باید حتی‌الامکان در مقابل مردم شفافیت داشته باشند، و سرویس‌های خود را به آسانی در دسترس مردم قرار دهند. بانکداری الکترونیک روشی برای گسترش خدمات مالی است، و ارائه‌ی اطلاعات مالی در اینترنت روشی برای تقویت شفافیت است. کیفیت بانکداری الکترونیک مطلبی نیست که در اظهارنامه‌های مالی به آن توجه شده باشد، ولی یک سرویس بانکداری الکترونیک خوب مسلماً منجر به تعداد بیشتر مشتریان خواهد شد. به همان طریق، افزایش شفافیت اطلاعات مالی ممکن است منجر به افزایش اعتماد به مؤسسه شود و مجموعه‌ی مشتریان را گسترده‌تر سازد.

چهل و هفت بانک پس‌انداز اسپانیا از نظر دو ورودی یعنی تعداد کارکنان ( $X_1$ ) (به عنوان معیاری از نیروی انسانی) و دارایی‌های ثابت ( $X_2$ ) (به عنوان معیاری از شدت سرمایه) و سه خروجی یعنی درآمد عملیاتی ( $Y_1$ )، سپرده‌ها ( $Y_2$ ) و وام‌ها ( $Y_3$ ) که داده‌های ورودی و خروجی آنها در جدول ۵ نشان داده شده است، ارزیابی می‌شوند.

جدول شماره (۵): مجموعه داده‌ها برای ۴۷ بانک پس‌انداز اسپانیا

بانک پس‌انداز (DMU)		ورودی‌ها			خروجی‌ها		
		$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	
Bancaja		۴۵۵۱	۲۲۴	۵۸۸	۱۱۴۶۳	۱۲۹۰۷	
BBK		۲۵۱۱	۳۰۵	۴۴۰	۱۰۰۱۹	۶۵۴۰	
CAI		۱۲۲۵	۱۰۲	۱۷۸	۳۰۲۵	۲۸۷۶	
Caixacarlet		۸۳	۷	۶	۱۲۵	۱۲۵	
Caixacatalunya		۴۸۰۱	۴۷۱	۵۶۲	۱۴۹۴۴	۱۳۶۸۱	
Caixagalicia		۳۴۲۵	۲۹۹	۴۶۰	۹۹۸۱	۷۸۴۸	

۱۴۵۱	۲۲۹۷	۸۳	۴۲	۷۵۶	Caixagirona
۱۵۸۰	۱۹۰۰	۷۹	۱۱۴	۷۷۳	Caixalaietana
۶۳۷	۸۲۶	۳۸	۲۷	۳۸۰	Caixamanlleu
۱۱۳۴	۱۶۰۸	۷۱	۲۹	۵۸۳	Caixamanresa
۴۷۳۲	۶۱۷۳	۳۰۴	۱۹۵	۲۲۹۹	Caixanova
۳۶۹	۳۴۵	۱۸	۱۴	۲۱۸	Caixaontinyent
۴۲۹۷	۴۷۹۷	۱۹۹	۲۱۱	۱۹۰۳	Caixapenedes
۲۷۴۵	۲۸۰۵	۱۱۹	۸۴	۱۲۴۵	Caixasabadell
۲۰۴۰	۲۶۸۴	۱۱۱	۵۰	۱۱۶۴	Caixatarragona
۱۹۰۹	۲۵۰۶	۱۰۶	۵۳	۱۰۹۰	Caixaterrassa
۱۱۴۲	۱۴۶۷	۷۹	۶۶	۷۷۰	Cajabadajoz
۲۴۵۴	۳۰۳۰	۱۵۱	۶۰	۱۰۴۴	Cajacanarias
۲۰۲۷	۲۶۱۳	۱۲۸	۸۶	۹۹۸	Cajacantabria
۹۲۳	۱۷۴۲	۷۶	۷۷	۵۵۰	Cajacirculo
۱۰۹۳	۱۳۹۳	۷۵	۴۶	۵۷۸	Cajadeavila
۲۲۳۵	۳۰۲۳	۱۱۰	۸۹	۷۵۳	Cajadeburgos
۴۴۴۹	۷۲۳۱	۲۳۰	۲۴۸	۲۴۵۹	Cajaduro
۲۰۲	۲۲۳	۱۳	۷	۱۳۳	Cajaen
۵۸۷۱	۷۶۶۸	۳۴۹	۲۹۲	۲۶۶۶	Cajaespana
۱۶۹۸	۲۴۱۱	۱۰۴	۶۲	۱۰۶۳	Cajaextremadura
۳۹۰۶	۴۱۵۲	۱۹۷	۱۴۶	۲۰۴۹	Cajagranada
۴۱۵	۴۹۴	۲۱	۱۳	۲۳۳	Cajaguadalajara
۳۵۹۴۷	۳۷۷۹۰	۱۸۰۸	۱۲۳۳	۱۰۹۵۲	Cajamadrid
۳۷۴۳	۴۷۲۳	۲۱۰	۱۲۱	۱۵۱۰	Cajamurcia
۴۰۱۹	۵۰۶۰	۱۸۹	۸۱	۱۳۶۹	Cajanavarra
۱۰۶۰	۱۰۶۲	۴۳	۳۳	۴۱۱	Cajarrioja
۳۴۲۱	۳۶۳۹	۱۸۵	۱۳۱	۲۰۸۴	Cajasanfernando
۱۲۷۲	۱۴۳۰	۶۳	۵۹	۵۲۴	Cajasegovia
۳۱۶۶	۴۵۴۷	۱۹۶	۹۸	۱۳۲۴	Cajastur
۵۰۶۰	۵۴۸۲	۲۴۱	۱۸۹	۲۲۱۰	Cajasur
۲۲۲۷	۳۰۳۲	۱۱۸	۷۸	۶۷۲	Cajavital
۱۲۱۵۵	۱۲۶۵۹	۵۸۷	۳۵۹	۵۰۳۱	CAM
۴۰۶۶	۵۶۲۸	۲۲۳	۱۹۱	۲۱۷۹	CCM
۱۱۴	۱۴۳	۶	۴	۶۳	Colonya
۴۷۳۵	۴۴۷۵	۲۳۰	۱۴۷	۱۹۸۲	Elmonte
۸۸۸۳	۱۰۷۵۵	۴۱۰	۲۵۹	۴۲۴۱	Ibercaja
۴۸۵۴	۶۶۱۳	۲۸۷	۲۳۳	۱۶۵۴	Kutxa
۴۳۲۷۳	۴۷۳۹۱	۲۴۱۶	۱۹۸۶	۱۹۱۲۶	Lacaixa
۲۰۴۸	۲۴۱۹	۱۱۷	۸۰	۹۳۱	Lacajadecanarias
۲۹۶۰	۳۳۴۹	۱۳۸	۱۱۱	۱۴۱۲	Sanostra

۷۴۴۳	۹۵۹۳	۴۶۳	۳۵۹	۴۵۱۰	Unicaja
۴۳۲۷۳	۴۷۳۹۱	۲۴۱۶	۴	۶۳	IDMU

<sup>a</sup> تمام مبالغ پولی بر حسب میلیون یورو هستند.

برای این مطالعه‌ی موردی واقعی، ابتدا مدل (۲) را برای هر DMU اجرا می‌کنیم تا مقادیر کارایی‌های آنها را از دیدگاه DEA خوشبینانه اندازه‌گیری کنیم، و سپس مدل (۴) را برای هر DMU اجرا می‌کنیم تا مقادیر کارایی‌های آنها را از دیدگاه DEA بدبینانه اندازه‌گیری کنیم. این نتایج در جدول ۶ نشان داده شده‌اند، که از آنجا به روشنی می‌توان دید مقادیر کارایی‌های پس‌انداز Cajavital و Cajanavarra، Cajacanarias، Bancaja، Cajacircular و Cajabadajoz، Caixalaitana، Caixacarlet، Caixacircular و Cajacircular همگی به‌عنوان DMUهای کارای خوشبینانه ارزیابی شده‌اند، یعنی نسبت به ۴۳ بانک پس‌انداز دیگر دارای بهترین عملکرد هستند. همچنین، بر اساس نتایج مدل (۴)، بانک‌های پس‌انداز Caixalaitana، Caixacarlet، Caixalaitana، Cajabadajoz و Cajacircular همگی به‌عنوان DMUهای ناکارای بدبینانه ارزیابی شده‌اند، یعنی نسبت به ۴۳ بانک پس‌انداز دیگر دارای بدترین عملکرد هستند و در معرض ورشکستگی هستند. به منظور ایجاد یک نتیجه‌گیری ارزیابی کلی برای ۴۷ DMU، جدول ۶ مقادیر بازه‌ی کارایی مبتنی بر DEA را برای هر DMU با در نظر گرفتن همزمان هر دو دیدگاه خوشبینانه و بدبینانه نشان می‌دهد. قبل از اجرای مدل‌های (۱۴) برای این مثال عددی، مقادیر زیر را به دست آوردیم:

$$\theta_{\max}^* = 2.0604 \quad \text{و} \quad \varphi_{IDMU}^* = 0.0022 \Rightarrow \alpha = 0.0022 / 2.0604 = 0.0011.$$

با داده‌های ورودی-خروجی جدول ۵، مدل‌های (۱۴) را برای محاسبه‌ی کران‌های پایین و بالای نمرات کارایی بانک‌های پس‌انداز در اسپانیا به کار می‌گیریم. نتایج در ستون آخر جدول ۶ نشان داده شده است. بانک پس‌انداز Bancaja را در نظر بگیرید. دامنه‌ی نمره‌ی کارایی [0.0011, 0.5979] است، که نشان می‌دهد که نمره‌ی کارایی هرگز به زیر ۰/۰۰۱۱ سقوط نخواهد کرد، و بدترین نمره‌ی کارایی ممکن ۰/۵۹۷۹ است. اکثر بانک‌ها (۴۳ تا از ۴۷ بانک) دارای نمره‌ی کارایی کران بالای کوچک‌تر از ۱ هستند، و چهار بانک کران پایین دارند که ۰/۰۰۱۱ می‌باشد. تنها بانک‌های پس‌انداز Caixacarlet، Caixalaitana، Cajabadajoz و Cajacircular کران بالای ۱ دارند. این هشدار برای مدیریت در رابطه با عملیات این چهار بانک است. به نظر می‌رسد که مدیران بانک‌های پس‌انداز Caixacarlet، Caixalaitana، Cajabadajoz و Cajacircular به قدر کافی محتاط نیستند، و از خطرات مرتبط آگاهی ندارند. نمرات کارایی که با روش پیشنهادی این مقاله محاسبه شده است، می‌تواند در مورد عملیات غیرطبیعی بانک‌های پس‌انداز Caixalaitana، Caixacarlet، Cajabadajoz و Cajacircular هشدار بدهد.

مدیران کل باید نقاط ضعف بانک‌های خود را در مقایسه با دیگران پیش‌بینی کنند، و تنظیمات مناسب را قبل از آنکه خیلی دیر شود، انجام دهند. برای بانک‌هایی که نمره‌ی کارایی پایینی دارند، ورودی‌ها باید کاهش یابد و خروجی‌ها افزایش یابد، تا عملکرد بهتری پیدا کنند.

جدول شماره‌ی (۶): کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه و بازه‌ی کارایی ۴۷ بانک پس‌انداز اسپانیا.

بانک پس‌انداز (DMU)	کارایی خوشبینانه	کارایی بدبینانه	بازه‌ی کارایی
Bancaja	۱/۰۰۰۰	۰/۵۹۷۹	[۰/۰۰۱۱, ۰/۵۹۷۹]
BBK	۱/۰۰۲۱	۰/۶۳۶۳	[۰/۰۰۱۱, ۰/۶۳۶۳]
CAI	۱/۰۸۹۲	۰/۶۳۹۷	[۰/۰۰۱۲, ۰/۶۳۹۷]
Caixacarlet	۲/۰۶۰۴	۱/۰۰۰۰	[۰/۰۰۲۳, ۱/۰۰۰۰]
Caixacatalunya	۱/۱۲۱۰	۰/۶۷۳۳	[۰/۰۰۱۲, ۰/۶۷۳۳]
Caixagalicia	۱/۱۹۴۲	۰/۶۵۶۲	[۰/۰۰۱۳, ۰/۶۵۶۲]
Caixagirona	۱/۱۴۲۲	۰/۷۷۹۴	[۰/۰۰۱۳, ۰/۷۷۹۴]
Caixalaitana	۱/۶۲۱۳	۱/۰۰۰۰	[۰/۰۰۱۸, ۱/۰۰۰۰]

[.۰۰۰۱۷, .۰۸۹۰۸]	۰/۸۹۰۸	۱/۵۱۶۱	Caixamanlleu
[.۰۰۰۱۱, .۰۷۶۶۱]	۰/۷۶۶۱	۱/۰۱۷۱	Caixamanresa
[.۰۰۰۱۳, .۰۷۲۳۱]	۰/۷۲۳۱	۱/۲۰۳۱	Caixanova
[.۰۰۰۱۹, .۰۹۵۱۶]	۰/۹۵۱۶	۱/۷۲۱۴	Caixaontinyent
[.۰۰۰۱۶, .۰۸۱۱۵]	۰/۸۱۱۵	۱/۴۵۲۴	Caixapenedes
[.۰۰۰۱۵, .۰۷۵۶۳]	۰/۷۵۶۳	۱/۳۵۶۵	Caixasabadell
[.۰۰۰۱۲, .۰۸۵۵۳]	۰/۸۵۵۳	۱/۰۹۴۴	Caixatarragona
[.۰۰۰۱۳, .۰۸۵۵۲]	۰/۸۵۵۲	۱/۲۲۵۲	Caixaterrassa
[.۰۰۰۱۷, ۱.۰۰۰۰]	۱/۰۰۰۰	۱/۵۵۵۲	Cajabadajoz
[.۰۰۰۱۱, .۰۶۳۴۴]	۰/۶۳۴۴	۱/۰۰۰۰	Cajacanarias
[.۰۰۰۱۴, .۰۷۳۵۰]	۰/۷۳۵۰	۱/۲۴۵۹	Cajacantabria
[.۰۰۰۱۴, ۱.۰۰۰۰]	۱/۰۰۰۰	۱/۲۷۰۸	Cajacirculo
[.۰۰۰۱۳, .۰۷۸۴۷]	۰/۷۸۴۷	۱/۲۰۴۷	Cajadeavila
[.۰۰۰۱۲, .۰۶۰۴۶]	۰/۶۰۴۶	۱/۱۱۶۵	Cajadeburgos
[.۰۰۰۱۶, .۰۸۹۵۰]	۰/۸۹۵۰	۱/۴۶۰۱	Cajaduro
[.۰۰۰۱۵, .۰۹۸۶۰]	۰/۹۸۶۰	۱/۳۸۷۱	Cajaen
[.۰۰۰۱۴, .۰۷۴۰۶]	۰/۷۴۰۶	۱/۳۱۵۰	Cajaespana
[.۰۰۰۱۶, .۰۹۳۳۸]	۰/۹۳۳۸	۱/۴۴۶۶	Cajaextremadura
[.۰۰۰۱۷, .۰۷۸۸۶]	۰/۷۸۸۶	۱/۵۳۲۲	Cajagranada
[.۰۰۰۱۷, .۰۸۴۳۹]	۰/۸۴۳۹	۱/۵۱۲۲	Cajaguadalajara
[.۰۰۰۱۱, .۰۵۵۹۹]	۰/۵۵۹۹	۱/۰۰۲۶	Cajamadrid
[.۰۰۰۱۲, .۰۶۰۴۰]	۰/۶۰۴۰	۱/۱۲۰۸	Cajamurcia
[.۰۰۰۱۱, .۰۵۲۳۶]	۰/۵۲۳۶	۱/۰۰۰۰	Cajanavarra
[.۰۰۰۱۳, .۰۶۹۰۹]	۰/۶۹۰۹	۱/۱۹۲۷	Cajarioja
[.۰۰۰۱۸, .۰۹۱۴۳]	۰/۹۱۴۳	۱/۶۲۶۵	Cajasanfernando
[.۰۰۰۱۵, .۰۷۱۷۷]	۰/۷۱۷۷	۱/۳۵۵۷	Cajasegovia
[.۰۰۰۱۱, .۰۶۲۳۵]	۰/۶۲۳۵	۱/۰۲۵۰	Cajastur
[.۰۰۰۱۵, .۰۶۶۸۰]	۰/۶۶۸۰	۱/۳۵۸۷	Cajasur
[.۰۰۰۱۱, .۰۵۲۴۹]	۰/۵۲۴۹	۱/۰۰۰۰	Cajavital
[.۰۰۰۱۴, .۰۶۲۳۲]	۰/۶۲۳۲	۱/۲۴۸۶	CAM
[.۰۰۰۱۷, .۰۸۰۹۲]	۰/۸۰۹۲	۱/۵۴۴۰	CCM
[.۰۰۰۱۷, .۰۸۲۹۵]	۰/۸۲۹۵	۱/۵۱۱۸	Colonya
[.۰۰۰۱۴, .۰۶۶۷۰]	۰/۶۶۷۰	۱/۲۷۰۶	Elmonte
[.۰۰۰۱۵, .۰۷۴۷۸]	۰/۷۴۷۸	۱/۴۰۷۶	Ibercaja
[.۰۰۰۱۱, .۰۶۴۸۱]	۰/۶۴۸۱	۱/۰۱۲۰	Kutxa
[.۰۰۰۱۵, .۰۷۳۵۵]	۰/۷۳۵۵	۱/۳۳۸۹	Lacaixa
[.۰۰۰۱۴, .۰۶۸۱۹]	۰/۶۸۱۹	۱/۲۷۰۵	Lacajadecanarias
[.۰۰۰۱۶, .۰۷۳۹۷]	۰/۷۳۹۷	۱/۴۶۲۱	Sanostra
[.۰۰۰۱۷, .۰۹۰۳۲]	۰/۹۰۳۲	۱/۵۲۲۸	Unicaja

### ۳- نتیجه گیری

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) به عنوان رویکردی برای تحلیل کارایی نسبی، یکی از نویدبخش‌ترین و توسعه یافته‌ترین



روش‌ها در چهار دهه‌ی گذشته است. نه تنها فرهیختگان مدیریت، بلکه حتی بسیاری از اقتصاددانان علاقه‌ی زیادی به تحقیق، توسعه و کاربرد آن نشان داده‌اند. در شکل متعارف DEA، اندازه‌گیری عملکرد DMUها بر اساس دیدگاه خوشبینانه صورت می‌گیرد. بنابراین، مدل‌های خوشبینانه را می‌توان روش تحلیل بهترین کارایی نسبی یا کارایی خوشبینانه دانست. مدل‌های دیگری به نام مدل‌های بدبینانه وجود دارند که هر DMU را به صورت بدبینانه ارزیابی می‌کنند. اما اساساً هیچگونه رابطه‌ای بین مدل‌های خوشبینانه و مدل‌های بدبینانه وجود ندارد. یک مجموعه‌ی نمره‌دهی عملکرد باید مشتمل بر هر دوی آنها باشد. ارزیابی نتیجه‌گیری‌های حاصل از فقط یکی از آنها یک‌طرفه خواهد بود.

برای اندازه‌گیری عملکرد کلی DMUها و اجتناب از یک‌طرفه بودن ارزیابی، در این مقاله زوج جدیدی از مدل‌های DEA برای کار با داده‌های قطعی ایجاد کردیم. در مقایسه با مدل‌های DEAی ایجاد شده توسط Entani و همکاران، مدل‌های DEAی پیشنهادی از تمام اطلاعات موجود برای اندازه‌گیری کارایی همه‌ی DMUها استفاده می‌کنند، که سبب می‌شود مدل‌ها منطقی‌تر و قابل اعتمادتر باشند. و بعد، مدل‌های DEAی پیشنهادی تمام DMUهای کارایی خوشبینانه را به درستی شناسایی می‌کنند که سبب می‌شود مدل‌های پیشنهادی قوی‌تر و عملی‌تر باشند. مدل‌های DEAی حاصله در نهایت با دو مثال عددی منجمله یک مثال درباره‌ی ارزیابی عملکرد بانک‌های پس‌انداز اسپانیا امتحان شدند.

### سپاسگزاری

مؤلفان از نظرات و پیشنهادات سودمند یک داور ناشناس قدردانی می‌کنند.

### ۴- منابع

1. Ahmady, Nazanin, Azadi, Majid, Sadeghi, Seyed Amir Hossein, & Farzipoor Saen, Reza. (2013). A novel fuzzy data envelopment analysis model with double frontiers for supplier selection. *International Journal of Logistics Research and Applications*, 16(2), 87-98. doi: 10.1080/13675567.2013.772957
2. Amirteimoori, Alireza. (2007). DEA efficiency analysis: Efficient and anti-efficient frontier. *Applied Mathematics and Computation*, 186(1), 10-16. doi: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.07.006>
3. Amirteimoori, Alireza, Kordrostami, Sohrab, & Rezaitabar, Aliakbar. (2006). An improvement to the cost efficiency interval: A DEA-based approach. *Applied Mathematics and Computation*, 181(1), 775-781. doi: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.02.005>
4. Azizi, Hossein. (2011). The interval efficiency based on the optimistic and pessimistic points of view. *Applied Mathematical Modelling*, 35(5), 2384-2393. doi: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2010.11.055>
5. Azizi, Hossein, & Ajirlu, Hassan Ganjeh. (2011). Measurement of the worst practice of decision-making units in the presence of non-discretionary factors and imprecise data. *Applied Mathematical Modelling*, 35(9), 4149-4156. doi: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.02.038>
6. Charnes, A., & Cooper, W. W. (1962). Programming with linear fractional functionals. *Naval Research Logistics Quarterly*, 9(3-4), 181-186. doi: 10.1002/nav.3800090303
7. Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, 2(6), 429-444. doi: [https://doi.org/10.1016/0377-2217\(78\)90138-8](https://doi.org/10.1016/0377-2217(78)90138-8)
8. Chen, Jin-Xiao. (2012). A comment on DEA efficiency assessment using ideal and anti-ideal decision making units. *Applied Mathematics and Computation*, 219(2), 583-591. doi: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2012.06.046>
9. Chin, Kwai-Sang, Wang, Ying-Ming, Poon, Gary Ka Kwai, & Yang, Jian-Bo. (2009). Failure mode and effects analysis by data envelopment analysis. *Decision Support Systems*, 48(1), 246-256. doi: <https://doi.org/10.1016/j.dss.2009.08.005>
10. Entani, Tomoe, Maeda, Yutaka, & Tanaka, Hideo. (2002). Dual models of interval DEA

- and its extension to interval data. *European Journal of Operational Research*, 136(1), 32-45. doi: [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(01\)00055-8](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(01)00055-8)
11. Entani, Tomoe, & Tanaka, Hideo. (2006). Improvement of efficiency intervals based on DEA by adjusting inputs and outputs. *European Journal of Operational Research*, 172(3), 1004-1017. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2004.11.010>
  12. Foroughi, Ali Asghar, & Aouni, Belaïd. (2012). Ranking units in DEA based on efficiency intervals and decision-maker's preferences. *International Transactions in Operational Research*, 19(4), 567-579. doi: 10.1111/j.1475-3995.2011.00834.x
  13. Hatami-Marbini, Adel, Saati, Saber, & Tavana, Madjid. (2010). An ideal-seeking fuzzy data envelopment analysis framework. *Applied Soft Computing*, 10(4), 1062-1070. doi: <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2009.12.031>
  14. Jahanshloo, G. R., & Afzalinejad, M. (2006). A ranking method based on a full-inefficient frontier. *Applied Mathematical Modelling*, 30(3), 248-260. doi: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2005.03.023>
  15. Jahed, Rasul, Amirteimoori, Alireza, & Azizi, Hossein. (2015). Performance measurement of decision-making units under uncertainty conditions: An approach based on double frontier analysis. *Measurement*, 69, 264-279. doi: <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2015.03.014>
  16. Liu, Fuh-hwa Franklin, & Chen, Cheng-Li. (2009). The worst-practice DEA model with slack-based measurement. *Computers & Industrial Engineering*, 57(2), 496-505. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2007.12.021>
  17. Mirhedayatian, Seyed Mostafa, Vahdat, Seyed Ebrahim, Jafarian Jelodar, Mostafa, & Farzipoor Saen, Reza. (2013). Welding process selection for repairing nodular cast iron engine block by integrated fuzzy data envelopment analysis and TOPSIS approaches. *Materials & Design*, 43, 272-282. doi: <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2012.07.010>
  18. Serrano-Cinca, Carlos, MarMoliero, Cecillo, & Chaparro, Fernando. (2004). Spanish savings banks: a view on intangibles. *Knowledge Management Research & Practice*, 2(2), 103-117. doi: 10.1057/palgrave.kmrp.8500025
  19. Wang, Ying-Ming, & Chin, Kwai-Sang. (2009). A new approach for the selection of advanced manufacturing technologies: DEA with double frontiers. *International Journal of Production Research*, 47(23), 6663-6679. doi: 10.1080/00207540802314845
  20. Wang, Ying-Ming, & Chin, Kwai-Sang. (2011). Fuzzy data envelopment analysis: A fuzzy expected value approach. *Expert Systems with Applications*, 38(9), 11678-11685. doi: <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2011.03.049>
  21. Wang, Ying-Ming, Chin, Kwai-Sang, & Yang, Jian-Bo. (2007). Measuring the performances of decision-making units using geometric average efficiency. *Journal of the Operational Research Society*, 58(7), 929-937. doi: 10.1057/palgrave.jors.2602205
  22. Wang, Ying-Ming, & Lan, Yi-Xin. (2011). Measuring Malmquist productivity index: A new approach based on double frontiers data envelopment analysis. *Mathematical and Computer Modelling*, 54(11), 2760-2771. doi: <https://doi.org/10.1016/j.mcm.2011.06.064>
  23. Wang, Ying-Ming, & Lan, Yi-Xin. (2013). Estimating most productive scale size with double frontiers data envelopment analysis. *Economic Modelling*, 33, 182-186. doi: <https://doi.org/10.1016/j.econmod.2013.04.021>
  24. Wang, Ying-Ming, & Luo, Ying. (2006). DEA efficiency assessment using ideal and anti-ideal decision making units. *Applied Mathematics and Computation*, 173(2), 902-915. doi: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2005.04.023>
  25. Wang, Ying-Ming, & Yang, Jian-Bo. (2007). Measuring the performances of decision-making units using interval efficiencies. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 198(1), 253-267. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2005.12.025>

26. Wu, Desheng. (2006). A note on DEA efficiency assessment using ideal point: An improvement of Wang and Li's model. *Applied Mathematics and Computation*, 183(2), 819-830. doi: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.06.030>
27. Xu, Ji Heng, Li, Ling, Liu, Jian Yong, Fu, Cheng Qun, & Zheng, Ji Lin. (2011). Imprecise DEA Model Based on TOPSIS. *Applied Mechanics and Materials*, 63-64, 723-727. doi: 10.4028/www.scientific.net/AMM.63-64.723



## Evaluating the Performances of Decision-Making Units Based on the Optimistic and Pessimistic Points of View

Hossein Azizi (Corresponding author)

E-mail: azizhossein@gmail.com

Department of Applied Mathematics, Parsabad Moghan Branch, Islamic Azad University, Parsabad Moghan, Iran

Maziar Salahi

Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, University of Guilan, Iran

### Abstract

Data envelopment analysis (DEA) is a methodology for assessing the performances of a group of decision making units (DMUs) that utilize multiple inputs to produce multiple outputs. It measures the performances of the DMUs by maximizing the efficiency of every DMU, respectively, subject to the constraints that none of the efficiencies of the DMUs can be less than one. The efficiencies measured in this way are referred to as optimistic efficiencies or the best relative efficiencies. The way to measure the optimistic efficiencies of the DMUs is referred to as self-evaluation. If a DMU is self-evaluated to have an efficiency score of one, then it is said to be DEA efficient; otherwise, the DMU is said to be non-DEA efficient. There is a comparable approach which uses the concept of inefficiency frontier for determining the worst relative efficiency score that can be assigned to each DMU. DMUs on the inefficiency frontier are specified as DEA-inefficient, and those that do not lie on the inefficient frontier, are declared to be DEA-non-inefficient. In this paper, we argue that both relative efficiencies should be considered simultaneously, and any approach that considers only one of them will be biased. For measuring the overall performance of the DMUs, we propose to integrate both efficiencies in the form of an interval, and we call the proposed DEA models for efficiency measurement the bounded DEA models. In this way, the efficiency interval provides the decision maker with all the possible values of efficiency, which reflect various perspectives. Two numerical examples are presented to illustrate the application of the proposed DEA models.

**Keywords:** Data envelopment analysis; Optimistic and pessimistic efficiencies; Efficiency Interval; Bounded DEA models

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی  
پرتال جامع علوم انسانی