

تعیین پرتفوی بهینه در بورس اوراق بهادار: کاربرد شاخص ارزش در شرایط توأم با مخاطره^۱

دکتر جواد ترکمانی*

علی حسینی**

تاریخ پذیرش: ۱۳۸۵/۷/۲۵

تاریخ ارسال: ۱۳۸۴/۳/۱۷

چکیده

هدف از این مطالعه، بررسی نحوه تعیین پرتفوی بهینه در بورس اوراق بهادار با توجه به شاخص ارزش در شرایط توأم با مخاطره (VaR) است. داده‌های مورد استفاده، مربوط به معاملات روزانه سهام ۳۰ شرکت فعال پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران است که بازدهی انتظاری روزانه آنها در سال ۱۳۸۳ بیشتر از ۰/۴ درصد بوده است. با به کارگیری این داده‌ها، در قالب ۲۴ سناریوی مختلف و با توجه به سه متغیر بودجه، سطح ریسک سرمایه‌گذاران و درجه اطمینان VaR، اقدام به تعیین پرتفوی بهینه سرمایه‌گذاری در چارچوب مدل ارزش در شرایط توأم با مخاطره گردید. نتایج حاصل از این مطالعه نشان داد که سطوح اطمینان بالای VaR مستلزم پرتفوهایی متنوع‌تر است. افزون بر آن، رابطه مبادله ریسک - بازدهی در شرایط فعلی به نفع افراد ریسک‌گریز است و تغییر در طول دوره زمانی مشخص شده در مدل نیز می‌تواند موجب تغییر در پرتفوی بهینه گردد.

طبقه‌بندی JEL : G11

واژگان کلیدی: تعیین پرتفوی بهینه، ارزش در شرایط توأم با مخاطره، بورس اوراق بهادار.

1. Value at Risk (VaR)

* استاد گروه اقتصاد کشاورزی دانشگاه شیراز

e-mail: torkamanijavad@yahoo.com

** دانشجوی دکتری اقتصاد کشاورزی

مقدمه

امروزه فضای حاکم بر فعالیتهای اقتصادی، توأم با مخاطرات گوناگون است. تغییر در عوامل مختلف از جمله سطح قیمتها، قوانین اقتصادی و دیگر عوامل مؤثر بر عرضه و تقاضای بازار، از عمده‌ترین دلایل نبود حتمیت در مناسبات اقتصادی است. در این بین، به موازات توسعه فعالیتهای اقتصادی و افزایش ورشکستگی مؤسسات مختلف مالی، مبحث مدیریت ریسک و استفاده از ابزارهای مناسب در جهت اندازه‌گیری و کنترل ریسکهای بازار، اهمیت ویژه‌ای یافته است (Yiu, 2004).

یکی از شاخصهایی که در سالهای اخیر توسط مؤسسات بزرگ اقتصادی، بانکها و مدیران بازار سرمایه کشورهای مختلف در زمینه مدیریت و اندازه‌گیری درجه ریسک فعالیتهای مورد توجه و کاربرد قرار گرفته است؛ شاخص VaR است. از این شاخص، به‌ویژه در بورسهای اوراق بهادار و کالا، برای سنجش میزان ریسک و گزینش پرتفوهایی بهینه استفاده شده است (Fusai and Luciano, 2001).

در ایران نیز توسعه بازار سرمایه در سالهای اخیر و مطرح‌شدن نقش انواع مختلف بورس از جمله بورس اوراق بهادار، باعث توجه جدی به مدیریت ریسک شده است. در بورس اوراق بهادار تهران، که هم‌اکنون دارای تالارهای منطقه‌ای متعددی در شهرستانهای مختلف می‌باشد، معاملات و سرمایه‌گذارها بر اساس قراردادهای نقدی^۱ انجام می‌گیرد. این نوع سرمایه‌گذاری، به‌طور معمول با اهداف کسب سود از نوسان قیمت سهام شرکتها و همچنین اخذ سود تقسیم‌شده شرکتها پس از کسر مالیاتشان انجام می‌گیرد.^۲ این در حالی است که نوسان قیمت سهام، می‌تواند افزایشی و یا کاهشی باشد. لذا، انجام معامله در بورس برای استفاده از نوسان قیمتها، فعالیتی توأم با مخاطره است و بنابراین، لازم است سرمایه‌گذاران به هنگام تصمیم‌سازی در ارتباط با خرید پرتفوهایی مورد نظر از ابزارهای مدیریت ریسک استفاده کنند.

برای اندازه‌گیری میزان ریسک یک پرتفو، می‌توان از شاخصهای مختلفی از جمله دلتا (Δ)، گاما (Γ)، وگا (ν)، تتا (Θ) و رو (ρ) استفاده کرد (Hull, 2000). هر یک از این شاخصها، جنبه‌های مختلفی از ریسک یک پرتفو را مورد ارزیابی قرار می‌دهد (Hull, 2000). با این حال، هدف اصلی در محاسبه این شاخصها، اندازه‌گیری میزان ریسک پرتفوهایی است که عناصر تشکیل‌دهنده آنها، یک یا تعدادی از ابزارهای مشتقه قابل مبادله در بورس از جمله قراردادهای اختیار^۳، قراردادهای معاوضه^۴ و ... می‌باشد (Hull, 2000). این مسئله، ضمن محدود کردن کاربرد شاخصهای فوق؛ امکان استفاده از آنها را در بورسهایی که معاملاتشان فقط به صورت نقدی انجام می‌گردد، غیرممکن می‌سازد. از این رو، یکی از

1. Cash Contracts

۲. بخش عمده‌ای از معاملات انجام شده در بورسهای اوراق بهادار و کالایی جهان، به داد و ستد ابزارهای مشتقه (Derivative Instruments) مربوط می‌شود که این ابزارها تا کنون در ایران مورد استفاده قرار نگرفته‌اند.

3. Option Contracts

4. Swaps

شاخصهایی که در سالهای اخیر در زمینه مدیریت ریسک سرمایه‌گذاران، به میزان زیادی مورد توجه قرار گرفته است، شاخص VaR می‌باشد (Campbell et al., 2001; Hull, 2000; Yiu, 2004). شاخص VaR نشان می‌دهد که با انتخاب یک پرتفوی مشخص، با X درصد اطمینان، حداکثر ضرر در N روز آینده، V واحد پولی خواهد بود. برای تخمین مقدار VaR، روشهای مختلفی از جمله مدل‌های خطی و مدل‌های درجه دوم پیشنهاد شده است که با توجه به داده‌های موجود و همچنین نوع داراییهای پرتفو، می‌توان هر یک از این روشها را به کار برد (Hull, 2000). ییو (Yiu, 2004)، با استفاده از VaR و با فرض حداکثرسازی مطلوبیت انتظاری، اقدام به گزینش پرتفوی بهینه برای یک دارایی ریسکی و یک دارایی غیرریسکی در دو سناریو از دو سطح مختلف میانگین و انحراف معیار قیمت‌ها، نموده است. نتایج حاصل از این مطالعه، نشان داد که در شرایط عدم اعمال محدودیت شاخص VaR، همواره سهم ثابتی از ارزش پرتفو، به دارایی ریسکی اختصاص داده می‌شود. با این حال، در صورت اعمال شاخص VaR، با طولانی‌تر شدن دوره سرمایه‌گذاری، حداکثر مقدار سرمایه‌گذاری در دارایی ریسکی، در سطح پایین‌تری از ارزش پرتفو انجام می‌گیرد. به عبارت دیگر، با افزایش طول دوره سرمایه‌گذاری، احتمال اینکه میزان کاهش ارزش پرتفو از سطح مجاز VaR بیشتر شود، افزایش می‌یابد. بنابراین در شرایط سرمایه‌گذاری بلندمدت، در سطوح بالای ارزش پرتفو، باید سرمایه‌گذاری کمتری در داراییهای ریسکی انجام گردد.

در خصوص استفاده از VaR، برای تعیین پرتفوی بهینه، می‌توان به مطالعات کامپل و همکاران (Campbell et al., 2001)، فیوزی و لوشیانو (Fusai and Luciano, 2001)، و کانسیگلی (Consigli, 2002) اشاره کرد.

هدف اصلی این مطالعه، آن بود که با استفاده از آمار معاملات انجام شده در ۱۰ ماهه اول سال ۱۳۸۳ بورس اوراق بهادار تهران، در قالب ۲۴ سناریو (مشمول بر دو سطح اطمینان ۹۵ و ۹۹ درصد، سه درجه ریسک قابل قبول و چهار سطح سرمایه‌گذاری)، پرتفوی بهینه بر اساس شاخص VaR تعیین شود. علاوه بر آن، نتایج حاصل، با استفاده از آزمون Back Testing ارزیابی شد. در انتها، با استفاده از نتایج به‌دست آمده از حل سناریوهای فوق، تأثیر استفاده و توجه به شاخص VaR، در سطوح اطمینان و درجات سرمایه‌گذاری متفاوت، در تعیین ترکیب پرتفوی بهینه و همچنین نوع رابطه ریسک - بازده حاکم بر شرایط فعلی بازار، بررسی شد.

۱. روش تحقیق

شاخص ارزش در شرایط توأم با مخاطره (VaR) در مورد یک پرتفو نشان می‌دهد که با انتخاب یک پرتفوی مشخص، با X درصد اطمینان، حداکثر ضرر در N روز آینده، V واحد پولی خواهد بود (Hull, 2000). در این خصوص، اگر یک سرمایه‌گذار، نسبت به خرید ۱۰ میلیون ریال سهم با نوسانات

روزانه یا انحراف معیار تقریبی دو درصد ($0/02 \times 100000000$) و با هدف فروش این سهم پس از ۱۰ روز اقدام کند؛ با توجه به مقدار سرمایه‌گذاری انجام شده و انحراف معیار روزانه و بدون توجه به سطح احتمال مورد نظر، انحراف معیار تغییرات در ارزش سهم موردنظر، طی یک دوره ۱۰ روزه برابر با 632456 ریال یا $(200000 \times 10^{-5})^1$ خواهد شد. با این حال، در صورتی که توزیع فراوانی قیمت این سهم نرمال باشد، با توجه به اینکه در جدول توزیع نرمال $N(-2/33) = 0/01$ است^۱، لذا مقدار شاخص ارزش در شرایط توأم با مخاطره ۱۰ روزه در سطح احتمال ۹۹ درصد، برای ۱۰ میلیون ریال سرمایه‌گذاری در چنین سهمی برابر با 1473621 ریال یا $(2/33 \times 632456)$ خواهد بود. بنابراین، در چنین شرایطی به احتمال ۹۹ درصد می‌توان اطمینان داشت که ارزش کل سرمایه‌گذاری انجام شده بیش از 1473621 ریال کاهش نخواهد یافت. به عبارت دیگر، مقدار زیان بیش از این نخواهد بود. در شرایط حقیقی تعیین پرتفو، سرمایه‌گذاران به طور معمول با بیش از یک نوع سهام مواجه هستند. تنوع در ترکیب پرتفو به جز در مواردی که قیمت سهام تشکیل‌دهنده پرتفو همبستگی مثبت کامل داشته باشد، به طور معمول، موجب خواهد شد که ریسک کاهش ارزش سرمایه‌گذاری، نسبت به حالتی که کل سرمایه‌گذاری مورد نظر تنها در زمینه خرید یک سهم انجام شده باشد، کاهش یابد. در شرایطی که ترکیبی مساوی از دو سهام در پرتفو وجود داشته باشد، مقدار انحراف معیار ترکیب این سهام را می‌توان به صورت زیر تعیین کرد:

$$\sigma_{X+Y} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\rho\sigma_X\sigma_Y} \quad (1)$$

در رابطه فوق، σ و ρ به ترتیب، انحراف معیار هر سهام و ضریب همبستگی دودوی آنها را نشان می‌دهند.

به همین ترتیب، در مواردی که بیش از دو سهم در پرتفوی سرمایه‌گذاری وجود دارد، مقدار واریانس کل پرتفو، از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{ij} \alpha_i \alpha_j \sigma_i \sigma_j \quad (2)$$

۱. توجه شود که واریانس تغییرات ارزش این سهم طی یک دوره ۱۰ روزه برابر با 400 میلیارد ریال یا $(200000^2 \times 10)$ می‌باشد.

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j<i}^n \rho_{ij} \alpha_i \alpha_j \sigma_i \sigma_j \quad (3)$$

که α_i و α_j ارزش سرمایه‌گذاری انجام‌شده در هر سهام را نشان می‌دهد.

با توجه به روابط فوق، برای هر پرتفوی خاص، با داشتن مقدار انحراف معیار روزانه و با توجه به نوع توزیع قیمت سهام سرمایه‌گذاری شده، می‌توان مقدار شاخص ارزش در شرایط توأم با مخاطره را با توجه به طول دوره سرمایه‌گذاری و سطح اطمینان موردنظر تعیین کرد. مقدار انحراف معیار روزانه برای هر سهام با استفاده از رابطه زیر تعیین می‌شود:

که در آن:

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (u_{n-i} - \bar{u})^2 \quad (4)$$

$$u_i = \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}} \quad (5)$$

و S_i قیمت سهم در روز i ام و u_i بازدهی سهم در روز i نسبت به روز قبل را نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که مفهوم بازدهی و بازدهی انتظاری سهام در اینجا، آن بخش از بازدهی است که در نتیجه نوسان قیمت‌های بازار، عاید دارندگان سهام می‌شود (بازدهی کوتاه‌مدت سهام) و بنابراین مقادیر EPS^* سهام یا سود هر سهم پس از کسر مالیات که توسط هر یک از شرکتها در پایان هر سال مالی بین دارندگان سهام تقسیم می‌گردد، در اینجا در نظر گرفته نشده است. با توجه به موارد فوق و با این فرض که هدف تمام سرمایه‌گذاران منطقی در سطوح متفاوت ریسک‌گریزی، حداکثر کردن بازده انتظاری است، مدل تعیین پرتفوی بهینه با توجه به محدودیت VaR را می‌توان به صورت زیر ارائه کرد:

$$\text{Max } V = E(u_1) \cdot P_1 \cdot X_1 + E(u_2) \cdot P_2 \cdot X_2 + \dots + E(u_n) \cdot P_n \cdot X_n \quad (6)$$

به شرط:

۱. به منظور تعیین مقدار شاخص VaR در سطح ۹۹ درصد، لازم است که x را در $N(x) = 0.01$ از جدول توزیع نرمال تعیین کنیم.

$$\begin{aligned}
 & 1) \sigma^2(u_1).(P_1.X_1)^2 + \sigma^2(u_2).(P_2.X_2)^2 + \dots + \sigma^2(u_n).(P_n.X_n)^2 + \\
 & \quad 2Cov(u_1, u_2).P_1.P_2.X_1.X_2 + 2Cov(u_1, u_3).P_1.P_3.X_1.X_3 + \dots + \\
 & \quad 2Cov(u_1, u_n).P_1.P_n.X_1.X_n + 2Cov(u_2, u_3).P_2.P_3.X_2.X_3 + \dots + \\
 & \quad 2Cov(u_2, u_n).P_2.P_n.X_2.X_n + \dots + 2Cov(u_{n-1}, u_n).P_{n-1}.P_n.X_{n-1}.X_n \leq (VaR)^2(N.\alpha^2) \\
 & 2) P_1.X_1 + P_2.X_2 + \dots + P_n.X_n \leq B
 \end{aligned}$$

که u_1 تا u_n نشان‌دهنده سری زمانی مقادیر بازدهی سهام شرکت‌های یک تا n در روزهای کاری بورس در سال ۱۳۸۳ است. $E(u_i)$ بیانگر مقادیر ارزش انتظاری این سرپهاست که برابر با میانگین آنها در نظر گرفته شده است؛ $\sigma^2(u_i)$ نشان‌دهنده مقادیر واریانس سریها؛ و $Cov(u_i, u_j)$ کواریانس آنها می‌باشد. P_1 تا P_n قیمت هر سهم از سهام شرکت‌های مورد بررسی در هنگام تصمیم‌سازی برای تعیین پرتفوی بهینه؛ VaR مقدار شاخص ارزش در شرایط توأم با مخاطره مورد نظر سرمایه‌گذار؛ N طول دوره سرمایه‌گذاری؛ α مقدار عددی جدول نرمال در سطح اطمینان VaR؛ و B بودجه سرمایه‌گذار را نشان می‌دهد. متغیرهای X_1 تا X_n نیز نماینده تعداد سهام هر یک از شرکتها هستند.

در مدل تعیین پرتفوی بهینه، ارزش بازدهی انتظاری پرتفوی بهینه، مشروط به دو محدودیت ارزش در شرایط توأم با مخاطره و بودجه سرمایه‌گذار حداکثر می‌گردد.

داده‌های مورد نیاز این تحقیق، از نرم‌افزار تدبیرپرداز بورس استخراج شده است. این اطلاعات شامل آخرین قیمت معامله روزانه سهام هر یک از شرکت‌های پذیرفته شده در بورس از ابتدای سال ۱۳۸۳ تا چهارم بهمن ماه این سال می‌باشد. با توجه به اینکه سال مالی اکثر این شرکتها مطابق با یک سال شمسی است، لذا این داده‌ها از ابتدای سال ۸۳ استخراج گردیده است.

در ابتدا، با توجه به رابطه ذکر شده در قسمت قبل، برای u_i در معادله (۵)، مقدار بازده روزانه سهام شرکتها در هر روز کاری محاسبه شد. سپس، با میانگین‌گیری از این مقادیر، مقدار بازدهی انتظاری هر یک از شرکتها محاسبه گردید.

علاوه بر آن، با فرض این که هدف اصلی سرمایه‌گذاران بازار بورس حداکثر سازی بازدهی انتظاری پرتفوی انتخابی است، اطلاعات قیمتی ۳۰ شرکت فعال که حجم معاملات بالایی داشتند و بازدهی انتظاری روزانه آنها بالای ۰/۴ درصد بود، از بین شرکت‌های پذیرفته شده در بورس انتخاب گردید.

در این مطالعه، چون متغیرهای X_1 تا X_n تعداد سهام شرکت‌های مختلف هستند، لذا در چارچوب یک مدل برنامه‌ریزی با اعداد صحیح^۱، محدود به انتخاب مقادیر صحیح شدند. مدل طراحی شده با استفاده از دستور @GIN در نرم‌افزار اجرا و میزان متغیرهای مختلف تعیین گردید.

1. Integer Programming

۲. نتایج و بحث

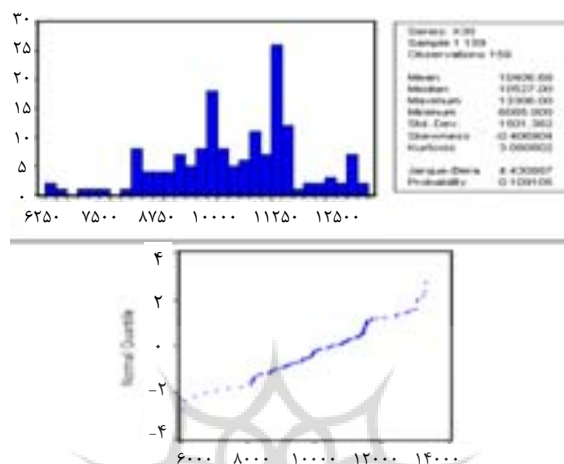
با توجه به توضیحات فوق، از بین کل شرکت‌هایی که سهام آنها در بورس اوراق بهادار داد و ستد می‌گردد، سهام ۳۰ شرکت گزینش شد که فهرست آنها در جدول (۱) آمده است.

جدول - ۱. فهرست شرکت‌های مورد مطالعه

شرکت پتروشیمی اراک	x_1	شرکت داروسازی سبحان	x_{16}
شرکت آذریت	x_2	شرکت ساختمان اصفهان	x_{17}
شرکت ایتالران	x_3	شرکت سامان گستر اصفهان	x_{18}
شرکت ایران گچ	x_4	شرکت سرمایه‌گذاری توس گستر	x_{19}
شرکت ایرانیت	x_5	شرکت سرمایه‌گذاری ساختمان	x_{20}
شرکت بسته‌بندی پارس	x_6	شرکت سرمایه‌گذاری صنایع بهشهر	x_{21}
شرکت پمپ‌سازی ایران	x_7	شرکت شیشه و گاز	x_{22}
شرکت تامین ماسه	x_8	شرکت شیشه همدان	x_{23}
شرکت تکنوتار	x_9	شرکت فارسیت دورود	x_{24}
شرکت توسعه صنعتی	x_{10}	شرکت کارتن ایران	x_{25}
شرکت توسعه‌فارس	x_{11}	شرکت کالسیمین	x_{26}
شرکت توکا فولاد	x_{12}	شرکت معادن بافق	x_{27}
شرکت تولی پرس	x_{13}	شرکت معادن روی	x_{28}
شرکت جام دارو	x_{14}	شرکت ملی سرب و روی	x_{29}
شرکت چوشکاب یزد	x_{15}	شرکت نگین طبس	x_{30}

برای محاسبه شاخص ارزش در شرایط توأم با مخاطره (VaR)، لازم است توزیع در نظر گرفته شده برای سری‌های قیمتی مورد مطالعه، مشخص گردد. لذا فرض صفر، مبنی بر نرمال بودن توزیع داده‌های قیمتی مورد نظر، به‌وسیله نرم‌افزار Eviwes و با استفاده از آماره جارگ برای مورد آزمون قرار گرفت. نتایج این آزمون، حاکی از ردنشدن این فرض در سطح اطمینان ۹۹٪ بود. در این مورد، نمودار (۱) نمایانگر نرمال بودن توزیع داده‌های قیمتی سهام آخرین شرکت مورد بررسی به نام شرکت نگین طبس است.

1. Jarque-Bera

نمودار - ۱. نتایج آزمون جارگ برا و بررسی *Quantile-Quantile* سری X_p .

برای تعیین پرتفوی بهینه، با توجه به شاخص VaR ، نیاز به مشخص کردن پارامترهای $E(u_i)$ ، $Cov(u_i)$ ، $\sigma^2(u_i)$ ، N ، P_i ، α ، VaR نیز می‌باشد. پارامترهای $E(u_i)$ ، $Cov(u_i)$ و $\sigma^2(u_i)$ با استفاده از مقادیر سریهای u_i محاسبه شدند. P_i قیمت آخرین روز معاملاتی را تا تاریخ چهارم بهمن ۱۳۸۳ نشان می‌دهد. انتخاب میزان N یا طول دوره سرمایه‌گذاری اختیاری است. در این مطالعه، همسو با اکثر بررسیهایی که در این رابطه انجام شده، مقدار N برابر با ۱۰ روز انتخاب شد (Campbell et al., 2001; Consigli, 2002; Fusai and Luciano, 2001; Yiu, 2004).

مقدار پارامتر α از جدول توزیع نرمال، در دو حالت سطح اطمینان ۹۹٪ و ۹۵٪، به ترتیب برابر با ۲/۳۳ و ۱/۶۵ در نظر گرفته شد.^۱ در رابطه با مقدار پارامتر B ، سرمایه‌گذاران بورس اوراق بهادار به چهار گروه عمده سرمایه‌گذاران با متوسط سرمایه ۱۰ میلیون، ۱۰۰ میلیون، یک میلیارد و ۱۰۰ میلیارد ریالی تقسیم شدند و مقدار این پارامتر در این چهار سناریو بررسی شد. مقدار پارامتر VaR حداکثر مقداری که در ۱۰ روز آینده در سطح اطمینان مشخصی، احتمال زیان کردن در آن وجود دارد، برای ایجاد هماهنگی با شرایط کنونی سرمایه‌گذاران بورس، در سه حالت پنج، ۱۰ و ۲۰ درصد کل میزان سرمایه‌گذاری، به ترتیب، برای افراد محتاط، با درجه ریسک گریزی متوسط و نسبتاً ریسک‌پذیر در نظر گرفته شد. مقادیر فوق با توجه به حداکثر مقدار مجاز نوسان قیمت سهام در بورس ($\pm 5\%$) و طول دوره سرمایه‌گذاری مورد نظر در شاخص VaR (۱۰ روز) مشخص شدند.

1. $N(2/33) = 0.99$; $N(1/65) = 0.95$

با توجه به موارد فوق، گزینش پرتفوی بهینه در ۲۴ سناریوی مختلف انجام گردید. بدین ترتیب که، در هر یک از سطوح سرمایه‌گذاری ۱۰ میلیون، ۱۰۰ میلیون، یک میلیارد و ۱۰۰ میلیارد ریالی، پرتفوی بهینه، با توجه به سه مقدار مختلف VaR برابر با پنج، ۱۰ و ۲۰ درصد مقدار سرمایه‌گذاری و هر یک در دو سطح اطمینان ۹۹ و ۹۵ درصد انتخاب گردید. نتایج حل ۲۴ سناریوی مذکور در جدولهای (۲)، (۳)، (۴) و (۵) ارائه گردیده است.

جدول (۲)، نتایج تعیین پرتفوی بهینه را در سطح سرمایه‌گذاری ۱۰ میلیون ریال نشان می‌دهد. در این سطح از سرمایه‌گذاری، در پنج سناریو، سهام شرکت تأمین ماسه، بیشترین سهم را در پرتفو به خود اختصاص می‌دهد. اما در سناریوی اول، سهام شرکت شیشه و گاز بالاترین سهم را در پرتفو داراست. با توجه به اینکه در سناریوی اول شرایطی با ریسک‌گریزی بالا تعریف شده (VaR پنج درصد با سطح اطمینان ۹۹ درصد) لذا واریانس کمتر قیمت سهام، از درجه اهمیت بالاتری در مقایسه با دیگر سناریوها برخوردار خواهد بود. با کم شدن درجه ریسک‌گریزی سناریوها، هم از تعداد انواع سهام موجود در ترکیب پرتفو کاسته می‌گردد و هم سهام جدیدی به مجموعه اضافه می‌گردد. به‌طور مثال، در سناریوی آخر، پرتفو تنها دو سهم را به صورت عمده در بر دارد که یکی از آنها سهام شرکت ملی سرب و روی است که در سناریوهای قبلی از جایگاه مهمی برخوردار نبود.

در جدولهای (۳) و (۴) نیز که نتایج تعیین پرتفوی بهینه را در سطح سرمایه‌گذاری ۱۰۰ میلیون و یک میلیارد ریال در بر دارد، وضعیت مشابهی دیده می‌شود. نتایج مندرج در جدول (۵)، علی‌رغم تشابهات زیاد با نتایج جدولهای قبلی، از نظر نوع و سهم هر یک از سهام شرکتها در ترکیب پرتفو ارائه شد؛ در مواردی تغییرات عمده‌ای نشان می‌دهد. به عنوان مثال، در سناریوی سوم این جدول (VaR ۲۰ درصد و سطح اطمینان ۹۹ درصد)، سهام شرکت ایتالران با مقدار زیادی وارد پرتفو گردیده که در موارد مشابه قبلی، این‌گونه نبود.

جدول - ۲. نتایج گزینش پرتفوی بهینه در شش سناریوی مختلف محدودیت VaR در سطح سرمایه‌گذاری ۱۰ میلیون ریال

عنوان متغیر	سطح اطمینان ۹۹ درصد			سطح اطمینان ۹۵ درصد		
	VaR = %۵	VaR = %۱۰	VaR = %۲۰	VaR = %۵	VaR = %۱۰	VaR = %۲۰
x_1	۰	۰	۰	۰	۰	۰
x_2	۷۹	۱۶۶	۴۵	۱۲۹	۱۷۳	۵
x_3	۷۶	۸۷	۰	۱۰۹	۰	۰
x_4	۰	۰	۰	۰	۰	۰
x_5	۵	۰	۰	۰	۰	۰

ادامه جدول - ۲.

عنوان متغیر	سطح اطمینان ۹۹ درصد			سطح اطمینان ۹۵ درصد		
	VaR = %۵	VaR = %۱۰	VaR = %۲۰	VaR = %۵	VaR = %۱۰	VaR = %۲۰
x_6	۰	۰	۰	۰	۰	۰
x_7	۰	۰	۰	۰	۰	۰
x_8	۱۴۳	۳۶۷	۷۵۱	۲۳۶	۵۷۴	۷۵۰
x_9	۱۰۶	۲۳۳	۰	۱۸۶	۲۰۴	۰
x_{10}	۱۲۰	۰	۰	۰	۰	۰
x_{11}	۴۲	۲۱	۰	۳۰	۰	۰
x_{12}	۳۱	۴	۰	۱۷	۰	۰
x_{13}	۲۵	۰	۰	۰	۰	۰
x_{14}	۱۲۳	۱۳۴	۰	۱۴۰	۳۳	۱
x_{15}	۲۵	۴۳	۰	۳۴	۱	۰
x_{16}	۵۲	۰	۰	۴۰	۰	۰
x_{17}	۰	۰	۰	۰	۰	۰
x_{18}	۱۰۲	۰	۰	۱۷	۰	۰
x_{19}	۳۶	۰	۰	۹	۰	۰
x_{20}	۰	۰	۰	۰	۰	۰
x_{21}	۱۱	۰	۰	۰	۰	۰
x_{22}	۳۱۱	۰	۱	۱۸۱	۰	۰
x_{23}	۳۲	۳۹	۰	۴۶	۰	۰
x_{24}	۱۳۲	۰	۰	۶	۰	۰
x_{25}	۲۳	۲۹	۰	۴۵	۰	۰
x_{26}	۴	۱۳	۱	۹	۱۳	۱
x_{27}	۱۶۹	۱۴۲	۰	۲۱۷	۱	۰
x_{28}	۰	۰	۰	۰	۰	۰
x_{29}	۰	۴	۷۱	۰	۲۱	۱۴۸
x_{30}	۱۸	۰	۰	۰	۰	۰
بازدهی انتظاری (ریال)	۹۳۶۸۶/۵۳	۱۳۱۵۷۹/۸	۱۶۰۸۳۰/۷	۱۱۳۴۰۷/۱	۱۴۸۱۷۷/۵	۱۷۱۸۴۴

جدول - ۳. نتایج گزینش پرتفوی بهینه در شش سناریوی مختلف محدودیت VaR در سطح سرمایه‌گذاری ۱۰۰ میلیون ریال

عنوان متغیر	سطح اطمینان ۹۹ درصد			سطح اطمینان ۹۵ درصد		
	VaR = %۵	VaR = %۱۰	VaR = %۲۰	VaR = %۵	VaR = %۱۰	VaR = %۲۰
x_1	۰	۰	۰	۰	۰	۰
x_2	۷۹۹	۱۶۵۸	۴۵۴	۱۲۹۰	۱۷۱۴	۸
x_3	۷۶۲	۸۶۹	۰	۱۰۸۴	۰	۰
x_4	۰	۰	۰	۰	۰	۰
x_5	۵۵	۰	۰	۰	۰	۰
x_6	۰	۰	۰	۰	۰	۰
x_7	۰	۰	۰	۰	۰	۰
x_8	۱۴۲۷	۳۶۶۴	۷۵۱۶	۲۳۵۷	۵۷۳۳	۷۵۴۹
x_9	۱۰۶۱	۲۳۳۳	۱	۱۸۶۱	۲۱۱۹	۰
x_{10}	۱۲۰۰	۰	۰	۰	۰	۰
x_{11}	۴۱۲	۲۱۶	۰	۳۰۳	۰	۰
x_{12}	۳۱۰	۳۸	۰	۱۷۱	۰	۰
x_{13}	۲۴۹	۰	۰	۰	۰	۰
x_{14}	۱۲۳۱	۱۳۵۷	۰	۱۴۰۶	۳۳۷	۰
x_{15}	۲۴۶	۴۳۰	۰	۳۳۷	۰	۰
x_{16}	۵۲۱	۰	۰	۴۰۱	۰	۰
x_{17}	۰	۰	۰	۰	۰	۰
x_{18}	۱۰۲۰	۰	۰	۱۸۱	۰	۰
x_{19}	۳۶۷	۰	۰	۸۴	۰	۰
x_{20}	۰	۰	۰	۰	۰	۰
x_{21}	۱۳۶	۰	۰	۰	۰	۰
x_{22}	۳۰۵۵	۰	۰	۱۷۶۶	۰	۰
x_{23}	۳۱۵	۳۸۵	۰	۴۷۰	۰	۰

ادامه جدول - ۳.

عنوان متغیر	سطح اطمینان ۹۹ درصد			سطح اطمینان ۹۵ درصد		
	VaR = %۵	VaR = %۱۰	VaR = %۲۰	VaR = %۵	VaR = %۱۰	VaR = %۲۰
$x_{۲۴}$	۱۳۱۵	۰	۰	۵۷	۰	۰
$x_{۲۵}$	۲۳۵	۲۸۸	۰	۴۵۷	۰	۰
$x_{۲۶}$	۴۲	۱۳۰	۱	۸۶	۱۳۴	۱
$x_{۲۷}$	۱۶۸۸	۱۴۲۱	۰	۲۱۷۷	۰	۰
$x_{۲۸}$	۰	۰	۰	۰	۰	۰
$x_{۲۹}$	۰	۴۲	۷۰۹	۰	۲۱۴	۱۴۷۶
$x_{۳۰}$	۱۷۶	۰	۰	۰	۰	۰
بازدهی انتظاری (ریال)	۹۳۶۹۵۹/۶	۱۳۱۵۸۳۶	۱۶۰۸۵۷۰	۱۱۳۴۱۰۹	۱۴۸۲۱۱۱	۱۷۱۸۹۴۴

جدول - ۴. نتایج گزینش پرتفوی بهینه در شش سناریوی مختلف محدودیت VaR در سطح سرمایه‌گذاری یک میلیارد ریال

عنوان متغیر	سطح اطمینان ۹۹ درصد			سطح اطمینان ۹۵ درصد		
	VaR = %۵	VaR = %۱۰	VaR = %۲۰	VaR = %۵	VaR = %۱۰	VaR = %۲۰
$x_۱$	۰	۰	۰	۰	۰	۰
$x_۲$	۷۹۹۰	۱۶۵۹۲	۴۴۱۴	۱۲۹۰۱	۱۷۱۵۴	۴
$x_۳$	۷۶۱۷	۸۶۶۲	۰	۱۰۸۶۹	۰	۰
$x_۴$	۰	۰	۰	۰	۰	۰
$x_۵$	۴۵۶	۰	۰	۰	۰	۰
$x_۶$	۰	۰	۰	۰	۰	۰
$x_۷$	۰	۰	۰	۰	۰	۰
$x_۸$	۱۴۲۶۵	۳۶۶۵۴	۷۵۲۸۴	۲۳۵۷۴	۵۷۳۱۶	۷۵۵۶۵
$x_۹$	۱۰۶۷۳	۲۳۳۵۰	۰	۱۸۶۱۱	۲۱۲۷۶	۰

ادامه جدول - ۴.

عنوان متغیر	سطح اطمینان ۹۹ درصد			سطح اطمینان ۹۵ درصد		
	VaR = %۵	VaR = %۱۰	VaR = %۲۰	VaR = %۵	VaR = %۱۰	VaR = %۲۰
x_{10}	۱۱۹۸۰	۰	۰	۰	۱	۰
x_{11}	۴۱۲۳	۲۱۳۲	۰	۳۰۳۰	۰	۰
x_{12}	۳۰۹۵	۳۹۸	۰	۱۷۱۳	۰	۰
x_{13}	۲۴۸۸	۰	۰	۰	۰	۰
x_{14}	۱۲۳۱۵	۱۳۴۹۷	۰	۱۴۰۳۷	۳۲۵۳	۰
x_{15}	۲۴۷۱	۴۳۰۰	۰	۳۳۷۰	۰	۰
x_{16}	۵۲۱۴	۱۵	۰	۴۰۰۸	۰	۰
x_{17}	۰	۰	۰	۰	۰	۰
x_{18}	۱۰۲۰۰	۶	۰	۱۶۷۹	۰	۰
x_{19}	۳۶۷۷	۰	۰	۸۸۸	۰	۰
x_{20}	۰	۰	۰	۰	۰	۰
x_{21}	۱۳۵۵	۰	۰	۰	۰	۰
x_{22}	۳۰۵۴۲	۱۰	۰	۱۷۸۹۵	۰	۱
x_{23}	۳۱۳۷	۳۸۹۶	۰	۴۶۸۱	۰	۰
x_{24}	۱۳۱۴۷	۰	۰	۵۷۴	۰	۰
x_{25}	۲۳۴۳	۲۸۴۰	۰	۴۵۶۴	۰	۰
x_{26}	۴۰۶	۰	۰	۸۶۱	۱۳۸۰	۰
x_{27}	۱۶۸۹۵	۱۴۱۸۱	۰	۲۱۷۴۸	۰	۰
x_{28}	۰	۰	۰	۰	۰	۰
x_{29}	۰	۴۱۹	۷۰۷۵	۰	۲۱۴۸	۱۴۷۵۳
x_{30}	۱۷۵۸	۰	۰	۰	۰	۰
بازدهی انتظاری (ریال)	۹۳۶۹۸۵۴	۱۳۱۵۸۶۲۰	۱۶۰۸۵۸۷۰	۱۱۳۴۱۰۹۰	۱۴۸۲۱۱۸۰	۱۷۱۸۹۸۳۰

جدول - ۵. نتایج گزینش پرتفوی بهینه در شش سناریوی مختلف محدودیت VaR در سطح سرمایه‌گذاری ۱۰۰ میلیارد ریال

عنوان متغیر	سطح اطمینان ۹۹ درصد			سطح اطمینان ۹۵ درصد		
	VaR = %۵	VaR = %۱۰	VaR = %۲۰	VaR = %۵	VaR = %۱۰	VaR = %۲۰
X_1	۰	۰	۰	۰	۰	۰
X_2	۸۲۴۵۳۵	۱۶۵۹۳۹۲	۴۴۲۲۴۶	۱۲۹۰۵۲۳	۱۷۱۵۳۰۵	۱
X_3	۷۴۳۷۳۳	۸۷۰۲۵۸	۷۵۲۷۶۴۸	۱۰۸۷۵۵۱	۰	۰
X_4	۰	۰	۰	۰	۰	۰
X_5	۵۵۷۳۳	۰	۰	۰	۰	۰
X_6	۰	۰	۰	۰	۰	۰
X_7	۰	۰	۰	۰	۰	۰
X_8	۱۳۹۴۵۲۶	۳۶۶۵۱۱۲	۰	۲۳۵۷۱۳۶	۵۷۳۳۳۱۲	۷۵۵۶۸۷۲
X_9	۱۱۳۶۶۵۱	۲۳۳۵۷۰۷	۰	۱۸۶۱۶۵۹	۲۱۲۷۴۴۳	۰
X_{10}	۱۳۳۷۰۹۲	۰	۰	۰	۰	۰
X_{11}	۴۴۷۳۲۷	۲۱۳۳۰	۰	۳۰۲۹۱۱	۰	۰
X_{12}	۳۳۰۸۸۱	۴۰۲۵۱	۰	۱۷۱۳۲۶	۰	۰
X_{13}	۰	۰	۰	۰	۰	۰
X_{14}	۱۱۶۵۰۸۸	۱۳۴۹۲۴۶	۰	۱۴۰۳۲۸۴	۳۲۸۷۲۳	۰
X_{15}	۲۵۳۶۹۲	۴۳۰۳۲۹	۰	۳۳۷۰۶۱	۰	۰
X_{16}	۵۲۸۹۰۹	۰	۰	۴۰۰۸۱۳	۰	۰
X_{17}	۰	۰	۰	۰	۰	۰
X_{18}	۱۱۳۳۳۱۹	۰	۰	۱۶۷۸۹۶	۰	۰
X_{19}	۴۷۳۶۷۱	۰	۰	۸۸۷۵۰	۰	۰
X_{20}	۰	۰	۰	۰	۰	۰
X_{21}	۱۰۸۷۴۹	۰	۰	۰	۰	۰
X_{22}	۳۱۱۲۷۱۹	۰	۰	۱۷۸۸۹۷۹	۰	۰
X_{23}	۲۶۹۴۷۰	۳۸۷۳۵۳	۰	۴۶۷۸۷۵	۰	۰
X_{24}	۱۴۵۵۰۱۸	۰	۰	۵۷۰۳۷	۰	۰
X_{25}	۲۲۲۰۲۳	۲۸۵۴۲۵	۰	۴۵۶۳۰۱	۰	۰
X_{26}	۰	۱۲۹۰۷۲	۱	۸۶۰۷۸	۱۳۴۰۶۰	۰

ادامه جدول - ۵.

عنوان متغیر	سطح اطمینان ۹۹ درصد			سطح اطمینان ۹۵ درصد		
	VaR = %۵	VaR = %۱۰	VaR = %۲۰	VaR = %۵	VaR = %۱۰	VaR = %۲۰
$x_{۲۷}$	۱۵۹۷۵۵۸	۱۴۲۱۹۹۳	۰	۲۱۷۵۱۸۴	۰	۰
$x_{۲۸}$	۰	۰	۰	۰	۰	۰
$x_{۲۹}$	۸۹۶۴	۴۱۶۶۳	۷۰۷۵۹۲	۰	۲۱۳۶۴۴	۱۴۷۵۲۷۲
$x_{۳۰}$	۲۰۸۱۴۸	۰	۰	۰	۰	۰
بازدهی انتظاری (ریال)	۹۳۲۵۲۲۴۰۰	۳۱۵۸۸۹۰۰۰	۶۰۸۵۸۸۰۰۰	۱۳۴۱۱۸۰۰۰	۴۸۲۱۲۳۰۰۰	۷۱۸۹۸۸۰۰۰

نکته‌ای که در این جدولها به وضوح مشاهده می‌شود، این است که با افزایش شاخص VaR که در واقع مشخص کننده درجه ریسکی بودن پرتفو می‌باشد، از تنوع سهام کاسته شده و به سمت سهامی که از بازده انتظاری بالاتری برخوردار است، گرایش پیدا می‌شود. این امر، کاملاً طبیعی است، زیرا بر اساس اصل تنوع، در رشته فعالیت‌هایی که با یکدیگر به طور کامل همبسته مثبت نمی‌باشند، تنوع، موجب کاهش واریانس و در نتیجه کاهش ریسک می‌گردد. این کاهش در مواردی که همبستگی منفی وجود داشته باشد، بسیار شدیدتر است. در واقع، در شرایطی که سرمایه‌گذار حاضر به پذیرش سطح ریسکی معادل با حداکثر ۲۰ درصد کل مبلغ سرمایه‌گذاری در طی ۱۰ روز آینده می‌باشد، به‌طور عمده سهام دو شرکت تأمین ماسه و شرکت ملی سرب و روی که دارای بالاترین مقدار بازده انتظاری در بین سهام شرکت‌های مورد بررسی می‌باشند، در ترکیب پرتفو قرار می‌گیرد. از طرف دیگر، هنگامی که سرمایه‌گذار در انتخاب پرتفو محتاطانه عمل می‌کند، از سهم سهام این دو شرکت کاسته شده و سهام شرکت‌های دیگری جایگزین آنها می‌گردند. لازم به ذکر است که در بین سهام ۳۰ شرکت مورد بررسی، سهام شرکت ملی سرب و روی به‌طور همزمان دارای بالاترین مقدار بازدهی انتظاری و واریانس می‌باشد و بنابراین در سطح VaR پنج درصد، سهام این شرکت با وجود برخورداری از حداکثر بازده انتظاری در هیچ یک از پرتفوهایی تعیین شده، برای سطوح سرمایه‌گذاری کمتر از ۱۰۰ میلیارد ریال قرار نمی‌گیرند. نکته‌ای که در مورد نتایج ارائه شده در سناریوهای مختلف با توجه به درجات متفاوت VaR مشاهده می‌شود، این است که رابطه مبادله ریسک - بازدهی پرتفوهایی ارائه شده، به سود سرمایه‌گذاران ریسک‌گریز است. به عنوان مثال، با مقایسه مقادیر بازدهی انتظاری پرتفوهایی مشخص شده در شرایط VaR ۲۰ درصد و VaR پنج درصد، در سطوح چهارگانه بودجه‌ای موردنظر، ملاحظه می‌گردد که با وجود کاهش ۷۵ درصدی ریسک در این شرایط، بازدهی انتظاری به میزان تقریبی ۳۰ درصد و در بدترین

شرایط تنها در حدود ۴۰ درصد کاهش می‌یابد. بنابراین به طور کلی می‌توان گفت که رابطه مبادله در شرایط موجود، به نفع افرادی است که با انتخاب پرتفوی متنوع‌تر، به نوعی بازدهی بالاتر را با ریسک کمتر مبادله می‌نمایند.

مطلب قابل بحث دیگر این است که با زیادتر شدن طول دوره سرمایه‌گذاری، به‌طور مسلم پرتفوی‌های ارائه شده، بهینه نخواهند بود و لازم است که با توجه به شرایط، بهینه‌یایی انجام گیرد. در واقع، با زیادتر شدن طول دوره سرمایه‌گذاری (بیش از ۱۰ روز) مقدار سمت راست محدودیت VaR کوچک‌تر شده و لذا احتمال کاهش ارزش پرتفو از سطح مجاز و قابل قبول VaR، افزایش خواهد یافت. در پایان به منظور بررسی درجه صحت مقدار شاخص VaR در پرتفوی‌های معرفی شده، از آزمون Back Testing استفاده گردید. بدین منظور، با رجوع به داده‌های مورد بررسی (داده‌های قیمتی مربوط به سال ۸۳) در هر یک از روزهای کاری بورس، پرتفوی معرفی شده در نظر گرفته شد و در طی ۱۰ روز دنبال گردید. این بررسی‌ها نتایج VaR را کاملاً تأیید کردند. به عنوان مثال، در سطح سرمایه‌گذاری ۱۰ میلیون ریال و محدودیت VaR پنج درصد، تنها در کمتر از پنج درصد موارد، مقدار زیان طی یک دوره ۱۰ روزه، از ۵۰۰ هزار ریال بیشتر بوده است.

۳. نتیجه‌گیری

همان‌گونه که ملاحظه گردید، از شاخص ارزش در شرایط توأم با مخاطره (VaR) می‌توان به خوبی در تعیین ترکیب پرتفوی بهینه سرمایه‌گذاران با درجات مختلف ریسکی و مقدار موجودی سرمایه آنها استفاده نمود. نتایج آزمون Back Testing نیز درستی مقادیر محاسبه شده را به خوبی نشان داد. نتایج این مطالعه نشان داد که اولاً، در سناریوهای مختلف مورد بررسی، افزایش سطح اطمینان شاخص ارزش در شرایط توأم با مخاطره، مستلزم متنوع‌تر شدن ترکیب پرتفو می‌باشد. بنابراین افراد ریسک‌گریز و سرمایه‌گذاران تازه کار، هرگز نباید سهام تک شرکتی بخرند، بلکه باید ریسک سرمایه‌گذاری خود را با خرید مجموعه‌ای از سهام شرکت‌های مختلف کاهش دهند. ثانیاً، علاوه بر درجه ریسک‌گریزی (که به‌طور مستقیم در سطح VaR نشان داده می‌شود)، بودجه افراد و سطح سرمایه‌گذاری آنها نیز در تعیین ترکیب پرتفو مؤثر است، به طوری که در شرایط سرمایه‌گذاری به میزان ۱۰۰ میلیارد ریال، حتی در سطح VaR پنج درصد نیز سهام با واریانسهای قیمتی بالا دیده می‌شود.

ثالثاً، رابطه مبادله ریسک-بازدهی در شرایط موجود، به نفع افرادی است که در سرمایه‌گذاریهای خود حاضر به ریسک کمتری هستند. به عبارت دیگر، شرایط موجود به گونه‌ای است که، سرمایه‌گذاران می‌توانند با چشم‌پوشی از درصد پایینی از بازدهی انتظاری خود، درصد بالایی از ریسک داد و ستد در بورس را کاهش دهند.

رابعاً، با افزایش طول دوره سرمایه‌گذاری، با توجه به اینکه احتمال کاهش ارزش پرتفو از سطح مجاز و قابل قبول VaR نیز افزایش می‌یابد، لذا پرتفوی بهینه تعیین شده در شرایط خاص، با تغییر طول دوره سرمایه‌گذاری تغییر می‌کنند.



پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

منابع

- Basak, S. and Shapiro, A. (2001). Value-at-risk-based risk management: optimal policies and asset prices. *The Review of Financial Studies* Vol.14, No. 2, PP. 371-405.
- Campbell, R., Huisman, R. and Koedijk, K. (2001). Optimal portfolio selection in a Value at Risk framework. *Journal of Banking and Finance*, No. 25, PP. 1789-1804.
- Consigli G. (2002). Tail estimation and mean-VaR portfolio selection in markets subject to financial instability. *Journal of Banking and Finance*, No. 26, PP. 1355-1382.
- Duffie, D. and Pan, J. (2001). *Analytical value at risk with jumps and credit risk, Finance and Stochastic*. PP. 155-180.
- Fusai, F. and Luciano, E. (2001). Dynamic Value at Risk under optimal and suboptimal portfolio policies. *European Journal of Operational Research*, No. 135, PP. 249-269.
- Hull, J. (2000). *Options, Futures, and other Derivatives*. Prentice Hall, New York.
- Jorion, P. (1997). *Value-at-Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk*. McGraw Hill, New York.
- Kast, R., Luciano, E. and Peccati, L. (1999). Value at Risk as a decision criterion. *Working Paper*, University of Turin.
- Kluppelberg, C. and Korn, R. (1998). Optimal portfolios with bounded Value-at-Risk. *Working paper*, Munich University of Technology, Munich.
- Rockafeller, R.T. and Uryasev, S. (2000). Optimization of conditional Value-at-Risk. *The Journal of Risk*, Vol. 2, No. 3, PP. 21-41.
- Szego, G. (2002). Measures of risk. *Journal of Banking and Finance*, No. 26, Special issue on Beyond VaR.
- Yiu K. (2004). Optimal portfolios under a Value at Risk constraint. *Journal of Economic Dynamics and Control*, No. 28, PP. 1317-1334.