

## متوسط زمان انتظار برای مشاهده روند صعودی در قیمت سکه با استفاده از دنباله تبادلی پذیر جزئی

غلامعلی پرهام<sup>۱</sup>

بهاره عزیزی<sup>۲</sup>

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۲/۱۲/۳

تاریخ ارسال: ۱۳۹۱/۱۲/۹

### چکیده

در این مقاله روند قیمت ماهانه سکه تمام بهار آزادی برای یک دوره ۲۷ ساله با استفاده از دنباله‌های تبادلی پذیر جزئی مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد. این داده‌ها براساس افزایش یا کاهش قیمت نسبت به ماه قبل، دنباله‌هایی از گردش‌های موفقیت و شکست را تولید می‌کنند. هدف به دست آوردن روند صعودی یا نزولی قیمت سکه تمام بهار آزادی با استفاده از این گردش‌ها است. ابتدا تبادلی پذیر جزئی داده‌ها را بررسی و مرتبه وابستگی آنها را با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو تعیین می‌کنیم. سپس امید ریاضی زمان انتظار برای رسیدن به اولین گردش با طول‌های متفاوت را تعیین می‌کنیم. نتایج نشان می‌دهد که داده‌ها، تبادلی پذیر جزئی از مرتبه یک هستند و متوسط زمان برای مشاهده حداکثر شش ماه روند صعودی قیمت سکه، قابل پیش‌بینی است.

واژگان کلیدی: گردش‌ها، تبادلی پذیر، زنجیر مارکف، تبادلی پذیر جزئی

طبقه‌بندی JEL: C10، C12، C13، C41.

## ۱. مقدمه

یکی از مدل‌های تصادفی مورد استفاده در علم آمار دنباله‌هایی با نتایج دودویی<sup>۱</sup> می‌باشد. اگر در چنین دنباله‌هایی هر یک از دو پیشامد برای یک یا چندین بار پشت سر هم رخ دهد و به پیشامد دیگر ختم شود، یک گردش<sup>۲</sup> آماری تولید می‌شود. گردش‌ها به علت کاربرد وسیع‌شان در رشته‌های مختلف مورد توجه قرار گرفته‌اند. بالاکریشنان و کوتراس<sup>۳</sup> گردش‌ها و کاربردهایشان را مورد بررسی قرار دادند. فو و لو<sup>۴</sup> توزیع گردش‌ها را در آزمایش‌های وابسته که وابستگی آن‌ها از نوع زنجیر مارکف است را با استفاده از روش زنجیر مارکف نشانیده<sup>۵</sup> به‌دست آوردند. مگری و همکاران<sup>۶</sup> طول بلندترین و کوتاهترین گردش‌های موفقیت در دنباله‌های دوتایی را به‌دست آوردند. اريلماز<sup>۷</sup> میانگین طول‌های گردش موفقیت در یک دنباله از آزمایش‌های دودویی را بررسی کرد. در مطالعه گردش‌ها معمولاً به منظور سادگی محاسبات متغیرهای تصادفی را مستقل و هم‌توزیع در نظر می‌گیرند. اگر این فرض بین متغیرها برقرار نباشد، ساختار مدل احتمال پیچیده می‌شود و به ابزارهای دیگری نیاز پیدا می‌کنیم. تبادل‌پذیری<sup>۸</sup> و تبادل‌پذیری جزئی<sup>۹</sup> مفاهیمی مهم در احتمال هستند که با فرض عدم استقلال، ابزاری برای ساده نمودن محاسبات در مدل احتمال فراهم می‌کنند. این مفاهیم را دفينيتي<sup>۱۰</sup> معرفی کرده است. دياكونيس و فريدمن<sup>۱۱</sup> دنباله‌های تبادل‌پذیر متناهی را مورد بررسی قرار دادند. در زمینه توزیع گردش‌ها، اريلماز<sup>۱۲</sup> بلندترین آماره گردش متغیرهای دودویی تبادل‌پذیر را در فرایندهای مربوط به آب‌شناسی برای احتمال وقوع سیل یا خشکسالی، به‌دست آورد. اريلماز و دمير<sup>۱۳</sup> گردش‌های موفقیت در دنباله‌ای از آزمایش‌های دودویی تبادل‌پذیر را مورد بررسی قرار دادند. اريلماز<sup>۱۴</sup> توزیع گردش‌ها، به ویژه مجموع تعداد گردش‌ها و طول بلندترین و کوتاه‌ترین گردش را در دنباله‌ای از آزمایش‌های چندوضعی<sup>۱۵</sup> تبادل‌پذیر به‌دست آورد. اريلماز و يالچين<sup>۱۶</sup> توزیع آماره‌های گردش را در فرایندهای تبادل‌پذیر جزئی

1. Binary
2. Run
3. Balakrishnan N. and Koutras M.V. (2002)
4. Fu J.C. and Lou W.Y.W. (2003)
5. Markov Chain Imbedding
6. Makri F.S., Philippou A. N. and Psillakis Z. M. (2007)
7. Eryilmaz S. (2009)
8. Exchangeability
9. Partially Exchangeable
10. De Finetti B., Funzione Caratteristica di un Fenomeno Allatorio and Attidella R. (1931) and De Finetti B. (1974)
11. Diaconis P. and Freedman D. (1980)
12. Eryilmaz S. (2005)
13. Eryilmaz S. and Demir S. (2007)
14. Eryilmaz S. (2008)
15. Multistate
16. Eryilmaz S. and Yalcin F. (2011)

به‌دست آورده‌اند. اریلماز<sup>۱</sup> توزیع توأم آماره‌های گردش موفقیت و شکست را در فرایندهای تبادلی پذیر جزئی به‌دست آورد.

رویکردهای موجود در تحلیل قیمت سکه عمدتاً برای پیش‌بینی قیمت سکه یا تعیین خط روند در کل دوره می‌باشد. با رسم نمودار قیمت سکه برحسب زمان به عنوان یک سری زمانی هم می‌توان تغییرات قیمت را مدل‌بندی و پیش‌بینی کرد. رویکردی که در این مقاله به کار رفته است برای پیش‌بینی متوسط زمان (ماه‌های) مشاهده دوره‌های افزایش (روند صعودی) قیمت می‌باشد. این کار با استفاده از خاصیت دنباله‌های تبادلی پذیر جزئی صورت می‌گیرد.

ساختار مقاله از این قرار است. در بخش دوم تعریف تبادلی پذیری و تبادلی پذیری جزئی و رابطه آنها به هم بیان شده است. چگونگی تعیین مرتبه وابستگی در دنباله تبادلی پذیر را در بخش سوم شرح می‌دهیم. در بخش چهارم پارامترهای توزیع آمیزنده<sup>۲</sup> را برآورد می‌کنیم. امید ریاضی اولین زمان انتظار رسیدن به گردشی به طول  $k$  را در بخش پنجم به‌دست می‌آوریم. در بخش ششم تعیین متوسط زمان انتظار برای تعیین روند صعودی قیمت سکه تمام بهار آزادی پرداخته شده است. در بخش پایانی نتیجه کلی را بیان می‌کنیم.

## ۲. تبادلی پذیری و تبادلی پذیری جزئی

تبادلی پذیری به عنوان یک نوع از تقارن بین متغیرهای تصادفی تعریف شده است.

**تعریف:** مجموعه‌ای متناهی  $X_1, X_2, \dots, X_n$  از متغیرهای تصادفی را تبادلی پذیر گویند، اگر برای هر جایگشت  $\pi \in S(n)$  که  $n \geq 2$  رابطه

$$P(X_{\pi(1)} \leq x_1, \dots, X_{\pi(n)} \leq x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \quad (1)$$

برقرار باشد.  $S(n)$  مجموعه همه جایگشت‌های  $\{1, 2, \dots, n\}$  می‌باشد. به عبارت دیگر یک دنباله متناهی از متغیرهای تصادفی را تبادلی پذیر گویند اگر اندیس متغیرها هیچ‌گونه اطلاعی درباره متغیرها دربر نداشته باشند. یک دنباله‌ی نامتناهی از متغیرهای تصادفی  $\{X_i\}_{i \geq 1}$  را تبادلی پذیر گویند، هرگاه هر دنباله متناهی از آن تبادلی پذیر باشد.

دیفینیتی<sup>۳</sup> قضیه‌ای برای متغیرهای تصادفی دودویی تبادلی پذیر مطرح نمود. این قضیه یک رابطه بین استقلال و تبادلی پذیری بیان می‌کند و به دلیل ساده کردن مدل احتمالی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

**قضیه:** دنباله نامتناهی  $\{X_i\}_{i \geq 1}$  از متغیرهای تصادفی دودویی با مقادیر  $\{0, 1\}$  تبادلی پذیر است اگر و فقط اگر اندازه احتمال یکتای  $\mu$  روی  $[0, 1]$  وجود داشته باشد که

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \int_0^1 p^s (1-p)^{n-s} \mu(dp) \quad (2)$$

1. Eryilmaz S. (2011)

2. Mixing Distribution

3. De Finetti B., Funzione Caratteristica di un Fenomeno Allatorio and Attidella R. (1931)

که در آن  $s = \sum_{i=1}^n x_i$ . به عبارت دیگر متغیرهای تصادفی  $X_1, X_2, \dots, X_n$  را تبادلی پذیر گویند اگر

و فقط اگر پارامتر  $p$  دارای توزیع احتمال باشد و توزیع متغیرها به شرط پارامتر مستقل باشند.

تبادلی پذیری جزئی کلاس محدودتری نسبت به تبادلی پذیری است. در تبادلی پذیری، توزیع توأم دنباله‌ها تحت همه جایگشت‌ها برابرند، اما در تبادلی پذیری جزئی، توزیع توأم دو دنباله تحت شرایطی خاص برابر هستند.<sup>۱</sup>

**تعریف:** دنباله  $\{X_i\}_{i>1}$  که مقادیر خود را روی  $I = \{0,1\}$  می‌گیرد تبادلی پذیر جزئی یا تبادلی پذیر مارکفی نامیده می‌شود، اگر برای هر دو دنباله  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \in I^n$  و  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in I^n$  که  $n \geq 2$ ، با مقادیر اولیه یکسان یعنی  $\tau_1 = \sigma_1$  و تعداد چرخش‌های یکسان، داشته باشیم:

$$P(X_1 = \sigma_1, \dots, X_n = \sigma_n) = P(X_1 = \tau_1, \dots, X_n = \tau_n) \quad (3)$$

برای مثال، دنباله‌های  $\tau = (0100101)$  و  $\sigma = (0101100)$  دارای مقادیر اولیه یکسان صفر و تعداد گردش‌های یکسان ۵ می‌باشند، بنابراین براساس تعریف تبادلی پذیری جزئی دو دنباله دارای احتمال‌های برابر هستند. یک ویژگی مهم از دنباله‌های تبادلی پذیر جزئی بازگشتی<sup>۲</sup> آن است که می‌توان آن‌ها را به صورت ترکیبی از زنجیرهای مارکف در نظر گرفت.<sup>۳</sup> این ویژگی به صورت قضیه‌ای در زیر بیان شده است.

**قضیه:** فرض کنید  $\{X_i\}_{i>1}$  یک زنجیر مارکف با ماتریس احتمال انتقال (تغییر وضعیت) مانای مجهول

$$P = \begin{pmatrix} p_{..} & p_{.1} \\ p_{1.} & p_{11} \end{pmatrix} \quad (4)$$

باشد. اگر برای  $\{0,1\}$ ،  $i, j \in \{0,1\}$  تعداد تغییر وضعیت‌ها از وضعیت  $i$  به وضعیت  $j$  در دنباله  $X_1, X_2, \dots, X_n$  باشد، آن‌گاه با فرض معلوم بودن مقدار  $X_1$  خواهیم داشت:

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \int \int p_{..}^{t_{..}(n)} p_{.1}^{t_{.1}(n)} p_{1.}^{t_{1.}(n)} p_{11}^{t_{11}(n)} \mu(dp_{..}, dp_{.1}, dp_{1.}, dp_{11}) \quad (5)$$

که در آن  $\mu$  اندازه احتمال می‌باشد.

اثبات: دیاکونیس و فریدمن.<sup>۴</sup>

در حالتی که زنجیر مارکف  $\{X_i\}_{i>1}$  گذرا باشند، رابطه (۵) برقرار نمی‌باشد، دیاکونیس و فریدمن<sup>۵</sup> با ارائه مثالی لزوم شرط بازگشتی را برای برقراری رابطه (۵) نشان دادند. چون در ماتریس احتمال انتقال

1. Quintana FA. and Newton MA. (1998)

2. Recurrent

3. Diaconis P. and Freedman D. (1980)

4. ibid

5. ibid

زنجیر مارکف (۴)، جمع سطرها برابر ۱ است یعنی،  $p_{1..} = 1 - p_{1.}$  و  $p_{.1} = 1 - p_{.}$ ، بنابراین رابطه (۵) را می‌توان به صورت

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \int \int \dots \int p_{..}^{t_{1..}^{(n)}} (1 - p_{..})^{t_{1..}^{(n)}} p_{1.}^{t_{1.}^{(n)}} (1 - p_{1.})^{t_{1.}^{(n)}} \mu(dp_{..}, dp_{1.}) \quad (۶)$$

نوشت. اگر اندازه احتمال  $\mu$  یا توزیع آمیزنده روی مجموعه  $\{(p, p) : p \in [0, 1]\}$  متمرکز شده باشد، آن‌گاه  $\{X_i\}_{i \geq 1}$  دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی دودویی متبادل پذیر می‌باشد. اگر  $\mu$  یک جرم نقطه‌ای در  $(p^*, p^*)$ ، که  $p^* \in (0, 1)$  داشته باشد، آن‌گاه  $\{X_i\}_{i \geq 1}$  دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی دودویی مستقل و هم‌توزیع است. بنابراین اگر دنباله‌ای نامتناهی، بازگشتی و متبادل پذیر جزئی باشد، آن‌گاه این دنباله، یک زنجیر مارکف بوده و متبادل پذیری و استقلال به عنوان حالت‌های خاص نتیجه می‌شوند (کوینتانا و نیوتن).

### ۳. آزمون‌های تعیین مرتبه وابستگی

در یک دنباله متبادل پذیر جزئی با مرتبه  $k \geq 1$ ، مجموعه تعداد انتقال‌ها را با  $T_k = \{t_{i_1 i_2 \dots i_{k+1}}\}$  نشان می‌دهیم. که در آن برد  $\{i_1, \dots, i_{k+1}\}$  است. این مجموعه‌ای برای ثبت تعداد دفعات وقوع همه پیشامدهای  $2^{k+1}$  تایی‌ها از دنباله‌های دودویی  $(i_1, i_2, \dots, i_{k+1})$  به طول  $k+1$  در یک دنباله دودویی به طول  $n$  است. همچنین براساس تعریف دنباله متبادل پذیر جزئی مقدار اولیه در دنباله متبادل پذیر جزئی  $x_1, x_2, \dots, x_n$  با مرتبه  $k$  را به صورت  $I_k = (x_1, x_2, \dots, x_k)$  نشان می‌دهیم. فرض کنید  $U(X)$  آماره آزمون، برای فرضیه صفر «دنباله متبادل پذیر جزئی با مرتبه  $k$ » و فرضیه مقابل «دنباله متبادل پذیر جزئی با مرتبه  $k+1$ » باشد. به طور کلی می‌توان دنباله متبادل پذیر جزئی با مرتبه  $k$  در مقابل دنباله متبادل پذیر جزئی با مرتبه  $m$  ( $m > k$ ) را مورد آزمون قرار داد، اما معمولاً این آزمون به ازای  $m = k+1$  انجام می‌شود. برای آزمون متبادل پذیری در مقابل متبادل پذیری جزئی (یعنی مرتبه صفر در مقابل مرتبه یک) در یک دنباله عددی متشکل از ارقام ۰ و ۱، کوینتانا و نیوتن<sup>۲</sup> آماره آزمون را به صورت

$$U_{0,1}(X) = \left( \frac{t_{..} - t_{1.}}{t_{.}} - \frac{t_{1.}}{t_{1.}} \right)^2 \quad (۷)$$

در نظر گرفتند که در آن  $t_i$  مجموع انتقال‌ات از  $i = 0, 1$  می‌باشد. آن‌ها این آماره را به صورت

$$U_{k,k+1}(X) = \sum_{i_1=0}^1 \dots \sum_{i_{k+1}=0}^1 \left( \frac{t_{i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1}} - t_{i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1}}}{t_{i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1}}} - \frac{t_{i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1}}}{t_{i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1}}} \right)^2 \quad (۸)$$

1. Quintana FA. and Newton MA. (1998) and Quintana FA. And Newton MA. (1999)
2. Quintana FA. and Newton MA. (1998)

برای آزمون تبادلی پذیر جزئی با مرتبه  $k$  در مقابل تبادلی پذیر جزئی با مرتبه  $k+1$  تعمیم دادند. همانطور که در بخش ۲ بیان شد، تحت فرض تبادلی پذیری می توان دنباله تبادلی پذیر را به صورت زنجیر مارکفی نوشت. همچنین براساس تعریف دنباله تبادلی پذیر جزئی ماتریس تغییر وضعیت تصادفی دارای سطرهای یکسانی می باشد. بنابراین انتظار می رود  $t_{..}/t_{.}$  و  $t_{.}/t_{.}$  مقادیری شبیه هم داشته باشند، در نتیجه  $U_{0,1}$  باید کوچک باشد. این ایده ای است که منجر به ساختن این آماره شده است. چون آماره آزمون  $(\lambda)$  براساس آماره های بسنده ساخته نشده است، ممکن است کاراترین آماره برای آزمون نباشد، بنابراین از روشی دیگر نیز برای تعیین مرتبه وابستگی داده ها استفاده می کنیم. کاتز<sup>۱</sup> از نسبت درستنمایی در نظریه زنجیر مارکف استفاده کرد. بنابراین می توان از آماره نسبت درستنمایی در مدل تبادلی پذیر جزئی نیز استفاده کرد. بیلینگزلی<sup>۲</sup> نشان داد که نسبت درستنمایی  $l_{k_1, k_2}$  برای فرضیه صفر «زنجیر مارکف دودویی با مرتبه  $k_1$ » در مقابل فرضیه «زنجیر مارکف دودویی با مرتبه  $k_2 > k_1$ »، تحت فرضیه صفر، وقتی  $n$  به بی نهایت میل می کند، در احتمال به توزیع کای دو  $\chi^2_{m(k_1, k_2)}$  همگرا می شود که در آن  $m(k_1, k_2) = 2^{k_2} - 2^{k_1}$  درجه آزادی می باشد. بنابراین در مدل های تبادلی پذیر جزئی  $l_{.1}$  به صورت

$$l_{.1} = -2(\log(L) - \log(L_1)) \quad (9)$$

است که در آن

$$L_1 = \sup_{p_1=p_2} L(p_1, p_2), \quad L_1 = \sup_{(p_1, p_2)} L(p_1, p_2),$$

$$L(p_1, p_2) = p_1^{t_{1..}(n)} (1-p_1)^{t_{.1}(n)} p_2^{t_{.1}(n)} (1-p_2)^{t_{1.}(n)}$$

$p_1$  همان  $p_{.}$  و  $p_2$  همان  $p_1$  رابطه (۴) می باشند. همچنین،  $l_{1,2}$  به صورت

$$l_{1,2} = -2(\log(L_1) - \log(L_2)) \quad (10)$$

به دست می آید. که در آن،

$$L_1 = \sup_{(p_1=p_2, p_2=p_3)} L(p_1, p_2, p_3, p_4)$$

$$L_2 = \sup_{(p_1, p_2, p_3, p_4)} L(p_1, p_2, p_3, p_4)$$

$$L(p_1, p_2, p_3, p_4) = p_1^{t_{1..}(n)} (1-p_1)^{t_{.1}(n)} p_2^{t_{.1}(n)} (1-p_2)^{t_{1.}(n)} p_3^{t_{1..}(n)} (1-p_3)^{t_{.1}(n)}$$

$$p_4^{t_{.1}(n)} (1-p_4)^{t_{1.}(n)}$$

و  $p_1, p_2, p_3$  و  $p_4$  به ترتیب متناظر با احتمالات  $p_{.}, p_{.}, p_{.}, p_{.}$  و  $p_{1.}$  و  $p_{.1}$  در یک زنجیر مارکف برگشت پذیر ناشکننده حاصل از یک نمونه  $n$  تایی دودویی از صفر و یک می باشند. برای آزمون مونت کارلو، روش شبیه سازی به این صورت است که ابتدا  $B$  دنباله مستقلاً با ویژگی های دنباله موجود شبیه سازی و برای هر کدام از دنباله های شبیه سازی شده آماره آزمون  $U(X)$  محاسبه و توزیع تجمعی تجربی آن رسم می شود. سپس  $p$ -مقدار آماره نمونه موجود با استفاده از این توزیع تجمعی

1. Katz R. (1981)

2. Billingsley P. (1961)

تجربی به دست می‌آید. شبیه‌سازی آزمون مونت کارلو برای نسبت درست‌نمایی مانند روشی است که برای آماره آزمون  $U(X)$  به کار برده شده است با این تفاوت که آماره آزمون در این‌جا آماره آزمون نسبت درست‌نمایی است.

#### ۴. برآورد پارامترهای توزیع آمیزنده

فرض کنید  $k$  دنباله دودویی مستقل داشته باشیم. مشاهدات دنباله  $i$ ام،  $k, i = 1, 2, \dots, k$  را با  $X_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i})$  نشان می‌دهیم که در آن هر  $X_{ij}$  مقدار ۰ یا ۱ را می‌گیرد. کلاس مدل‌های تبادل‌پذیر جزئی را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم هر دنباله دارای ماتریس احتمال انتقالی به صورت

$$P_i = \begin{pmatrix} p_i & 1 - p_i \\ p_{i1} & 1 - p_{i1} \end{pmatrix} \quad i = 1, \dots, k \quad (11)$$

باشد و  $P_1, \dots, P_k$  مستقل و هم‌توزیع با ماتریس توزیع بتا هستند. در اینجا به پیروی از مارتین<sup>۱</sup> این ماتریس توزیع بتا را با

$$M = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ a_{i1} & b_{i1} \end{pmatrix} \quad (12)$$

نشان می‌دهیم. در حقیقت توزیع آمیزنده را بتا با پارامترهای  $(a_i, b_i)$  و  $(a_{i1}, b_{i1})$  در نظر گرفته‌ایم. از آن‌جا که رابطه (۶) با توزیع پسین در نظریه بیز مشابهت دارد، بنابراین توزیع پسین  $P_i$  به شرط  $X_i$ ، دارای توزیع بتا با ماتریس انتقالی به صورت

$$\begin{pmatrix} a_i + t_{rs}^i(n_i) & b_i + t_{rs}^i(n_i) \\ a_{i1} + t_{rs}^i(n_i) & b_{i1} + t_{rs}^i(n_i) \end{pmatrix}$$

است (کویینتانا و نیوتن<sup>۲</sup>) که در آن  $t_{rs}^i(n_i)$  تعداد انتقال‌های نمونه‌ای برای  $i$ امین دنباله آزمایشی از وضعیت  $r$  به  $s$  با  $r, s \in \{0, 1\}$  می‌باشند. هم‌چنین اولین مشاهده برای هر زنجیر ثابت فرض می‌شود. برای محاسبه بعضی روابط لازم است پارامترهای توزیع بتا برآورد شوند. مشکانی و بیلارد<sup>۳</sup> برآوردهای بیز تجربی احتمال‌های انتقال که شامل ویژگی‌های مجانبی این برآوردها است را مورد بررسی قرار دادند. یکی از روش‌های برآورد روشی است که توسط کویینتانا و نیوتن<sup>۴</sup> معرفی شد که به طور مختصر به بیان آن می‌پردازیم.

1. Martin J. (1967)
2. Quintana FA. And Newton MA. (1999)
3. Meshkani M. R. and Billard L. (1992)
4. Quintana FA. And Newton MA. (1999)

برای برآورد ماتریس احتمال انتقال که به صورت  $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix}$  تعریف می‌شود باید تابع درستنمایی ماکزیمم شود. تابع درستنمایی پارامتر  $M$ ، با شرطی کردن هر دنباله روی مقادیر اولیه به صورت

$$P(X_1, \dots, X_k, P_1, \dots, P_k, M) = \prod_{i=1}^k \left\{ \frac{p_i^{t_i^i(n_i)+a_i-1} (1-p_i)^{t_i^i(n_i)+b_i-1}}{B(a_i, b_i)} \right\} \times \prod_{i=1}^k \left\{ \frac{p_i^{t_i^i(n_i)+a_i-1} (1-p_i)^{t_i^i(n_i)+b_i-1}}{B(a_i, b_i)} \right\} \quad i=1, \dots, k \quad (13)$$

می‌باشد که در آن ماتریس  $P_i$  با زوج  $(p_i, p_i)$  نشان داده شده است. وقتی با انتگرال‌گیری روی  $p_{ij}$  ها آنها را حذف کنیم خواهیم داشت:

$$P(X_1, \dots, X_k, M) = \prod_{i=1}^k \left\{ \frac{B(t_i^i(n_i) + a_i, t_i^i(n_i) + b_i)}{B(a_i, b_i)} \right\} \times \prod_{i=1}^k \left\{ \frac{B(t_i^i(n_i) + a_i, t_i^i(n_i) + b_i)}{B(a_i, b_i)} \right\} \quad (14)$$

اما تابع درستنمایی  $P_1, \dots, P_k$  به عنوان مشاهدات، به صورت

$$L(a, b, a_1, b_1 | P_1, \dots, P_k) = \prod_{i=1}^k \left\{ \frac{p_i^{a_i-1} (1-p_i)^{b_i-1}}{B(a_i, b_i)} \right\} \times \prod_{i=1}^k \left\{ \frac{p_i^{a_i-1} (1-p_i)^{b_i-1}}{B(a_i, b_i)} \right\} \quad (15) \\ = L(a, b | P_1, \dots, P_k) \times L(a_1, b_1 | P_1, \dots, P_k)$$

است. کوپینتانا و نیوتن<sup>۱</sup> نشان دادند هنگامی که طول هر دنباله به سمت بی‌نهایت میل می‌کند و ماتریس تغییر وضعیت قابل مشاهده باشد، مشتقات لگاریتم درستنمایی رابطه (۱۴) به مشتقات لگاریتم درستنمایی رابطه (۱۵) همگرا می‌شود. بنابراین با گرفتن مشتقات جزئی از لگاریتم رابطه (۱۵) نسبت به پارامترها خواهیم داشت:

پرتال جامع علوم انسانی



$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln(L)}{\partial a_i} &= \sum_{i=1}^k \{ \ln(p_{i.}) - \Psi(a_i) + \Psi(a_i + b_i) \} \\ \frac{\partial \ln(L)}{\partial b_i} &= \sum_{i=1}^k \{ \ln(1 - p_{i.}) - \Psi(b_i) + \Psi(a_i + b_i) \} \\ \frac{\partial \ln(L)}{\partial a_1} &= \sum_{i=1}^k \{ \ln(p_{i1}) - \Psi(a_1) + \Psi(a_1 + b_1) \} \\ \frac{\partial \ln(L)}{\partial b_1} &= \sum_{i=1}^k \{ \ln(1 - p_{i1}) - \Psi(b_1) + \Psi(a_1 + b_1) \} \end{aligned} \quad (16)$$

در روابط (۱۶)،  $\Psi$  تابع دوگاما<sup>۱</sup> می‌باشد، که برابر است با  $\Psi(a) = \partial \ln \Gamma(a) / \partial a$ . جانسون و همکاران<sup>۲</sup> نشان دادند که  $\Psi(a) \approx \ln(a - \frac{1}{2})$ . به دلیل خطی نبودن پارامترها در روابط (۱۶) برآوردهای درست‌نمایی  $\hat{a}_i$  و  $\hat{b}_i$  با استفاده از روش‌های عددی محاسبه می‌شوند. با استفاده از این تقریب و به خاطر همگرایی تابع درست‌نمایی می‌توان مقادیر اولیه  $\hat{a}_i$  و  $\hat{b}_i$  را به صورت

$$\begin{aligned} \hat{a}_i &= \frac{1 - \hat{G}_{p_i}}{2(1 - \hat{G}_{p_i} - \hat{G}_{(1-p_i)})}, \quad \hat{a}_i > 1 \\ \hat{b}_i &= \frac{1 - \hat{G}_{(1-p_i)}}{2(1 - \hat{G}_{p_i} - \hat{G}_{(1-p_i)})}, \quad \hat{b}_i > 1 \end{aligned}$$

به کار برد<sup>۳</sup> که در آن  $\hat{G}_{p_i}$  و  $\hat{G}_{(1-p_i)}$  برآورد میانگین هندسی  $p_{i.}$  ها هستند. به طور مشابه برآوردهای  $\hat{a}_1$  و  $\hat{b}_1$  با استفاده از دو رابطه آخر (۱۶) انجام می‌گیرد. در نظریه زنجیره‌های مارکف می‌توان نشان داد که وقتی  $n$  به بی‌نهایت میل می‌کند،  $p_{ij}$  ها به وسیله  $t_{ij}(n) / (t_{i.}(n) + t_{i.}(n))$ ، که  $t_{ij}(n)$  تعداد انتقال‌ها از  $i$  به  $j$  در یک نمونه  $n$  تایی و  $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$  برآورد می‌شوند. بنابراین از روابط (۱۶) برای برآورد پارامترها استفاده می‌کنیم. در این حالت  $P_1, \dots, P_k$  نمونه‌هایی مستقل و هم‌توزیع با ماتریس توزیع بتا هستند که به عنوان مشاهدات محسوب می‌شوند.

##### ۵. توزیع زمان انتظار گردش‌ها

در این بخش زمان انتظار مربوط به گردش‌ها را در یک دنباله تبادلی پذیر جزئی بیان می‌کنیم. فرض کنید  $U_k$  زمان انتظار برای اولین گردش موفقیت به طول  $k$  در دنباله  $\{X_i\}_{i \geq 1}$  باشد. در این صورت

1. Digamma

2. Johnson N. L., Kotz S. and Balakrishnan N. (1995)

3. ibid

زمان انتظار برای رسیدن به اولین گردش موفقیت به طول  $k$ ، یعنی امید ریاضی  $U_k$  را می‌توان به صورت قضیه ۱ بیان کرد.

**قضیه ۱:** اگر  $U_k$  زمان انتظار برای اولین گردش موفقیت به طول  $k$  در یک فرایند تبادل پذیر جزئی بازگشتی نامتناهی  $\{X_i\}_{i>1}$  باشد، در این صورت

$$E(U_k | X_1 = 0) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(1-p_1)^{k-1}} \left( \frac{1}{1-p_2} + \frac{1-(1-p_1)^{k-1}}{p_1} \right) \mu(dp_2, dp_1) \quad (17)$$

$$E(U_k | X_1 = 1) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-p_2 + p_1)(1-(1-p_1)^{k-1})}{(1-p_2)p_1(1-p_1)^{k-1}} \mu(dp_2, dp_1) \quad (18)$$

اثبات: اریلماز و یالچین<sup>۱</sup>

اگر در رابطه (۱۷) توزیع آمیزنده  $\mu$ ، توزیع بتا با پارامترهای  $(a, b)$ ،  $(a_1, b_1)$  و به صورت

$$\mu(dp_2, dp_1) = \frac{1}{B(a, b)} p_2^{a-1} (1-p_2)^{b-1} \frac{1}{B(a_1, b_1)} p_1^{a_1-1} (1-p_1)^{b_1-1} dp_2 dp_1 \quad (19)$$

باشد، با استفاده رابطه (۱۷)، متوسط زمان انتظار برای رسیدن به  $k$  موفقیت متوالی به شرط این‌که اولین وضعیت شکست باشد، به صورت

$$E(U_k | X_1 = 0) = \frac{1}{B(a, b)B(a_1, b_1)} \{B(a, b-1)B(a_1, b_1-k+1) + B(a, b)B(a_1-1, b_1-k+1) - B(a, b)B(a_1-1, b_1)\} \quad (20)$$

خواهد بود. که در آن  $B(a, 0)$  تابع بتا می‌باشد. هم‌چنین متوسط زمان انتظار برای رسیدن به  $k$  موفقیت متوالی به شرط این‌که اولین وضعیت، موفقیت باشد، با استفاده از رابطه (۱۸) به صورت

$$E(U_k | X_1 = 1) = \frac{1}{B(a, b)B(a_1, b_1)} \{B(a, b-1)B(a_1, b_1-k+1) - B(a+1, b-1)B(a_1-1, b_1-k+1) + B(a, b-1)B(a_1, b_1-k+1) - B(a, b-1)B(a_1-1, b_1) + B(a+1, b-1)B(a_1-1, b_1) - B(a, b-1)B(a_1, b_1)\} \quad (21)$$

محاسبه می‌شود.

## ۶. تعیین روند قیمت سکه

قیمت سکه طی چند سال اخیر روند افزایشی چشمگیری داشته است. قیمت سکه مدتی روندی صعودی را تجربه کرده و بعد از مدتی با اجرای سیاستی، قدری کاهش را نشان داده است. هر چند در دراز مدت، روند معمولاً افزایشی بوده است. در این بخش بر روی داده‌های قیمت سکه تمام بهار آزادی (طرح قدیم) که برای یک دوره ۲۷ ساله ۱۳۹۰-۱۳۶۴ به صورت ماهانه از سایت بانک مرکزی

جمع‌آوری شده‌اند، وضعیت تبادل‌پذیری (یا تبادل‌پذیری جزئی) را مورد ارزیابی قرار داده و متوسط زمان انتظار برای مشاهده روندهای صعودی را محاسبه خواهیم کرد.

از آن‌جا که هدف، تعیین روند قیمت سکه است، به جای مقادیر قیمت‌ها، افزایش یا کاهش آن‌ها را نسبت به ماه قبل در نظر می‌گیریم. این افزایش و کاهش را به ترتیب با ۱ و ۰ نشان می‌دهیم. نقطه شروع برای اولین ماه را صفر در نظر می‌گیریم. چون قبل از آن مشاهده‌ای در اختیار نداریم که کاهش یا افزایش قیمت را مشاهده کنیم. بنابراین دنباله تولید شده دنباله‌ای از ۰ و ۱‌ها، به طول ۳۲۴ خواهد بود. برای سادگی این دنباله را دنباله C می‌نامیم. انتظار می‌رود که قیمت سکه در هر ماه به قیمت در ماه‌های قبل خود وابسته باشد، بنابراین برای بررسی این موضوع از آزمون گردش با فرضیه صفر «استقلال داده‌ها» در مقابل «وابستگی بین داده‌ها» استفاده شد. براساس این آزمون،  $p$ -مقدار برابر با ۰/۰۱۵ به دست آمد که در سطح معنی‌داری ۰/۰۵ فرضیه صفر رد شده و وجود وابستگی بین داده‌ها تأیید می‌شود. بنابراین دنباله C شرط استقلال را ندارد، پس ویژگی تبادل‌پذیری یا تبادل‌پذیر جزئی را برای دنباله C مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در این‌جا از روش‌های بخش ۳، برای تعیین مرتبه وابستگی در دنباله C استفاده می‌کنیم. ابتدا با استفاده از آماره آزمون، رابطه (۷)، فرضیه صفر «تبادل‌پذیر بودن دنباله» در مقابل «تبادل‌پذیر جزئی بودن دنباله با مرتبه وابستگی ۱» را مورد آزمون قرار می‌دهیم. محاسبات برای این آزمون را با استفاده از برنامه‌نویسی در محیط R انجام داده‌ایم، تعداد تغییر وضعیت‌های ۰ و ۱، در دنباله C و مقدار آماره آزمون به صورت

$$U_{1,1}(X) = 0/017$$

$$t_{1,1} = 56, \quad t_{1,1} = 66, \quad t_{1,1} = 66, \quad t_{1,1} = 135$$

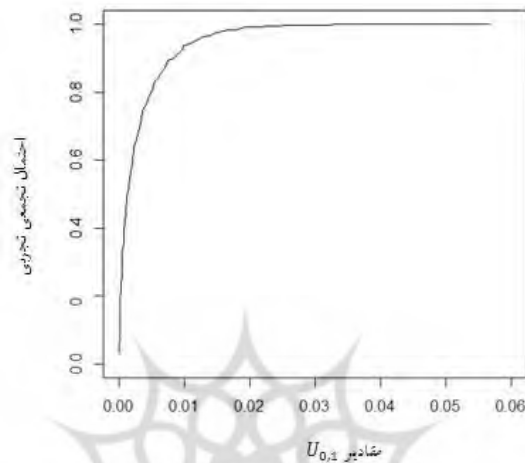
محاسبه گردید. همان‌طور که قبلاً بیان شد، برای دنباله‌های تبادل‌پذیر نسبت  $\frac{t_{1,1}}{t_{1,1}}$  و  $\frac{t_{1,1}}{t_{1,1}}$  نزدیک به

یکدیگر خواهند بود، در نتیجه آماره آزمون مقداری بسیار کوچک خواهد داشت. اما در این‌جا مقدار آماره آزمون برابر ۰/۰۱۷ است که نسبتاً مقدار بزرگی است. بنابراین فرض تبادل‌پذیری داده‌ها رد می‌شود. اما برای اطمینان از صحت رد فرضیه صفر، آزمون مونت کارلو نیز به صورت زیر انجام می‌شود. داده‌ها را ۱۰۰۰۰ مرتبه با توجه به تعداد ۱‌ها و ۰‌های موجود در دنباله C، شبیه‌سازی (مونت کارلو) کرده و آماره آزمون، رابطه (۷) را برای هر یک از دنباله‌های شبیه‌سازی شده به دست آورده و تابع توزیع تجربی آنها را رسم می‌کنیم (شکل ۱). سپس  $p$ -مقدار را برای مقدار آماره حاصل از دنباله C به دست می‌آوریم که برابر با ۰/۰۲ است. بنابراین در سطح معنی‌داری ۰/۰۵ فرضیه صفر رد می‌شود.

آماره آزمون رابطه (۷) ممکن است کاراترین آماره در داده‌های دنباله‌ای نباشد، چون براساس آماره بسنده به دست نیامده است. به همین دلیل از آماره نسبت درست‌نمایی رابطه (۹) نیز برای تعیین مرتبه وابستگی آن‌ها استفاده می‌شود. مقدار این آماره را با برنامه نویسی در محیط R محاسبه کرده‌ایم. این مقدار برابر ۵/۴۸ است. در بخش ۳ گفته شد این آماره به طور مجانبی دارای توزیع خی دو با

$\chi^2_{k_1} - \chi^2_{k_2}$  درجه آزادی است که در آن  $k_1 = 0$  و  $k_2 = 1$ ، بنابراین مقدار این آماره آزمون در سطح معنی داری  $0/05$  از مقدار کای دو با یک درجه آزادی یعنی،  $3/84$  بیشتر است.

شکل ۱. توزیع تجمعی تجربی مونت کارلو  $U_{0,1}$  با  $100000$  مرتبه شبیه سازی

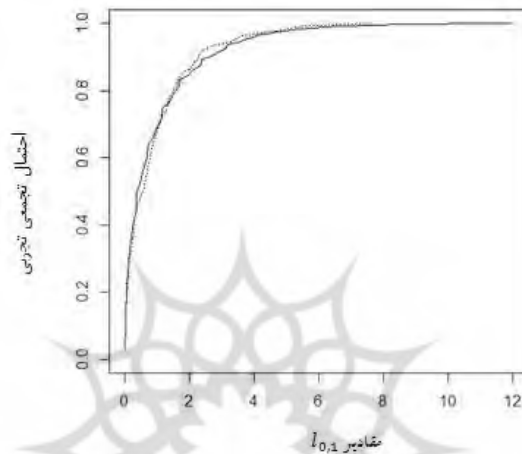


پس فرضیه صفر رد می شود. اما برای اطمینان از صحت رد فرضیه صفر در این مورد نیز آزمون مونت کارلو انجام شد و  $p$ -مقدار برای دنباله  $C$  برابر با  $0/019$  به دست آمد. هم چنین با استفاده از شکل ۲، می توان  $p$ -مقدار را تعیین کرد که برابر با همان  $0/019$  خواهد بود. بنابراین در سطح معنی داری  $0/05$  فرضیه صفر رد می شود. در شکل ۲ نمودار توزیع تجمعی تجربی آماره آزمون  $I_{0,1}$  به وسیله  $100000$  مرتبه شبیه سازی با خط تیره و نمودار توزیع تجمعی کای دو با ۱ درجه آزادی با نقطه چین نشان داده شده است.

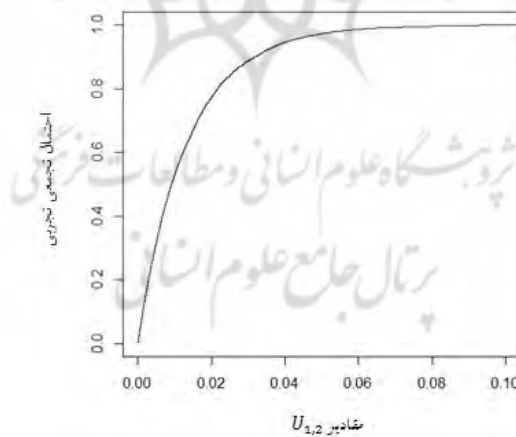
برای صحت مرتبه تبادلی پذیر جزئی دنباله  $C$ ، فرضیه صفر «تبادل پذیری جزئی با مرتبه وابستگی ۱» را در مقابل فرضیه «تبادل پذیری جزئی با مرتبه وابستگی ۲» می آزماییم. مقدار آماره آزمون (۸) با  $k = 1$ ، برابر با  $0/005$  می باشد که تقریباً مقداری کوچک است. پس می توان فرضیه صفر را پذیرفت. برای اطمینان از صحت این ادعا، با استفاده از آماره آزمون (۸)، آزمون مونت کارلو انجام می شود.  $p$ -مقدار برابر با  $0/067$  است. بنابراین در سطح معنی داری  $0/05$  فرضیه صفر پذیرفته می شود. آزمون دیگر، آزمون نسبت درستنمایی با استفاده از آماره آزمون (۱۰) که در آن  $k_1 = 1$  و  $k_2 = 2$  می باشد. مقدار این آماره آزمون برای دنباله  $C$  برابر با  $0/083$  است که در سطح معنی داری  $0/05$  از مقدار کای دو با ۲ درجه آزادی یعنی  $5/99$  کمتر است. بنابراین فرض تبادل پذیری جزئی با مرتبه وابستگی ۱ پذیرفته می شود. برای اطمینان بیشتر آزمون مونت کارلو انجام می شود.  $p$ -مقدار برای این فرضیه برابر با  $0/079$  می باشد. نتیجه می گیریم دنباله  $C$ ، تبادل پذیر جزئی با مرتبه وابستگی ۱ است.

در شکل ۴، نمودار توزیع تجمعی  $I_{1,2}$  به وسیله ۱۰۰۰۰۰ مرتبه شبیه‌سازی با خط تیره و نمودار توزیع تجمعی خی دو با ۲ درجه آزادی را با نقطه‌چین نشان داده شده است. با توجه به شکل‌های ۲ و ۴ نتیجه می‌گیریم، که توزیع مجانبی خی دو برای آماره آزمون در دنباله C، مناسب می‌باشد. زیرا در هر دو شکل دو نمودار بر یکدیگر منطبق شده‌اند.

شکل ۲. توزیع تجمعی خی دو با ۱ درجه آزادی و مونت کارلو  $I_{1,1}$  با ۱۰۰۰۰۰ مرتبه شبیه‌سازی



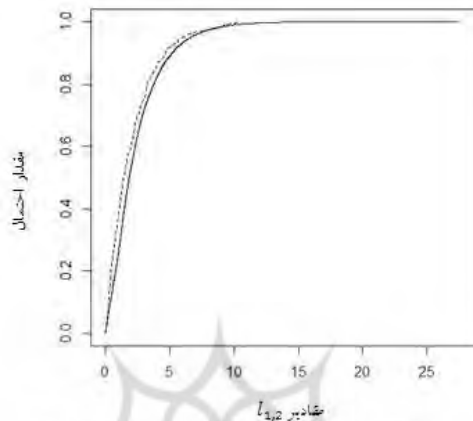
شکل ۳. توزیع تجمعی تجربی مونت کارلو  $U_{1,2}$  با ۱۰۰۰۰۰ مرتبه شبیه‌سازی



حال که مرتبه وابستگی دنباله C مشخص شد، برای تعیین امید ریاضی زمان انتظار برای رسیدن به اولین گردش به طول  $k$ ، طبق روابط (۲۰) یا (۲۱)، باید توزیع آمیزنده مشخص شود. معمولاً در

فرایندهای تبادلی پذیر جزئی، توزیع آمیزنده را توزیع بتا در نظر می‌گیرند. اما توزیع بتا دارای پارامترهایی است که برای به‌دست آوردن امید ریاضی مربوطه نیاز به تعیین آن‌ها می‌باشد.

شکل ۴. توزیع تجمعی کای دو با ۲ درجه آزادی و مونت کارلو  $I_{1,2}$  با ۱۰۰۰۰۰ مرتبه شبیه‌سازی



همان‌طور که در بخش ۴ بیان شد برآورد پارامترهای توزیع بتا را می‌توان به روش ماکزیمم درست‌نمایی و با استفاده از روش کویینتانا و نیوتن<sup>۱</sup> به‌دست آورد. توجه داشته باشید، در این روش باید چند دنباله مستقل و هم‌توزیع  $P_1, \dots, P_k$  که دارای توزیع بتا می‌باشند وجود داشته باشد. در این‌جا فقط یک نمونه از قیمت سکه (دنباله C) در اختیار داریم. تعداد ۳۵ دنباله هر کدام به طول ۳۲۴ با ویژگی تبادلی پذیر جزئی و مرتبه وابستگی ۱ مانند دنباله C شبیه‌سازی می‌کنیم. براساس این دنباله‌ها  $P_1, \dots, P_k$  ساخته می‌شوند. برآورد ماکزیمم درست‌نمایی پارامترهای توزیع بتا محاسبه می‌گردند. مقدار برآورد شده این پارامترها عبارتند از

$$\hat{a}_1 = 9, \quad \hat{b}_1 = 20, \quad \hat{a}_2 = 29, \quad \hat{b}_2 = 58$$

حال با توجه به مقادیر پارامترها می‌توان متوسط تعداد ماه‌های مورد انتظار برای رسیدن به اولین زمانی که k مرتبه قیمت سکه به طور متوالی افزایش یابد را با استفاده از (۲۰) به‌دست آوریم. مقادیر برای طول گردش‌های موجود در دنباله C با استفاده از رابطه (۲۰) و میانگین تجربی تعداد ماه‌ها برای اولین زمان رسیدن به گردش با طول‌های موجود در دنباله C با در نظر گرفتن وضعیت اولیه صفر، در جدول ۱ محاسبه شده است.

1. Quintana FA. And Newton MA. (1999)

جدول ۱. امید ریاضی و میانگین تجربی اولین زمان قابل انتظار برای مشاهده گردش‌هایی به طول  $k$ 

$k$	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۴
$E(U_k   X_1 = 0)$	۴	۷	۱۳	۲۱	۳۳	۵۳	۸۴	۱۳۴	۲۱۳	۱۴۴۸
میانگین تجربی	۵	۹	۱۵	۲۰	۳۳	۳۸	۵۷	۱۰۳	۱۵۵	۳۰۴

همان طور که مشاهده می‌شود، میانگین تجربی دنباله  $C$  با امید ریاضی اولین زمان انتظار برای مشاهده گردش‌هایی با طول‌های ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ تقریباً برابر هستند. یکی از دلایلی که این دو مقدار برای گردش‌هایی با طول‌های ۷ به بعد نزدیک به هم نیستند، این است که احتمال وقوع گردش‌هایی با این طول‌ها در چنین دنباله‌هایی کم است، خصوصاً گردش‌های با طول ۱۴ که احتمال وقوع آن با این تعداد ۱ و ۰ در یک دنباله تبادل‌پذیر جزئی بسیار ناچیز است. دلیل دیگر وابستگی از مرتبه ۱ در دنباله تبادل‌پذیر جزئی است. چون امید ریاضی و میانگین تجربی برای گردش‌هایی به طول ۲ تا ۶ در جدول ۱ تقریباً برابر هستند. می‌توان با استفاده از این امید ریاضی، زمان انتظار برای رسیدن به  $k = 2, 3, 4, 5, 6$  ماه افزایش قیمت را به طور متوالی به دست آورد. بدین مفهوم که اگر هر زمانی قیمت سکه کاهش یافت، یعنی مقدار صفر را مشاهده کردیم (چون اولین وضعیت صفر در نظر گرفته شده است)، به طور متوسط  $E(U_k | X_1 = 0)$  ماه باید انتظار کشید تا در پایان این انتظار  $k$  ماه متوالی قیمت سکه افزایش یابد. به عنوان مثال، اگر هم اکنون کاهش قیمت سکه را مشاهده کنیم، باید به طور متوسط سیزدهم ۱۳ ماه انتظار بکشیم تا در ۴ ماه متوالی آخر این ۱۳ ماه افزایش قیمت سکه را شاهد باشیم.

## ۷. نتیجه‌گیری

در این مقاله دنباله‌ای دودویی از افزایش و کاهش قیمت سکه را محاسبه و صحت تبادل‌پذیری جزئی و مرتبه وابستگی آن را با استفاده از آزمون تبادل‌پذیری جزئی و آزمون نسبت درست‌نمایی مورد ارزیابی قرار دادیم. با در نظر گرفتن ماتریس توزیع بتا و ماتریس فراوانی انتقال از روی مشاهدات، پارامترهای توزیع تغییر وضعیت بتا براساس روش گفته شده در بخش ۴ برآورد شد. نتایج نشان می‌دهد که داده‌های دودویی تبادل‌پذیر جزئی از مرتبه یک هستند. با استفاده از مقادیر برآورد شده پارامترها، امید ریاضی زمان انتظار برای رسیدن به اولین گردش موفقیت با طول‌های مختلف را به صورت نظری و تجربی محاسبه و مقایسه کردیم. نتایج در جدول ۱ نشان می‌دهد که به دلیل تبادل‌پذیری جزئی داده‌ها از مرتبه یک، روش برای متوسط زمان انتظار مشاهده طول‌های روند صعودی تا ۶ ماه بخوبی با میانگین تجربی برابری می‌کند، اما برای بیش از ۶ ماه برآوردها اختلاف دارند که این به خاطر وابستگی مرتبه ۱ در تبادل‌پذیر بودن داده‌ها می‌باشد. بنابراین براساس داده‌های موجود انتظار می‌رود که دوره‌های افزایش نرخ سکه با این روش حداکثر تا شش ماه قابل پیش‌بینی باشد. پس با این روش می‌توان متوسط زمان (ماه) انتظار برای مشاهده ۲ الی ۶ ماه افزایش متوالی قیمت سکه را پیش‌بینی کرد.



## منابع

- Balakrishnan, N. and Koutras, M.V. (2002), *Runs and Scans with Applications*, Wiley Series in Probability and Statistics.
- Billingsley, P. (1961), *Statistical Inference for Markov Processes*, University of Chicago Press, Chicago.
- De Finetti B., *Funzione Caratteristica di un Fenomeno Allatorio and Attidella R.* (1931), *Accademia Nazionale dei Lincii Ser. 6, Memorie, Classe di Scienze, Fisiche, Matematiche e Naturali*, 4, 251–299.
- De Finetti, B. (1974), *Probability, Induction and Statistics*, New York, John Wiley and Sons.
- Diaconis, P. and Freedman, D. (1980), “De Finetti’s Theorem for Markov chains”, *The Annals of Probability*, 8, 115–130.
- Diaconis, P. and Freedman, D. (1980), “Finite Exchangeable Sequences”, *The Annals of Probability*, 8, 745–764.
- Eryilmaz, S. (2005), “The Longest Run Statistic Associated with Exchangeable Binary Variables”, *Turkish Journal of Engineering and Environmental Sciences*, 29, 105–111.
- Eryilmaz, S. (2008), “Distribution of Runs in a Sequence of Exchangeable Multi-State Trials”, *Statistics and Probability Letters*, 78, 1505–1513.
- Eryilmaz, S. (2009), “Mean Success Run Length”, *Journal of the Korean Statistical Society*, 38: 65–71.
- Eryilmaz, S. (2011), “Joint Distribution of Run Statistics in Partially Exchangeable Processes”, *Statistics and Probability Letters*, 81, 163–168.
- Eryilmaz, S. and Demir, S. (2007), “Success Runs in a Sequence of Exchangeable Binary Trials”, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 137, 2954–2963.
- Eryilmaz, S. and Yalcin, F. (2011), “Distribution of Run Statistics in Partially Exchangeable Processes”, *Metrika*, 73, 293–304.
- Fu, J. C. and Lou, W. Y. W. (2003), “Distribution Theory of Runs and Patterns and its Applications, A Finite Markov Chain Imbedding Technique”, *World Scientific Publishing*.
- Johnson, N. L., Kotz, S. and Balakrishnan, N. (1995), *Beta Distributions, Continuous Univariate Distributions*, 2nd Edition, New York, John Wiley.
- Katz, R. (1981), “On Some Criteria for Estimating the Order of a Markov Chain”, *Technometrics*, 23, 243–249.
- Makri, F. S., Philippou, A. N. and Psillakis, Z. M. (2007), “Shortest and the Longest Length of Success Runs in Binary Sequences”, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 137, 2226–2239.
- Martin, J. (1967), *Bayesian Decision Processes and Markov chain*, New York, John Wiley and Sons.
- Meshkani, M. R. and Billard, L. (1992), “Empirical Bayes Estimators for a Finite Markov Chain”, *Biometrika*, 79, 185–193.
- Quintana, F. A. and Newton, M. A. (1998), “Assessing the Order of Dependence for Partially Exchangeable Data”, *Journal of the American Statistical Association*, 93(441), 194–202.

Quintana, F. A. and Newton, M. A. (1999), "Parametric Partially Exchangeable Models for Multiple Binary Sequences", *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, 13, 55-76.

