

باورمندی بیزی و بولمان در توزیع‌های آمیخته

سامان ابراهیم پور^۱

تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۰۹/۱۳

امین حسن زاده^۲

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۰۳/۱۲

چکیده

نظریه باورمندی، ابزاری آماری برای محاسبه حقیبیمه دوره بعد بر اساس تجربیات گذشته بیمه شده است. هر قرارداد با یک پارامتر ریسک مشخص می‌شود. در این مقاله برای هر بیمه شده یک پارامتر ریسک در نظرمی‌گیریم و با استفاده از توزیع‌های آمیخته نامتناهی، یک مدل برای محاسبه حقیبیمه باورمندی و بیزی، بر اساس فراوانی و شدت خسارت‌ها به صورت توأم، بررسی می‌شود. توزیع مجموع شدت خسارت‌ها بر اساس فراوانی، یک توزیع آمیخته نامتناهی خواهد بود. در نهایت با در نظر گرفتن توزیع پیشین گاما برای پارامتر ریسک، حقیبیمه باورمندی و بیزی محاسبه می‌شود.

واژگان کلیدی: حقیبیمه، نظریه باورمندی، حقیبیمه باورمندی، حقیبیمه بیزی، توزیع‌های آمیخته نامتناهی

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
رتال جامع علوم انسانی

۱. مقدمه

نظریه باورمندی از روش‌های کارآمد نرخ‌گذاری برای جوامع ناهمگن است، به خصوص در جوامعی که تعداد طبقات زیاد است و نمی‌توان آنها را با هم ادغام کرد. با استفاده از نظریه باورمندی در مواقعی که برای یک مخاطره خاص، اطلاعات کمی وجود دارد، می‌توان از اطلاعات مشابه دیگری به‌عنوان اطلاعات جانبی استفاده کرد.

این روش سابقه طولانی در علم آکچوئری دارد که اساس آن را موبری^۱ در سال ۱۹۱۴ بنا نهاده است. در سال ۱۹۱۸ ویتنی^۲ شکل جالبی از میانگین وزنی متوسط خسارت‌های وارده به یک دسته و سایر دسته‌ها را به منظور پیش‌بینی خسارت‌های وارده در سال‌های آتی ارائه داد. در سال ۱۹۶۷ میلادی بولمان^۳، اساسی شامل اثرات غیرقابل مشاهده به‌عنوان ویژگی تمام مخاطره‌ها ارائه داد. بولمان این اثر را، اثر ساختاری نامیده است. بیلی^۴ در سال‌های ۱۹۴۵ تا ۱۹۵۰، رابطه نظریه باورمندی و روش بیزی را نشان داد.

فرض کنید که X_1, \dots, X_n شدت (تعداد) خسارت‌های یک فرد بیمه‌شده در n دوره گذشته باشد. شرکت بیمه معمولاً یک نرخ بیمه‌ای μ برای کل داشتمان برآورد کرده است، باورمندی یک دستورالعمل برای ترکیب داده‌های گذشته و μ است. براساس این دیدگاه به باورمندی، یک برآوردگر سازگار P_C بر اساس رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$P_C = Z\bar{X} + (1 - Z)\mu$$

- \bar{X} : میانگین مشاهدات گذشته (برای مثال داده‌ها)؛

- μ : میانگین پیشین (برای مثال یک برآورد براساس اطلاعات پیشین)؛

-
1. Mowbray
 2. Whitney
 3. Buhlmann
 4. Bailey

- $0 < Z < 1$: عامل باورمندی.

چند رویکرد برای محاسبه Z وجود دارد:

- مدل باورمندی کلاسیک^۱: که به آن باورمندی محدود کردن نوسانات نیز گفته می‌شود، این رویکرد از نظریه باورمندی، اولین قدم برای حل مسئله باورمندی است.

فرض کنید که X_j خسارت‌های مربوط به یک فرد برای دوره j ام باشد $j = 1, \dots, n$ ، همچنین فرض کنید که $E[X_j] = \varepsilon$ ، مقدار حق بیمه‌ای که باید پرداخته شود و $Var(X_j) = \sigma^2$ باشد. اطلاعات گذشته را می‌توان به این صورت خلاصه کرد:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$$

می‌دانیم که $E[\bar{X}] = \varepsilon$ و اگر X_j ها مستقل باشند $Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ است.

هدف بیمه‌گر محاسبه مقدار ε است. یک راه حل می‌تواند این باشد که اطلاعات گذشته را نادیده بگیریم و فقط از M استفاده کنیم که M از اطلاعات گذشته مشابه (برای مثال اطلاعات گذشته گروهی دیگر از بیمه‌گذاران) به دست آمده و اطلاعات گذشته بیمه‌گذار در محاسبه M تأثیر ندارد، راه دیگر برای به دست آوردن ε این است که فقط از میانگین خسارت‌های گذشته بیمه‌گذار، $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$ با نادیده گرفتن M استفاده کرد که به این حالت باورمندی کامل گفته می‌شود. در باورمندی کامل برای اینکه مقدار واریانس میانگین مشاهدات کم باشد مقدار n باید بزرگ باشد که در عمل بسیار کم اتفاق می‌افتد. یک راه ممکن دیگر می‌تواند این باشد که از ترکیب \bar{X} و M استفاده کنیم، که به این روش باورمندی جزئی گفته می‌شود. یک روش برای ترکیب این دو مقدار، میانگین وزنی است، که مقدار حق بیمه را به این صورت نشان می‌دهد:

$$P_C = Z\bar{X} + (1 - Z)M$$

Z عامل باورمندی است و $0 < Z < 1$ (که باید مشخص شود). روش‌های متفاوتی برای محاسبه Z وجود دارد (برای مثال $Z = 1$ که باورمندی کامل را نتیجه می‌دهد)، در باورمندی جزئی مقدار Z از مینیمم کردن $Var(P_C)$ محاسبه می‌شود. از دیدگاه بیمه‌گر، اگر گذشته بیمه‌گذار پایدار باشد، یعنی واریانس خسارت‌ها کم باشد، منطقی به نظر می‌رسد که از \bar{X} برای پیش‌بینی نتایج دوره بعد استفاده کنیم. همچنین اگر گذشته افراد دارای تغییرپذیری بیشتری باشد بهتر است که برای پیش‌بینی نتایج دوره بعد، کمتر از \bar{X} استفاده کنیم و وزن M بیشتر باشد.

- باورمندی بولمان^۱: در این رویکرد فرض می‌شود ریسک هر فرد توسط یک

پارامتر ریسک Θ ارائه می‌شود و فرض می‌کنیم که Θ دارای توزیع آماری $\pi(\theta)$ است. در آمار به $\pi(\theta)$ توزیع پیشین و در نظریه باورمندی، تابع ساختاری گفته می‌شود. فرض کنید که شرکت بیمه با توجه به مشاهدات مربوط به خسارت‌های n سال گذشته بیمه‌شده می‌خواهد حق بیمه انفرادی را برای سال $(n + 1)$ ام به دست آورد، در این نوع حق بیمه با توجه به پارامتر ریسک هر فرد Θ ، برای هر فرد یک حق بیمه خاص به دست می‌آید. حق بیمه انفرادی (خالص) با پارامتر ریسک Θ برابر است با:

$E[X_{n+1}|\theta] =: \mu(\theta)$

این نوع حق بیمه را حق بیمه عادلانه نیز می‌نامند و بهترین حق بیمه ممکن است، اما مشکل آنجاست که Θ و به دنبال آن $\mu(\theta)$ نامعلوم است. بنابراین $\mu(\theta)$ یک پارامتر است و باید مقدار آن برآورد شود. در این رویکرد با استفاده از تابع کمترین زیان‌های توان دوم یک برآورد برای $\mu(\theta)$ براساس ترکیب خطی از مشاهدات گذشته ارائه می‌شود.

• مدل باورمندی بولمان

ابتدا فرض‌های مدل را به این صورت در نظر می‌گیریم:

▪ متغیرهای تصادفی $X_j, (j = 1, \dots, n)$ به شرط $\Theta = \theta$ از هم مستقل اند و دارای توزیع یکسان F_{Θ} ، با این گشتاورها هستند:

$$\begin{aligned}\mu(\theta) &= E[X_j | \Theta = \theta] \\ \sigma^2(\theta) &= Var[X_j | \Theta = \theta]\end{aligned}$$

▪ Θ یک متغیر تصادفی با توزیع $\pi(\theta)$ است.

قضیه ۱-۱: برآورد باورمندی تحت فرضیات مدل بالا به این صورت محاسبه می‌شود^۱ (Buhlmann and Gisler, 2005):

$$\widehat{\mu}(\theta) = z\bar{X} + (1 - z)\mu_0$$

که در آن:

$$\begin{aligned}\mu_0 &= E[\mu(\theta)] \\ z &= \frac{n}{n + \frac{\sigma^2}{\tau^2}} \\ \sigma^2 &= E[\sigma^2(\theta)] \\ \tau^2 &= Var(\mu(\theta))\end{aligned}$$

- رویکرد بیزی^۲: رویکردی است که در آن مشاهدات فعلی با اطلاعات پیشین به منظور به دست آوردن برآورد بهتری ترکیب می‌شوند. نظریه بیز اساس این رویکرد است. در این رویکرد از $E[\mu(\theta) | x_1, \dots, x_n]$ برای محاسبه حق بیمه استفاده می‌شود. در یک حالت خاص که برآورد بیزی ترکیب خطی از مشاهدات به دست می‌آید، حق بیمه بیزی و بولمان با هم برابر می‌شوند، به این حالت، باورمندی دقیق گفته می‌شود.

۱. برای مطالعه بیشتر ر.ک: Klugman et al., 2004

تاکنون در بیشتر تحقیقات، فراوانی یا شدت خسارت‌ها به صورت مجزا در نظر گرفته شده است. در این مقاله برآورد باورمندی بولمان و بیزی را برای فراوانی و شدت خسارت‌ها به صورت همزمان مورد بررسی قرار می‌دهیم. در یک حالت ساده برای به دست آوردن برآورد باورمندی با در نظر گرفتن فراوانی و شدت خسارت‌ها، از میانگین شدت خسارت‌ها برای هر فرد استفاده می‌کنیم، به این صورت که میانگین شدت خسارت‌های گذشته برای هر فرد از تقسیم شدت خسارت کل بر تعداد خسارت‌ها به دست می‌آید. حالتی که ما در اینجا مورد بررسی قرار می‌دهیم به این صورت است که خسارت‌های هر فرد را به صورت یک مجموع تصادفی در نظر می‌گیریم و برآورد باورمندی را در این حالت محاسبه می‌کنیم. توزیع این مجموع تصادفی با توجه به آنچه که در ادامه خواهیم دید یک توزیع آمیخته نامتناهی خواهد بود. مقالات متعددی در زمینه استفاده از نظریه باورمندی در مدل‌های ریسک جمعی وجود دارد (Agata, 2008)، اما آنچه که این مقاله را از سایر منابع متمایز می‌سازد این است که در این مقاله نحوه محاسبه عددی حقیقه بیزی در مدل‌های ریسک جمعی توضیح داده شده است.

۲. برآورد باورمندی در توزیع‌های آمیخته نامتناهی

فرض کنید که X_1, \dots, X_N شدت خسارت‌ها برای یک بیمه‌گذار در یک بازه زمانی مشخص باشد، که N ، تعداد خسارت‌ها، به صورت تصادفی از یک توزیع مشخص تعریف می‌شود و در آن:

$$P(N = l) = \zeta_l$$

برای به دست آوردن برآورد بیزی و بولمان در این حالت از متغیر $Y = \sum_{l=1}^N X_l$ استفاده می‌کنیم، Y یک مجموع تصادفی است که کل خسارت‌های یک بیمه‌شده را نشان می‌دهد و توزیع آن به صورت یک توزیع آمیخته نامتناهی خواهد بود. Y یک مدل ریسک جمعی است که برای $N = 1, 2, \dots$ به صورت $Y = \sum_{l=1}^N X_l$ تعریف می‌شود و $N = 0$ و $Y = 0$ است. در یک مدل ریسک جمعی، این فرض‌ها را داریم:

- X_1, \dots, X_N تحت شرط $N = n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع هستند؛
 - توزیع متغیرهای تصادفی X_N, \dots, X_1 تحت شرط $N = n$ ، به n بستگی ندارد؛
 - توزیع N به مقادیر X_2, X_1, \dots بستگی ندارد.
- در حالت کلی از Θ به عنوان پارامتر ریسک یک فرد استفاده می‌کنیم، در اینجا فرض می‌کنیم که Θ دارای توزیع $\pi(\theta)$ است. همچنین فرض کنید که X_N, \dots, X_1 به شرط $\Theta = \theta$ از خانواده توزیع‌های نمایی خطی با پارامتر θ ، به این صورت باشد:

$$f(x|\theta) = \frac{p(x)e^{r(\theta)x}}{q(\theta)}, \theta > 0, x > 0$$

مجموع خسارت‌ها در این حالت به این صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Y = X_1 + \dots + X_N$$

که N نیز یک متغیر تصادفی است به طوری که $P(N = l) = \zeta_l, l \geq 0$ است. N تعداد خسارت‌ها برای هر فرد را مشخص می‌کند. $Y|\Theta = \theta$ یک متغیر تصادفی مرکب خواهد بود که توزیع آن به این صورت است:

$$\begin{aligned} f(Y|\theta) &= f_{X_1 + \dots + X_N}(y|\theta) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} f_{\sum_{i=1}^l X_i}(y|\theta) P(N = l) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} f_{\sum_{i=1}^l X_i}(y|\theta) P(N = l) \end{aligned}$$

با توجه به اینکه $\sum_{l=0}^{\infty} P(N = l) = 1$ توزیع آمیخته نامتناهی است. حال برای به دست آوردن باورمندی در مدل بولمان فرضیات مدل را به این صورت در نظر می‌گیریم:

- فرضیات مدل

آنچه که در بالا گفته شد برای یک دوره بیمه‌گذار بود، حال فرض کنید که این شرایط برای t دوره برقرار باشد ($t = 1, \dots, T$) و $X_{t1}, \dots, X_{tN_t} | \Theta = \theta$ توزیعی از خانواده توزیع‌های نمایی خطی باشد و Y_t یک متغیر تصادفی به این صورت است:

$$Y_t = X_{t1} + \dots + X_{tN_t} \quad t = 1, \dots, T$$

- برآورد باورمندی

قضیه ۱-۲. تحت فرضیات مدل بالا برآورد باورمندی در مدل بولمان به این صورت خواهد بود:

$$\hat{\mu} = z\bar{y} + (1 - z)\mu_0$$

که:

$$z = \frac{T}{T + k}$$

$$k = \frac{E[\text{Var}(Y_1|\theta)]}{\text{Var}(E[Y_1|\theta])}$$

$$\mu(\theta) = E[Y_1|\theta] = E[X_{11}|\theta]E[N]$$

$$\mu_0 = E[\mu(\theta)]$$

در ادامه فرض کنید که $\Theta = \theta \sim \exp(\theta)$ برای $X_{t1}, \dots, X_{tN_t} | \Theta = \theta$ به دست آوردن برآورد باورمندی باید k را محاسبه کنیم، ابتدا $E[\text{Var}(Y_1|\theta)]$ را به این صورت محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} E[\text{Var}(Y_1|\theta)] &= E\left[\text{Var}\left(\sum_{i=1}^N X_{i1} \mid \theta\right)\right] \\ &= E\left\{E\left[\text{Var}\left(\sum_{i=1}^N X_{i1} \mid \theta\right) \mid N\right] + \text{Var}\left(E\left[\left(\sum_{i=1}^N X_{i1} \mid \theta\right) \mid N\right]\right)\right\} \\ &= (E[N] + \text{Var}(N))E\left[\frac{1}{\theta^2}\right] \end{aligned}$$

حال $\text{Var}E[(Y_1|\theta)]$ را نیز محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \text{Var}E[(Y_1|\theta)] &= \text{Var}(\mu(\theta)) = E^2[N]\text{Var}\left(\frac{1}{\theta}\right) \\ \Rightarrow k &= \frac{\text{Var}(N) + E[N]}{E^2[N]} \times \frac{E[\theta^{-2}]}{E[\theta^{-2}] - E^2[\theta^{-1}]} \end{aligned}$$

اگر Θ دارای توزیع گاما به این صورت باشد:

$$\pi(\theta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta} \quad \theta > 0$$

پس داریم:

$$E[\Theta^{-2}] = \frac{\beta^2}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}, \quad E[\Theta^{-1}] = \frac{\beta}{(\alpha - 1)}$$

در نتیجه برآورد حق بیمه باورمندی P_c ، به این صورت به دست می‌آید:

$$P_c = \frac{T}{T + k} \bar{y} + \frac{\beta}{T + k} \frac{E[N] + \text{Var}(N)}{E[N]}$$

۳. برآورد حق بیمه بیزی در توزیع‌های آمیخته نامتناهی

در حالت کلی، اگر Y_1, Y_T, \dots, Y_{T+1} به شرط $\Theta = \theta$ مستقل باشد، حق بیمه بیزی به این صورت تعریف می‌شود (Klugman et al., 2004)

$$E[\mu(\theta) | y_1, \dots, y_T] = E[Y_{T+1} | y_1, \dots, y_T] \\ = \int_0^{\infty} E[Y_{T+1} | \Theta = \theta] \pi(\theta | y_1, \dots, y_T) d\theta$$

که $\pi(\theta | y_1, \dots, y_T)$ چگالی پسین Θ به شرط $Y_T = y_T, \dots, Y_1 = y_1$ است. برای محاسبه توزیع پسین ابتدا باید توزیع توأم Y_T, \dots, Y_1 به شرط $\Theta = \theta$ را محاسبه کنید. در ادامه می‌خواهیم $f(y_1, \dots, y_T | \theta)$ را محاسبه کنیم، بدین منظور ابتدا قضیه زیر بیان می‌شود:

قضیه ۳-۱: فرض کنید که X_1, \dots, X_N مستقل و هم‌توزیع از خانواده توزیع‌های نمایی خطی با پارامتر θ باشد. همچنین فرض کنید $Y = X_1 + \dots + X_N$ که N نیز یک متغیر تصادفی است. در این صورت تابع چگالی احتمال Y به این صورت است:

$$f_Y(y) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{e^{yr(\theta)}}{q^{l+1}(\theta)} p^*(y) \zeta_{l+1}$$

برهان. با فرض $N = l$ ابتدا چگالی $T(x) = X_1 + \dots + X_l$ به این صورت

محاسبه می‌شود:

$$f_T(t) = \int_{x_1} \dots \int_{x_{l-1}} f(x_1) \dots f(x_{l-1}) f\left(t - \sum_{i=1}^{l-1} x_i\right) dx_1 \dots dx_{l-1}$$

$$= \frac{e^{tr(\theta)}}{q^l(\theta)} \underbrace{\int_{x_1} \dots \int_{x_{l-1}} p(x_1) \dots p(x_{l-1}) p\left(t - \sum_{i=1}^{l-1} x_i\right) dx_1 \dots dx_{l-1}}_{p^*(t)}$$

پس توزیع مجموع X_i ها نیز از خانواده توزیع‌های نمایی خطی است. در نتیجه چگالی Y به این صورت است:

$$f_Y(y) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{e^{yr(\theta)}}{q^{l+1}(\theta)} p^*(y) \zeta_{l+1}$$

از قضیه زیر برای محاسبه تابع چگالی احتمال توأم استفاده شده است.

قضیه ۲-۳: فرض کنید که Y_1, \dots, Y_T به شرط θ هم‌توزیع و مستقل با تابع چگالی بالا باشد. در این صورت $f_Y(y_1, \dots, y_T | \theta)$ به این صورت به دست می‌آید:

$$f_Y(y_1, \dots, y_T | \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{\sum_{t=1}^T y_t r(\theta)}}{q^{m+T}(\theta)} D(m, y_1, \dots, y_T, \zeta)$$

که در رابطه بالا:

$$P(N = l) = \zeta_l$$

$$D(m, y_1, \dots, y_T, \zeta) = \sum_{z=0}^m p_{z+1}^*(y_t) \zeta_{z+1} D(m-z, y_1, \dots, y_{T-1}, \zeta)$$

و ستون اول ماتریس D برابر است با:

$$D(m, y_1, \zeta) = \zeta_{m+1} p_{m+1}^*(y_1), m = 0, 1, \dots$$

برهان: برای اثبات رابطه بالا از استقرا استفاده می‌کنیم، ابتدا فرض کنید که

$T = 2$ در این صورت:

$$f(y_1, y_2 | \theta) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \frac{e^{y_1 r(\theta)}}{q^{m_1+1}(\theta)} p_{m_1+1}^*(y_1) \zeta_{m_1+1} \sum_{m_2=0}^{\infty} \frac{e^{y_2 r(\theta)}}{q^{m_2+1}(\theta)} p_{m_2+1}^*(y_2) \zeta_{m_2+1}$$

که با قراردادن $z = m_2$ و $m_1 + m_2 = m$ این رابطه به دست می‌آید:

$$f(y_1, y_2 | \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{r(\theta)(y_1+y_2)}}{q^{m+2}(\theta)} D(m, y_1, y_2, \zeta)$$

اکنون اگر فرض کنیم رابطه بالا برای $T = k$ درست باشد، رابطه را برای وقتی

که $T = k + 1$ است، اثبات می‌کنیم:

$$f_Y(y_1, \dots, y_k, y_{k+1} | \theta) = f_Y(y_1, \dots, y_k | \theta) f(y_{k+1} | \theta)$$

$$= \sum_{m_1=0}^{\infty} \frac{e^{\sum_{t=1}^k y_t r(\theta)}}{q^{m_1+k}(\theta)} D(m_1, y_1, \dots, y_k, \zeta) \sum_{m_2=0}^{\infty} \frac{e^{y_2 r(\theta)}}{q^{m_2+1}(\theta)} p_{m_2+1}^*(y_2) \zeta_{m_2+1}$$

که با قراردادن $m = m_1 + m_2$ و $Z = m_2$ این رابطه به دست می‌آید:

$$f_Y(y_1, \dots, y_k, y_{k+1} | \theta) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \frac{e^{\sum_{t=1}^{k+1} y_t r(\theta)}}{q^{m_1+k+1}(\theta)} D(m_1, y_1, \dots, y_{k+1}, \zeta)$$

- حق بیمه بیزی

حق بیمه بیزی برابر است با:

$$E[\mu(\theta) | y_1, \dots, y_T]$$

به طوری که:

$$\mu(\theta) = E[Y_{t+1} | \Theta]$$

$$= E \left[\sum_{i=1}^N X_{i(t+1)} \right] = E[N] E[X_{t+1}]$$

$$= \frac{q'(\Theta)}{r'(\Theta)q(\Theta)} E[N]$$

در نتیجه حق بیمه بیزی برابر می‌شود با:

$$E[\mu(\theta) | y_1, \dots, y_T] = E \left[\frac{q'(\Theta)}{r'(\Theta)q(\Theta)} | y_1, \dots, y_T \right] E[N]$$

که برای محاسبه رابطه بالا باید توزیع پسینی را محاسبه کنیم. برای محاسبه

توزیع پسینی فرض کنید توزیع Θ به این صورت است:

$$\pi(\theta) = \frac{[q(\theta)]^{-k} e^{\mu k r(\theta)} r'(\theta)}{c(\mu, k)}, \theta > 0, \mu, k > 0$$

در ادامه توزیع پسینی را با استفاده از این رابطه محاسبه می‌کنیم:

$$\pi(\theta | y_1, \dots, y_T) = \frac{f(y_1, \dots, y_T | \theta) \pi(\theta)}{\int_0^{\infty} f(y_1, \dots, y_T | \theta) \pi(\theta) d\theta}$$

که با جایگذاری و ساده کردن روابط داریم:

$$\pi(\theta | y_1, \dots, y_T) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{\mu^* k^* r(\theta)}}{[q(\theta)]^{k^*}} \frac{D(m, y_1, \dots, y_T, \zeta)}{d(\mu^*, k^*, y_1, \dots, y_T, \zeta)}$$

به طوری که:

$$\mu^* = \frac{\sum_{t=1}^T y_t + k\mu}{k + m + T}$$

$$K^* = k + m + T$$

$$d(\mu^*, k^*, y_1, \dots, y_T, \zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} c(\mu^*, k^*) D(m, y_1, \dots, y_T, \zeta)$$

حال به عنوان مثالی از حالت کلی فرض کنید که X_{it} ($i = 1, \dots, N, t = 1, \dots, T$)

به شرط $\Theta = \theta$ دارای توزی نمایی با پارامتر θ است. در این صورت:

$$f_Y(y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-y\theta}}{\left(\frac{1}{\theta}\right)^{m+1}} \frac{y^{m-1}}{\Gamma(m)} \zeta_{m+1}$$

و داریم:

$$r(\theta) = -\theta$$

$$q(\theta) = \frac{1}{\theta}$$

$$p_m^* = \frac{y^{m-1}}{\Gamma(m)}$$

بنابراین توزیع پسینی به این صورت به دست می آید:

$$\pi(\theta | y_1, \dots, y_T) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\mu^* k^* \theta} \theta^{k^*} \frac{D(m, y_1, \dots, y_T, \zeta)}{d(\mu^*, k^*, y_1, \dots, y_T, \zeta)}$$

که:

$$d(\mu^*, k^*, y_1, \dots, y_T, \zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} c(\mu^*, k^*) D(m, y_1, \dots, y_T, \zeta)$$

$$c(\mu^*, k^*) = \frac{\Gamma(k^* + 1)}{(\mu^* k^*)^{k^* + 1}}$$

پس در این حالت حق بیمه بیزی به این صورت محاسبه می شود:

$$E[\mu(\theta) | y_1, \dots, y_T] = E\left[\frac{q'(\Theta)}{r'(\Theta)q(\Theta)} | y_1, \dots, y_T\right] E[N]$$

$$= E\left[\frac{1}{\Theta} | y_1, \dots, y_T\right] = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k^*)}{(\mu^* k^*)^{k^*}} D(m, y_1, \dots, y_T, \zeta)}{d(\mu^*, k^*, y_1, \dots, y_T, \zeta)}$$

۴. چگالی حاشیه‌ای Y

فرض کنید که:

$$Y = \begin{cases} X_1 + \dots + X_N, & N > 0 \\ 0, & N = 0 \end{cases}$$

که X_i ها به شرط $\Theta = \theta$ دارای توزیع نمایی با پارامتر θ است، پس Y به شرط $\Theta = \theta$ و

$N = n$ دارای تابع چگالی گاما با پارامترهای (N, Θ) است و چگالی حاشیه‌ای Y

به این صورت تعیین می‌شود:

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} f(y|N = n)P(N = n)$$

که $f(y|N = n)$ از این رابطه تعیین می‌شود:

$$f(y|N = n) = \int_0^{\infty} f(y|N = n, \Theta = \theta)\pi(\theta)d\theta$$

$$\Rightarrow f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^\alpha y^{n-1}}{\beta(\alpha, n)(y + \beta)^{n+\alpha}} P(N = n)$$

که:

$$\beta(\alpha, n) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha+n)}$$

اگر فرض کنیم N دارای توزیع پواسون با پارامتر λ است، در این صورت چگالی

حاشیه‌ای Y برابر است با:

$$\Rightarrow f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^\alpha y^{n-1}}{\beta(\alpha, n)(y + \beta)^{n+\alpha}} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$$

که یک توزیع آمیخته نامتناهی از پارتوی تعمیم‌یافته است (Klugman et al., 2004).

۵. کاربرد

مثال ۱: فرض کنید که پارامترهای توزیع پیشین گاما $\alpha = 5$ و $\beta = 10$ باشند،

بنابراین میانگین پارامتر ریسک $0/5$ و واریانس $0/05$ است. همچنین فرض کنید که

تعداد خسارت‌ها برای هر فرد دارای توزیع پواسون با پارامتر $\lambda = 5$ است، امید

غیرشرطی خسارت‌ها این گونه به دست می‌آید:

$$E[N]E[1/\Theta] = E[N]\beta / (\alpha - 1)$$

برای مقایسه حق بیمه بیزی و باورمندی از توزیع گاما با پارامترهای θ و N ، ۵ مشاهده به صورت تصادفی تولید کرده ایم، که این ۵ مشاهده، مربوط به یک ریسک مشخص در طی دوره های قبل است. این روند برای ۱۰۰ ریسک متفاوت تکرار شده است و حق بیمه بیزی و بولمان به صورت نمودار ۱، به دست می آید. همچنین در جدول ۱، متوسط حق بیمه ها آورده شده است. به صورت متوسط حق بیمه بیزی از حق بیمه بولمان کمتر شده است. همچنین با استفاده از این فرمول، مقادیر MSE نیز محاسبه شده و متوسط این مقادیر در جدول آورده شده است:

$$MSE_b = (P_b - E[N]\theta^{-1})^2$$

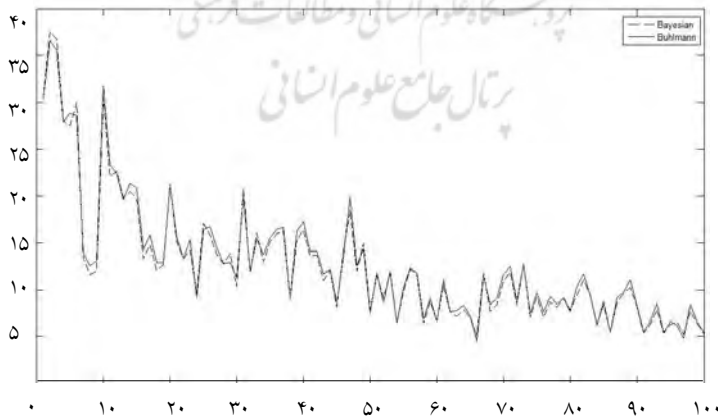
$$MSE_{cr} = (P_{cr} - E[N]\theta^{-1})^2$$

جدول ۱. حق بیمه بیزی و بولمان در مثال ۱

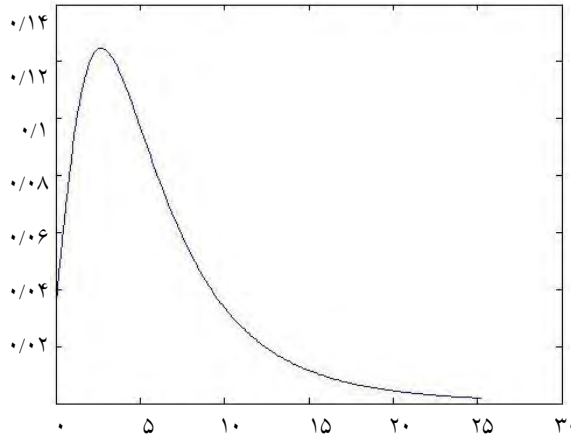
P_{cr}	MSE_{cr}	P_b	MSE_b
۱۲/۹۲۰۵	۱۴/۴۲۶۹	۱۲/۶۴۹۷	۱۴/۹۵۹۴

در جدول ۱، مقدار Θ از توزیع گاما با پارامترهای $\alpha = 5$ و $\beta = 10$ به دست آمده است. نمودار ۱ مقادیر حق بیمه را نشان می دهد (نمودار خط چین مربوط به حق بیمه بیزی و نمودار خط مربوط به حق بیمه بولمان است).

نمودار ۱. مقایسه حق بیمه بیزی و بولمان برای مثال ۱



نمودار ۲. چگالی حاشیه‌ای Y برای مثال ۱



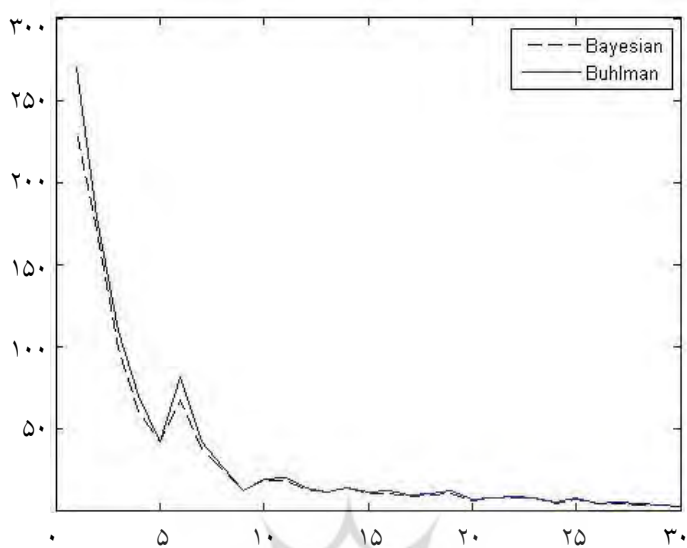
مثال ۲: فرض کنید که Θ دارای توزیع گاما با پارامترهای $\alpha = 1$ و $\beta = 2$ (نمایی با میانگین $0/5$) باشد، همچنین فرض کنید که توزیع خسارت‌ها پواسون با میانگین ۳ باشد. برای پنج دوره گذشته، خسارت‌های مربوط به ۳۰ نفر از توزیع گاما شبیه‌سازی شده و حق‌بیمه بیزی و بولمان محاسبه شده است، خلاصه مقادیر حق‌بیمه در جدول ۲ آورده شده است.

جدول ۲. حق‌بیمه بیزی و بولمان در مثال ۲

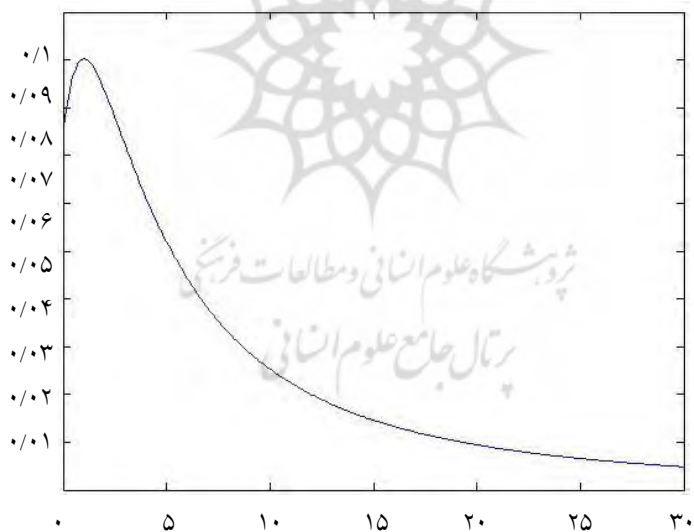
P_{cr}	MSE_{cr}	P_b	MSE_b
۳۴/۰۲	۹۰/۹۵	۳۰/۶۵	۸۰/۹۷

نمودار ۳ حق‌بیمه بیزی و بولمان را برای ۳۰ پارامتر ریسک نشان می‌دهد (نمودار خط‌چین مربوط به حق‌بیمه بیزی و نمودار خط مربوط به حق‌بیمه بولمان است).

نمودار ۳. مقایسه حق بیمه بیزی و بولمان برای مثال ۲



نمودار ۴. چگالی حاشیه‌ای Y برای مثال ۲



۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله برآوردگرهای باورمندی و بیزی در توزیع‌های آمیخته نامتناهی بررسی شد، توزیع خسارت‌ها به شرط پارامتر ریسک از خانواده توزیع‌های نمایی خطی در نظر گرفته شد و خسارت‌های هر دوره با استفاده از یک متغیر کمکی به صورت یک مجموع تصادفی مدنظر قرار گرفت که توزیع این مجموع تصادفی یک توزیع آمیخته نامتناهی به دست آمد. در یک حالت خاص توزیع خسارت‌ها به شرط پارامتر ریسک توزیع نمایی در نظر گرفته شد و با در نظر گرفتن یک توزیع پیشین مناسب (گاما) برای پارامتر ریسک، تابع چگالی حاشیه‌ای مجموع خسارت‌ها را نیز محاسبه کردیم. در حالتی که توزیع پارامتر ریسک گاما باشد، چگالی حاشیه‌ای مجموع خسارت‌ها یک توزیع آمیخته نامتناهی از پارتوی تعمیم یافته به دست می‌آید که یک توزیع دم‌سنگین است و برای مدل‌بندی کردن داده‌های بیمه‌ای بسیار مفید است. در نهایت برای این حالت حق بیمه بیزی و بولمان با هم مقایسه شد و مشاهده شد که به صورت متوسط مقدار حق بیمه بیزی از حق بیمه بولمان کمتر به دست می‌آید. در عمل برای محاسبه حق بیمه دوره بعد، شدت خسارت‌ها یا فراوانی خسارت‌ها در نظر گرفته می‌شود. در این مقاله با ارائه یک روش جدید این امکان فراهم شد که بتوان فراوانی و شدت خسارت‌ها را به طور هم‌زمان برای محاسبه حق بیمه دوره بعدی مورد بررسی قرار داد و یک حق بیمه عادلانه ارائه کرد.

منابع

1. Agata, B., 2008. Posterior regret gamma-minimax estimation in insurance premium in collective risk models. *Astin Bulletin*, 36, pp. 257-326.
2. Buhlmann, H., 1967. *Experience rating and credibility*. *ASTIN Bulletin*, 4, pp. 199-207.
3. Buhlmann, H. and Gisler, A., 2005. *A course in credibility theory and its application*. Springer-Verlag.
4. Denuit, M., Marechal, X., Pitrebois, S., and Walhin, J.F., 2007. *Actuarial modelling of claim counts: Risk classification, Credibility and Bonus-Malus Systems*, England: Wiley.
5. Hassan Zadeh, A. and Stanford, D., 2011. Bayesian and Buhlmann credibility for phase-type distributions with a univariate risk parameter. *Scandinavian Actuarial Journal*. In press.
6. Kaas, R., Govaerts, M., Dhaene, J. and Denuit, M., 2008. *Modern actuarial risk theory*, New York: Springer.
7. Klugman, S.A., Panjer, H.H. and Willmot, G.E., 2004. *Loss models: From data to decision*. John Wiley & Sons: Hoboken, NJ, 4th ed.
8. Lau, J.W., Siu, T.k and Yang, H., 2006. On Bayesian mixture credibility. *ASTIN Bulletin* 2, pp. 573-88.