منطق‌پژوهی، پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
دوفصل‌نامهٔ علمی ـ پژوهشی، سال نهم، شمارهٔ اول، بهار و تابستان ۱۳۹۷، ۵۳–۹۳

تحلیل دلالت‌شناسانهٔ منطق شهودی I

برزویه بگلری*

چکیده

از زمان انتشار مقاله‌ی سوئل کریپکی با عنوان *تحلیل دلالت شناسانه‌ی منطق شهودی I*، در سال ۱۹٦۵، تمام آنچه پیش از آن در دلالت‌شناسی منطق شهودی نگاشته شده بود، تفسیر برآوئر–هیتینگ ــ کولموگروف(BHK)، تفسیر توپولوژیک و مدل‌های بث تحت سایه‌ی تنقیح و پالودگی‌اش قرار گرفت و دلالت شناسی استاندارد برای منطق شهودی برآوئر–هیتینگ قلمداد شد. تا به امروز جهت تفسیر، مقابله و بِه فهمی، ادبیات و مطالعات کلانی حول این مقاله شکل گرفته‌است. کریپکی این مقاله را در پایان قریب به یک دهه تفکر بارور راجع به منطق موجهات، دلالت شناسی آن و انتشار تحقیقاتش مشتمل بر روشی خلاقانه برای دلالت‌شناسی منطق موجهات در ٦ مقاله، نوشت و منتشر کرد و در آن برای طراحی تفسیری از دلالت‌شناسی منطق شهودی از تحقیقات خودش در منطق موجهات و اخذ مفهوم فورسینگ از ریاضیدان آمریکایی پل کوئن سود جست.

دراین نوشته پس از بررسی جایگاه تاریخی ــ فنّی مقاله‌ی کریپکی در ادبیات شهودگرایی، ترجمه مقاله‌ی وی آمده‌است.

کلیدواژه‌ها: منطق شهودی، دلالت شناسی، سوئل کریپکی، آرنـد هیتینـگ، اخبرتـوس یان برآوئر.

۱. مقدمه: کریپکی و شهودگرایی

کریپکی از اواخر دهه‌ی ٦۰ تا اواسط دهه‌ی ۷۰ میلادی طی شش مقاله نتایج یک دهه مطالعه روی منطق موجهات و طراحی دلالت‌شناسی خلاقانه‌ای بر مبنای جهان‌های ممکن را منتشر کرد. در پایان این دوره در سال ۱۹٦۵ مقاله‌ای تحت عنوان *تحلیل دلالت*

* کارشناس ارشد رشتهٔ فلسفهٔ منطق از گروه فلسفه، دانشکده ادبیات و زبان‌های خارجی، دانشگاه علامه طباطبایی، تهران، ایران، beglari.borzuya@gmail.com
تاریخ دریافت: ۱۳۹٦/۰۹/۰٤، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۲/۲۰

شناسانه‌ی منطق شهودی I با ویراستاری مایکل دامت (Michael Dummett) و جـان کرازلـی (John Newsome Crossley) در کتاب *سیستم‌هـای صـوری و توابـع بازگشـتی* (Dummett, Crossley,1965) طبع کرد و در آن با طرح روشی نو به تفسیر دلالت شناسی منطق شـهودی پرداخت. عجیب نیست که تفسیر وی از دلالت شناسی منطق شهودی تا این حد به نظریه‌ی قرینه‌اش در منطق موجهات شبیه باشد. تا دو سال بعد از ۱۹۶۵ هیچ نوشته‌ای از وی منتشر نمی‌شود و پس از آن تا به امروز راجع به دلالت شناسی و منطـق شـهودی مطلبـی منتشـر نکرده‌است. این مقاله بنا بوده مقاله‌ی شماره یک از سه‌گانه‌ی مطالعات کریپکی روی منطـق شهودی و دلالت‌شناسی آن باشد. کریپکی توضیح برخی موارد را به شماره دوم (II) موکول می‌کند. مقاله‌ی شماره‌ی دوم و سوم تاکنون منتشر نشده و جز عنوان نشانه‌ای از وجودشان در هیچ یک از زندگی نامه‌ها و شرح آثار وی نیست.

تاریخ منطق شهودی پیش از تفسیر کریپکی، تفاسیر دیگری نیز برای دلالت‌شناسـی‌اش دیده‌است. در دهه‌ی ۳۰ قرن بیستم میلادی تعدادی سیستم دلالت‌شناسـی، از قبیـل دلالـت شناسی بر مبنای توپولوژی، معرفی شدند که سعی داشتند برای شهودگرایی همان کاری را - بکنند که جدول ارزش عادی برای منطق کلاسیک انجام داد.

تفسیری دیگر تحت عنوان تفسیر برآوئـر–هیتینـگ–کولمـوگروف Brouwer–Heyting–Kolmogorov(BHK)، آن چیزی که از اثبات کردنِ یک حکمِ ترکیبیِ منطقی مراد می‌شود را با آنچه که به عنوان اثبات کردن اجزاء (اثبات کردنِ هر جزء) مراد می‌شود توضیح می‌دهـد. در این شرح *برهان ساختی* (Constructive proof) و *روش سـاختی* (Constructive method) مفاهیمی اولیه‌اند. آندری کلمـوگروف، کـه یکـی افـراد در تفسـیر BHK اسـت، احکـام را همچون مسائل تفسیر می‌کند؛ که حل این مسائل وابسته به احکامِ ترکیبیِ منطقی‌ست که آن را با استفاده از آنچه از حل کردن مسئله‌ای که اجزاء ایجاد کرده‌انـد مـراد مـی‌شـود، شـرح می‌دهد. ارتباط این مطلب با صورت‌بندی هیتینگ چنین است: "حـل کـردن مسـئله‌ای کـه وابسته به حکم A است" یعنی "اثبات کردن A" (Troelstra-Van Dalen, 1999). هیتینگ در آن دسته مقالات خود که به صوری کردن می‌پرداختند جـدول ارزش‌هـای بسـیاری، بـرای مثال به جهت برقرار کردن ادات تعریف‌ناپذیر، معرفی کرده بود.

نویسندگان مقاله‌ی اکتشاف دلالت شناسی بث برای منطق شهودی می‌نویسند به علـت ابهام در مفاهیم "برهان ساختی" و "عملیـات سـاختی" تفسـیر BHK هرگـز نتوانسـت آن وسیله‌ی همه کاره‌ای برای منطق شهودی باشد که جدول ارزش برای منطق کلاسیک بـود.

تفسیر BHK هرگز چون دلالت‌شناسی، آنطوری که منطـق کلاسـیک داشـت، بـرای منطـق شهودی نبود(Troelstra-Van Dalen, 1999).

کریپکی در عین فاصله گرفتن از مفهومِ مبهمِ برهان‌ساختی که پیشینیان وی بدان گرفتار بودند، با طرح چند مفهوم ساده همچنان به اصول شهودگرایی برآوئر وفادار مانـده‌اسـت و نسبت به روش‌های توپولوژیکی اسلافش انعطاف بیشتری دارد و با به‌کار گیری مفاهیم فنیِ کمتر حادّ، منطق‌دان را از رجوع به مطالعه‌ی این رشته از ریاضیات مستغنی می‌کند؛ و ابـزار منعطف‌تری برای اهداف ریاضیاتی است(Van Dalen,2001). این انعطاف باعث شده تفسیر کریپکی از طرفی به زبان طبیعی و از طرف دیگر به دلالت‌شناسی منطق کلاسیک نزدیک‌تر و در نتیجه فهم و کاربری‌اش ساده‌تر باشد(Van Dalen, 1997). مهم تر از همه اینکـه طـرح کریپکی هماهنگی و مطابقت تام با آنچه برآوئر نسبت بـه شـهودگرایی مـی‌پنداشـت دارد. صورت‌بندی اصل‌هایی که برآوئر آن‌ها را به شکل ضـمنی رهـا کـرده‌بـود مـدیون تـلاش کریپکی و کرایسل است(فان آتن، ۲۰۰٤). از طرفی معرفت شناسی عمیقـی پشـت تفسـیر دلالت‌شناسی منطق شهودی با جهان‌های ممکـن منطـق موجهـات نهفتـه اسـت. کریپکـی هوشمندانه دریافت بدون دست بردن در مفاهیم اولیه و ذاتی شهودی‌گرایی می‌توان منطـق شهودی را به سیستم S4 موجهات ترجمه کند و از خاصیت متقارن، بازتابی و تراگذری نیز بهره جوید.

تفسیر دیگری برای دلالت شناسی منطق شهودی، مدل‌هـای بـث(Evert Willem Beth) است. کریپکی در مقاله‌اش توجه ویژه‌ای به بث و مدل‌های وی نشان می‌دهد. بخش ۱.۲ از مقاله وی با عنوان ارتباط با مدل‌های بث بحثی راجع به ارتباط نظریه‌ی مدلی کـه خـودش مطرح کرده است با نظریه‌ی مدل بث می‌گشاید. ابتدا وی نشان می‌دهد که نظریه‌ی مـدلش در مشی‌ای طبیعی می‌تواند به نظریه‌ی مدل بث ترجمه شود. سپس نشان مـی‌دهـد تفسـیر شهودی از معرفی مدل‌سازی بث می‌تواند به دیگرگونی از مدل تسویر وی که پیشتر معرفی کرده منجر شود(Kripke, 1965). هرچند وی این بخش را، بدون از دست رفـتن پیوسـتگی بحث، قابل چشم پوشی می‌داند.

مایکل دامت در اثر خویش *عناصر شهودگرایی* (Dummett,1977) در فصل ۵ام، *دلالـت شناسی منطق شهودی*، بخش ۵.۳ *فضاهای توپولوژیکی* درخت‌های کریپکی و همچنین بث را معرفی می‌کند اما تمایل واقعی وی بر تفاسیر توپولوژیـک بـرای دلالـت شناسـی منطـق

شهودی است. وی ارتباط دیدگاه توپولوژیکی–سیستم ارزشی خود با درخت‌های کریپکی را چنین ترسیم می‌کند:

به جای درنظر گرفتن سیستم‌های ارزش‌دهی (که در بخش ۵.۱ معرفی کرده‌است) که از یک فضای PO متناهی بدست آمده باشد می‌توانیم خودمان را به خانواده $\mathbb{K}$ که شامل آن سیستم‌های ارزش‌دهیِ وابسته به شبکه‌های توپولوژیکی هیتیگ که توسط فضاهای PO روی درخت‌های متناهی تولید شده‌اند، محدود کنیم. سیستم ارزش‌دهی وابسته به شبکه‌های توپولوژیکی هیتینگ که توسط فضای PO تولید شده‌اند $< S, \mathcal{J} >$ به طوری که $< S, \leq >$ یک درخت باشد را درخت کریپکی خوانند. بنابراین $\mathbb{K}$ خانواده تمام درخت‌های کریپکی متناهی است. واضح است که چون $\mathbb{K}$ زیرخانواده‌ی $\mathbb{F}$ است، بنابراین $\Gamma \vDash_{\mathbb{F}} A$ مستلزم $\Gamma \Vdash_{\mathbb{K}} A$ است. برای اثبات عکس باید نشان دهیم که هر وضعیتی که بتواند روی یک فضای PO متناهی تحت فضای شهودی معرفی شود می‌تواند به طور مساوی روی فضای PO بدست آمده از درخت متناهی نیز به خوبی معرفی شود(Dummett, 1977).

مشیِ دامت در اثرش، تفسیر و نگاهی متفاوت به روش کریپکی است. وی برای معرفی سیستم ارزش دهی از شکلی از مدل کریپکی استفاده می‌کند ولی تصریحی به تفسیر کریپکی ندارد و نمی‌توان آن‌را هم‌چون اثری آموزشی و تحلیلی بر تفسیر دلالت شناسی کریپکی مورد مطالعه قرار داد. نوشته دامت به عنوان تفسیری نسبتاً مجزا برای دلالت شناسی منطق شهودی می‌تواند مورد مطالعه قرار گیرد.

دیرک فان دالن و آ.س. تروئلسترا در اثر مشترک بسیار پر اهمیت‌شان یک *معرفی برای ریاضیات ساختی* (Troelstra, Van Dalen, 1999) تمام تفاسیر از جمله تفسیر کریپکی بر دلالت شناسی منطق شهودی را معرفی می‌کنند. فان دالن، در سه اثر دیگرش *منطق و ساختار* (Van Dalen,1997)، مقاله‌ی بلند "*منطق شهودی*" (Van Dalen,2001)، و مقاله‌اش در کتاب "*راهنمای منطق فلسفی*" (Gabbay,2002)، به ویراستاری ام.گبای (D. M. Gabbay) به زیبایی به تقریر، توسیع و تحلیل تفسیر کریپکی بر دلالت شناسی منطق شهودی پرداخته است. از مطالعات مستقل در مورد سمانتیک منطق شهودی و نیز تفسیر کریپکی، کتاب ام.داو.گبای استاد کالج پادشاهی لندن با عنوان بررسی‌های دلالت شناسانه بر منطق شهودی هیتینگ (Gabbay, 1981) است. عمده محتوی کتاب فوق راجع به بخش محمولی منطق شهودی است. فصل سوم این کتاب به دلالت‌شناسی منطق شهودی اختصاص دارد. وی سه

تفسیر از دلالت‌شناسی منطق شهودی ارائه می‌دهد و تفسیر کریپکی را کاربردی‌ترین تفسیر که باقی تفسیرها نزدیک به آن‌اند می‌داند.

کریپکی، هرچند، در فضای فلسفی-منطقی ایران، به واسطه‌ی ترجمه‌های نیکو و سخته و حجم بالای تالیفات-تحقیقات دانشگاهی، فردی شناخته شده‌است ترجمه‌ی این مقاله‌ی وی به زبان فارسی، علاوه بر تلاش کوچکی برای روشن کرد جزءی دیگر از این پیل [۱]، جهدی برای گامی پیش‌تر نهادن در منطق شهودی و غنی‌تر کردن ادبیاتِ بسیار لاغر شهودگرایی در زبان فارسی است.

کریپکی در این مقاله بسیار به اثر آرند هیتیگ با عنوان *شهودگرایی: یک معرّفی* (Arand Heyting, 1956) وام دار است و واژه‌ها و اصطلاحات بسیاری را از آن اخذ کرده‌است. برای فهم بهتر، مطالعه آن اثر نیکو خواهد بود.

از استادم سرکارخانم دکتر نباتی عضو محترم هیات علمی دانشگاه علامه طباطبایی برای مطالعه‌ی این ترجمه و تذکر برخی معادل‌ها تشکر می‌کنم.

۲. متنِ ترجمهٔ مقالهٔ سوئل کریپکی

تحلیل دلالت شناسانه‌ی منطق شهودی I

سوئل.آ.کریپکی

دانشگاه هاروارد، کمبریج، آمریکا

مقاله‌ی حاضر یک نظریه‌یِ مدلِ دلالت شناختی برای منطق محمولات شهودی هیتینگ ارائه و همچنین تمامیت آن سیستم را در نسبت به این مدل‌سازی، اثبات می‌کند. نظریه مدل و قضیه تمامیت در (Kripke, 1955) ارائه شده‌اند. دلالت‌شناسی‌ای که برای منطق موجهات در (Kripke, 1955) معرفی کردیم و در(Kripke, 1963-A) و (Kripke, 1963-B) توسعه‌اش دادیم بعلاوه‌ی نگاشت آشنای [شناخته شده‌ی] منطق شهودی به سیستم موجهات S4 الهام بخش دلالت‌شناسی حاضر برای منطق شهودی شدند. در حقیقت در دلالت شناسی ما ممکن خواهد بود تا تمامیتِ منطق محمولی هیتینگ را با استفاده از نگاشت به S4 و نتایج (Kripke, 1963-A) و (Kripke, 1963-B) استنتاج کنیم. با این حال ترجیح می‌دهیم که دلالت شناسی منطق شهودی را مستقل از سیستم S4 توسعه دهیم. چنین باور داریم که این روند ما

را قادر می‌سازد که اطلاعات بیشتری از منطق شهودی بدست آوریم؛ از قبیل نگاشت به S4، به عنوان نتیجه‌ای از آن[۲]. بعلاوه توسعه‌ی پر زحمت اخیر، که در ارائه (Kripke, 1955) نیامده است، شامل این است: یک بیان از نمادسازی کوئن (Paul Joseph Cohe) از فورسینگ (Cohen, 1963) درچهارچوبِ دلالت شناسی حاضر. علاوه بر ارائه‌ی یک روندِ سهل‌ْتصمیم برای حساب گزاره‌های هیتینگ، بخش II نتیجه‌ای ارائه خواهد داد که در (Kripke, 1955) نیست امّا در (Kripke, 1962) بدان اشاره شده است– تصمیم ناپذیریِ نظریه‌یِ تسویرِ شهودیِ تک‌موضعی. برهان بر مبنای دلالت شناسی‌ای است که پیش از اینِ توسعه داده شد.

باید اشاره شود که برای منطق گزاره‌های استزامی محض، بث (Evert Willem Beth) در (Beth, 1962) بازکشفی از، اساساً، مدل‌سازی حاضر ارائه کرده بود؛ علاوه بر آن برای تمام منطق گزاره‌های شهودی از نتایج دامت (Michael Anthony Eardley Dummett) و لمون (Edward John Lemmon) (Dummett, 1958) یک مدل‌سازی معادل با مدل ما می‌تواند بدست آید.

نتایج این مقاله، هرچند به منطق شهودی اختصاص داده شده‌است، صرفاً به صورت کلاسیک به اثبات رسیده‌اند، جز آنچه که در زیر اشاره می‌گردد. از منظر شهودی وضعیت اساساً با وضعیتی که برای نظریه تمامیت بث (Beth, 1957) هست، همانطور که دیسون (Verena Esther Huber-Dyson) و کرایسل (Georg Kreisel) در (Dyson, 1961) مورد تحلیل قرار دادند، یکسان است. خواننده‌ای که به برهان‌های معتبر شهودی علاقه‌مند است می‌تواند در (Dyson, 1961) کنکاشی داشته باشد و تحلیل مشابهی را به نتایج حاضر اعمال کند. در پایین نشانه‌هایی ارائه خواهیم داد که (معتقدیم) برای خواننده‌ای که با (Dyson, 1961) آشناست کافی خواهد بود تا چنان تحلیل‌هایی را به انجام برساند. در روند این نشانه دادن‌ها برخی نتایج در مورد سیستم FC کرایسل را که ارتباط خویشاوندی با تم اصلی این مقاله دارند، اثبات خواهیم کرد. به ویژه نشان خواهیم داد که حدس کوردا (Kuroda's conjecture) و اصل مارکو (Markov's principle) هر دو در FC قابل رد کردن هستند.

برخی علامت گذاری‌هایی که سرتاسر این مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرند از قرار زیر هستند: $P^n, Q^n, R^n (N \geq 0)$ حروف n-موضعی هستند. یک حرف محمولی 0-موضعی معمولاً *"حرف گزاره(ای)"* خوانده می‌شود. گاه و بیگاه بالانویسِ روی حرف محمولی نادیده گرفته خواهد شد بشرط اینکه این کار باعث از دست رفتنِ وضوح نشود. ما از حروف $x, y, z, \ldots$ با یا بدون زیرنویس به عنوان متغیرها(ـیِ فردی) استفاده می‌کنیم.

فرمول‌ها در حساب گزاره‌های شهودی به وسیله ادات مألوف $\neg, \supset, \vee, \wedge$ ساخته خواهند شد که با حروف گزاره‌ای در مقام یک فرمول اتمی شروع می‌شوند. در حساب محمولات نه تنها حروف گزاره‌ای بلکه فرمول $P^n(x_1, \dots, x_n)$ اتمی در نظر گرفته می‌شوند؛ بنابراین، فرمول در روشی معمول با استفاده از اداتی که هم اکنون ارائه شد و سورهای $(\exists x)$ و (x)، از این‌ها ساخته می‌شوند. از $A, B, C, \dots$ برای فرمول‌های دلخواهِ حساب گزاره‌ها یا حساب محمولی، با توجه به متن (Context)، استفاده می‌کنیم؛ اگر بخواهیم در یک فرمول به متغییرهای آزاد قطعی توجه کنیم برای چنان نمادسازی از $A(x_1, \dots, x_2)$ استفاده می‌کنیم. سرآخر فرض می‌گیریم که خواننده با معرفی استاندارد از حساب گزاره‌ها و محمولی شهودی صورت‌بندی شده‌ی هیتینگ که در 10 معرفی شده است آشناست.

۳. نظریهٔ مدل

یک ساختار مدل (Model structure) (m. s.) (شهودی) را چنان تعریف می‌کنیم که یک سه‌تایی مرتب (G, K, R) باشد بطوریکه K یک مجموعه است، G یک عضو از K است و R یک رابطه‌ی بازگشتی (Reflexive) و متعدی/تراگذر (Transitive) روی K است.

یک مدل (شهودی) روی m. s. (G, K, R) یک تابع دوتایی $\emptyset(P, H)$ است بطوری که P روی حروف گزاره‌ای دلخواه گسترده شده‌است[۳] و H روی اعضای K گسترده شده‌است که محدوده‌ی آن مجموعه‌ی $\{T, F\}$ است و آن شرط زیر را ارضاء می‌کند:

$$if\ \emptyset(P, H) = T\ and\ HRH'(H, H' \varepsilon K)$$
$$then$$
$$\emptyset(P, H') = T$$

روی مدل ارائه شده‌ی $\emptyset(P, H)$، می‌توانیم برای یک فرمول دلخواه A از حساب گزاره‌ها، بوسیله استقراء روی تعدادی از ادات منطقی در A یک ارزش $\emptyset(A, H)(= T\ or\ F)$ تعریف کنیم. اگر A هیچ اداتی نداشته نباشد آنگاه یک حرف گزاره‌ای است و $\emptyset(A, H) = T\ or\ F$ به ازای هر H تعریف شده به حساب می‌آید. فرض بگیرید $\emptyset(A, H)$ و $\emptyset(B, H)$ تعریف شده‌اند، سپس چنین قرار می‌گذاریم:

a) $\emptyset(A \wedge B, H) = T \quad iff\ \emptyset(A, H) = \emptyset(B, H) = T; otherwise,$
$\emptyset(A \wedge B, H) = F.$

b) $\emptyset(A \vee B, H) = T \quad iff\ \emptyset(A, H) = T\ or\ \emptyset(B, H) = T; otherwise,$
$\emptyset(A \vee B, H) = f.$

C) $\emptyset(A \supset B, H) = T \quad iff\ for\ all\ H' \in K\ such\ that\ HRH', \emptyset(A, H') = F$
$or\ \emptyset(B, H') = T; otherwise\ \emptyset(A \supset B, H) = F.$

d)$\emptyset(\neg A, H) = T \quad iff\ for\ all\ H' \in K\ such\ that\ HRH', \emptyset(A, H) = F; otherwise,$
$\emptyset = (\neg A, H) = F$

توجه کنید شرایط روی $\wedge\ and\ \vee$ دقیقاً مشابه شرایط متناظر در شرطی و فصلی کلاسیک است؛ امّا شرایط روی $\neg\ and\ \supset$ مشابه شرایط کلاسیک نیستند.

چنین ساده‌تر است که با استقراء نشان بدهیم، به ازای هر $H, H' \in K$ بطوری که HRH'، اگر $\emptyset(A, H) = T$ آنگاه $\emptyset(A, H') = T$. این خاصیت برای حرف‌های گزاره ای فرض گرفته شده است و برای فرمول‌های پیچیده‌تر که از عبارات (a) – (d) استفاده می‌کنند نیز تبعیت می‌کند.

توجه کنید که، بصورت شهودی، تعریف استقرایی‌ای که در اینجا ارائه شد کارامد نیست زیرا بصورتی واضح در عبارات (c) و (d) به سوی اصل طرد شق ثالث تمایل دارد. (برای مثال: در (d) ، برای تمام H' خواه $\emptyset(A, H') = F$ یا چنین نیست). بنابراین، بصورت شهودی، بهترین حالت این خواهد بود که یک مدل $\emptyset$ را به عنوان یک نگاشت از $\emptyset(A, H)$ در $\{T, F\}$ تعریف کنیم، بطوری که A روی یک فرمول دلخواه از حساب گزاره ها گسترده شده است؛ و آن عبارات (a) – (d) را به همان خوبی ارضاء می‌کند که این شرط که $\emptyset(P, H) = T$ و HRH' دلالت می‌کنند بر $\emptyset(P, H') = T$. واضح است که از نقطه نظر کلاسیک، این تعدیل مفهوم مدل را ذاتاً دست نخورده و تغییر نیافته باقی می‌گذارد.

ما فرمول A از حساب گزاره‌ها را معتبر میخوانیم اگر و تنها اگر به ازای هر مدل $\emptyset$ روی یک مدلْ ساختار (G, K, R) باشد: $\emptyset(A, G) = T$. یک مدل $\emptyset$ روی یک m.s. (G, K, R) بطوریکه $\emptyset(A, G) = F$ را، یک مدلِ نقض برای A می‌خوانند.

برای بسط دادن مدلسازی به نظریه‌ی تسویر یک ساختارِ مدلِ سوری (q.m.s) تعریف می‌کنیم تا یک مدلْ ساختار (G, K, R) همراه با تابعی چون ψ (تابَع دامنه ای) که روی K تعریف شده است باشد؛ بطوری که $\psi(H)$ یک مجموعه ی ناتهی برای تمام $H \in K$ و $HRH'(H, H' \epsilon K)$ اگر $\psi(H) \subseteq \psi(H')$ باشد.

(بصورت شهودی نیاز داریم تا $\psi(H)$ نه تنها تهی نباشد بلکه دست کم یک عضو داشته باشد؛ البته یک نوع (Species) می‌تواند بدون داشتن هیچ عضو معینی که بتوان آن را شناخت، تهی هم نباشد).

ما یک مدلِ مسوّر $\emptyset$ را روی یک q.m.s (G,K,R) تعریف می‌کنیم که یک تابع $\emptyset(P^n,H)$ باشدَ بطوریکه P^n روی حروف محمولی n–موضعی (به ازای تمام nها) و H روی اعضای K گسترده باشد. اگر $n=0$ و $\emptyset(P^n,H)=T\ or\ F$ باشد و اگر $n\geq 1$ و $\emptyset(P^n,H)$ یک زیر مجموعه از ضرب دکارتی (Cartesian product) $[\psi(H)]^n$ باشد. دوباره داریم، اگر HRH'، برای $n=0$ و $\emptyset(p^n,H)=T$، $\emptyset(p^n,H')=T$. به ازای $n\geq 1$، بطور مشابه داریم که اگر HRH'، $\emptyset(p^n,H)\subseteq\emptyset(p^n,H')$. درنظر بگیرید:

$$U=\bigcup_{H\in K}\psi(H).$$

می‌توانیم برای یک مدل مسوّر ϕ، به ازای هر فرمول A از نظریه‌ی تسویر شهودی، یک ارزش $\phi(A,H)=T\ or\ F$ را به ازای هر $H\epsilon K$، در ارتباط با یک تخصیص ثابت از اعضای U به متغییرهای آزاد فردی A، تعریف کنیم. اگر A یک فرمول اتمی باشد آن خواه یک حرف گزاره‌ای P است که در این صورت $\phi(P,H)=T\ or\ F$ داده شده است، خواه آن یک فرمول $P^n(x_1,\dots,x_n), n\geq 1$ است. در مورد اخیر اعضای $a_1,\dots,a_n$ از U را تخصیص داده شده به $x_1,\dots,x_n$ در نظر بگیرید. آنگاه در ارتباط با این تخصیص می‌توانیم تعریف کنیم:

$$\emptyset(P^n(x_1,\dots,x_n),H)=T\quad iff\ \ (a_1,\dots,a_n)\in\emptyset(P^n,H)$$

And

$$\emptyset(P^n(x_1,\dots,x_n),H)=F\quad iff\ (a_1,\dots,a_n)\notin\emptyset(P^n,H).$$

می‌توانیم در این تخصیص به فرمول‌هایِ اتمی که ارائه شد، به وسیله‌ی استقراء تخصیصی به فرمول پیچیده‌تری را بسازیم. فرض بگیرید $A(x_1,\dots,x_n,y)$ یک فرمول باشد که اکثر متغییرهای استقرایی در $A(x_1,\dots,x_n,y)$ آزاد هستند. حال در نظر بگیرید که در ارتباط با هر تخصیص دادن اعضاء U به $x_1,\dots,x_n,y$، به ازای هر H یک ارزش صدق $\emptyset(A(x_1,\dots,x_n,y),H)$ تعریف شده است. سپس می‌توانیم برای $\emptyset((\exists y)A(x_1,\dots,x_n,y),H)$ و $\emptyset((y)A(x_1,\dots,x_n,y),H)$ را ارزش‌هایی بطرز زیر بدست

آوریم. در نظر بگیرید اعضـای $a_1,\dots,a_n$ از U بـه متغیمیرهـای $x_1,\dots,x_n$ اختصـاص داده شده‌اند. آنگاه:

e) می‌گوییم $\emptyset((\exists y)A(x_1,\dots,x_n,y),H)=T$ اگر و تنها اگر وجود داشـته باشـد یـک $b\in\psi(H)$ بطوری که $\emptyset(A(x_1,\dots,x_n,y),H)=T$ هرگاه به $x_1,\dots,x_n$ تخصیص داده شود $a_1,\dots,a_n$ و بـه همـین ترتیـب بـه y تخصـیص داده شـود b؛ در غیـر اینصـورت $\emptyset((\exists y)A(x_1,\dots,x_n,y),H)=F$.

f) می‌گوییم $\emptyset((y)A(x_1,\dots,x_n,y),H)=T$ است اگر و تنها اگر بـه ازای هـر $H'\in K$ بطوری کـه HRH'، $\emptyset(A(x_1,\dots,x_n,y),H')=T$ هرگـاه بـه $x_1,\dots,x_n$ تخصـیص داده شـود $a_1,\dots,a_n$ و بـه y عضـوی چـون b از $\psi(H')$؛ در غیـر اینصـورت $\emptyset((y)A(x_1,\dots,x_n,y),H)=F$ است.

سرآخر، چنین می‌گوییم که اگر ارزش صدق $\emptyset(A,H)$ و $\emptyset(B,H)$ (به ازای هر $H\in K$) در ارتباط با یک تخصیص به متغییرهـای آزاد از A و B داده شـده باشـد آنگـاه ارزشـهای مطابق $\emptyset(A\wedge B,H),\emptyset(A\vee B,H),\emptyset(A\supset B,H),\emptyset(\neg A,H)$ با توجه به دسـتورات (a)- (d) تعریف خواهد شد.

برای بدست آوردن یک تعریف شهودی مناسب از مدل، باید مجدداً شرایط داده شده را تعدیل کنیم و فرض بگیریم که مدل $\emptyset$، مثل مورد قبل، یک تابع $\emptyset(P^n,H)$ است که همـراه با تابع $\emptyset(A,H)$، در ارتباط با تخصیص ارائه شده از اعضـای U بـه متغییرهـای آزاد A، بـه $\emptyset(A,H)$ T یا F را تخصیص داده و شرایط پیش گفتـه را ارضـاء مـی‌کنـد. (بـرای مثـال: هنگـامی کـه x_i بـه $a_i(1\le i\le n)$ تخصـیص داده شـده اسـت برقـرار اسـت $\emptyset(P^n(x_1,\dots,x_n),H)=T$ اگر و تنها اگر $(a_1,\dots,a_n)\in\emptyset(p^n,H)$). مجدداً، این تعریف اساساً بصورت کلاسیک با تعریف قبل معادل است.

باید به این مطلب توجه داشته باشیم که تمام نتیجه‌های درپی معتبر خواهند ماند اگر روا بـداریم $\emptyset(P^n,H)(n\ge 1)$ یـک زیـر مجموعـه از U^n باشـد بجـای اینکـه آن را بـه زیرمجموعه‌های $[\psi(H)]^n$ محدود کنیم. همچنین ما نظریه را دست نخورده بـاقی خـواهیم گذاشت اگر در نظر بگیریم $\emptyset(A,H)$ تنها هنگامی تعریف می‌شود که متغییرهـای آزاد A بـه اعضای $\psi(H)$ تخصیص داده شده باشند و در غیر این صورت، تعریف نشده باقی بمانند.

۱.۳ تفسیر شهودی

یک سه تایی (G, K, S) که در آن K یک مجموعه است، $G \in K$ است و S یک رابطه تعریف شده روی K است، یک درخت خوانده می‌شود (و G مبدأ (Origin) نامیده می‌شود) اگر و تنها اگر:

۱. هیچ $H \in K$ وجود نداشته باشد بطوری که HSG؛

۲. به ازای هر $H \in K$ بجز G، یک $H' \in K$ منحصر به فرد وجود دارد بطوری که $H'SH$؛

۳. به ازای $H \in K$ وجود دارد GS^*H بطوری که S^* یک نیا (Ancestral) از رابطه S است (یعنی $H_1S^*H_2$ اگر و تنها اگر $H_1 = H_2$ یا $H_1S^nH_2$ به ازای چندین قوه n از S).

اگر باشد HSH' ، H را یک مقدم (Predecessor) از H' و H' را یک تالی (Successor) از H می‌خوانیم. درخت کراندار است اگر و تنها اگر هر H فقط تعداد متناهی تالی داشته باشد. عضو H بدون تالی را نقطه پایان می‌خوانیم. توجه کنید که K می‌تواند با عبارات S همچون یک رشته از آن توصیف شود و G می‌تواند به عنوان یک عضو منحصر بفرد بدون مقدم از K توصیف شود. (این تعریف از درخت، از (Kripke, 1963-A) اخذ شده است. بصورت شهودی بعلاوه باید داشته باشیم که اعضای H اعداد طبیعی باشند و S تصمیم پذیر باشد).

یک m. s. (G, K, R) را یک درخت m. s. می‌خوانیم اگر و تنها اگر یک رابطه‌ی S وجود داشته باشد بطوری که (G, K, S) یک درخت باشد و R کوچکترین رابطه‌ی انعکاسی و متعدی که در S وجود دارد باشد (بطور مثال $R = S^*$). در ملاحظات ما بر تفسیر شهودی، ابتداً به مدل‌های درختی توجه خواهیم کرد (بطور مثال مدل‌هایی که روی درخت m. s. (G, K, R) تعریف شده اند). در حقیقت، در بخش ۱.۲ زیر نشان خواهیم داد که هر مدل می‌تواند با یک مدل درخت معادل جا به جا شود.

باقی این بخش شامل یک تفسیرِ شهودیِ صوری شده از مدلسازی، همراه با نشان دادن اینکه چگونه تفسیر را با حدود نظریه‌ی کرایسل (Kreisel, 1958) مبنی بر دنباله‌های انتخاب کاملا آزاد[۴]، بصورت صوری تر بنویسیم. به خواننده ای که با (Kreisel, 1958) آشنا نیست یا به این جزئیات علاقه ندارد توصیه می‌کنیم میتواند ملاحظات مرتبط با (Kreisel, 1958) را نادیده بگیرد امّا بقیه‌ی بخش را بخواند.

تفسیر چنین پیش می‌رود: فرض بگیرید یک مدل $\emptyset$ برای فرمول A از حساب گزاره‌ای که زیر فرمول‌های اتمی مفرد آن P, Q, R هستند، ارائه شده‌است. برای مثال فرض کنید یک مدل درختی $\emptyset$ روی (G, K, S) m. s. داریم که بصورت زیر دارای دیاگرام شده‌است:

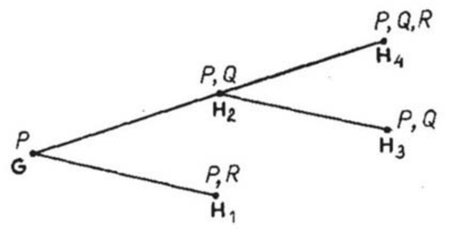

Figure 1.

اعضای K این‌ها هستند: G, H_1, H_2, H_3, H_4. ما یک فرمول اتمی بالای گره‌ی G یا H_i نوشته‌ایم اگر $\emptyset$ در آن گره، بدان ارزش T را تخصیص دهد؛ اگر $\emptyset$ بدان ارزش F را تخصیص دهد آن را حذف می‌کنیم. بنابراین برای مثال $\emptyset(P, G) = T$ درحالی که $\emptyset(Q, G) = \emptyset(R, G) = F$.

ما گره های H را برای نمایندگی کردن نقاطی در زمان (یا وضعیت‌های آشکارساز (Evidential)) در نظر می‌گیریم، که در آن‌ها می‌توانیم اطلاعات مختلفی داشته باشیم. اگر در نقطه‌ی معیّنی در زمان همچون H، اطلاعات کافی‌ای برای اثبات کردن یک گزاره چون A داشته باشیم می‌گوییم $\emptyset(A, H) = T$ است. اگر چنین اطلاعاتی نداشته باشیم می‌گوییم $\emptyset(A, H) = F$. اگر $\emptyset(\mathrm{A}, \mathrm{H}) = \mathrm{T}$ می‌توانیم بگوییم که گزاره‌ی A در نقطه‌ی H در زمان تایید شده‌است و اگر $\emptyset(A, H) = F$ آنگاه گزاره‌ی A در نقطه H در زمان تایید نشده‌است. توجه کنید که F و T نماینده‌ی صدق و کذب شهودی نیستند؛ اگر $\emptyset(A, H) = T$ آنگاه A برای اینکه بتواند در زمان H صادق باشد، مورد تایید قرار گرفته‌است امّا $\emptyset(\mathrm{A}, \mathrm{H}) = \mathrm{F}$ بدین معنی نیست که در H اثبات شده است که A غلط است. بسادگی چنین است که هنوز در H اثبات نشده است امّا می‌تواند در آینده برقرار شود.

حال، برای نقطه‌ی ارائه شده در زمان G، تعداد گوناگونی احتمالات باز برای بدست آوردن اطلاعات بیشتری راجع به گزاره‌ها وجود دارد. یک وضعیت بصورت دیاگرام در

فیگور 1 ترسیم شده‌است. در نقطه ی G (که معرّف اطلاعات فعلی ماست) ما P را اثبات کرده‌ایم. به ازای تمام اطلاعاتی که می‌دانیم می‌توانیم برای زمان طولانیِ دلخواهیِ در G باقی بمانیم (stuck) بدون اینکه هیچ اطلاعات تازه ای بدست بیاوریم. امّا ممکن است که ما اطلاعات کافی‌ای بدست بیاوریم برای پریدن (Jump) به نقطه‌ی H_1 (که در آن حالت علاوه بر P، یک برهان برای R خواهیم داشت) یا به نقطه‌ی H_2 (جایی که علاوه بر P، یک برهان برای Q خواهیم داشت) یا حتی به نقطه ی H_3 یا نقطه ی H_4 . اگر به نقطه‌ی H_2 پریده باشیم آنگاه هر دو P و Q را اثبات کرده ایم آنگاه تا جایی که میدانیم ممکن است به نقطه ی H_2 برای مدت زمان طولانی دلخواهی چسبیده باقی بمانیم. امّا ممکن است به H_3 یا H_4 برویم. اگر ما به نقطه H_2 پریده باشیم آنگاه هم P و هم Q را اثبات کرده‌ایم آنگاه تا جایی که می‌دانیم می‌توانیم برای زمان طولانی دلخواهی در نقطه‌ی H_2 باقی بمانیم. امّا برایمان ممکن خواهد بود که به H_3 یا H_4 پیش برویم. توجه کنید که اگر به وضعیت H_3 برویم همچنان چیزی بیشتر از P و Q را اثبات نکرده‌ایم امّا این بدان معنی نیست که وضعیت H_3 دقیقا مشابه وضعیت H_2 است. در حقیقت تا زمانی که در H_2 باقی بمانیم این احتمال برای ما هنوز باز خواهد بود که در یک زمان یا دیگر زمان قادر باشیم به H_4 برویم و R را اثبات کنیم؛ امّا اگر در وضعیت H_3 باشیم اطلاعات کافی برای بیرون نگه داشتن این گزینه که R اثبات خواهد شد را داریم.

حال بطور کلی در یک ساختار مدل (G,K,R) ما G را به عنوان یک وضعیت آشکارساز تفسیر می‌کنیم. اگر H یک وضعیت باشد می‌گوییم HRH' اگر، تا جایی که ما می‌دانیم، در زمان H، ممکن است بتوانیم در آینده اطلاعاتی کافی برای جلو رفتن تا H' بدست آوریم. بنابراین از آنجا که اطلاعاتی که در H داریم ممکن است تمام دانسته هایی باشد که ما برای یک زمان طولانی دلخواه داریم چنین فرض می‌گیریم که HRH؛ و خاصیت جابجایی R یک بصورت شهودی روشن است. شرط مورد نیاز برای اینکه به ازای هر A اگر $\emptyset(A,H)=T$ و HRH' آنگاه $\emptyset(A,H')=T$ بسادگی بدین معنی است که اگر هم اکنون برهانی برای A در وضعیت H داشته باشیم آنگاه می‌توانیم A را به عنوان اثبات شده در هر وضعیت آتی H' بپذیریم– که آنرا فراموش نخواهیم کرد. سرآخر عبارت استقرائی برای حساب گزاره‌ها همصدا با تفسیر شهودی از این مفاهیم است. بنابراین $A \wedge B[A \vee B]$ اثبات شده است هنگامی که هر دو A و B اثبات شده باشند [خواه A اثبات شده باشد خواه B] ؛ بنابراین $\emptyset(A \wedge B,H)=T$ اگر و تنها اگر $\emptyset(A,H)= \emptyset(B,H)=T$ [$\emptyset(A \vee B,H)=$

$[T\ \ iff\ \ \emptyset(A,H) = T\ or\ \emptyset(B,H)$]. توجه کنید که برخـورد بـا فصـل و عطـف فـوق در وضعیت داده شده H آن چنان است که اگر تابع‌ارزش کلاسیک می‌بودنـد. از طـرف دیگـر نقض و استلزام را نمی‌توان این چنین مورد برخـورد قـرار داد. بـرای بیـان $\neg A$ بصـورت شهودی در وضعیت H، در H نه تنها باید بدانیم که A در H مورد تایید قـرار نگرفتـه‌اسـت بلکه آن، مهم نیست چقدر اطلاعات بیشتر بدست بیاید، در هیچ زمان آینده‌ای ممکن نیست مورد تایید قرار بگیرد؛ بنابراین می‌گوییم $\emptyset(\neg A,H) = T$ اگر و تنها اگر $\emptyset(A,H') = F$ بـه ازای هر HRH' s.t. $H' \in K$. مجدداً برای تایید کردن $A \subset B$ در وضعیت H باید بدانیم، در وضعیت آتی H' که در آن برهانی برای A برهانی داریم، برای B نیز برهانی داریم. تعریـف استقرایی از $\emptyset(A \supset B,H)$ این شرط را صورتبندی می‌کند.

مدل نقض دو نقطه‌ی زیر را به ازای اصل طرد شق ثالث در نظر بگیرید.

Figure 2.

داریم $\emptyset(P,H) = T$ و $\emptyset(P,G) = F$. از آنجایی کـه $\emptyset(P,H) = T$، $\emptyset(\neg P,G) = F$ و بنابراین $\emptyset(P \vee \neg P,G) = F$. بصورت شـهودی در وضـعیت حاضـر G هنـوز P را اثبـات نکرده‌ایم و همچنین نمی‌توانیم $\neg P$ را تایید کنیم، زیرا که این احتمال هست کـه در آینـده برای پیش رفتن تا H اطلاعات کافی بدست بیاوریم و P را تایید کنیم. بنابراین در نقطـه G ما در وضعیتی نیستم که بتوانیم بگوییم: $P \vee \neg P$.

این ملاحظات می‌توانند به آسانی با حدود و جملات نظریـه‌ی کرایسـل FC مبنـی بـر دنباله‌های انتخاب مطالقاً آزاد صورت‌بندی شوند. بصورت شهودی یـک دنبالـه‌ی انتخـاب مطلقاً آزاد (a.f.c.s) یک دنباله‌ی انتخاب آزاد چون α که از فضای آزاد S انتخاب شده است که در آن از ابتدا فرض گرفته شده است که هـیچ محـدودیتهایی، بجـز شـرایطی کـه S را تعریف می‌کنند، در انتخاب‌ها اثر گذار نیست.

پس، شکل ۲، برای مثال، می‌تواند با جملات نظریه حاضر چنین تفسیر شـود: در نظـر بگیرید a.f.c.s را از فضای S که شامل انتخاب‌های آزاد از صفرها و یک هاسـت کـه در آن هرچند، دنبال 1 فقط می‌تواند 1 بیاید. بصورت شهودی ما وضـعیت G را بـه عنـوان یـک

انتخاب 0 و H را به عنوان انتخاب 1 تفسیر می‌کنیم. از G شروع می‌کنیم، بنابراین می‌توانیم تا وقتی ک می‌خواهیم به G بچسبیم، ما اجازه داده‌ایم که 0 پشت سر یک عدد دلخواه از 0ها بیاید همینطور 1ها. امّا از آنجایی که H فقط می‌تواند دنبال خودش بیاید ما اجازه داده‌ایم که دنبال 1 فقط 1 بیاید. سپس، $P(\alpha)$ این حکم است که "یک 1 در a.f.c.s α رخ می‌دهد" (برای مثال $(\exists n)(\alpha(n) = 1)$ بطوری که n روی اعداد طبیعی گسترده است). تا زمانی که ما فقط 0ها را در α انتخاب کرده‌ایم، $P(\alpha)$ را برقرار نکرده‌ایم ؛ امّا از طرف دیگر از آنجایی که α بی هیچ محدودیتی، بجز اینکه در S قرار دارد، انتخاب شده است نمی‌توانیم احتمال انتخاب آتی یک 1 را طرد کنیم بنابراین نمی‌توانیم بگوییم $\neg P(\alpha)$. این ملاحظات را برای بدست آوردن برهانی برای $\neg(\alpha \restriction S)\big(P(\alpha) \vee \neg P(\alpha)\big)$ بطوری که $\alpha \restriction S$ روی a.f.c.s در S گسترده است می‌توان بسادگی در FCی کرایسل صورت‌بندی کرد.

بطور کلی‌تر در هر مدل درخت شمارش‌پذیر (که بصورت شهودی تعریف شده باشد) $\emptyset$ از A روی m.s. (G, K, R)، فرض بگیرید ما گره‌ها(اعضای K) را با اعداد طبیعی نشان می‌دهیم، که بطور خاص G را با صفر نشان داده شده‌است. با جملات (G, K, R) یک فضای S شامل تمام دنباله‌هایی انتخاب آزاد که در آن انتخاب اولیه 0 است تعریف کنید و در آن انتخاب هر عدد طبیعی m باید یا با انتخاب آتی m یا با یک انتخاب از یکی از تالی‌های m روی درخت ادامه داده شود. برای هر زیرفرمول اتمی P از A و a.f.c.s α در S به یک فرمول $P(\alpha)$ وابسته می‌شود که خلاصه شدن این است: $(\exists x)(\exists m)(\alpha(x) = m$ و $\phi(P, m) = T$. B, C داده شده و فرمول‌های وابسته‌شان $B(\alpha)$ و $C(\alpha)$ که وابسته هستند با $B \wedge C$، $B(\alpha) \wedge C(\alpha)$؛ با $B \vee C$، $B(\alpha) \vee C(\alpha)$ و غیره... . سپس بسادگی با استقراء می‌توان دید که برای هر زیرفرمول B از A اگر $\emptyset(B, m) = T$ آنگاه $(\alpha \restriction S)\big((\exists x)(\alpha(x) = m) \supset B(\alpha)\big)$ و اگر $\emptyset(B, m) = F$ آنگاه $\neg(\alpha \restriction S)\big((\exists x)(\alpha(x) = m) \supset B(\alpha)\big)$. به ویژه اگر $\emptyset(B, G) = T[= F]$ آنگاه از آنجایی که هر a.f.c.s در S شامل $0(= G)$ است داریم: $(\alpha \restriction S)B(\alpha)[\neg(\alpha \restriction S)B(\alpha)]$. اگر (G, K, R) m.s. و مدل $\emptyset$ بتواند بصورت صوری در FCکرایسل توصیف شود، استدلال قبل می‌تواند در FC صورت‌بندی شود و بنابراین به ویژه اگر $\emptyset(A, G) = F$، $\vdash \neg(\alpha \restriction S)A(\alpha)$ در FC یک مثال نقض برای اعتبار A ارائه می‌کند.

برای بسط دادن این برخورد با سورها ابتدا مدل نقض زیر را برای $(x)(P(x) \vee Q) \supset$. $(x)P(x) \vee Q$ نظر بگیرید:

Figure 3.

داریم $\emptyset(P(x),G) = \emptyset(P(x),H) = T$ هنگامی که به x a را تخصیص می‌دهیم؛ امّا $\emptyset(P(x),G) = \emptyset(P(x),H) = F$ هنگامی که به x b را تخصیص می‌دهیم. بعلاوه $\emptyset(Q,G) = F$، $\emptyset(Q,H) = T$، در GRH امّا نه در HRG و $\psi(G) = \{a\}$، $\psi(H) = \{a,b\}$. تمام این اطلاعات درون دیاگرام هست. بسادگی می‌توان نشان داد که $\phi\big((x)\big(P(x) \vee Q\big), G\big) = T$، امّا $\emptyset\big((x)P(x) \vee Q, G\big) = F$. بصورت شهودی می‌توان وضعیت را چنین تفسیر کرد: اعضای a و b را به ترتیب با عدد صحیح 0 و 1 مشخص می‌کنیم. R را قضیه‌ی آخر فرما (Fermat's last theorem) و Q را $R \vee \neg R$ در نظر بگیرید. V را گونه‌ای شامل 0 و اگر Q صادق باشد شامل 1 در نظر بگیرید (یعنی $(V = \{m | m = 0 \vee (m = 1 \wedge Q)\}$ و x را یک متغییر که روی V گسترده شده است در نظر بگیرید. $P(x)$ را حکمی با $x = 0$ در نظر بگیرید. آنگاه در وضعیت حاضر G می‌توانیم بگوییم $V \subseteq \{0,1\}$ است و $1 \in V \;\; iff \;\; Q$؛ بنابراین می‌توانیم بگوییم که $(x)(P(x) \vee Q)$. امّا تا زمانی که به وضعیت H ، جایی که قضیه‌ی آخر فرما در آن قطعی شده‌است و بنابراین می‌توان در آن Q را تایید کرد، پیش نرفته‌ایم نمی‌توانیم بگوییم که $(x)P(x) \vee Q$.

توجه شود که باید اشاره کنیم $(x)(P(x) \vee Q). \supset. (x)P(x) \vee Q$ در هر مدل سوری برقرار است، بطوری که $\psi(H)$ سازگار باشد.

بنابراین بطور کلی، اگر متغیرها در فرمول A روی دامنه‌ی D گسترده باشند، آنگاه برای هر وضعیت H، $\psi(H)$ گونه‌ای از تمام افرادی است که، بر مبنای اطلاعات موجود در H، داخل در D شناخته شده‌اند. (بنابراین در مورد پاراگراف بالا در وضعیت حاضر G، $\psi(G) = \{0\}$؛ امّا در H، Q که به اثبات رسیده است، $\psi(H) = \{0,1\}$. از آنجایی که D شامل یک عضو می‌شود، و باید دست کم یک عضو از D را از ابتدا شناخته باشیم، بنابراین $\psi(G)$ باید شامل دست کم یک عضو باشد. محدودیتی که در آن HRH' باید دلالت بر $\psi(H) \subseteq \psi(H')$ بکند، اکنون باید در تفسیر مورد نظر مشهود باشد. در نظر بگیرید برای اینکه در وضعیت H بگوییم که به ازای هر عضو x از D، $P(x)$ صادق است نه تنها باید

بدانیم به ازای هر x در $\psi(H)$، $P(x)$ صادق است بلکه باید بـدانیم بـه ازای هـر x کـه در آینده ممکن است وجودش در D به اثبات برسد نیز صادق است؛ یعنـی بـه ازای هـر x در $\psi(H')$ در HRH'؛ و این دقیقاً عبارت استقرایی برای تسویر کلی است. از طرف دیگر برای تایید کردن وجود یک x در D بطوری که $P(x)$ صادق باشد نیاز داریم یک عضو چـون x پیدا کنیم که همین حالا هم در D به اثبات رسـیده باشـد (یعنـی داخـل $\psi(H)$ باشـد)، و بطوری که $P(x)$ صادق باشد؛ و این دقیقاً همان شروط مورد نظر سور وجودی است.

این حقایق می‌تواند بشکلی صوری‌تر با جملات نظریه‌ی دنباله‌های انتخاب کـاملاً آزاد بیان شود. فرض کنید یک درخت m.s. قابل شمارش (که بصورت شهودی تعریف شـده) $(G.K.R)$ ارائه شده‌است که در آن U و بنابراین $\psi(H)$ به ازای هر H قابل شمارش است. سپس می‌توانیم هر دوی اعضای K و اعضای U را با اعداد طبیعـی مشـخص کنـیم و G را علی الخصوص با 0 مشخص کنیم. آنگاه به (G,K,R) یک فضای S از دنباله‌هـای انتخـاب کاملاً آزاد که هم اکنون در بالا تعریف کردیم نسبت می‌دهیم. بعلاوه، برای هر a.f.c.s، α در S، در نظر بگیرید D_α گونه‌ای از تمام اعداد طبیعی n باشد بطوری که یک عدد طبیعی چون x وجود دارد بطوری که $n \in \psi(\alpha(x))$. در نظر بگیرید x_α یک متغیـر باشـد کـه روی D_α گسترده شده‌است (یعنی $(x_\alpha)(\ldots)$ باید چنین تفسیر شود $(x)(x \in D_\alpha \supset \cdots)$ و به همـین طریق برای $(\exists x_\alpha)$). آنگاه به علت اینکه $G = 0 = \alpha(0)$ و $\psi(G)$ شامل یک عدد طبیعی است، D_α به ازای تمام α یـک عضـو دارد. ϕ را یـک مـدل q. (G,K,R) (کـه بصـورت شهودی تعریف شده) به ازای فرمول A در نظر بگیرید. بـرای هـر زیرفرمـول اتمـی ارائـه شده‌ی $P^n(x_1, \ldots, x_n)$ و یک a.f.c.s α از S، ما به این دو یک جملـه $P(\alpha, x_{1_\alpha}, \ldots, x_{2_\alpha})$ را نسـبت مـی‌دهـیم بطـوری کـه متغیرهـای $x_{1_\alpha}, \ldots, x_{2_\alpha}$ روی D_α گسـترده انـد و $P(\alpha, x_{1_\alpha}, \ldots, x_{2_\alpha})$ بیان می‌کند که به ازای m روی α، هنگامی که x_{i_α} به متغیـر x_i نسـبت داده‌است، $\phi\big(P^n(x_1, \ldots, x_n), m\big) = T$؛ $(i = 1, \ldots, n)$ توجـه کنیـد کـه $x_{i_\alpha} \in D_\alpha \subseteq U$). فرمول‌های داده شده $A(\alpha, x_{1_\alpha}, \ldots, x_{n_\alpha})$ و $B(\alpha, x_{1_\alpha}, \ldots, x_{m_\alpha})$ به ترتیـب وابسـته شـده بـا $A(x_1, \ldots, x_n)$ و $B(y_1, \ldots, y_m)$، $A\big(\alpha, x_{1_\alpha}, \ldots, x_{n_\alpha}\big) \wedge B(\alpha, x_{1_\alpha}, \ldots, x_{m_\alpha})$ بـــــــا $A(x_1, \ldots, x_n) \wedge B(y_1, \ldots, y_m)$ وابسته شـده‌اسـت و بـه همـین ترتیـب بـرای سـایر ادات همچنین.

بعلاوه، $\big(x_{i_\alpha}\big)A(\alpha, x_{1_\alpha}, \ldots, x_{n_\alpha})$ وابسته به $(x_i)A(x_1, \ldots, x_n)$ است و به همین ترتیـب در مورد سور وجودی. آنگاه ما بوسیله‌ی استقراء اثبات می‌کنـیم کـه بـه ازای $m \in K$ اگـر

$A(x_1, \dots, x_n)$ شامل فقط متغیرهای آزاد لیست شده باشد و به $x_1, \dots, x_n$ تخصیص داده شده باشد $a_1, \dots, a_n \in \psi(m)$، آنگاه در ارتباط با این تخصیص اگر $\phi(A(x_1, \dots, x_n), m) = T[= F]$ ، در FC داریم $(\alpha \upharpoonright S)\big((\exists x)(\alpha(x) = m) \supset A(\alpha, a_1, \dots, a_n)\big)[\neg(\alpha \upharpoonright S)\big((\exists x)(\alpha(x) = m) \supset A(\alpha, a_1, \dots, a_n)\big)]$. علی الخصوص اگر $m = 0 = G$، از آنجایی که $\big((\exists x)(\alpha(x) = 0)\big)$ $(\alpha \upharpoonright S)$ داریم $(\alpha \upharpoonright S)A(\alpha, a_1, \dots, a_n)[\neg(\alpha \upharpoonright S)A(\alpha, a_1, \dots, a_n)]$. بنابراین اگر A شامل متغیرهای آزاد نباشد و $\emptyset(A, G) = F$ در FC اثباتی خواهیم داشت که A بصورت کلی معتبر نیست.

توجه کنید برای ترجمه ی مثالی که در FC ارائه شد، بطوری که B یک فضای دودویی کامل است:

$$\text{a)} \quad (\alpha \upharpoonright B)(x)\Big(\big((\exists y)(\alpha(y) = x) \supset \big(x = 0 \lor (\exists y)(\alpha(y) = 1)\big)\Big)$$

امّا همچنین

$$\text{b)} \quad \neg(\alpha \upharpoonright B)\big((x)(\exists y)(\alpha(y) = x) \supset x = 0) \lor (\exists y)(\alpha(y) = 1)\big).$$

بنابراین ما "قانون" $(x)(P(x) \lor Q) .\supset. (x)P(x) \lor Q$ را رد کرده ایم. هنگامی که آن برقرار باشد، برای هر دنباله‌ی انتخاب آزاد α برقرار خواهد بود که x روی تمام قطعات z بطوری که $(\exists y)(\alpha(y) = z)$، عکس (a) و (b)، گسترده است. توجه کنید که از آنجایی که (a) بدیهی است و (b) از قضیه نرده بدست می‌آید بسادگی می‌توانستیم بجای FC از قضیه‌ی معمولی دنباله‌ی انتخاب آزاد استفاده کنیم.

با توجه به دیسون و کرایسل (Dyson, 1961)، اضافه می‌کنیم مدل‌های نقض در FC که شرح شان کردیم، و دنباله‌های نامتناهی معیّن از اعداد طبیعی به فرمول‌ها تخصیص می‌دهد، می‌توانند بصورت کلاسیک به عنوان مدل نقض در فضای بئیر (René-Louis Baire) تفسیر شوند (فضای تمام دنباله‌های اعداد طبیعی همراه با توپولوژی معمول). در حقیقت با بررسی مدل‌های نقض که در پایین تولید شد، نتیجه گرفته می‌شود که هر فرمول اثبات نشده یک مدل نقض در مجموعه‌ی کانتور دارد و این مطلب را دیسون و کرایسل نیز تصریح کرده‌اند.

توجه. ملاحظات زیر در مورد کاربرد دنباله‌های انتخاب آزاد به موضوع اصلی مقاله‌ی حاضر مرتبط نیست، امّا آن‌ها را در این جا خواهیم آورد:

۱. تمام قضیه‌هایی که در فصل آخر کتاب هیتینگ (Heyting, 1956) با استفاده از روش دنباله‌های انتخاب آزاد برآوئر که وابسته به حل شدن مساله است به اثبات رسیدند، می‌توانند

در FC نیز به سرانجام برسند. اولین مثالی که توسط هیتینگ ارائه شد را در نظر مـی‌گیـریم: می‌خواهیم نشان دهیم به ازای هر عدد حقیقی a باطل است که $a \neq 0$ دلالت کند به $a\#0$. فرش کنیم زمانی این صادق باشد، آنگاه برای هر دنباله‌ی انتخاب آزاد α در فضای دودویی بوسیله اختصاص اعداد حقیقی به α:

$$\sum_{x=0}^{\infty} \alpha(x)/2^x$$

مـی‌توانسـتیم نشـان دهـیم کـه $\neg(x)(\alpha(x) = 0) \supset (\exists x)(\alpha(x) = 1)$ ؛ بنـابراین علی‌الخصوص این برای دنباله‌های انتخاب کاملاً آزاد برقرار خواهد بود. امّا، ساده است در FC نشان دهیم که $(\alpha \upharpoonright B)\neg(x)(\alpha(x) = 0)$ ؛ بنابراین کافیست در FC نشـان دهـیم کـه $\neg(\alpha \upharpoonright B)(\exists x)(\alpha(x) = 1)$. امّا این مطلب به سادگی از قضیه‌ی بادبزن نتیجه می‌شود زیرا $(\alpha \upharpoonright B)(\exists x)(\alpha(x) = 1)$ مستلزم $(\exists m)(\alpha \upharpoonright B)(\exists x \leq m)(\alpha(x) = 1)$ خواهد بـود، کـه باطل است. رفتارهای مشابهی به ازای تمام تکذیبِ قضیه‌های کلاسیک که توسط هیتینگ به این روش در (Heyting, 1956) انجام گرفته، ممکن است.

چنین می‌پندارم محتمل است که این رفتار در FC به تمـام مثـال‌هـای نقـضِ قضـایای کلاسیک که برآوئر برای روش خود ارائه می‌کنـد، بسـط داده خواهـد شـد؛ امّـا مـن روی نوشته‌جات و ادبیات بحث، بررسی‌ای انجام نداده ام.

یک خواننده‌ی با دقتِ بخش حاضر که روی تفسیرِ مدل‌های ما مطالعه می‌کند پذیرفتنی خواهد یافت که، بطور عکس، در یک سطح خوب از تفسیر، دست کم در حساب گزاره‌ها که هم اکنون در FC بیان کردیم، می‌توانست با استفاده از روش ips[5] برآوئرِ وابسته بـه حـل مساله نیز به انجام برسد.

۲. مثال زیر، که هر دوِ حدس کوردا (رجوع کنید به (Kuroda, 1951)) و اصل مـارکوف (رجوع کنید به (Markov, 1954)) را در FC رد می‌کند، از اعمال کـردن روش‌هـای بخـش حاضر جهت بدست آوردن مدل نقـض بـرای $(x)\neg\neg A(x) \supset \neg\neg(x)A(x)$ الهـام گرفتـه است. S را یک فضای متناهی شامل تمام دنباله‌های انتخاب آزاد α در نظر بگیرید بطـوری که به ازای هر x $\alpha(x+1) = \alpha(x)$ یا $\alpha(x+1) = \alpha(x) + 1$. در FC نشان می‌دهیم:

a) $(\alpha \upharpoonright S)(m)\neg\neg(\exists n)(\alpha(n) \geq m)$

b) $(\alpha \upharpoonright S)\neg(m)(\exists n)(\alpha(n) \geq m)$

برای اثبات a، در نظر بگیرید α یک a.f.cs در S باشد و m را یک عدد صحیح در نظر بگیرید و به عنوان برهان خلف فرض کنید $\neg(\exists n)(\alpha(n) \geq m)$. حال از آنجایی که α کاملا آزاد است از اصل موضوع ۵.۱ در FC، قطعه‌ی اولیه[6] $\bar{\alpha}(x)$ از α وجود دارد بطوریکه $(\beta \upharpoonright S)\left(\bar{\beta}(x) = \bar{\alpha}(x) \supset \neg(\exists n)(\bar{\beta}(n) \geq m)\right)(*)$. حال $\alpha(x) < m$ در غیر این صورت $(\exists n)(\alpha(n) \geq m)$. بنابراین از آن جایی که هر ips در S غیرنزولی است(نزولی نیست)، به ازای تمام $y < x$، $\alpha(y) < m$. حال $(*)$ بیان می‌کند که اگر ما x را اولین از اجزاء β انتخاب کرده باشیم بنابراین $\bar{\beta}(x) = \bar{\alpha}(x)$ و هرگز نمی‌توانیم به ازای هر n انتخاب کنیم $\bar{\beta}(n) \geq m$. امّا از اصل موضوع ۵.۳ از FC داریم، وجود دارد β یِ a.f.c.s در S که شروط $\beta(x+i) = \alpha(x) + i\left(0 \leq i \leq m - \alpha(x)\right)$ و $\bar{\beta}(x) = \bar{\alpha}(x)$ را ارضاء می‌کند، زیرا این دنباله‌ی متناهی از انتخاب‌ها با قانون فضای S در توافق است. امّا آنگاه اگر $n = x + m - \alpha(x)$، برخلاف $(*)$، $\beta(n) = m$.

برای اثبات b، در نظر بگیرید که α یک a.f.c.s در S باشد و به عنوان برهان خلف فرض کنید که $(m)(\exists n)(\alpha(n) \geq m)$. آنگاه مجدداً با اصل موضوع ۵.۱ از FC داریم، وجود دارد یک x بطوری که $(\beta \upharpoonright S)\left(\bar{\beta}(x) = \bar{\alpha}(x) \supset (m)(\exists n)(\bar{\beta}(n) \geq m)\right)(**)$. هر a.f.c.s ارائه شده در S، بدین ترتیب یک ارزش به $f(\beta)$ اختصاص می‌دهد: اگر $\bar{\beta}(x) \neq \bar{\alpha}(x)$، در نظر بگیرید $f(\beta) = 0$؛ اگر $\bar{\beta}(x) = \bar{\alpha}(x)$ در نظر بگیرید $f(\beta)$ کمترین n باشد بطوری که $\beta(n) \geq \alpha(x) + 1$. از $(**)$ داریم f برای همه آن βها خوش تعریف است، بنابراین از قضیه‌ی بادبزن داریم عدد صحیحی چون p وجود دارد بطوری که $f(\beta)$ بصورت کامل توسط $\bar{\beta}(p)$ متعیین شده‌است. بنابراین میتوانیم $f(\beta)$ را چنین بنویسیم $f\left(\bar{\beta}(p)\right)$. واضح است که از تعریف f داریم $x \leq p$. حال، باز هم با استفاده از اصل موضوع ۵.۳ از FC، β را با گفتن اینکه $\bar{\beta}(x) = \bar{\alpha}(x)$ چنین متعین می‌کنیم $(x + i) = \alpha(x)\ (0 \leq i \leq p - x)$. آنگاه $(**)$ بیان می‌کند که $\left(f\left(\underline{\beta}(P)\right)\right) \geq (x) + 1$. امّا آشکار است که این باطل است، زیرا از اصل موضوع ۵.۳ می‌دانیم کاملاً آزادیم تا انتخاب را تا $(p + j) = \alpha(x)\left(0 \leq j \leq f\left(\bar{\beta}(p)\right) \ldots p\right)$ پیش ببریم، بطوری‌که با در نظر گرفتن $j = f\left(\bar{\beta}(p)\right) - p$ بدست می‌آوریم $\beta\left(f\left(\bar{\beta}(p)\right)\right) = \alpha(x) < \alpha(x) + 1$. بنابراین b اثبات شده‌است.

حال از a و b استفاده می‌کنیم تا فرض کوردا (Kuroda, 1951) و اصل مارکوف (Markov, 1954) را رد کنیم. فرض کوردا می‌گوید که به ازای هر متغیر عددی m، داریم

$(m)\neg\neg A(m)$ که مستلزم $\neg\neg(m)A(m)$ است. با استفاده کردن از فرض کوردا از a می‌توانیم $(\alpha \restriction S)\neg\neg(m)(\exists n)(\alpha(n) \geq m)$ را نتیجه بگیریم، که مستقیماً با b درتناقض است؛ بنابراین فرض کوردا درFC قابل رد کردن است. بطور مشابه، اصل مارکوف می‌گوید که برای محمول تصمیم پذیر $A(x)$ و متغییرعددی n، $\neg\neg(\exists n)A(n)$ دلالت می‌کند بر $(\exists n)A(n)$. امّا اگر $A(n)$ را بگیریم $\alpha(n) \geq m$، آنگاه $A(n)$ بازگشتی اولیه است و بنابراین تصمیم پذیر است. آنگاه اصل مارکوف به ما اجازه می‌دهد که از a نتیجه بگیریم $(\alpha \restriction S)(m)(\exists n)(\alpha(n) \geq m)$، که دوباره با b متناقض است.

علی رغم برهان‌های گودل و کرایسل بر اینکه تمامیتِ قویِ حسابِ محمولیِ هیتینگ دلالت بر صورت‌های معیّن از اصل مارکوف دارد، من متوجه نیستم که چگونه می‌توان این نتایج را تبدیل به یک برهان در FC کرد مبنی بر اینکه حساب محمولی هیتینگ بصورت قوی کامل نیست، و تردید دارم که چنین تبدیلی در حقیقت ممکن باشد. اگر S' فضایی شامل تمام αها باشد بطوری که یک β در S چنان وجود داشته باشد که $(x)(\alpha(x+1) = \beta(x))$، آنگاه ساده است از نتایج حاضر نتیجه بگیریم که $(\alpha \restriction S')\neg(\exists n)(\alpha(n) \geq \alpha(0))$ و $\neg(\alpha \restriction S')(\exists n)(\alpha(n) \geq \alpha(0))$ ؛ امّا بدلیل اینکه در اینجا α روی دنباله‌های انتخاب کاملاً آزاد از S' و نه دنباله‌های انتخاب عادی گسترده است، قادر نیستیم قضیه 1 از کرایسل (Kreisel, 1962)را برای نتیجه گرفتن اینکه حساب محمولات هیتینگ بصورت قوی کامل نیست به کار بریم.

۲.۳ ارتباطات با مدل بث

در این بخش ما رابطه‌ی نظریه‌ی مدل حاضر با نظریه‌ی مدل بث (Beth, 1957) را بررسی می‌کنیم. نشان خواهیم داد مدل‌های حاضر می‌توانند بصورت طبیعی به مدل‌های بث ترجمه شوند. با استفاده کردن از یک تفسیر شهودی برای مدل سازی بث، نشان خواهیم داد که نگاشت به تفسیری از مدل سوری خود ما منتهی خواهد شد که خود دیگرگونی بر آنچه در فصل پیش مطرح شد است. در این تفسیر متغییرها همواره روی قطعاتی از اعداد طبیعی گسترده می‌شوند.

این بخش می‌تواند، بدون از دست رفتن پیوستگی، نادیده گرفته شود.[۷]

۳.۳ تفاسیر دیگری از مدل‌ها

در بخش ۱.۱ و ۱.۲ تفاسیرهایی از مدل‌های ما ارائه شد. این تفاسیر به نوعی متعیّن شده بودند که با تفاسیری که شهودگرایان بطور عادی از ادات منطقی‌شان دارند مطابق باشد. در بخش حاضر دو تفسیر صوری از مدل سازی ارائه خواهیم کرد که ادعای هیچ‌گونه محتوی مستقیم شهودی ندارند. (هر دو تفسیرها در واقع نمونه‌های خاص مستقیمی از مدل‌سازی هستند؛ آن‌ها بسادگی یک کلاسِ محدود از مدل‌ها را در نظر می‌گیرند.) یک تفسیر، مبتنی بر اثبات پذیری در سیستم‌های صوری است؛ این مطلب بطور خلاصه در (Kripke, 1963-B) شرح شده‌است. تفسیر بعدی مبتنی بر ایده‌ی فورسینگ (Forcing) پل کوئن (Paul Joseph Cohen) است (Cohen, 1963). این دو تفسیر بطوری نزدیکی به هم وابسته‌اند. این بخش نیز بدون از رفتن پیوستگی می‌تواند نادیده گرفته شود.

اول) تفسیر مبتنی بر اثبات پذیری

در نظر بگیرید E_0 یک سیستم صوری و E بسط دلخواهی از آن باشد. K را مجموعه‌ی تمام چنان Eهایی و در نظر بگیرید برقرار است ERE' اگر و تنها اگر E' یک بسط از E باشد. ما فرمول اتمی P را چنان تعریف می‌کنیم که یک wff از E_0 باشد (توجه کنید که لزومی ندارد P یک فرمول اتمی از E_0 باشد.) آنگاه می‌توانیم با استفاده از ادوات $\wedge, \supset, \neg, \vee$ از P فرمول‌های غیراتمی بسازیم. اگر تعریف کنیم که $\phi(P,E)=T$ اگر و تنها اگر P در E اثبات پذیر، در غیر این‌صورت در F اثبات پذیر باشد، آنگاه $\phi(P,E)$ یک مدل رویِ m. s. (E_0,K,R) است. بنابراین برای هر فرمول مختلط A که قضیه‌ای از حساب گزارهِای شهودی است داریم $\phi(A,E_0)=T$. اگر E_0 نظریه‌ی اعداد مقدماتی Z و P فرمول تصمیم ناپذیر گودل باشد آنگاه داریم $\emptyset(P\vee\neg P,E_0)=F$ به ازای اینکه P در E_0 اثبات‌پذیر نباشد امّا در بسط مشخصی از E اثبات پذیر باشد. اینکه با توجه به این انتخابِ خاص از E آیا حساب گزاره‌ای هیتینگ تمام است یا نه سوال بزرگتری است که همچنانَ گشوده می‌ماند.

برای تفسیر نظریه‌ی تسویر شهودی بدین مشی، باید فرض بگیریم که سیستم E_0 و بسط‌های آن واجد مفاهیمِ *متغییرهای آزاد* و *ثابت‌ها* هستند و خود آن E_0 دست کم شامل یک ثابت است. به ازای هر $E\in K$ در نظر بگیرید $\psi(E)$ مجموعه‌ی تمام ثابت‌های E باشد. آنگاه اگر ERE' داریم $\psi(E)\subseteq\psi(E')$. به ازای هر n یک محمول اتمی n–موضعی چون P^n تعریف کنید که فرمولی باشد از E_0 با nتا متغییر آزاد، همراه با یَک تابع $1-1$ از

اعـداد صـحیحِ $n ,… ,1$ بـه متغیرهـای آزاد از P^n. متغیـری کـه توسـط ایـن تـابع بـه $m(1 \le m \le n)$ اختصاص داده شد m–امین متغیر آزاد از P^n خوانده مـی‌شـود. بـه ازای $n \ge 1$ مجموعـه‌ی $\emptyset(P^n, E) \subseteq [\psi(E)]^n$ را چنـین تعریـف مـی‌کنـیم: یـک n–تـاییِ $(a_1, \dots, a_n)$ از ثابت‌ها در $\psi(E)$ داخل در $\emptyset(P^n, E)$ خواهد بود اگر و تنهـا اگـر نتیجـه‌ی جایگزینیِ متقارن $a_i(1 \le i \le n)$ به ازای i–امین متغیـر آزادِ P^n، یـک قضـیه از E باشـد. بیرون از محمول‌های n–موضعی اتمی (که نقش حـروف محمـولی n–موضـعی را در بـالا بـازی مـی‌کننـد)، مـی‌تـوانیم بـا اسـتفاده از ادوات گـزاره‌ای و سـورها فرمـول‌هـای پیچیده‌تری بسازیم.

آشکار است که در مقدّم، K می‌تواند با زیر مجموعه‌ی از آن چون K' جـایگزین شـود. (برای مثال بسطهای اصل موضوع پذیر متناهی از E_0). بعلاوه قیدها، مانند شمارش پـذیری بازگشتی، که در مفهوم سیستم صوری هستند، می‌توانند بنا به صلاح‌دید نادیده گرفته شوند. همچنین گونه‌ای از تفسیر حاضر از حساب محمولی هیتینگ شبیه‌تـر بـه "نظریـه‌ی مـدل" وجود دارد که فرض اینکه E باید شامل ثابت‌ها باشد را حذف می‌کند. علاوه بر این، تفسیر می‌تواند در جهات دیگری نیز بسط یابد تا از بخش‌های بزرگتر ریاضیات شـهودی تفاسـیر تازه‌ای به بار بیاورد؛ به ویژه می‌توانیم تفسیری از FC ارائه دهیم تا به این برهان برسیم کـه FC یک بسط ضروری/ذاتی از شهودگرایی و منطق‌های موجه است؛ رجوع کنید به(Kripke, 1963-B).

دوم) مفهوم فورسینگ کوئن

در نظر بگیرید D یک مجموعه‌ی نامتناهی قابل شمارش دلخـواه باشـد. $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1)$ یک زوج متناهی از زیرمجموعه‌های از هم جدای D و K مجموعه‌ی تمام چنان زوج‌هـایی باشد. اگر $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1)$ و $\mathcal{P}' = (\mathcal{P}'_0, \mathcal{P}'_1)$ در K باشند، برقرار است $\mathcal{P}R\mathcal{P}'$ (یا، $\mathcal{P}'$ یـک بسط اسـت $\mathcal{P}$ اسـت) اگـر و تنهـا اگـر $\mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{P}'_0$ و $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}'_1$. بعـلاوه در نظـر بگیریـد $\psi(\mathcal{P}) = \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1$. حال یک محمول‌نشانه مفرد تک‌موضعی چون P را در نظر بگیرید. بـه ازای هر $\mathcal{P} \in K$ تعریف می‌کنیم $\phi(P, \mathcal{P}) = \mathcal{P}_0$. در نظر بگیرید K' مجموعه‌ی تمام $\mathcal{P} \in K$ باشد بطوری که $\psi(\mathcal{P})$ نا–تهی باشد. آنگاه به ازای هـر $\mathcal{P} \in K'$، $(\mathcal{P}, K', R)$ یـک q.m.s بـا دامنه‌ی تخصیص داده شده‌ی تابع ψ باشد. (اگر حساب محمولی هیتینگ را تعدیل کـرده باشیم آنگاه وجود دامنه‌ی تهی را روا داشته‌ایم و بنابراین اجازه داده‌ایم $\psi(\mathcal{P})$ تهی باشد، به همین نسب استفاده قراردادی از K' به جای K می‌تواند نادیده گرفته شـود.) آنگـاه $\emptyset$ یـک

مدل روی $(\mathcal{P}, K', R)$ است، و به ازای هـر فرمـول A کـه بـا اسـتفاده از ادات و سـورهای گزاره‌ای از P ساخته شده‌است، تعاریف استقرائی‌ای که ارائـه کـردیم ارزش صـدق بـرای $\phi(A, \mathcal{P}')$ به ازای هر $\mathcal{P}' \in K'$ در ارتباط با یک تخصیص ثابت از اعضای D به متغییرهای آزاد A، تعریف می‌کنیم. اگر این ارزش T باشد می‌گوییم در ارتبـاط بـا ایـن تخصـیص $\mathcal{P}'$ فورس می‌کند A را. (توجه کنید که ارزش $\phi(A, \mathcal{P}')$ به وضوح از انتخـاب عضـو "تعیـین شده" $\mathcal{P}$ از $(\mathcal{P}, K', R)$ مستقل است.)

اگر D' زیرمجموعه‌ای از D باشد می‌گوییم $\mathcal{P}'$ با D' در توافـق اسـت اگـر و تنهـا اگـر $\mathcal{P}'_0 \subseteq D'$ و $\mathcal{P}'_1 \subseteq D - D'$. مـی‌تـوانیم بگـوییم D' فـورس مـی‌کنـد A را (در ارتبـاط بـا تخصیص به متغییرهای آزاد) اگر و تنها اگر وجود داشته باشد یک $\mathcal{P}' \in K'$ که در توافـق با D' باشد و A را فورس کند. توجه کنید که اگر $\mathcal{P}'$ و "$\mathcal{P}$ با D' در توافق باشند آنهـا یـک بسط مشترک دارند که با D' در توافق است. بنـابراین بـه راحتـی نتیجـه مـی‌شـود کـه D' نمی‌تواند یک حکم همراه با نقیضش را فورس کند.

D' را عمومی (Generic) می‌خوانیم اگر و تنها اگر به ازای هر A و تخصـیص ثابـت بـه متغییرهـای آزاد آن، D' خـواه A خـواه $\neg A$ را فـورس کنـد. کـوئن اثبـات مـی‌کنـد کـه مجموعه‌های عمومی وجود دارند: در نظر بگیرید: $\{A_n\}$ یـک شـمارش (Enumeration) از تمام دوتایی‌های مرتب (Ordered couples) $A_i\langle B_i, \theta_i\rangle$ باشد بطوری که B_i فرمولی است که از P ساخته شده‌است و θ_i یک تخصیص به متغییرهـای آزاد آن اسـت. یـک دنبالـه چـون $\mathcal{P}^n = (\mathcal{P}_0^n, \mathcal{P}_1^n)$ را چنین تعریف کنید: $\mathcal{P}^0$ یک زوج تهی اسـت. $\mathcal{P}^{n+1}$ یـک بسـط از $\mathcal{P}^n$ است که B_n را فورس می‌کند(در ارتباط با θ_n) به شرطی که چنـین بسـطی وجـود داشـته باشد؛ در غیر این صورت وجود دارد $\mathcal{P}^n$ سپس آشکار است که $\mathcal{P}^{n+1}$ (در ارتبـاط بـا θ_n) فورس می‌کند B_n یا $\neg B_n$ را و $D' = \cup\, \mathcal{P}_0^n$ عمومی است.

می‌گوییم $\mathcal{P}'$ بصورت ضعیف A را فورس می‌کند اگر وتنها اگر $\neg\neg A$ را فورس کند. با توجه کردن به (یا پیش بینی) اینکه تمام فرمـول‌هـای قابـل اثبـات در حسـاب محمـولات هیتینگ در نظریه‌ی مدل ما معتبر هستند به این نتیجه می‌رسیم که هـر فرمـول قابـل اثبـاتی چون A از حساب محمولات هیتینگ بوسیله‌ی هر $\mathcal{P}' \in K'$ فورس شده‌اند. بخوبی می‌دانیم اگر A شامل سورهای کلی نباشد و بصورت کلاسیک معتبـر باشـد $\neg\neg A$ نیـز در حسـاب محمولات هیتینگ قابل اثبات است. بنابراین برای Aِی کلاسیک معتبر و بدون سور کلی ، A بصورت ضعیف بوسیله‌ی هر $\mathcal{P}' \in K'$ فورس شده‌است. بعلاوه توجه کنید که فرمول‌هایی

که بوسیله‌ی یک $\mathcal{P}' \in K$ فورس می‌شوند (بصورت ضعیف فورس می‌شوند) تحت وضع مقدم (modus ponens) بسته هستند: $A, A \supset B/B$.

اگر D' عمومی باشد و $\neg\neg A$ را فورس کند، باید به وضوح A را فورس کند؛ بنابراین یک D' عمومی نا-تهی هر فرمول کلاسیک معتبر که شامل سورهای کلی نباشد را فورس می‌کند. کوئن یک مطلب، حتی قویتر، را اثبات کرد: *اگر D' عمومی باشد و A هیچ سور کلی نداشته باشد آنگاه (در ارتباط با یک تخصیص به متغییرهای آزاد) A توسط D' فورس شده‌است اگر و تنها اگر صادق باشد هنگامی که سورهای وجودی (که گسترده شده بر روی D در نظر گرفته شوند) و ادوات گزاره‌ای بصورت کلاسیک تفسیر شوند و "$P(x)$" بصورت $x \in D'$ تفسیر شود.* این تصدیق بسادگی توسط استقراء روی اختلاط A (Complexity) اثبات می‌شود. اگر بصورت کلاسیک بگوییم، از آنجایی که یک (x) همواره می‌تواند با $\neg(\exists x)\neg$ جایگزین شود این قید که سورهای کلی باید غایب باشند، اهمیتی ندارد.

تعریفی که ما ارائه کردیم در جنبه‌هایی غیرذاتی با تعریف کوئن تفاوت دارد. (این تعریف ممکن است به تعریفی که توسط فیفرمان (Feferman) ارائه داده شده‌است نزدیکتر باشد ولی ما آن را بررسی نکرده‌ایم). واضح است که ایده می‌تواند بسط یابد. برای مثال، لازم نیست با یک محمول مفرد چون $P(x)$ سروکار داشته باشیم؛ ما می‌توانیم با چندین چنان‌هایی سر و کار داشته باشیم و لزومی ندارد همه‌ی آنها تک‌موضعی باشند. تعدیل‌های مورد نیاز برای چنین وضعیت عمومی‌تر باید واضح باشند. به‌علاوه می‌توانیم مجموعه‌ی شمارش پذیر D را با یک مجموعه از کاردینالیتی عادی (Regular cardinality) $\aleph_a$ جایگزین کنیم؛ K شامل زوج‌های مجزا از مجموعه‌های کاردینالیتی کوچکتر از $\aleph_a$ خواهد بود.

انگیزه‌ی کوئن بطور اساسی با انگیزه‌ی ما تفاوتی دارد اما آشکار داشت که ایده‌ی وی دقیقاً به نظریه‌ی مدل ما مربوط است. ادّله‌ی عمیقتر برای این ارتباط احتمالاً هنوز شناخته نشده‌اند.

باید اشاره کنیم که دانا اسکات (Dana scott) قبلاً ملاحظه کرده‌است که ایده‌ی کوئن شبیه به تفسیری است که کرایسل حدس زده بود (Kreisel, 1961) . و در واقع اگر صحت حدس کرایسل اثبات شود تفسیر وی از شهودگرایی ارتباط نزدیکی با تفسیر ما خواهد داشت.

۴. دلالت شناسی نمودارها (Tableaux)[۸]

در این بخش دلالت‌شناسی نمودارهای بث را برای منطق شهودی توسعه می‌دهیم. ایده‌ای که در اینجا توسعه می‌یابد شبیه ایده‌های (Kripke, 1963-A) و (Kreisel, 1958) است، که درصورت تمایل می‌تواند به عنوان پس زمینه‌ای مورد مطالعه قرار گیرد. در هر گام از ساختمان با یک سیستم از مجموعه‌های بدیلِ (Alternative) نمودارها سر و کار داریم؛ هر مجموعه‌ی بدیل بصورت یک درخت مرتب شده‌است و به مبدأ هر درخت نمودار (Tableau) اصلی مجموعه می‌گوییم. به روابطِ بصورتِ درختی مرتب شده روی یک مجموعه‌ی بدیل "S" می‌گوییم. کوچکترین رابطه‌ی برگشتی و متعدی شامل "S" را "R" می‌خوانیم. در هر گام داده شده در ساختمان می‌توانیم فرض بگیریم که هر مجموعه‌ی بدیل در روی قطعه‌ای از کاغذ ترسیم شده‌است ؛ متناظر با سیستم تمامی مجموعه‌های بدیل در آن گام، یک دفترچه داریم که صفحات آن ورقه‌های جداگانه‌ای از کاغذ هستند.

برای بررسی اعتبار فرمول داده شده‌ی A از حساب محمولات هیتینگ، تلاش می‌کنیم یک مدل نقض برای A بیابیم. اگر A صورت $A_1 \wedge \dots A_m . \supset . B_1 \vee \dots B_n$ داشته باشد آنگاه چیزی که نیاز داریم یک مدل $\emptyset$ است بطوری که در ارتباط با تخصیص به متغیرهای آزاد A ، $\emptyset(A_i, G) = T$ و $\emptyset(B_j, G) = F$، بطوریکه $1 \leq i \leq m$، $1 \leq j \leq n$. ما وضعیت را با قرار دادن $A_1, \dots, A_n$ در سمت چپ و $B_1, \dots, B_n$ در سمت راستِ نمودار اصلیِ ساختمان معرفی می‌کنیم. ساختمان را، که یک کوشش سیستماتیک برای یافتن درختِ مدلِ نقض برای A ارائه می‌دهد، به وسیله‌ی قواعد زیر، که می‌تواند به هر نمودار از هر مجموعه‌ی بدیل از ساختمان اعمال شود، ادامه می‌دهیم:

Nl[۹]. اگر $\neg A$ در ستون سمت چپ نمودار ظاهر شود، در ستون سمت راست نمودار A را قرار دهید.

Nr. اگر $\neg A$ در ستون سمت راست نمودار t ظاهر شود نمودار جدید t^1، همراه با tSt^1، با قرار دادن A در سمت چپ t^1 آغاز کنید.

$\wedge$l. اگر $A \wedge B$ در سمت چپ نمودار t ظاهر شود، A و B را در سمت چپ t قرار دهید.

$\wedge$r. اگر $A \wedge B$ در ستون سمت راست نمودار t ظاهر شود، دو راه جایگزین داریم؛ نمودار t را یا با قرار دادن A در ستون سمت راست، یا با قرار دادن B در ستون سمت راست بسط دهید. اگر نمودار t مجموعه‌ی مرتب $\mathcal{J}$ باشد روشن است که در گام بعدی

باتوجه به اینکه کدام بسط از نمودار t را پذیرفته باشیم دو مجموعه‌ی بدیل داریم. بصورت غیر فنی بخواهیم بگوییم، اگر مجموعه‌ی مرتب اصلی روی برگی کاغذ بصورت ساختاری ترسیم شده باشد ما کل این ترسیم را دوبار کپی می‌کنیم؛ در مورد اول A را در ستون سمت راست قرار می‌دهیم و در مورد بعدی B را. دو برگه‌ی تازه مطابق است بـا دو مجموعـه‌ی جایگزین تازه. بیان فنی نسبتاً بی نظم است: در نمودار tی ارائه شـده در یـک مجموعـه‌ی بدیل $\mathcal{J}$، اگر t در سمت راست داشته باشـد $A \wedge B$، $\mathcal{J}$ را بـا دو مجموعـه‌ی بـدیل $\mathcal{I}_1$ و $\mathcal{I}_2$ جابجا می‌کنیم بطـوری کـه $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I} - \{t\} \cup \{t_1\}$ و $\mathcal{I}_2 = \mathcal{I} - \{t\} \cup \{t_2\}$ و $t_1[t_2]$ شـبیه t است بجز اینکه، بعلاوه شامل $A[B]$ در راست است. درخت مرتب شده S_1 از مجموعـه‌ی تازه‌ی $\mathcal{I}_1$ دقیقا شبیه S است و t_1 در همه جا با t عوض می‌شود. و به همین ترتیـب بـرای درخت مرتب شده‌ی S_2 از $\mathcal{I}_2$ (در بیان فنی: S_1 با S در $\mathcal{J} - \{t\}$ در توافق اسـت و اگـر t' مقدم (یک تالی) t باشـد آنگـاه داریـم $t'S_1t_1[t_1S_1t']$.) مـی‌گـوییم $\mathcal{J}$ بـه $\mathcal{I}_1$ و $\mathcal{I}_2$ تقسـیم می‌شود. ملاحظات مشابهی به قواعد Vl و Pl زیر اعمال می‌شود.

Vl. اگر $A \vee B$ در سمت چپ t ظاهر شود، یا A را در سمت چپ t یا B را در سـمت چپ t قرار بدهید. (همانند مورد Λr، این مجموعه‌ی $\mathcal{J}$ شامل t را به دو مجموعه‌ی بـدیل تقسیم می‌کند.)

Vr. اگر $A \vee B$ در سمت راست t ظاهر شود، A و B را در سمت راست t قرار بدهید.

Pl. اگر $A \supset B$ در سمت چپ t ظاهر شـود یـا A را در سـمت راسـت t، یـا B را در سمت چپ قرار بدهید. (بنابراین مجدداً مجموعـه‌ی $\mathcal{J}$ شـامل t، بـا دو مجموعـه‌ی بـدیل جایگزین می‌شود.)

Pr. اگر $A \supset B$ در سمت راست t ظاهر شود نمودار جدید t^1، با A در سمت چـپ t^1 و B در سمت راست، بطوریکه tSt^1 شروع کنید.

برای ساختمان‌هـایی کـه شـامل سـورها هسـتند در گـام داده شـده‌ی سـاختمان یـک مجموعه‌ی $\psi(t)$ از متغییرها به هر نمودار t اختصاص می‌دهیم. تعریف $\psi(t)$ را با فـرض اینکه در گام اولیه‌ی ساختمان، که با یک نمودار منفرد t_0 آغاز می‌شود، $\psi(t_0)$ شـامل یـک متغییر منفرد x است شروع می‌کنیم؛ در گام‌های بعدی $\psi(t)$ فقط باید بـه عنـوان الزامّـات قواعد Πr و Σl زیر و فرض اینکه tSt^1 مستلزم $\psi(t) \subseteq \psi(t^1)$ توسـعه یابـد. حـال مـا در وضعیتی هستیم که بگوییم قواعد سور ها چنین است:

Πl. اگر $(x)A(x)$ در سمت چپ t ظاهر شود و y هر متغیری در $\psi(t)$ باشد، $A(y)$ را در سمت چپ t قرار دهید.

Πr. اگر $(x)A(x)$ در سمت راست t ظاهر شود یک نمودار جدید t^1 با tSt^1 شروع کنید. اگر y متغیری باشد که طبق ترتیب حروف الفبا از همه پیش باشد که تا کنون در هیچ نموداریی از هیچ مجموعه‌ی بدیلی در این گام ظاهر نشده باشد، قرار دهید $y \in \psi(t^1)$ و $A(y)$ را در سمت راست t^1 قرار دهید.

Σl. اگر $(\exists x)A(x)$ در سمت راست نمودار t قرار ظاهر شود و y متغیری باشد که طبق ترتیب حروف الفبا از همه پیش باشد که تاکنون در هیچ نموداریی از هیچ مجموعه‌ی بدیلی در این گام ظاهر نشده باشد، قرار دهید $y \in \psi(t)$ و $A(y)$ را در سمت چپ t قرار دهید.

Σr. اگر $(\exists x)A(x)$ در سمت راست نمودار t ظاهر شود و y متغیری در $\psi(t)$ باشد، $A(y)$ را در سمت راست t قرار دهید.

علاوه بر قواعدی که بیان کردیم فرض‌های زیر در سرتاسر ساختمان برقرار است: اگر t و t^1 در هر گام داده شده، نمودارهای برخی مجموعه‌های بدیل باشند بطوری که tSt^1 و A در سمت چپ t ظاهر شود آنگاه A در سمت راست t^1 قرار دهید. توجه کنید که از آنجایی که فرض باید بازگوکننده‌ی یک واحد زمانی دلخواه باشد، هنگامی که A در سمت چپ t و tRt^1 است نیز همچنین اعمال می‌شود.

رابطه‌ی tSt^1 در ساختمان فقط به عنوان الزامّات قواعدی که در بالا آمده‌اند، برقرار شده‌است. قواعد می‌توانند به هر نظمی اعمال شوند تا زمانی که این نظم طوری فرض گرفته شده باشد که هر قاعده‌ی قابلِ اعمال سرانجام اعمال شود.

نمودار t را بسته می‌خوانیم اگر و تنها اگر برخی فرمولِ آن، در هر دو سمت راست و چپ آن رخ دهد. یک مجموعه یا درختِ نمودارها بسته است اگر و تنها اگر برخی نمودار در آن مجموعه بسته باشد. یک سیستم از مجموعه‌های بدیل بسته است اگر و تنها اگر هر مجموعه از سیستم بسته باشد.

یک ساختمان که بوسیله‌ی قرار دادن A در سمت راست نمودار اصلی ساختمان آغاز شده باشد را ساختمانی برای A می‌خوانند.

می‌توانیم محدودیت‌هایی که در پی می‌آید را در ساختمان اعمال کنیم: یک قاعده نباید به یک نمودار از مجموعه‌ی بسته شده اعمال شود؛ همچنین اگر آن قاعده زائد باشد هم

نباید اعمال شود. (برای مثال؛ Λl نباید اعمال شود اگر A و B قبلاً در سمت چپ نمـودار t مورد بحث ظاهر شده باشد).

اجازه دهید یک مجموعه‌ی بدیل در هر گام از یک ساختمان را نهـایی بخـوانیم اگـر و تنها اگر در هر گام از ساختمان توسط یـک مجموعـه‌ی دیگـر یـا زوجـی از مجموعـه‌هـا جایگزین نشده باشد. بنابراین، به ویژه، هر مجموعه‌ی بسته‌ای نهایی است.

در هر ساختمانی، در نظر بگیرید α دنباله‌ی ثابت $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots$ از مجموعه‌های بدیل باشـد بطوری که $\mathcal{I}_1$ یک مجموعه در گام اول ساختمان است و $\mathcal{I}_{i+1}$ یک مجموعه یا یکـی از دو مجموعه‌ای است که در گام $(i+1)$ امین با $\mathcal{I}_i$ جایگزین می‌شود؛ α در $\mathcal{I}_n$ پایان می‌پـذیرد اگر و تنها اگر $\mathcal{I}_n$ نهایی باشد. (اگر ساختمان به پایان نرسد دست کم یـک چنـین دنبالـه‌ی نامتناهی چون α وجود دارد.) هر نمودار t در $\mathcal{I}_1$ یا در $\mathcal{I}_{i+1}$ که تالیِ بلادرنگ (Immediate descendant) از یک نمودار $\mathcal{I}_i$ نیست را یک نمودار اولیه می‌خوانیم. K را مجموعه‌ی تمـام دنباله‌های τ از نمودارها $t_1, t_2, \ldots$ در نظر بگیرید بطوری که t_1 یک نمودار اولیه و t_{i+1} یک تالی بلادرنگ از t_i باشد و τ در t_n به انتها میرسد اگر و تنها اگر t_n به مجموعه‌ی نهایی $\mathcal{I}_m$ تعلق داشته باشد. در نظر بگیرید τ_0 عضوی از K باشد که جمله‌ی اولش t_1 در $\mathcal{I}_1$ باشد. به ازای τ و τ' در K، در نظر بگیرید $\tau\rho\tau'$، اگر و تنها اگر به ازای برخـی $\mathcal{I}_i$ در α جمـلات t, t' از τ, τ' در $\mathcal{I}_i$ وجود داشته باشد بطوری که tRt' (R مقدمـه درخـت مرتـب شـده‌ی S است). سپس بصورت شهودی (τ_0, K, ρ) یک *q.m.s* را با دامنه‌ی تابع

$$\bar{\psi} = \bigcup_{t_i \in \tau} \psi\,(t_i)$$

را صورت می‌دهد. اگر مدل تسویری ϕ تعریف شده باشد، به ازای هر جمله نشـانه P، $\phi(P,\tau) = T$ اگر و تنها اگر P در سمت چپ برخی t در τ ظـاهر شـود و بـه ازای هـر محمول نشانه P^n، $\phi(P^n,\tau)$ مجموعه‌ای n–تایی $(x_1, \ldots, x_n)$ از متغییرهاست بطـوری کـه $P^n(x_1, \ldots, x_n)$ در سمت چپ از برخی t در τ ظاهر شود، سپس به ازای هر فرمول B، اگر B در سمت چپ برخی t در τ ظاهر شود، $\phi(B,\tau) = T$ (در ارتباط با تخصیص هر متغیـر آزاد در B به خودش). بیشتر اینکه، قانون دوتایی مبنی بر: به ازای هـر B اگـر B در سـمت راست برخی t در τ ظاهر شود آنگاه $\phi(B,\tau) = F$، برقرار اسـت اگـر و تنهـا اگـر α در مجموعه‌ی بسته‌ی $\mathcal{I}_n$ پایان نپذیرد. بنابراین اگر ساختمان، ساختمانی برای A باشد، این فقط وضعیتی است که تحت آن α مدل نقضی برای A بدست می‌دهد.

قضیه ۲. ساختمان برای A بسته است اگر و تنها اگر A معتبر باشد.

برهان را، که از سطرهایی که در بالا بصورت شهودی ترسیم شد تبعیت می‌کند و بعلاوه نشان می‌دهد مجموعه‌های بدیل ساختمان A احتمال‌هایی که برای یافتن مدل نقض برای A وجود دارد را از بین می‌برد، حذف کرده‌ایم زیرا آن برهان یک تبدیل‌یافته عادی از برهان‌های قضایای مشابه (Kripke, 1963-A) و (Kripke, 1959) است[۱۰].

۵. قضیهٔ تمامیت

۱.۵ خاصیت سازگاری

قضیه ۳. اگر A در حساب محمولی هیتینگ قابل اثبات باشد، آنگاه A معتبر است.

این قضیه تقریباً بدیهی است. فقط باید در صورت‌بندی استاندارد حساب محمولی هیتینگ تایید کنیم که اصل موضوع‌ها معتبر هستند و قواعد اعتبارْ نگه‌دار هستند. چنان تأیید کردنی به عهده‌ی خواننده گذارده می‌شود. در این بخش دلالت‌شناسی نمودارهایِ بث اگر نتیجه بشود که A اثبات پذیر است ساختمان برای A بسته است.

۲.۵ خاصیت تمامیت

نشان می‌دهیم هر فرمول معتبرِ A قابل اثبات است؛ به وسیله‌ی اینکه اگر ساختمان A بسته باشد آنگاه A اثبات پذیر است. مشابه (Kripke, 1963-A) و (Kripke, 1959) این کار را با استفاده از ایده‌ی فرمول مشخصه (Characteristic formula) انجام می‌دهیم.

مشابه (Kripke, 1963-A)، رتبه‌ی نمودار را در یک درخت متناهی از نمودارها (یا در حقیقت بوسیله‌ی یک گره در هر نمودار متناهی) چنین تعریف می‌کنیم: نقطه‌ی پایان درخت رتبه 0 دارد. اگر t نقطه‌ی پایان نباشد، در نظر بگیرید $t_1, \dots, t_n$ تالی‌های آن باشد، آنگاه $Rank(t) = Max\ \{Rank(t_i)\} + 1$. ساده است که نشان دهیم به ازای هر درخت متناهی از نمودارها یک رتبه‌ی منحصربفرد برای هر نمودار از درخت تعریف می‌شود.

در هر نمودار داده شده‌ی t در یک درخت از نمودارها، دنباله‌ی زیر را تعریف می‌کنیم: $\{t_i\}: t_0 = t, t_{j+1} = the\ predecessor\ of\ t_j$ اگر چنان مقدمی وجود داشته باشد. در غیر این صورت غیرقابل تعریف باشد. دنباله بصورت واضحی متناهی است و جمله‌ی آخرش مبدأ درخت است. ما آن را چنین می‌خوانیم "مسیر برگشت از t به مبدأ". جملات دنباله

بجز t "جلوتر از t" روی درخت می‌آیند. به ازای هر t روی درخت در نظر بگیرید $\chi(t)$ مجموعه‌ی تمام متغیرها که در t آزاد هستند امّا چنین نیست که در هر نمودار پیش از آن می‌آید، باشد.

در هر گام از ساختمان نمودارهای یک مجموعه‌ی بدیل به یک درخت متناهی صورت می‌دهد. ما فرمولِ مشخصه از یک نمودار t در مجموعه، را در یک گام داده شده بوسیله‌ی استقرا روی رتبه‌ی آن در مجموعه تعریف می‌کنیم. در نمودار داده شده t در نظر بگیرید $A_1, \dots, A_m[B_1, \dots, B_n]$ فرمولی باشد که در سمت چپ (راست) t ظاهر می‌شود. علاوه بر این در نظر بگیرید $x_1, \dots, x_q$ اعضای $\chi(t)$ باشند. (محتمل است که $q = 0$.) اگر رتبه‌ی $(t) = 0$ باشد آنگاه فرمول مشخصه‌ی t چنین تعریف می‌شود $(x_1) \dots (x_q)(A_1 \wedge \dots A_m. \supset B_1 \vee \dots B_n)$؛ یا اگر هیچ فرمولی در چپ (راست) t نباشد چنین تعریف می‌شود $[(x_1) \dots (x_q)\neg(A_1 \wedge \dots A_m)]$ $(x_1) \dots (x_q)(B_1 \vee \dots B_n)$. اگر رتبه $(t) > 0$ باشد در نظر بگیرید $t_1, \dots, t_p$ تالی‌های t باشد و در نظر بگیرید $C_1, \dots, C_p$ فرمول مشخصه متناظر باشد. آنگاه فرمول مشخصه‌ی t، $(x_1) \dots (x_q)(A_1 \wedge \dots A_m. \supset. B_1 \vee \dots B_n \vee C_1 \vee \dots C_p)$ است؛ یا اگر هیچ فرمولی در سمت چپ (راست) t نبود $(x_1) \dots (x_q)(B_1 \vee \dots B_n \vee C_1 \vee \dots C_p)[(x_1) \dots (x_q)(A_1 \wedge \dots A_m. \supset. C_1 \vee \dots C_p)]$. فرمول مشخصه از یک مجموعه‌ی بدیل (درخت) نمودارها بصورت فرمول مشخصه‌ی نمودار اصلی از مجموعه تعریف شده‌است. فرمول مشخصه‌یِ کل سیستمِ مجموعه‌های بدیل در هر گام داده شده از ساختمان همچون عطفِ فرمول‌هایِ مشخصه‌یِ مجموعه‌هایِ بدیل سیستم تعریف شده است.

در معنای طبیعی، ایده‌ی حاضر از فرمول مشخصه همزادی برای (Kripke, 1963-A) و (Kripke, 1959) است. درک مطلب خواننده از ایده‌ی فرمول مشخصه می‌تواند تسهیل شود اگر وی تلقّی‌های مشابه از فرمول مشخصه در (Kripke, 1963-A) و (Kripke, 1959) را نیز کنکاش کند.

لم: اگر A_0 فرمول مشخصه از گام اولیه‌ی ساختمان باشد و B_0 فرمول مشخصه‌ای از هر گامی از ساختمان باشد آنگاه

$$\vdash B_0 \supset A_0$$

برهان. کافی است نشان دهیم که فرمول مشخصه‌ی هر گام از ساختمان دلالت بر فرمول مشخصه‌ی گام ماقبل می‌کند. امّا فرمول مشخصه از m–امین گام بطور عمومی

صورت $D_1 \wedge \dots D_j \wedge \dots D_n$ بطوری که $D_i (1 \le i \le n)$ فرمول‌های مشخصه‌ی مجموعه‌های بدیل آن گام هستند. قاعده‌ای که اعمال شده‌است و m-امین گام را به $m+1$امین گام تغییر می‌دهد، فقط یک مجموعه‌ی بدیل همراه با فرمول مشخصه ی D_j را تغییر می‌دهد. اگر قاعده، Pl، Λr یا VI باشد این مجموعه را به دو مجموعه‌ی بدیل مجزّا با فرمول‌های مشخصه‌ی D'_j و D''_j تغییر خواهد داد. حال مایلیم اثبات کنیم $\vdash D_1 \wedge \dots D_j \wedge D"_j \wedge \dots D_n . \supset . D_1 \wedge \dots D_j \wedge \dots D_n$. برای انجام این کار کافی است اثبات کنیم $D'_j \wedge D''_j . \supset . D_j$. به همین ترتیب اگر قانونی که اعمال می‌شود بجز Pl، Λr یا VI باشد آنگاه D_j به D'_j تبدیل می‌شود. برای اثبات اینکه $\vdash D_1 \wedge \dots D'_j \wedge \dots D_n . \supset . D_1 \wedge \dots D_j \wedge \dots D_n$ کافی است که اثبات کنیم $\vdash D'_j \supset D_j$. بنابراین هنگامی که یک قاعده تبدیل کننده گام m-ام ساختمان به گام $m+1$-ام اعمال شد، فقط نیاز داریم که فرمول مشخصه‌ی مجموعه‌ای که قاعده در واقع به آن اعمال شد را در نظر بگیریم.

حال فرض کنید یک قاعده (بجز Pl، Λr یا VI) یک مجموعه چون $\mathcal{J}$ با فرمول مشخصه‌ی D_j را به یک مجموعه با فرمول مشخصه‌ی D'_j تبدیل می‌کند. می‌خواهیم اثبات کنیم $\vdash D'_j \supset D_j$. در نظر بگیرید t نموداریی باشد که قاعده در واقع به آن اعمال شده‌است و در نظر بگیرید C فرمول مشخصه‌ی آن باشد. علاوه بر این، در نظر بگیرید که C' فرمول مشخصه‌ی نمودار t' باشد که نمودار t بوسیله‌ی اِعمال قاعده به آن تبدیل شده است. (قواعد Nr، Pr، Πr، t را دست نخورده باقی می‌گذارند و یک نمودار جدید t^1 اضافه می‌کنند. در آن موردی که t' با t یکسان خواهد بود امّا فرمول مشخصه‌ی جدید C' مربوط به نمودار t با فرمول مشخصه‌ی قدیمی C یکسان نیست.) فرض کنید که ما می‌توانیم نشان دهیم $\vdash C' \supset C$. آنگاه اگر t نمودار اصلی مجموعه‌ی $\mathcal{J}$ باشد ما نشان داده‌ایم که $\vdash D'_j \supset D_j$. در غیر این صورت در نظر بگیرید t_1 در گام m-ام t مقدم باشد و در نظر بگیرید t'_1 در گام $m+1$-ام از t' مقدم باشد و در نظر بگیرید $C_1[C'_1]$ فرمول مشخصه‌ی $t_1[t'_1]$ باشد. آنگاه C_1 تسویر کلی (u.q.) یک فرمول از فرم $X . \supset . Y \vee C$ است و C'_1 یک u.q. از فرم $X . \supset . Y \vee C'$ باشد. از آنجایی که $\vdash C' \supset C$ واضح است که $\vdash (X . \supset . Y \vee C') \supset (X . \supset . T \vee C)$. با اِعمال کردن تعمیم کلی به این آخرین حکم و توزیع کردن سورهای کلی در میان نماد استلزام، بدست می‌آوریم $\vdash C'_1 \supset C_1$. اگر t_1 نمودار اصلی $\mathcal{J}$ باشد آنگاه $C'_1 \supset C_1$ هست $D'_j \supset D_j$. در غیر این‌صورت در نظر بگیرید $t_2[t'_2]$ مقدمِ $t_1[t'_1]$

باشد و استدلال مشابهی را مثل قبل بدان اعمال کنید. ظاهراً بدست خواهیم آورد $D_j' \supset D_j$. بنابراین در مورد هر قاعده‌ای بجز Pl، Λr یا VI فقط باید نمودار t را که قاعده واقعاً بدان اِعمال شده‌است را در نظر بگیریم و فرمول $C \supset C'$ که در بالا برقرار شد را اثبات کنیم. توجه کنید که بطور کلی C، فرمول مشخصه‌ی t، یک u.q. از فرمول معیّن B است و C' یک u.q. از فرمول معیّن B' است. اگر اثبات کنیم $\vdash B \supset B'$ آنگاه بوسیله‌ی تعمیم کلی و توزیع سورها در اطراف نماد استلزام می‌توانیم بدست آوریم $C \supset C'$.

این ملاحظات را در ذهن نگه دارید، ما برهان را با توجه به قاعده‌ای دارد که برای بدست آوردن $m + 1$–امین گام از m–امین گام به کار گرفته شده است به موارد زیر تجزیه می‌کنیم. می‌توانیم بگوییم یک مورد "تصدیق شده است" اگر برای آن مورد نشان داده باشیم که $\vdash D_j' \supset D_j$ که این در واقع به $\vdash B \supset B'$ فروکاست می‌شود. به خواننده توصیه می‌شود که برخوردهای مشابه در (Kripke, 1963-A) و (Kripke, 1959) را کنکاش کند.

برای درنظر گرفتن یک قاعده، بطور کلی نمودار t را فرض خواهیم کرد که فرمول های شامل‌اش، هم در سمت راست و هم در سمت چپ اعمال شده و فرمول مشخصه‌اش بنابراین یک استلزام است. مواردی که سمت راست یا چپ تهی هستند به خود خواننده واگذار خواهد شد.

مورد Nl. فرمول مشخصه‌ی t یک u.q. از $X \wedge \neg A. \supset .Y$ است. بعد از اینکه A در سمت راست قرار گرفت فرمول مشخصه‌اش یک u.q. از $X \wedge \neg A. \supset .Y \vee A$ خواهد بود. این مورد توسط $\vdash X \wedge \neg A. \supset .Y \vee A{:} \supset {:} X \wedge \neg A. \supset .Y$ تصدیق می‌شود.

مورد Nr. فرمول مشخصه‌ی t یک u.q. از $X. \supset . \neg A \vee Y$ است. هنگامی که یک نمودار جدید t^1 همراه با A در سمت چپ آغاز میکنیم و tSt^1، فرمول مشخصه از t^1 هست $\neg A$ (زیرا $\chi(t^1)$ تهی است چون یکی از متغییرهای آزاد A هم‌اکنون در t ظهور پیدا کرده‌است)، و فرمول مشخصه‌ی t یک u.q. از $X. \supset . \neg A \vee Y \vee \neg A$ می‌شود. این مورد توسط $\vdash X. \supset . \neg A \vee Y \vee \neg A{:} \supset {:} X. \supset . \neg A. \vee .Y$ تصدیق می‌شود.

مورد Λl. توسط $\vdash X \wedge A \wedge B \wedge A \wedge B. \supset .Y{:} \supset {:} X \wedge A \wedge B. \supset .Y$ تصدیق می‌شود.

مورد Λr. در نظر بگیرید فرمول مشخصه‌ی t را بخوانیم C که یک u.q. از $X. \supset .Y \vee (A \wedge B)$ باشد. قاعده ی Λr، t را به دو نموداری بدیل t' و t'' تقسیم می‌کند که فرمول مشخصه‌شان C' و C''، به ترتیب u.q.های $X. \supset .Y \vee (A \wedge B) \vee A$ و $X. \supset .Y \vee (A \wedge B) \vee B$ است. با استفاده از $\vdash (X. \supset .Y \vee (A \wedge B) \vee A) \wedge (X. \supset .Y \vee$

$(A \wedge B) \vee B): \supset: X. \supset. Y \vee (A \wedge B)$ و تعمیم و توزیع سورها بدست می‌آوریم $\vdash C' \wedge C''. \supset. C$. اگر t نمودار اصلی مجموعه باشد این نتیجه مطلوب است: $\vdash D_j' \wedge D_j''. \supset. D_j$. در غیر این‌صورت در نظر بگیرید t_1 مقدم t باشد. فرمول مشخصه‌ی C_1 برای t_1 یک u.q. از $X_1. \supset. Y_1 \vee C$ است. آن توسط Λr به دو فرمول مشخصه‌ی بدیل C_1' و C_2'' تبدیل می‌شود که به ترتیب u.q.های $X_1. \supset. Y_1 \vee C'$ و $X_1. \supset. Y_1 \vee C''$ هستند. با استفاده از $\vdash C' \wedge C''. \supset. C$ به سادگی بدست می‌آوریم $\vdash C_1' \wedge C_1''. \supset. C_1$. با ادامه دادن این روند در مسیر برگشت از t به سوی مبدأ، در تعدادی گام‌های متناهی بدست می‌آوریم $\vdash D_j' \wedge D_j''. \supset. D_j$.

مورد Pl. شبیه به Λr با استفاده از $\vdash (X \wedge (A \supset B). \supset. Y \vee A) \wedge (X \wedge (A \supset B) \wedge B. \supset. Y): \supset: X \wedge (A \supset B). \supset. Y$.

مورد Pr. در نظر بگیرید فرمول مشخصه t یک u.q. از $X. \supset. Y \vee (A \supset B)$ باشد. Pr ما را به سوی آغاز یک نمودار جدید t^1 همراه با A در سمت چپ و B در سمت راست که بنابراین فرمول مشخصه‌اش $A \supset B$ است، راهنمایی می‌کند. ($\chi(t^1)$ تهی است). آنگاه فرمول مشخصه‌ی t به یک u.q. ی $X. \supset. Y \vee (A \supset B) \vee (A \supset B)$ تبدیل شد و $\vdash X. \supset. Y \vee (A \supset B) \vee (A \supset B): \supset: X. \supset. Y \vee (A \supset B)$ تصدیق کننده‌ی مورد است.

مورد Vl. شبیه به Λr با استفاده از $\vdash (X \wedge (A \vee B) \wedge A. \supset. Y) \wedge (X \wedge (A \vee B) \wedge (B. \supset. Y): \supset: (X \wedge (A \vee B). \supset. Y)$.

مورد Vr. توسط $X. \supset. Y \vee (A \vee B) \vee A \vee B: \supset: X. \supset. Y \vee (A \vee B)$ تصدیق می‌شود.

مورد Σl. اگر t فرمول مشخصه‌ی C یک u.q. ی $X \wedge (\exists x)A(x). \supset. Y$ را داشته باشد، بعد از اعمال Σl، t به t^1 که فرمول مشخصه‌ی آن C' یک u.q. ی $X \wedge (\exists x)A(x) \wedge A(a). \supset. Y$ را دارد. از آنجایی که a یک متغیر تازه است که قبلاً معرفی نشده بود $a \in \chi(t^1)$. بدین ترتیب می‌توانیم C' را یک u.q. ی $(a)(X \wedge (\exists x)A(x) \wedge A(a). \supset. Y)$ بگیریم. بنابراین $\vdash (a)\big(X \wedge (\exists x)A(x) \wedge A(a)\big)$.

مورد Σr. توسط $\vdash X. \supset. Y \vee (\exists x)A(x) \wedge A(a): \supset: X. \supset. Y \vee (\exists x)A(x)$ توجیه می‌شود.

مورد Πl. توسط $\vdash X \wedge (x)A(x) \wedge A(a). \supset. Y: \supset: X \wedge (x)A(x). \supset. Y$ توجیه میشود.

مورد Πr. فرمول مشخصه‌ی t یک .u.q یِ $X. \supset .Y \vee (x)A(x)$ است. Πr ما را راهنمایی می‌کند تا یک نمودار جدید t^1 همراه با tst^1 و $A(a)$ در سمت راست آغاز کنیم بطوری که a قبلا استفاده نشده باشد. آنگاه $\chi(t^1) = \{a\}$ زیرا a تنها متغییر آزاد t^1 است که در t رخ نداده است. بنابراین فرمول مشخصه‌ی t^1 است: $(a)A(a)$ و فرمول مشخصه‌ی t به یک .u.q از $X. \supset .Y \vee (x)A(x) \vee (a)A(a)$ تبدیل شده‌است. بنابراین $\vdash X. \supset .Y \vee (x)A(x) \vee (a)A(a) : \supset : X. \supset .Y \vee (x)A(x) \vee (x)A(x)$ تصدیق می‌شود.

نهایتاً، ما باید تصدیق کنیم قانونی را که بیان می‌کند اگر یک فرمول چون A در سمت چپ نمودار t ظاهر شود و tst^1، آنگاه باید A را در سمت چپ t^1 قرار دهیم. این مطلب توسط $X \wedge A. \supset .Y \vee ((X' \wedge A) \supset Y') : \supset : X \wedge A. \supset .Y \vee (X' \supset Y')$ توجیه می‌شود. حال لم اثبات شده است.

قضیه ٤. اگر A معتبر باشد، آنگاه A در حساب محمولات هیتینگ اثبات شده است.

برهان. می‌توانیم فرض بگیریم A هیچ متغییر آزادی ندارد. از آنجایی که A معتبر است، ساختمان برای A بسته است. آنگاه یک گام وجود دارد که در آن هر مجموعه‌ی بدیل بسته است. در نظر بگیرید فرمول مشخصه‌ی آن گام باشد $D_1 \wedge \dots D_n$ بطوری که D_j ها، فرمول مشخصه‌ی مجموعه‌های بدیل آن گام است. از لم داریم $D_1 \wedge \dots D_n. \supset .A$ (زیرا A فرمول مشخصه ی گام اولیه است). بنابراین کافی است به ازای هر j نشان دهیم D_j. مجموعه‌ی بدیلی که فرمول مشخصه‌اش D_j است و بسته شده‌است، شامل یک نمودار t بسته است. آنگاه t شامل یک فرمول B در هر دو سمت است، بنابراین فرمول مشخصه‌ی آن C یک .u.q از $X \wedge B. \supset .Y \vee B$ است. واضح است که $\vdash C$. اگر t نمودار اصلی مجموعه باشد، این D_j است. در غیر این صورت در نظر بگیرید t_1 مقدم t باشد. آنگاه فرمول مشخصه ی C_1 از t_1 یک .u.q از $X'. \supset .Y' \vee C$ است. واضح است که $\vdash C_1$. با ادامه دادنِ این روش، ما در مسیر برگشتن از t به سوی مبدأ حرکت می‌کنیم تا زمانی که بدست بیاوریم $\vdash D_j$. Q.E.D.[11]

توجه. قضیه یک برهان شبه‌متناهی ارائه می‌دهد که اگر ساختمان A بسته باشد $\vdash A$. می‌توانستیم این را بصورت دیگری بوسیله‌ی نشان دادن اینکه روند نمودار معادل با صورت‌بندی استاندارد گنتزن (Gerhard Karl Erich Gentzen) سیستم هیتنگ است نیز اثبات کنیم. البته که قضیه و برهان به حساب جملات نیز اعمال می‌شود، حتی در چنین صورتی برهان برای حساب محمولی نیز برقرار است.

مآخذ(مقالۀ کریپکی)[۱۲]

Beth, Evert Willem, *Observations on an Independence Proof for Peirce's Law* (abstract). The Journal of Symbolic Logic 25 (1960; published, 1962) 389.

Beth, Evert Willem, *Semantic Construction of Intuitionistic Logic*. Mededelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Afd. Letterkunde, Nieuwe Reeks, Dee! 19, No. I J.

Cohen, Paul J. *The Independence of the Continuum Hypothesis*. Pwceedings of the National Academy of Sciences, U.S.A. 50 (1963) 1143-1148.

Dummett, Michael Anthony; Lemmon, John. *Modal Logics between S4 and SS*. Zeit-schrift flir Mathcmatische Logik und Grundlagcn dcr Mathematik 4 (1958) 250-264.

Dyson Verena H; Kreisel, Georg, *Analysis of Beth's Semantic Construction of In tuitionistic Logic*. Technical Report no. 3, Stanford University Applied Mathematics and Statistics Laboratories, Stanford, California.

Heyting, Arand. *Intuitionism: An Introduction*. (North-Holland Publishing Co., Amsterdam 1956).

Kleene, Stephen Cole. *Introduction to Metamathematics*. (Van Nostrand, New York; North-Holland Publishing Co., Amsterdam and P. Noordhotf Ltd., Groningen). 1952.

Kreisel, Georg. *On Weak Completeness of Intuitionistic Predicate Logic*. The Journal of Symbolic Logic 27 (1962) 139-158.

Kreisel, Georg. *A Remark on Free Choice Sequences and the Topologica l Completeness Proofs.* The Journal of Symbolic Logic 23 (1958) 369-388.

Kreisel, Georg. *Set Theoretic Problems suggested by the Notion of Potential Totalition: Infinitistic Methods* (Warsaw 1961).

Kripke, Saul A. *A Completeness Theorem in Modal Logic*. The Journal of Symbolic Logic 24 (1959) 1-14.

Kripke, Saul A. *Semantical Analysis of Modal Logic (abstract).* The Journal of Symbolic Logic 24 (1959) 323-324.

Kripke, Saul A. *Semantical Analysis of Modal Logic I.* Normal Modal Proposi- tional Calculi. Zeitschrift fUr Mathematische Logik und Grundlagen der Mathe- mathik 9 (1963-A) 67-96.

Kripke, Saul A. *Semantical Considerations on Modal and Intuitionistic Logic*. Acta Philosophica Fennica 16 (1963-B) 83-94.

Kripke, Saul A. *The Undecidability of Monadic Modal Quantification Theory*. Zeitschrift fi.ir Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik 8 (1962) 113-116.

Kuroda, Sigekatu. *lntuitionistische Untersuchungen der formalistischen Logik*. Nagoya Mathematical Journal 2 (1951) 35 7. Known only from references.

Markov, Andrey Andreyevich. *0 nepreryvnosti konstruktivnyh funkcij (On the continuity of constructive functions).* Uspehi Matern. Nauk 9 (1954) 226-230. Known only from references.

یادداشت (اضافه شده در تاریخ ۹ آگوست ۱۹٦٤)

اکنون مقاله‌ی فرفرمان را دیده‌ایم و دیدگاه وی راجع به فورسینگ در حقیقت تقریباً به دیدگاه ما نزدیک است اگرچه وی آن را بر مبنای نظریه‌ی مدلی برای یا درارتباط با منطق شهودی بنا نکرده است.

یادداشت (اضافه شده در تاریخ ۲۸ اکتبر ۱۹٦٤)

در ارتباط با ملاحظه‌ی انتهای بخش ۱.۱ باید اشاره شود که مثال بخش ۱ از ملاحظه اصل مارکو را رد می‌کند. در آنجا ملاحظه کردیم که در FC، $(a)\ \ (\alpha \restriction \beta)\neg(x)(a(x) =$ $0)$ اما همچنین $(b)\ \ \neg(\alpha \restriction \beta)(\exists x)(\alpha x) = 1)$. از (b) توجه کنید که تا زمانی که B یک فضای دودویی است، $(\alpha \restriction \beta)(x)(\alpha(x) \neq 0 \supset \alpha(x) = 1$، داریم $(c)\ \ \neg(\alpha \restriction$ $\beta)(\exists x)(\alpha(x) \neq 0)$. اما (a) و (c) با هم با اصل مارکوف در تضاد هستند. مثال بخش ۲ از ملاحظه به جهت نشان دادن اینکه یک مثال‌نقض به تنهایی می‌تواند هر دو اصل مارکوف و حدس کوردا را رد کند، آورده شد.

باید اشاره کنیم که اصل مارکوف به ازای α از یک فضای کاملاً دودویی مستلزم این خواهد بود که $\neg(x)(\alpha(x) = 0 \supset (\exists x)(\alpha(x) = 1)$. از این به راحتی نتیجه می‌شود که برای عدد حقیقی a، $a \neq 0$ دلالت می‌کند بر $a \# 0$. (مشابه بخش ۱ از ملاحظه). بنابراین اگر دلیلِ ردِ برآوئر از مورد دومی (با استفاده کردن از ips وابسته به حل مسائل) بپذیرفته شود برآوئر قبلاً اصل مارکوف را رد کرده‌است.

می‌خواهم از مایکل دامت و جان کرازلی بخاطر کمکشان در ویراستاری این مقاله و به ویژه از دامت برای اصلاح مهمی در بخش ۱.۲ تشکر کنم.

۶. نتیجه‌گیری

سیستمِ دلالت شناسی طراحی شده توسط کریپکی برای منطق شهودی، طی سالهایِ پس از عرضه، وسیله‌ی همه کاره‌ای شده برای منطق شهودی؛ همان چیزی که سایر سیستم های دلالت شناسی‌اش نتوانستند بشوند. این ابزار منعطف، از مفاهیم فنیِ حاد ریاضتی- شهودگرایی فاصله می‌گیرد و خود را برای اهداف منطقیِ منطق‌دانان و نیز آموزشی مناسب‌تر می‌کند. بعلاوه کریپکی توانست با وام از ابزارِ *رابطه‌ی فورسینگ*ِ پل کوئن ریاضی‌دان آمریکایی و با ابتناء به جهان‌های ممکنِ موجهاتی، که از تحقیقات خودش سرچشمه گرفته بود، گذری تازه برای حرکت بین منطق کلاسیک و منطق شهودی باز کند که منشاء اثر مطالعات کلان منطقی پس از وی شد؛ و جز این، همچنین، واجد اهمیت‌هایی فلسفی است. مثلاً اینکه شهودگرایی برآوئر دارای لوازمی مفهومی است، ***creating subject***، که احتمالاً به کمک آن‌ها بتواند ایده‌ی جهان‌های ممکن را در خود هضم کرده و خود را تصریح کند.

پی‌نوشت‌ها

۱. همچنین هریک به هر جزوی رسید/ فهم آن می‌کرد هرجا میشنید (مولانا/ اختلاف در چگونگی و شکل پیل/دفتر سوم) (مترجم)

۲. برای خواننده ای که تمایل دارد محرک عمیق تر مقاله حاضر را بطور کامل درک کند با این حال اصرار دارد که در (Kripke, 1963-A) و (Kripke, 1963-B) و (Kripke, 1959) که تحلیل های زیربنایی برای منطق موجهات بدست می‌دهد کنکاش کند.

۳. در (Kripke, 1963-A) پذیرفتیم $\emptyset(P,H)$ روی $H\varepsilon K$ و زیرفرمول اتمی از یک فرمول ثابت A مرتب شود. ما این را یک مدل از A خواندیم. می‌توانستیم بطور مشابه این جهت را به نحو مطلوبی در اینجا نیز بپذیریم؛ *mutatis mutandis* بطور عکس (Kripke, 1963-A) می‌تواند تعبیرات حاضر را بپذیرد. نظرگاه (Kripke, 1963-A) در تحلیل "فورسینگ" کوئن به کار گرفته شده، بطوری که در نظر گرفته ایم مدلها فقط به فرمولهایی که از فرمول اتمی ثابت $P(x)$ ساخته شده باشند ارزش نسبت می‌دهد.

همچنین باید اشاره کنیم گرچه در این بخش ما فرمول اتمی را جوری در نظر گرفته ایم که حروف گزاره‌ای و فرمول $P^n(x_1,\dots,x_n)$ باشد، اگر فرمول از یک کلاس فرمول اتمی ثابت دلخواه ساخته شده باشد، تعریف‌ها باید بطور مشابه انجام شوند. در مسائله در تفسیر اثبات پذیری در بخش ۱.۳ پایین به کار گرفته شده است.

۴. ما مطلع هستیم که گودل (در نوشته ای منتشر نشده) پیشنهاد داده‌است که چنین دنباله‌هایی "مطلقاً بی قاعده" خوانده شوند؛ احتمالا به این استدلال که آن‌ها کاملاً آزاد نیستند و توسط الزامات "مرتبه بالاتر" مبنی بر بدون هیچگونه حدی بودن الاّ آنچه در تعریف سوال آمده ست در برگرفته شده است و همیشه دز تصمیم های بعدی توسط انتخاب آزاد در نظر گرفته می‌شود. از آنجایی که پیشنهاد گودل تا کنون مزین به زیور طبع نشده است ما تردید داریم تا این تغییرات را مال خود کنیم.

۵. کوتاه نوشتی برای infinitely proceeding sequence. کریپکی استفاده از این کوتاه نوشت را از کتاب Intuitionism: An Introduction(1956) نوشته Arrand Heyting اخذ کرده‌است. برای اطلاعات تکمیلی، در آن ملاحظه کنید بخش ۳ صفحه ۳۲. (مترجم)

۶. Initial Segment: در نظر بگیرید $(A, \le)$ یک مجموعه‌ی خوش ترتیب باشد. آنگاه مجموعه‌ی $\{a \in A: a < k\}$ به ازای برخی $k \in A$ را بخش اولیه از A می‌خوانیم. Of (Rubin 1967, p. 161; Dauben 1990, pp. 196-197; Moore 1982, pp. 90-91) (مترجم)

۷. این بخش در ترجمه نیامده‌است. (مترجم)

۸. Tableau /Tableaux (Plural) معادل این واژه را دکتر نبوی *"نمودار"* پیشنهاد داده‌اند. (مترجم)

9. l: left/ r: right

۱۰. A را جوری تعریف می‌کنیم که درخت معتبر باشد اگر و تنها اگر $\emptyset(A, G) = T$ برای هر مدل $\emptyset$ روی یک درخت $(G, K, R)q.m.s$. آنگاه آن چه به راحتی اثبات می‌شود این است که ساختمان بسته است اگر و تنها اگر A یک درخت معتبر باشد. اما با توجه به بخش ۱.۲ بالا اعتبار منطبق با اعتبار درخت است. بصورت جایگزین میتوانیم بدون استفاده از بخش ۱.۲ بصورت زیر استدلال کنیم: واضح است که اعتبار مستلزم اعتبار درخت است و اثبات پذیری مستلزم اعتبار است. نتایج تمامیت زیر نشان می‌دهد اعتبار درخت مستلزم اثبات پذیری است بنابراین ایده‌های درخت منطبق اند.

می‌توانستیم یک مبتنی بر رابطه‌ی R یک روند تابلو تعریف کنیم که نسبت به مدل‌درخت مناسبت بیشتری با مدل‌ها داشته باشد. خوانندهای که با (Kripke, 1963-A) آشناست می‌دانید آن چطور انجام می‌گیرد.

توجه کنید که، به عنوان موردی قابل مقایسه که در (Kripke, 1963-A) و (Kripke, 1959) مشاهده شده‌است، مدل‌های نقضی که برای فرمول‌های نامعتبر بوسیله‌ی قضیه‌ی ۲ از تابلوها بدست آمده، همواره روی یک درخت شمارش پذیر (G, K, R) q.s.m. هستند که با یک مجموعه‌ی شمارش پذیر U از افراد همراه شده‌است. این نتایج لوون‌هیم–اسکولم (-Lowenheim

Skolem) در قسمت II برای نشان دادن اینکه نتایج تمامیت حاضر شامل نتایج بث (Beth, 1957) نیز هست استفاده خواهد شد.

۱۱. Quod erat demonstrandum: عبارتی لاتین به معنی what was to be shown در بین ریاضی دانـان به سنگ قبر معروف است و در پایان برهان قرار می‌دهند. (مترجم)

۱۲. در مقاله اصلی ارجاع دهی به صورت عددی است. (مترجم)

کتاب‌نامه

اردشیر، محمد، ۱۳۸٤ منطق ریاضی، تهران: هرمس

اردشیر، محمد، ۱۳۸۷ فلسفه برآوئر، مارک فان آتن، تهران: هرمس

Beth, Evert Willem, Observations on an Independence Proof for Peirce's Law (abstract). The Journal of Symbolic Logic 25 (1960; published, 1962) 389.

Beth, Evert Willem, Semantic Construction of Intuitionistic Logic. Mededelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Afd. Letterkunde, Nieuwe Reeks, Dee! 19, No. I J.

Cohen, Paul J, The Independence of the Continuum Hypothesis. Pwceedings of the National Academy of Sciences, U.S.A. 50 (1963) 1143-1148.

Dummett, Michael Anthony; Lemmon, John, Modal Logics between S4 and SS. Zeit¬ schrift flir Mathcmatische Logik und Grundlagcn dcr Mathematik 4 (1958) 250-264.

Dyson Verena H; Kreisel, Georg, Analysis of Beth's Semantic Construction of In tuitionistic Logic. Technical Report no. 3, Stanford University Applied Mathe¬ matics and Statistics Laboratories, Stanford, California.

Heyting, Arand Intuitionism: An Introduction. (North-Holland Publishing Co., Amsterdam 1956).

Kleene, Stephen Cole, Introduction to Metamathematics. (Van Nostrand, New York; North-Holland Publishing Co., Amsterdam and P. Noordhotf Ltd., Groningen). 1952.

Dalen. Dirk Van. 1997. *Structure and Logic*, Springer Universitext. ISBN 3-540-20879-8 318-324.

Dalen. Dirk Van. 2002. Series: *Handbook of philosophical logic*.Vol V. Gabbay, Dov M., Guenthner, Franz (Eds.) 2002

Dalen. Dirk Van.2001. *Intuitionistic Logic*. In: Lou Goble (Hrsg.): The Blackwell Guide to Philosophical Logic (Blackwell Philosophical Guides; 4). Blackwell, New York, ISBN 0-631-20692-2.

Dummett, Michael Anthony Eardley, 1970. *Elements of intuitionism*, Oxford

Gabbay, M. Dov. 1981. Semantical investigations in Heyting's intuitionistic logic. ISBN: 978-90-481-8362-3

Kripke, soul. 1965. *Semantical Analysis of Intuitionistic Logic I*, In Formal Systems and Recursive Functions, edited by M. Dummett and J. N. Crossley. Amsterdam: North-Holland Publishing Co.

Troelstra, Anne Sjerp 1999C (with P. van Ulsen). *The discovery of E.W. Beth's semantics for intuitionistic logic*, in: J. Gerbrandy, M. Marx, M. de Rijke, Y. Venema (eds.), JFAK. Essays dedicated to Johan van Benthem on the Occasion of his 50th Birthday. Amsterdam University Press, Amsterdam (ISBN 90 5269 1041).