

## قطب الدین شیرازی، نیریزی و اصول موضوعه هندسه اقلیدس<sup>۱</sup>

فاطمه دوست قرین<sup>۲</sup>

### چکیده

کتاب اصول اقلیدس با مقدمه ای شامل تعاریف، اصول موضوعه و علوم متعارفه (بدیهیات) آغاز شده است؛ پنج اصل موضوعه، در علم هندسه، توسط اقلیدس بدون هیچ گونه توضیح و استدلالی ارائه شده است؛ اما با توجه به اهمیت اصول موضوعه که پایه‌های اساسی برای اثبات قضایای هندسی هستند، بعضی از شارحان و مترجمان کتاب اصول اقلیدس برخی از اصول موضوعه را توضیح و بعضی دیگر را به گونه‌ای اثبات کرده‌اند. قطب الدین شیرازی و حاتم بن فضل نیریزی از جمله مترجمانی هستند که توضیح بعضی از اصول موضوعه و اثبات برخی دیگر را ضروری دانسته‌اند. مقاله حاضر به مقایسه روش قطب الدین شیرازی و روش توسط فضل بن حاتم نیریزی، یکی از شارحان متقدم کتاب اصول اقلیدس، می‌پردازد.

**کلیدواژه‌ها:** اصول اقلیدس، اصول موضوعه، ترجمه اصول، فضل بن حاتم نیریزی، قطب الدین شیرازی، هندسه

### مقدمه

کتاب اصول اقلیدس که گاهی آن را به نام مؤلفش "کتاب اقلیدس" نیز می‌نامند از کتب مهم دوره اسلامی در علم هندسه بوده است که دانشمندان مسلمان علاوه بر ترجمه آن، توضیحات مهم و مفیدی بر آن افزوده‌اند.

قطب الدین شیرازی (۶۳۴-۷۱۰ ق)، از مترجمان اصول اقلیدس است که ترجمه خود را با توجه به ترجمه حجاج بن یوسف بن مطر و اسحاق بن حنین (۲۸۹ق/ ۹۱۰م)

۱. دریافت مقاله: ۱۳۹۱/۰۸/۲۴ - پذیرش نهایی: ۱۳۹۲/۰۲/۲۳

۲. دکترای تاریخ و تمدن ملل اسلامی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران، ایران. رایانامه: Gharin.math@gmail.com

و تحریر اصول اقلیدس خواجه نصیرالدین طوسی (۵۹۷/۶۷۲ق) انجام داده است.<sup>۱</sup> وی به توضیح و یا اثبات اصول موضوعه، که متون مذکور فاقد آن است، پرداخته است؛ بنابراین توضیحات و راه حل‌های ارائه شده مورد توجه نگارنده قرار گرفت تا با مقایسه آن با توضیحات حداقل یکی از شارحان متقدم اصول اقلیدس، بتوان به نحوه نگرش ایشان به اصول موضوعه پی برد. از میان دانشمندان پیشگام، فضل بن حاتم نیریزی است که در نیمه قرن سوم و اوایل قرن چهارم هجری می‌زیسته و در سال ۳۱۰ هجری وفات یافته است (ابن ندیم، ص ۳۸۹). وی یکی از نخستین ریاضی‌دانان دوره اسلامی بود که شرحی بر حداقل ده مقاله اول اصول نوشت. او شرح خود را بر ترجمه اصول اقلیدس حجاج بن یوسف مطر نوشته که از نظر تاریخ ریاضیات اسلامی و یونانی بسیار مهم است زیرا در آن قسمت‌هایی از شرح اصول هرون اسکندرانی<sup>۲</sup> (قرن اول میلادی) و سیمپلیکیوس<sup>۳</sup> (قرن ششم میلادی) و آغانیس<sup>۴</sup> نقل شده است که متون یونانی این شرح‌ها از دست رفته است (هوخندایک<sup>۵</sup>، ص ۶۳).

### اصول موضوعه

هر علمی مشتمل بر شماری از قضایاست که اثبات آنها در آن علم امکان پذیر نیست، اما مجموعه قضایایی که در آن علم اثبات می‌گردد، در آغاز متکی به آن قضایای اثبات نشده است. چنین قضایایی در آن علم خاص، اصول موضوعه به شمار می‌روند. اصول موضوعه به بیان ارسطو از مبادی شناخت علمی به شمار می‌آید (Aristotal, 9) که هر کس به آموختن دانشی می‌پردازد باید تا جایی که به آن دانش ارتباط پیدا می‌کند، شناختی در آن حاصل کند (ibid, 25).

اصل موضوع قضیه ای است کلی و غیر بدیهی که ذاتاً بی نیاز از اثبات نیست اما در دانشی خاص بدون استدلال پذیرفته می‌شود و استنتاج احکام دیگر بر پایه آن صورت

۱ برای آگاهی بیشتر از مقایسه ترجمه اصول اقلیدس قطب‌الدین شیرازی و ترجمه‌ها و تحریر ذکر شده، مراجعه کنید به مقاله نگارنده با عنوان "نگاهی به ترجمه اصول اقلیدس قطب‌الدین شیرازی" در مجله تاریخ علم دانشگاه تهران که در دست چاپ است.

2 Heron Alexandria

3 Simplicius

4 Aganis

5 Hogendijk

می‌گیرد. چنین قضیه‌ای در علمی که آن را اصل می‌گیرد قابل اثبات نیست زیرا اثبات آن مبتنی بر مقدماتی بیرون از حوزه آن علم است، و اگر فرض شود که چنین مقدماتی در آن علم وجود دارد، همانها را باید اصل تلقی کرد. بدین گونه هر نظام علمی یا مجموعه استنتاجی دارای قضایایی ویژه خود است که در آن نظام از درستی آنها نمی‌توان بحث کرد یعنی نمی‌توان آنها را به قضایای دیگری از همان مجموعه ارجاع داد. بنابراین کسی که به آن نظام علمی می‌پردازد ناگزیر است که آن قضایای بنیادی را بی-مناقشه به عنوان اصل موضوع بپذیرد (ibid, 26).

نمونه‌ای از اصول موضوعه، اصول پنج‌گانه‌ای است که اقلیدس در علم هندسه مطرح ساخته است که از این قرارند: ۱. از هر دو نقطه فقط یک خط راست می‌گذرد. ۲. هر خط راست متناهی را می‌توان به صورت خط راست امتداد داد. ۳. به هر مرکز و هر شعاع می‌توان دایره‌ای رسم کرد. ۴. همه زوایای قائمه با هم مساوی هستند. ۵. اگر دو خط راست را خطی راست قطع کند و مجموع دو زاویه متقابل داخلی کمتر از دو قائمه باشد، آن دو خط راست متقاطعند (Euclid, 2).

اصول موضوعه‌ای که پذیرش آنها آسان نباشد مصادره نامیده می‌شوند. مصادره اصلی است که متعلم نسبت به درستی یا نادرستی آنها گمانی ندارد یا آنکه گمان کند آن اصل نادرست است. بنابراین، با آنکه مصادره نوعی از اصول موضوعه است و در آغاز علم بدون استدلال پذیرفته می‌شود، اصطلاح اصول موضوعه اغلب به قضایایی اطلاق می‌شود که به درستی آنها گمان می‌رود (Aristotal, 27). فارابی مفهوم مصادره را بسط داده، آن را علاوه بر مقدماتی که در علم دیگری اثبات پذیرند، شامل قضایایی نیز دانسته است که از مسائل علم مورد بحث‌اند و در مواضع دیگری از همان علم اثبات می‌شوند، اما متعلم چون در آغاز نمی‌تواند ادله درستی آنها را فراگیرد، آنها را به عنوان مبادی می‌پذیرد (فارابی، ۸۸، ۹۰). ابن‌سینا نیز می‌گوید آنچه در مفهوم مصادره بر آن تأکید می‌شود، این است که متعلم گمانی بر خلاف گفته معلم داشته باشد؛ از این رو می‌توان گفت مصادره مطلبی است که متعلم آن را به سختی می‌پذیرد، گرچه هیچ گمانی هم نداشته باشد؛ و به این اعتبار، هم شامل مقدمات علم است و هم شامل مسائلی از علم که از متعلم خواسته می‌شود تا آنها را پیش از آنکه در جای خود تبیین شوند، مبنای استنتاج قرار دهد. به همین گونه یک مطلب واحد که درستی آن فی‌نفسه روشن است،

می‌تواند به اعتباری اصل موضوع، و به اعتبار دیگر مصادره شمرده شود (ابن سینا، ۱۱۱، ۱۱۴-۱۱۵).

فارابی با نسبی شمردن مفهوم مصادره، آن را به مقدمات بدیهی نیز، آنگاه که با شک و انکار تلقی شوند، تعمیم داده است. آنچه از اصول متعارفه به شمار می‌آید، برای متعلمی که دچار آفات ذهنی است و درستی آنها را در نمی‌یابد، بهتر است در قالب مصادره طرح شود تا او به تدریج با درک اصول بدیهی خو بگیرد (فارابی، همانجا). برخی از ریاضیدانان اسلامی اصول موضوعه را محدود به نوعی از مبادی دانسته‌اند که اثبات آنها در علم دیگری ضرورت می‌پذیرد. از این رو، مصادرات را قضایایی تعریف کرده‌اند که مبادی علم را تشکیل می‌دهند، اما نه از قضایای اولی یا اصول متعارف‌اند و نه از قضایایی که در علم دیگری به اثبات می‌رسند، یعنی اصول موضوعه (نک: خیام، ۴؛ برای کاربردهای گوناگون این اصطلاح، نک: نصیرالدین طوسی، «تحریرالکره...»، ۶؛ همو، «تحریر مانالوس»، ۴).

یکی از نمونه‌های مبادی علوم که عنوان مصادره بر آن اطلاق شده، اصل پنجم اقلیدس در هندسه است، بدین قرار که «هرگاه دو خط راست را خط سومی قطع کند، به طوری که مجموع دو زاویه داخلی واقع در یک سوی خط قاطع کمتر از ۱۸۰ درجه است، تلاقی خواهند کرد». این اصل در شکل متداول‌تر آن چنین بیان می‌شود: «از هر نقطه‌ای می‌توان فقط یک خط راست به موازات خط دیگری رسم کرد» (Euclid, *ibid*). این اصل با آنکه بنیاد هندسه اقلیدسی را تشکیل می‌دهد، گزاره‌ای نیست که همچون اغلب اصول موضوعه در دانشی دیگر به اثبات رسیده باشد. به همین دلیل، از دیرباز این اشکال را برانگیخته است که چنین اصل اثبات‌پذیری باید اساساً یکی از مسائل علم هندسه به شمار آید و اگر برای استنتاج پاره‌ای احکام در آغاز به عنوان اصل پذیرفته می‌شود، ناگزیر باید در جای دیگری از همین علم درستی آن اثبات گردد، کاری که خود اقلیدس به آن نپرداخته است.

نقطه و خط راست و دایره و زاویه قائمه، پایه‌های هندسه اقلیدس را تشکیل می‌دهند. اصل نخست در عین حال به این معنی نیز هست که میان دو نقطه، تنها یک خط راست می‌توان رسم کرد، و اصل دوم به این معنی است که هر پاره خط راست، در هر یک از دو انتها، تنها در یک راستا می‌تواند امتداد یابد. اصل سوم، از آنجا که در آن از «هر شعاع» سخن گفته شده، مستلزم عدم تناهی فضا است. اصل چهارم از دیدگاه

ریاضیات امروزی زائد شمرده می‌شود، زیرا برابری زوایای قائمه قابل اثبات است، اما باید توجه کرد که این اثبات تنها با فرض یکنواختی فضا و ثابت ماندن زوایا در تغییر مکان ممکن می‌شود. اقلیدس ترجیح داده است به جای توسل به این فرض، برابری زوایای قائمه را اصل موضوع قرار دهد.

در یونان باستان دربارهٔ ضرورت یا عدم ضرورت پذیرفتن این فرض که به شکل چشم‌گیری پیچیده بیان شده است، به عنوان اصل موضوع یا اصل متعارف (اثبات‌ناپذیر یا بی‌نیاز از اثبات)، مناقشات و مجادلات بسیاری جریان داشت. در سده‌های بعد بسیاری کسان دیگر در جهان اسلام، آن را قابل اثبات و بدین‌سان به عنوان اصل موضوع زائد شمردند و در اقامهٔ برهان بر آن کوشش‌های بسیار کردند. در حقیقت همهٔ آنان که خود را در این تلاش کامیاب یافته‌اند، در جریان اثبات از فرضی بهره‌جسته‌اند که خود با اصل پنجم هم‌ارز بوده است.

از جمله دانشمندان جهان اسلام که به توضیح یا اثبات اصول موضوعه اقلیدس پرداختند، ثابت ابن‌قره بود که دو رساله در اثبات توازی نوشت. وی همچنین رساله‌ای دربارهٔ علت ترتیب ویژهٔ اصول اقلیدس تألیف کرد. نیریزی نیز رساله‌ای در اثبات همین اصل نوشت (قفطی، ۱۱۶-۱۱۷). ابوجعفر خازن مقاله‌ای در اثبات اصل پنجم نوشت. ابن‌هیثم شرحی دربارهٔ اصول موضوعه با عنوان *حل شکوک کتاب اقلیدس فی الاصول* نوشت. وی در این اثر به جای اصل توازی، اصل دیگری هم‌ارز با آن قرار داده است (ابن‌ندیم، ۳۲۵-۳۵۶؛ ابن‌هیثم، ۲۵-۲۶). بیرونی در مقاله‌ای به بررسی اصل توازی پرداخت. *خیام رساله فی شرح ما اشکل من مصادرات اقلیدس* را دربارهٔ اصل توازی و مسائل مربوط به نسبت‌ها نوشت؛ جالب توجه آن است که وی با اشاره به کوشش‌های خازن، شنی، نیریزی و دیگران در اثبات اصل توازی گوید: «هیچ یک از ایشان نتوانسته است برهان درستی بر این موضوع بیاورد، بلکه هر یک از ایشان به فرضی متوسل شده است که اثبات درستی آن از اثبات همین اصل آسان‌تر نیست»، آنگاه خیام طی ۸ گزاره از دیدگاه خود به اثبات اصل توازی می‌پردازد (خیام، ۶، ۱۳-۳۵). اثیرالدین ابهری، کتاب *مفصل اصلاح اصول اقلیدس* را نوشت و در آن به اقامهٔ برهان بر اصل توازی پرداخت. نصیرالدین طوسی رساله‌ای در اثبات اصل توازی با عنوان *الشفایة عن الشک فی الخطوط المتوازیة* دارد. وی در این رساله، نخست با ذکر براهین جوهری، ابن‌هیثم و خیام نشان می‌دهد که آنان در جریان اثبات از اصل دیگری که با اصل توازی هم‌ارز

بوده است، استفاده کرده‌اند و آنگاه به عرضه استدلال خود می‌پردازد. محیی‌الدین مغربی *تحریر اصول اقلیدس فی الاشکال الهندسیة* را تألیف کرد. وی در این تحریر به اثبات اصل توازی کوشیده است (ابن ندیم، ۳۵۳؛ نصیرالدین طوسی، «تحریر المعطیات»، ۲).

### اصول موضوعه از نظر قطب الدین شیرازی و نیریزی

قطب‌الدین شیرازی قبل از پرداختن به اصول موضوعه هندسه اقلیدس به ضرورت تعریف نقطه، خط، صفحه و همچنین لزوم تعیین موقعیت نقطه، خط و سطح می‌پردازد و انطباق نقطه، خط و صفحه را بر نظایر خود از جمله مقدمات اصول موضوعه می‌شمارد: "من می‌گویم واجب آن است که اول وضع کنند که نقطه و خط و سطح مستقیم و مستوی و دایره آن‌چه از ایشان موجود است و ما را هست که تعیین کنیم نقطه بر هر خطی یا سطحی که باشد و فرض کنیم خطی بر هر سطحی که باشد یا گذرنده به نقطه کیف اتفق. و هر یکی از نقطه و خط مستقیم و سطح مستوی بر مثل خویش منطبق شوند... آن‌گاه مقدمات مذکور در اصل وضع کنند" (قطب‌الدین، ۶۳، ۶۴). همچنین وی معتقد است که اکثر اصول موضوعه پنج‌گانه اقلیدس قابل تصدیق است اما به جهت زدودن هرگونه تردیدی در پذیرش آنها می‌توان به توضیح و تبیین آن‌ها پرداخت. "و من می‌گویم که اکثر این قضایا چنان است که متعلم سلیم الفطره هرچند به حکم صحت فطرت و ذكاء فطنت به آن تصدیق کند، اما در باطن از انکاری خالی نباشد و او را خارخار طلب بیانی باشد، پس از جهت ازاله خارخار متعلمان سلیم الفطره، لایق نمود اشارتی خفیف و ایمائی لطیف به بیان هر یکی کردن بی استعانت به مسائل کتاب" (قطب‌الدین، ۶۴-۶۵). وی برای توضیح بعضی از اصول پنج‌گانه، از تبیین قضایای دیگری استفاده می‌کند که خود به نوعی علاوه بر پنج اصل، از اصول موضوعه هندسه اقلیدسی شمرده شده‌اند.

قطب‌الدین شیرازی نیز از جمله ریاضی‌دانانی است که جایگاه اصل پنجم را در بیان مسائل می‌داند نه در مصادرات: "و از این جهت استادان صناعت مواخذت کرده‌اند بر اقلیدس که آن را در عداد مسائل یاد کردن اولی‌تر از آن که در مصادرات، چه آن را در غیر علم هندسه بیان نتوان کرد و هیچ کس از اهل صناعت بیان آن بی معاونت بعضی از اشکال کتاب نکرده‌اند و از این جهت در اثبات مسائل یاد کنند" (همانجا).

دیدگاه کلی قطب‌الدین دربارهٔ اصول اقلیدس بسیار به دیدگاه نیریزی نزدیک است زیرا نیریزی به طور مفصل توضیح داده است آنچه از اصول موضوعه از نظر استادان معلوم است برای متعلمین مجهول است: «و اما ممکن معلوم عندالاستاذین مجهول عند المتعلمین یحتاج ان یستعمل فی اول التعلیم فان الاشیاء التی تبرهن هی ایضا معلومة عند الاستاذین مجهولة عند المتعلمین...» (نیریزی، ۱۴). علاوه بر آن نیریزی اصل پنجم را به عنوان یکی از قضایای مقالهٔ اول اصول اقلیدس اثبات کرده است.

### مقایسه توضیحات و اثبات اصول موضوعه توسط قطب‌الدین شیرازی و فضل بن حاتم نیریزی<sup>۱</sup>

قطب‌الدین اصل موضوعهٔ اول را چنین توضیح می‌دهد:

۱. از هر دو نقطه  $A$  و  $B$  فقط یک خط راست می‌گذرد. اگر نقطه  $C$  را بر یکی از دو نقطه مثلاً  $A$  منطبق فرض کنیم و  $C$  را به سمت  $B$  حرکت دهیم،  $CB$  خطی راست باشد و نقاط واقع بر  $CB$  همه بر یک راستا باشند. این اصل را نیریزی از قول سیمپلیکیوس این گونه توضیح می‌دهد: می‌توان بین هر دو نقطهٔ مفروض، کوتاه‌ترین فاصله بین آن دو را پیدا کرد و آن فاصله خط مستقیم خواهد بود و امکان ندارد که خط راست از سه نقطه بگذرد مگر آن که نقطهٔ سوم در راستای دو نقطهٔ دیگر باشد.



از مقایسهٔ توضیحات فوق معلوم می‌شود که فرض نمودن نقطه سوم، و اینکه آن نقطه در راستای دو نقطهٔ مفروض است مبنای هر دو توضیح می‌باشد.

۱. برای اطلاع از متن اصول موضوعه نک: دوست قرین، تصحیح و شرح شش مقالهٔ اول از جملهٔ چهارم درهٔ التاج، اثر قطب‌الدین شیرازی، رسالهٔ دکتری، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات تهران، ۱۳۹۱.

قطب الدین اصل دوم را چنین تبیین می‌کند:

۲. خط راست متنهای  $d$  را می‌توان به صورت خط راست نامتنهای  $d'$  امتداد داد. توضیح: نقطه دلخواه  $A$  را در نظر گرفته و به خط  $d$  وصل کنیم، اگر بین خط واصل و خط  $d$  زاویه ای ایجاد نشده باشد که خط راست نامتنهای  $d'$  ایجاد شده و در غیر این صورت، خط واصل را آنقدر حرکت می‌دهیم تا زاویه از بین برود و خط راست نامتنهای  $d'$  پدید آید.

توضیح این اصل نیز بنا به قول سیمپلیکیوس توسط نیریزی به صورت زیر آورده شده است: می‌توان خط راستی را چنان امتداد دهیم که یک خط راست در راستای خودش ایجاد شود، اگر امتداد هر خط با خود خط تشکیل زاویه دهد، در راستای آن خط نیست و در مقابل (یعنی اگر تشکیل زاویه ندهند) متصل به هم و در راستای هم می‌باشند.

تشکیل زاویه بین پاره خط مفروض و خط واصل میان یک نقطه دلخواه و پاره خط مفروض، اساس توضیحات قطب الدین و نیریزی در باره اصل موضوعه دوم است؛ اگرچه اثبات قطب الدین از چیدمانی منطقی‌تر برخوردار است. لازم به ذکر است که منظور از زاویه، زاویه ای به غیر از صفر و  $۱۸۰$  درجه است.

قطب الدین اصل سوم را نیز توضیح می‌دهد:

۳. به هر مرکز و به هر شعاع می‌توان دایره‌ای رسم کرد. نقطه  $A$  و شعاع  $R$  را مفروض در نظر گرفته، و شعاع را حول  $A$  بطور کامل دوران می‌دهیم. شکل ایجاد شده دایره است.

این اصل را نیریزی از سیمپلیکیوس نقل کرده است: در اصل پیشین توضیح داده شد که هر دو نقطه را با خطی مستقیم می‌توان به هم وصل کرد، پس می‌توان یک نقطه را به عنوان مرکز دایره ثابت فرض کرد و نقطه دیگر را حول مرکز، به طور کامل دوران داد تا دایره ایجاد گردد.

همان گونه که مشاهده می‌شود هر دو توضیح بر اساس در نظر گرفتن یک نقطه ثابت به عنوان مرکز و دوران پاره خط مفروض وصل شده به آن نقطه است. توضیحات فوق درباره سه اصل اول، حاکی از آن است که سه اصل فوق، جزء اصول موضوعه هندسه به شمار می‌روند چرا که از طرفی توضیحات مربوطه فقط برای تبیین بیشتر



اصول به کار رفته اند و از سوی دیگر قضایای هندسه اقلیدسی بر مبنای این اصول، شکل گرفته‌اند.

اصل چهارم را قطب الدین براساس انطباق اثبات می‌کند:

۴. همه زوایای قائمه با هم برابرند. فرض می‌کنیم که چهار زاویه  $ABC$  و  $ABD$  و  $EFG$  و  $EFH$  قائمه‌اند؛ اگر نقطه  $B$  را بر  $F$  و  $DC$  را بر  $HG$  منطبق کنیم،  $AB$  نیز بر  $EF$  منطبق می‌گردد. در غیر این صورت  $AB$  بر  $KF$  منطبق می‌گردد. چون:

$$\left. \begin{array}{l} \angle ABD = \angle ABC \\ \angle ABD = \angle KFH \\ \angle ABC = \angle KFG \end{array} \right\} \Rightarrow \angle KFH = \angle KFG$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle EFH > \angle KFH \\ \angle KFH = \angle KFG \end{array} \right\} \Rightarrow \angle EFH > \angle KFG$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle EFH > \angle KFG \\ \angle EFG = \angle EFH \end{array} \right\} \Rightarrow \angle EFG > \angle KFG$$



و این محال است، پس  $AB$  بر  $EF$  منطبق می‌گردد، پس حکم ثابت است. به همین طریق می‌توان ثابت کرد که زاویه مساوی زاویه قائمه، خود قائمه است.

نیریزی این اصل را چنین اثبات کرده است: فرض می‌کنیم که دو زاویه  $ABC$  و  $DEF$  قائمه‌اند؛ می‌خواهیم اثبات کنیم که این دو زاویه مساوی‌اند. اگر آن دو مساوی نباشند و مثلاً  $\angle DEF > \angle ABC$  در این صورت اگر نقطه  $B$  را بر  $E$  و  $A$  را بر  $D$  قرار دهیم  $BC$  داخل زاویه  $DEF$  قرار می‌گیرد و  $BC$  بر خطی مانند  $EK$  منطبق می‌گردد. پس داریم:

$$\angle DEF > \angle DEK \quad (*)$$

حال اگر EG را در راستای FE امتداد دهیم، داریم:

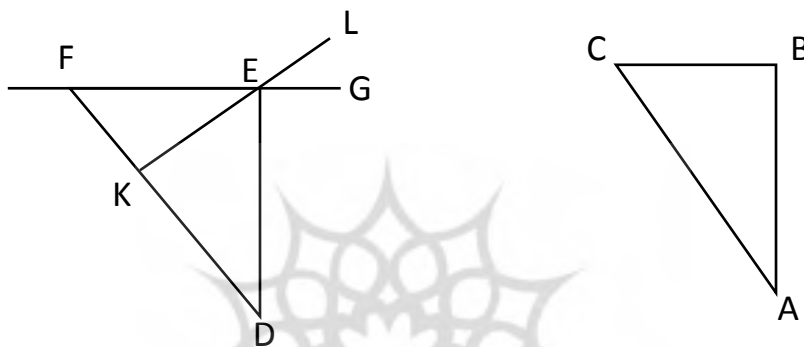
$$DE \perp FG \Rightarrow \angle DEF = \angle DEG \quad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow \angle DEG > \angle DEK \quad (۳)$$

EL را در راستای EK امتداد می‌دهیم؛ پس:

$$DE \perp KL \Rightarrow \angle DEL = \angle DEK \quad (۴)$$

$$(۳) \text{ و } (۴) \Rightarrow \angle DEG > \angle DEL$$



و این غیرممکن است زیرا  $\angle DEG < \angle DEL$ . پس زوایای قائمه با هم برابرند. اساس دو اثبات صورت گرفته در اصل فوق مبتنی بر برهان خلف و منطبق کردن دو زاویه قائمه است با اندکی تفاوت در امتداد دادن یکی از اضلاع، که در ساختار برهان تفاوت معناداری ایجاد نکرده است.

در خصوص اصل چهارم، می‌توان انطباق زاویه قائمه بر زاویه قائمه را مبتنی بر انطباق نقطه بر نقطه و خط بر خط در نظر گرفت که خود از مقدمات اصول موضوعه‌اند، بنابراین اصل چهارم می‌تواند از اصول موضوعه هندسه اقلیدس به شمار آید.

اصل پنجم موضوعه نیز توسط قطب الدین به ترتیب زیر اثبات شده است.

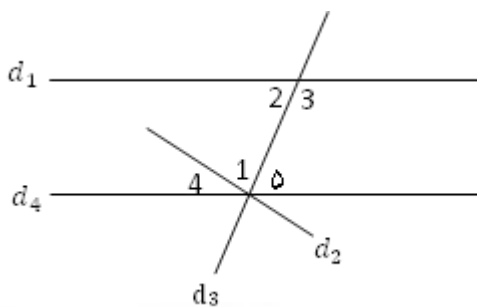
۵. اگر دو خط راست  $d_1$  و  $d_2$  خط راست  $d_3$  را قطع کند و زاویه های متقابل داخلی کمتر از دوقائمه درجه باشد،  $d_1$  و  $d_2$  متقاطعند.

اثبات:

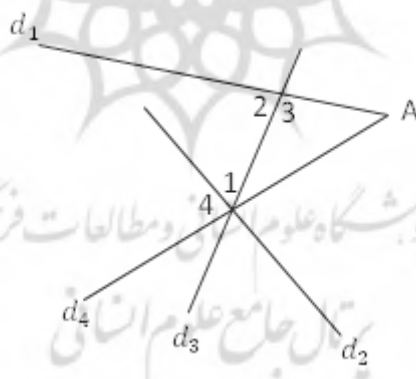
$$\left. \begin{array}{l} \angle 2 + \angle 1 < 180^\circ \\ \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle 3 > \angle 1$$

زاویه ۱ + ۴ مساوی زاویه ۳ روی زاویه ۱ می‌سازیم خط  $d_4$  پدید می‌آید. پس در این صورت یا  $d_4 \parallel d_1$  یا  $d_4 \nparallel d_1$

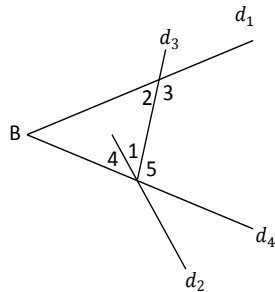
$$\left. \begin{array}{l} \text{اگر } d_4 \parallel d_1 \\ d_4 \nparallel d_2 \end{array} \right\} \Rightarrow d_1 \nparallel d_2 \quad (1)$$



$$\left. \begin{array}{l} \text{اگر } d_4 \nparallel d_1 \text{ و } d_1 \cap d_4 = A \\ \text{چون } \angle 3 = \angle 1 + \angle 4 \\ \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ \\ \angle 1 + \angle 4 + \angle 5 = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle 2 = \angle 5 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} d_4 \parallel d_1 \\ d_4 \nparallel d_2 \end{array} \right\} \Rightarrow d_1 \nparallel d_2 \quad (2)$$



$$\text{اگر } d_4 \nparallel d_1 \text{ و } d_1 \cap d_4 = B \xrightarrow{\text{مانند فوق}} d_1 \nparallel d_2 \quad (3)$$



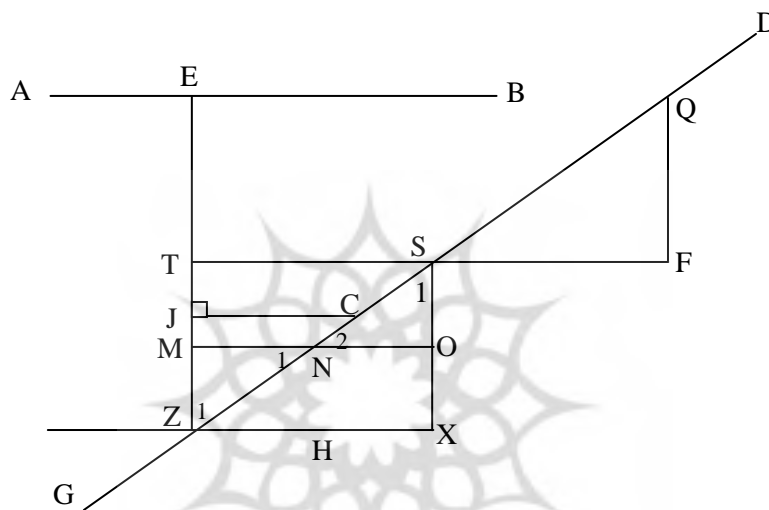
قابل ذکر است که با توجه به رابطه‌های ۱، ۲ و ۳ می‌توان دریافت که قطب الدین در حقیقت اصل پنجم را با توجه به یک اصل هم ارز اصل پنجم ثابت کرده است، اصلی که می‌گوید: «اگر یکی از دو خط موازی خطی را قطع کند دیگری هم آن را قطع می‌کند». اگرچه به نظر قطب‌الدین توازی دو خط موازی با یک خط با استفاده از برهان خلف قابل اثبات است اما آنچه او ارائه داده است مبنایی کاملاً شهودی دارد: "هر دو خط مستقیم که خطی مستقیم میان ایشان افتد و موازی ایشان باشد، ایشان متوازی باشند. چه اگر متلاقی شوند، لازم آید که بعضی از احدالمتوازیین در یک جانب افتد از آن دیگر و بعضی در جانبی دیگر، تا یک خط، موازی دو خط متلاقی باشد و این نیز باطل است، چه ابعاد او با یکی از ایشان به ضرورت مختلف گردد" (قطب‌الدین، ۷۱). یعنی اگر فرض کنیم  $d$  و  $d''$  با  $d'$  موازیند ولی خود با هم متقاطعند. در این صورت فاصله همه نقاط  $d$  با  $d'$  یکسان نیست و این خلاف موازی بودن آن دو است.

$d$  \_\_\_\_\_  
 $d'$  \_\_\_\_\_  
 $d''$  \_\_\_\_\_

جالب توجه است که قطب‌الدین اگر چه همگام با برخی صاحب‌نظران می‌گوید اصل پنجم را باید در زمره مسائل هندسه مطرح کرد و به کمک دیگر مسائل حل نمود همچنان که دیگران چنین کرده‌اند (همو، ۷۰)، خود تلاش نموده است این اصل را بدون مراجعه به مسائل دیگر اثبات نماید: "ما را به توفیق باری، عزّ اسمہ ... وجهی روی نمود خوب و تام، چون وجه بدر لیلۃ التمام بی استعانت به مسائل کتاب" (همانجا) شاید به این علت است که اثبات او بر مبنای اثبات اصلی هم‌ارز با اصل پنجم است که آن اصل هم‌ارز را هم به صورت کاملاً شهودی مطرح کرده است.

اما نیریزی اثبات این اصل موضوعه را به عنوان قضیه بیست و نهم مقاله اول اصول اقلیدس و به نقل از اغانیس آورده است و به این ترتیب به نوعی آن را در زمره مسائل دانسته است:

فرض می‌کنیم که دو خط راست  $AB$  و  $GD$  را خط  $EZ$  قطع کرده باشد به طوری که مجموع دو زاویه متقابل داخلی  $E_1$  و  $Z_1$  کمتر از  $180^\circ$  درجه باشد، در این صورت  $AB$  و  $GD$  متوازی نیستند.



اثبات: از نقطه  $Z$  خطی را به موازات  $AB$  رسم می‌کنیم و آن را  $ZH$  می‌نامیم. روی خط  $GD$  نقطه دلخواه  $C$  را در نظر گرفته و از آن عمود  $CJ$  را بر  $EZ$  رسم می‌کنیم. حال وسط پاره خط  $EZ$  را بدست آورده  $T$  می‌نامیم و وسط  $TZ$  را  $M$  می‌نامیم؛ پس

$$TM = \frac{1}{2} ZE$$

از  $M$  خط  $MN$  را به موازات  $AB$  رسم می‌کنیم،  $ZN$  را به اندازه چهار برابرش امتداد می‌دهیم تا نقطه  $Q$  بدست آید؛ حال ثابت می‌کنیم که  $AB$  و  $GD$  در نقطه  $Q$  متقاطعند.  $ZN$  را به اندازه خودش امتداد می‌دهیم تا نقطه  $S$  بدست آید، از  $S$  پاره خط  $SX$  را موازی و مساوی  $TZ$  رسم می‌کنیم. پاره خط  $MN$  را امتداد می‌دهیم تا پاره خط  $SX$  را در نقطه  $O$  قطع کند. حال در دو مثلث  $ZMN$  و  $NOS$  داریم:

$$\left. \begin{array}{l} ZN = NS \\ \angle N_1 = \angle N_2 \text{ متقابل به رأس} \\ \angle Z_1 = \angle S_1 \text{ متبادل داخلی} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ZMN = \Delta NOS \Rightarrow ZM = SO \quad (1)$$

$$\text{دو ضلع روبروی متوازی الاضلاع } ZMOX \text{ از طرفی } ZM = OX \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow SO = OX \Rightarrow SX = 2ZM$$

پس اگر از نقطه Q خطی موازی EZ رسم کنیم تا امتداد TS را در F قطع کند، در این صورت داریم:

$$\left. \begin{array}{l} SQ = ZS \\ \angle TSZ = \angle QSF \text{ متقابل به رأس} \\ \angle FQS = \angle TZS \text{ متبادل داخلی} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta QFS = \Delta SZT \Rightarrow FQ = ZT$$

$$\left. \begin{array}{l} EZ \text{ وسط } T \Rightarrow TE = ZT \end{array} \right\} \Rightarrow FQ = TE$$

(4)

$$FQ \parallel TE$$

$$(3) \text{ و } (4) \Rightarrow FQTE \text{ متوازی الاضلاع} \Rightarrow EQ = TF$$

پس خط AB خط FQ را در نقطه Q قطع می کند، یعنی  $AB \parallel GD$

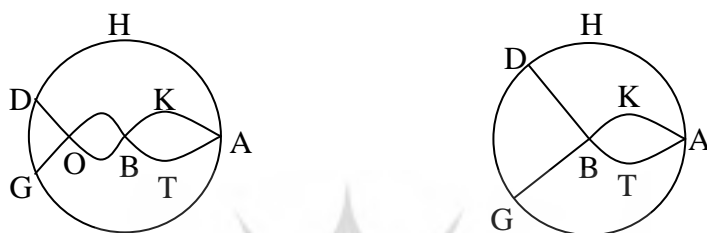
همانطور که مشاهده می شود نحوه اثبات ارائه شده توسط قطب الدین و نیریزی در اصل پنجم، بطور قابل ملاحظه ای با هم تفاوت دارند و نحوه اثبات نیریزی به نقل از آغانیس مبتنی بر هم نهستی مثلث ها و خواص متوازی الاضلاع است که خود قضایایی مبتنی بر اصول موضوعه اند، بنابراین می توان این اصل را جزء مسائل هندسی به شمار آورد.

علاوه بر پنج اصل موضوعه یاد شده، اصول دیگری به عنوان مقدماتی برای اصول موضوعه از جانب برخی شارحان از جمله قطب الدین و نیریزی نیز مطرح شده است که در ادامه به بیان دو اصل اضافه شده از منظر قطب الدین و نیریزی پرداخته می شود.

۶. دو خط راست بر یک سطح محیط نمی شوند.

قطب الدین شیرازی این اصل را پس از توضیح این اصل که قطر، محیط دایره را نصف می‌کند، با روش برهان خلف اثبات نموده است.

فرض می‌کنیم که  $AKB$  و  $ATB$  دو خط راست محیط به سطح  $AB$  هستند. به مرکز  $B$  و به شعاع  $BA$  دایره  $AHG$  را رسم می‌کنیم و  $AKB$  و  $ATB$  را در جهت  $B$  امتداد می‌دهیم؛ اگر محل تقاطع این دو خط روی محیط دایره نباشد در این صورت کمان  $AHDG$  از کمان  $AHD$  بزرگتر می‌شود در حالی که هر دو نصف محیط دایره‌اند.



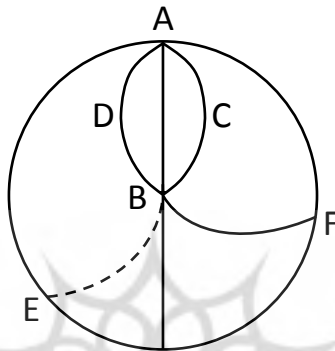
و اگر محل تقاطع  $AKB$  و  $ATB$  روی محیط دایره باشند، در این صورت زاویه محصور بین قطر و نصف محیط دایره بزرگتر از زاویه محصور بین همان قطر و نصف محیط دیگر دایره می‌گردد که این خلاف است. پس دو خط راست بر یک سطح محیط نمی‌شوند.



روش دیگر: اگر دو خط راست به سطحی محیط شوند در آن صورت هر یک از آن دو از دیگری کوتاهتر است، چون خط راست کوتاهترین فاصله بین دو نقطه است و این محال است.

نیریزی به نقل از سمپلیکیوس می‌گوید که این اصل در نسخه‌های قدیمی نیست و شاید به علت روشن بودن دلیل آن باشد و به همین علت رسماً اصول موضوعه را پنج اصل می‌دانند و این اصل را چنین اثبات کرده‌اند:

فرض می‌کنیم دو پاره‌خط  $ACB$  و  $ADB$  بر یک سطح محیط باشند. به مرکز  $B$  و شعاع  $BA$  دایره ای رسم می‌کنیم،  $ACB$  و  $ADB$  را امتداد می‌دهیم تا محیط دایره را به ترتیب در  $E$  و  $F$  قطع کنند. پس  $ACBE$  و  $ADBF$  قطرهای دایره‌اند، بنابراین کمان  $AF$  باید با کمان  $AFE$  برابر باشد چون هر دو نصف محیط دایره‌اند، در صورتی که کمان  $AF$  کوچکتر از کمان  $AFE$  است. پس دو پاره‌خط بر یک سطح محیط نمی‌شوند.

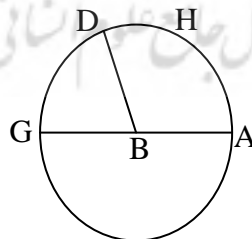


مقایسه: اثبات‌های ارائه شده بسیار شبیه می‌باشد و اثبات حالت‌های مختلف در نظر گرفته شده توسط قطب الدین، در اصل، تفاوتی با اثبات حالت کلی ندارد. قطب الدین شیرازی از اصل اخیر به عنوان مقدمه‌ای برای ارائه اصل زیر بهره برده است.

۷. خط راست  $AB$  می‌تواند فقط در راستای یکی از دو خط غیر همراستای  $DB$  و  $GB$  قرار گیرد.

برهان خلف: فرض کنیم خط  $AB$  در راستای دو خط  $BD$  و  $BG$  قرار دارد و

$$BG < BD$$



به مرکز  $B$  و به شعاع  $BG$  دایره ای رسم می‌کنیم پس:

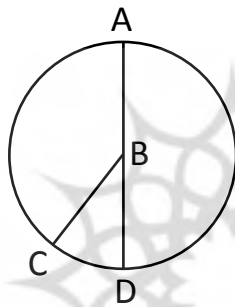


$$\left. \begin{array}{l} \text{قطر } DBA \Rightarrow BA \text{ در راستای } BD \\ \text{قطر } GBA \Rightarrow BA \text{ در راستای } GB \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{ADG}$$

که محال است.

و اما نیریزی هم، خود، به اثبات این اصل، پس از توضیح اصل موضوعهٔ دوم پرداخته است:

پاره خط مفروض  $AB$  را در نظر گرفته و فرض می‌کنیم بتوان دو خط راست  $ABD$  و  $ABC$  را رسم کرد. به مرکز  $B$  و شعاع  $BA$  دایرهٔ  $ADC$  را رسم می‌کنیم که در این صورت  $ABD$  و  $ABC$  قطرهای این دایره‌اند. پس کمان  $ACD$  باید با کمان  $AC$  برابر باشد و این غیرممکن است.



مقایسه: طریقه اثبات این اصل توسط قطب الدین شیرازی و نیریزی یکسان است.

### نتیجه

به نظر می‌رسد که چهار اصل اول را می‌توان به واقع از اصول موضوعهٔ هندسه به شمار آورد، همانگونه که توضیحات نسبتاً مشابه قطب‌الدین و نیریزی دربارهٔ آنها و همچنین مقدمات مربوط به آنها، مبین این مطلب است. در مورد اصل چالش برانگیز پنجم، از یک سو با توجه به راه حل‌های ارائه شده می‌توان آن را جزء مصادرات شمرد که به عنوان زیر مجموعه‌ای از اصول موضوعه، اثبات ناپذیرند، چرا که آن راه حل‌ها، خود مبتنی بر استفاده از اصلی هم‌ارز اصل پنجم است همچون راه حل ارائه شده توسط قطب‌الدین شیرازی و از سوی دیگر آن را جزء مسائل هندسی شمرد که با استفاده از مسائل و قضایای هندسی می‌توان آن را اثبات نمود همان‌گونه که نیریزی به نقل از آغانیس این اصل را جزء مسائل محسوب و اثبات کرده است.

به نظر نگارنده با توجه به اهمیت استدلال استقرایی که مبتنی بر شهود است می-توان روش اثبات شهودی توازی دو خط موازی با یک خط- در یک صفحه- را به عنوان یک روش مستدل هندسی پذیرفت و در نتیجه اصل پنجم را از اصول موضوعه هندسه اقلیدسی به شمار آورد.

## منابع

۱. ابن سینا، منطق، برهان، به کوشش ابوالعلا عینی، قاهره، ۱۳۷۵ق/۱۹۵۶م.
۲. ابن ندیم، محمد، الفهرست، به کوشش رضا تجدد، تهران، ۱۳۵۰ ش.
۳. ابن هیثم، حسن بن حسن، کتاب فی حل شکوک کتاب اقلیدس فی الاصول و شرح معاینه، فرانکفورت: معهد تاریخ العلوم العربیة و الاسلامیة، ۱۴۰۵ ق.
۴. خیام، رساله فی شرح ما اشکل من مصادرات اقلیدس، به کوشش عبدالحمید صبره، اسکندریه، ۱۹۶۱ م.
۵. دوست قرین، فاطمه، تصحیح و شرح شش مقاله اول از جمله چهارم دره التاج، اثر قطب الدین شیرازی (د. ۷۱۰ هـ)، رساله دکتری، دانشگاه آزاد اسلامی- واحد علوم و تحقیقات، ۱۳۹۱،
۶. فارابی، محمد، «البرهان»، المنطق، به کوشش ماجد فخری، بیروت، ۱۹۸۷ م.
۷. قربانی، ابوالقاسم، زندگی نامه ریاضیدانان دوره اسلامی، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۷۵ ش.
۸. قفطی، علی بن یوسف، تاریخ الحکماء و هو مختصر الزوزنی المسمى بالمنتخبات الملتقطات من کتاب اخبار العلماء باخبار الحکماء، چاپ گولیوس لیبرت، لایپزیک، ۱۹۰۳ م.
۹. نصیرالدین طوسی، محمد، «تحریر الکره و الاسطوانه»، مجموع الرسائل، حیدرآباد دکن، ۱۳۵۹ ق.
۱۰. نصیرالدین طوسی، محمد، «تحریر مانالوس»، مجموع الرسائل، حیدرآباد دکن، ۱۳۵۹ ق.
۱۱. هوخندایک، یان.پ، «تأثیر نی ریزی در غرب»، گزارش کنگره بزرگداشت فضل بن حاتم نی- ریزی، ترجمه محمد باقری، ۱۳۷۸.
12. Aristotal, Aristotle's posterior analytics, tr.E.S.Bouchier, B.A, London. 1901.
13. Euclid, Elements, tr. Th. Heath, 1952, Britannica Great Books.
14. Sezgin, Fuat, *Islamic Mathematics and Astronomy*, vol.14, Publication of the Institute for the History of the Arabic-Islamic Science, Frankfurt, 1997.