

## بررسی میزان دقّت خروج از مرکز مدار زمین - خورشید در ادوار میانه اسلامی

سید محمد مظفری<sup>۱</sup>

(دریافت مقاله: ۱۳۹۰/۰۲/۰۳-پذیرش نهایی: ۱۳۹۰/۱۱/۰۳)

### چکیده

در این پژوهش، سه روش اندازه‌گیری خروج از مرکز مدار زمین- خورشید در اخترشناسی باستان و ادوار میانه، یعنی روش فضول، روش اوساط بروج و روش سه نقطه‌ای، معرفی و میزان دقّت آنها از دو جنبه بررسی می‌شود: اول، محدوده دقّت ذاتی روش و حساسیت آن به مقادیر ورودی و دوم، میزان دقّت از حیث بررسی موردي مقادیر تاریخی به دست آمده در ادوار میانه اسلامی. در جنبه نخست، چنین نتیجه شده است که میزان دقّت ذاتی هر روش از روش پیش از آن بیشتر است و وقوف منجمان ادوار میانه بر این واقعیت به جایگزینی هر روش بر روش متقدم و لاجرم افزایش کاربرد روش سه نقطه‌ای و تبدیل شدن آن به شیوه استاندارد تعیین خروج از مرکز منجر شده بوده است. در جنبه دوم، با بررسی نمونه‌های تاریخی می‌توان دید که (۱) چنانکه مورد انتظار است، میزان واگرایی و خطای میانگین نتایج حاصل از کاربرد روش فضول بیش از دو روش دیگر است؛ اما (۲) اگرچه میزان دقّت روش سه نقطه‌ای بیشتر است، دقیق‌ترین مقادیر مضبوط برای خروج از مرکز متعلق به کاربرد روش فضول است؛ همچنین، (۳) دقیق‌ترین مقدار در ادوار میانه اسلامی متعلق به اندازه‌گیری بیرونی در سال ۱۰۱۶ یزدگردی/۳۸۵ مقدار به کار رفته در زیج‌های مشهور همان دوران متعلق به الخ بیگ، در زیج سلطانی، است، در حالی که سه مقدار متعلق به مروروزی، نیزی و خازنی از کمترین میزان دقّت برخوردار بوده‌اند. (۴) دقّت اندازه‌گیری‌ها در ادوار میانه اسلامی بیش از میزان دقّت اندازه‌گیری کوپرنیک در اوایل سده ۱۶ م بوده است.

**کلید واژه‌ها:** اخترشناسی دوره میانه اسلامی، الگوی خورشیدی، خروج از مرکز، روش اوساط بروج، روش سه نقطه‌ای، روش فصل.

---

۱. عضو هیأت علمی مرکز تحقیقات نجوم و اختوفیزیک مراغه، ایران. رایانه: riaam.ac.ir. Email: mozaffari@riaam.ac.ir

## I. مقدمه

### ۱. الگوی خورشیدی

از دید یک ناظر زمینی چنین به نظر می‌رسد که خورشید در طی دوره زمانی مشخصی مداری دایره شکل را به دور زمین می‌پیماید. اگر ارتفاع خورشید در طی روزهای متوالی (مثلًا با نصب شاخص ساده‌ای بر روی زمین) سنجیده شود، می‌توان دید که خورشید در طی سال یک بار به بیشینه ارتفاع در هنگام گذر نصف‌النهاری می‌رسد (انقلاب تابستانی)، سپس ارتفاع نصف‌النهاری آن در روزهای بعد کاهش می‌یابد تا در زمانی که در آن طول مدت روشنایی روز و شب برابر می‌شود (اعتدال پاییزی)، سپس کاهش ارتفاع ادامه می‌یابد تا به کمترین مقدار در طی سال برسد (انقلاب زمستانی)، پس از آن، ارتفاع را به افزایش می‌گذارد تا دوباره زمانی فرا می‌رسد که در آن طول مدت زمان روشنایی روز و شب برابر می‌شود (اعتدال بهاری) و این افزایش ارتفاع نصف‌النهاری تا رسیدن به بیشینه مقدار ادامه می‌یابد و دوباره این چرخه تناوبی تکرار می‌شود. فاصله زمانی بین دو نقطه اعتدال و انقلاب متوالی با یکدیگر مساوی نیست. بنابراین، در ساده‌ترین شکل چنین استنباط می‌شود که خورشید در مداری دایره‌ای به گرد زمین می‌چرخد که مرکز آن بر مرکز زمین منطبق نیست. این تجربه ساده سالیانه دو مفهوم اولیه ایجاد می‌کند: (۱) خروج از مرکز مدار خورشید، و (۲) نقطه‌ای از آن مدار فرضی که بیشترین فاصله را از مرکز زمین دارد، یعنی نقطه اوج (Apogee) و نقطه مقابل آن (حضیض Perigee) که بُردار خروج از مرکز مداری روی خط متصّل بین نقاط اوج و حضیض (Apsidal Line) قرار می‌گیرد. مدت زمان یک بار چرخش ظاهری خورشید را اگر از نقطه‌ای بر روی این دایره فرضی بسنجیم که در آن طول مدت روز و شب برابر می‌شود، به مفهومی از «سال» می‌رسیم که «سال اعتدالی» (Tropical Year) نامیده می‌شود که مبدأ زمانی آن لحظه اعتدال بهاری است، یعنی زمانی که خورشید ظاهراً از محل تلاقی استوای سماوی و دایرة البروج (اول برج حمل: ۷۳۰ در حال گذر است.<sup>۱</sup> این مفاهیم تجربی اولیه پارامترهای بنیادین ساده‌ترین الگوی

۱. می‌توان مبدأ مکانی و زمانی آغاز سال را یک ستاره ثابت درنظر گرفت؛ در این صورت، یک «سال» فاصله زمانی بین دو گذر متوالی خورشید از کنار یک ستاره خاص از دید ناظر زمینی خواهد بود که «سال نجومی» (Sidereal Year) نامیده می‌شود.

خورشیدی را فراهم می‌آورد (شکل ۱). قدمت این مفاهیم علمی را که تقریباً با تغییراتی اندک (مدار بیضوی به جای دایره و زمین متحرک به جای خورشید) تا به امروز حفظ شده‌اند نمی‌توان تعیین کرد. هیپارخوس (۱۵۰ ق.م) به خوبی از این الگو آگاه بوده است.<sup>۱</sup>

اگر فرض کنیم که خورشید با سرعتی یکنواخت در مدار دایره‌ای خود می‌چرخد، جابه‌جایی ناشی از خروج از مرکز باعث می‌شود که سرعت آن از دید ناظر زمینی همواره یکسان به نظر نرسد؛ وقتی خورشید دورتر از زمین (نزدیک به نقطه اوج) قرار دارد، سرعت آن کمتر و زمانی که نزدیک‌تر به زمین (پیرامون نقطه حضیض) است، سرعت آن بیشتر است. این تغییر سرعت یا اعوجاج آن از مقدار ثابت میانگین یک «آئومالی» است که در اثر خروج از مرکز ایجاد شده است و به مقدار آن بستگی دارد.

برای تعیین موقعیت مداری خورشید در دایره بروج (طول  $\lambda$  نسبت به نقطه اعتدال بهاری  $\gamma$ ، شکل ۱) باید ابتدا پارامترهای بنیادین ساختاری مداری آن، خروج از مرکز  $e$  (بر حسب شعاع مداری  $R$  با مقدار دلخواه) و موقعیت نقطه اوج را در زمان مبدأ  $t_0$  دانست. برای تعیین سرعت میانگین مداری آن ( $\omega$ ) باید طول سال اعتدالی  $TY$  یعنی زمان رسیدن خورشید به دو نقطه اعتدال بهاری متواالی را اندازه گرفت:  $TY = 360/\omega$ ؛ و در نهایت باید طول میانگین خورشید (تصویر خورشید میانگین نسبت به دایره بروج) را در زمان مبدأ  $t_0$  در نظر گرفت ( $\bar{\lambda}_0$ ). حال طول خورشید میانگین

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_0 + \omega(t - t_0) \quad (1)$$

است. طول نقطه اوج نیز تابعی خطی از زمان و سرعت حرکت تقدیمی  $\psi$  است:<sup>۲</sup>

$$\lambda_a = \lambda_{a0} + \psi(t - t_0) \quad (2)$$

۱. برای مطالعه کامل‌تر الگوی خورشیدی و پارامترهای آن که در بند ۱ بالا به اختصار می‌آید، نک. Pedersen, Ch. Neugebauer, Vol. 1, pp. 53–61 و pp. 122–128.

۲. در سنت بطلمیوسی ثابت بوده است (30;65)، اما در اوایل دوران اسلامی کشف شد که نقاط اوج و جوزه سیارات و خورشید نیز تابع حرکت تقدیمی اعتدالین، و بنابراین، تابع زمان، است (نک توضیحات بیرونی در مقاله ۶ //قانون المسعودی، ۲/۶۵۷ به بعد).

برای تعیین طول حقیقی خورشید باید تعديل آنومالی  $q$  ناشی از خروج از مرکز مداری را محاسبه نمود که تابعی از  $e$ ،  $\lambda_a$  و  $\bar{\lambda}$  است:

$$q = -\arctan\left(\frac{e \sin(\bar{\lambda} - \lambda_a)}{R + e \cos(\bar{\lambda} - \lambda_a)}\right) \quad (3)$$

و در نهایت

$$\lambda = \bar{\lambda} + q. \quad (4)$$

بنابراین، الگوی خورشیدی به پنج پارامتر  $\bar{\lambda}_0$ ،  $TY$ ،  $\psi$ ،  $e$ ،  $\lambda_{a0}$  بستگی دارد، اما تنها دارای یک آنومالی ناشی از  $e$  و بنابراین، ساده‌ترین الگوی سیاره‌ای است. پارامتر نخست ثابت است. دو پارامتر دیگر از جنس سرعت (حرکتی) هستند، ولی پارامترهای  $e$ ،  $\lambda_{a0}$ ،  $TY$  و  $\psi$  متفاوتی برای  $e$ ، که ثابت فرض می‌شوند، به دست می‌آمد. تنوع مقادیر چنان بود که مثلاً در مورد  $TY$ ، کوپرنیک در آغاز اثر خویش، در باب گردش/جرام سماوی، لب به اعتراض می‌گشاید: «نتایج در مورد حرکات خورشید و ماه آنچنان غیرقطعی است که [اخترشناسان] نمی‌توانند مقدار ثابتی را برای طول سال اعتدالی اثبات کنند یا از طریق رصد به دست آورند.»<sup>۱</sup> یا در مورد خروج از مرکز، بیرونی ناگزیر می‌شود که خوانده اثر خود را از اضطراب ناشی از تفاوت مقادیر به دست آمده توسعه اخترشناسان مختلف برهاند (جمله منقول از وی را در بند II ببینید).<sup>۲</sup>

هر خطای از پارامترهای خورشیدی خطای نظام داری را در تعیین طول حقیقی خورشید موجب می‌شود. الگوی خورشید حتی در نظام زمین-مرکزی ساده‌ای که در شکل ۱ نشان داده شده است، نقش محوری را در تعیین مختصات ماه و سایر سیارات

1. Copernicus, folia iiiR-iiiV.

2. در حقیقت هر دو مقدار متغیر است. خروج از مرکز زمین با گذشت زمان با سرعتی بسیار اندک در حال کاهش است. (در بند III پایین، نمودار تغییرات آن خواهد آمد). در مورد تغییر طول سال اعتدالی، مقاله زیر حاوی نکات فنی و تاریخی ارزنده‌ای است: Meeus and Savoie

ایفا می‌کند؛ برای نمونه، حرکت میانگین سیارات زیرین مساوی با حرکت میانگین خورشید است و حرکت سیارات زیرین در آنومالی نیز مستقیماً به حرکت میانگین خورشید بستگی دارد. مختصات ستارگان ثابت نیز بسته به وضعیت خورشید است. بنابراین، هر خطای در این پارامترها سلسله‌ای از خطاهای دیگر را باعث می‌شود که همگی اجتناب‌ناپذیر خواهند بود؛ یک مثال تاریخی: اندازه‌گیری بطلمیوس برای تعیین زمان اعتدال بهاری خطایی حدود ۱ روز داشت، که این خطایی در حدود ۱ درجه باعث شد. این خطای مستقیماً اندازه‌گیری طول دایرة البروجی ستارگان را متأثر ساخت و وضعیت همه ستارگان با خطای نظامدار حدود ۱ درجه محسوسی (کتابهای ۷ و ۸) فهرست گردید.<sup>۱</sup>

## ۲. روش‌های تاریخی اندازه‌گیری پارامترهای حرکتی الگوی خورشیدی

چنانکه آمد، خروج از مرکز، مسئول نوسان سرعت خورشید از مقدار میانگین<sup>۲</sup> است. برای مثال، در نمودار شکل ۲ تغییرات سرعت خورشید بر اساس مقدار بطلمیوسی  $R=60$  و  $e=2;30$  که به وسیلهٔ محيی‌الدین مغربی (۵. ۱۲۸۳/۶۸۴) در رصدخانه مراغه به دست آمده بوده است، مقایسه شده است. تغییرات سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای خورشید، برای مثال، مستقیماً محاسبه کمیت‌های مربوط به پدیده‌هایی نظیر خسوف و کسوف را متأثر می‌سازد.

از این گذشته، چنانکه دیدیم، تعدیل مرکز خورشید و در نتیجه طول  $\lambda$  خورشید به مقدار خروج از مرکز مداری آن بستگی دارد. با محاسبه ساده‌ای می‌توان نشان داد که اگر خطای در تعیین خروج از مرکز خورشید را با  $\Delta e$  نشان دهیم، بیشینه مقدار خطای در تعیین طول خورشید (هنگامی که خورشید به تربع مداری خود می‌رسد) برابر است با:

$$\Delta\lambda = \frac{360}{\pi} \Delta e. \quad (5)$$

۱. برای تحلیل این خطای، نک: Newton, pp. 369–370. سده‌ها بعد از بطلمیوس همین خطای موجب بروز خطا در اندازه‌گیری سرعت حرکت نقدمی اعتدالین در اوایل دوران اسلامی گردید؛ نک: Grasshoff, pp. 19–20  
2. Neugebauer, vol. 3, pp. 1095–1101.

بنابراین، در توضیح روش‌های تاریخی پژوهش حاضر متوجه موارد زیر خواهد بود:

(۱) تعیین میزان دقّت، و محدودیّت‌های ذاتی و چراً بی‌این محدودیّت‌ها در روش‌های تعیین خروج از مرکز مدار زمین - خورشی؛ (۲) آیا خود کاربران این روش‌ها به آن محدودیّت‌ها وقوف داشته‌اند یا خیر، و در صورت وقوف، با چه معیارهایی از روش‌های جایگزین استفاده نموده‌اند؛ (۳) و در نهایت این جایگزینی چه ثمری به بار آورده بوده است. روش‌ها عبارتند از:

**(۱) و (۲) روش فصول و روش اوساط بروج** (روش دوم اصلاح‌شده روش نخست است نک: شکل<sup>(۳)</sup>: در طی یک سال  $TY$  (در نتیجه، مقدار  $\omega$ ) و فاصله زمانی بین اعتدال تا انقلاب (مثلًا اعتدال بهاری تا انقلاب تابستانی  $75^{\circ}$  و انقلاب تابستانی تا اعتدال پاییزی  $225^{\circ}$ ) تعیین می‌شود. سپس، مقدار حرکت زاویه‌ای میانگین خورشید در این دو بازه زمانی (یعنی، اندازه کمانهای  $a$  و  $b$ ) محاسبه می‌شود؛ سپس، خروج از مرکز  $e = e_{CT}$  از رابطه ساده زیر به دست می‌آید:

$$e = R \sqrt{\sin^2\left(\frac{a-b}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{a+b}{2}\right)} \quad (6)$$

چنانکه در بند II خواهیم دید، این روش به مقادیر بازه‌های زمانی حساس است.<sup>۱</sup> همچنین، تعیین دقیق زمان انقلابین با دشواری‌های فی و تجربی همراه است که میزان دقّت آن را تا حدّ زیادی محدود می‌کند و امکان بروز خطا را بالقوه افزایش می‌دهد. یک روش جایگزین، اندازه‌گیری زمان بین میانه دو فصل متولی (مثلًا میانه زمستان،  $75^{\circ}$ ، تا میانه بهار،  $225^{\circ}$ ، و از آنجا تا وسط تابستان  $225^{\circ}$ ) است.

**(۳) روش سه نقطه‌ای** (نک: شکل<sup>(۴)</sup>): پس از تعیین  $TY$ ، خورشید در سه زمان مختلف در طی یک سال رصد می‌شود تا اختلاف طول دایره البروجی حقیقی بین دو رصد متولی  $\Delta t$  آن به دست آید. اختلاف طول میانگین  $\Delta t$  نیز از مقدار  $\omega$  محاسبه

۱. در یک مثال ساده، فرض کنید  $a=93^{\circ}$  و  $b=92^{\circ}$ ، آنگاه،  $R=60$  (در  $\omega=2.67$ )؛ حال با افزایش یک درجه‌ای در مقدار  $a$  (≈ حدود یک روز، مثل خطای بطلمیوس که در بالا ذکر شد)،  $e=3.31$  به دست خواهد آمد؛ یعنی، خطای حدود ۲٪. برای یک مطالعه مقدماتی درباره تعیین دقّت مقادیر تاریخی، نک Hughes

می‌شود. حال با در اختیار داشتن اندازه چهار کمان، به سادگی می‌توان  $CT = e$  را با استفاده از مثلاًث مسطّحه محاسبه نمود.

روش سه نقطه‌ای دقیق‌تر و قابل اطمینان‌تر از روش‌های پیشین است. در بند III نتایج بررسی موردی مقداری را که محیی‌الدین مغربی با همین روش در رصدخانه مراغه به دست آورده بوده خواهیم دید. با این حال، نباید از نظر دور داشت که دقّت مقادیر ورودی، که ناشی از دقّت راصد و ابزارهای اندازه‌گیری هستند، نقش بالقوه مؤثری در دقّت نتایج نهایی ایفا می‌کنند (در بند II ذیل بدان‌ها پرداخته می‌شود) و می‌توانند دقّت روش به کاربسته شده را تحت الشّعاع قرار دهند (نک: استنباط‌های بند III).

هر سه روش یادشده در سطوح پیشین را می‌توان به طور مستقیم یا غیرمستقیم از خلال روش‌های ریاضی که بعلمیوس از آنها برای تعیین پارامترهای ساختاری الگوهای سیاره‌ای خویش استفاده کرده است، استخراج نمود.<sup>۱</sup> با این حال، ابوریحان بیرونی، روش سه نقطه‌ای را به استاد خویش، ابونصر منصور بن علی بن عراق، نسبت داده و آورده که در کتاب *الاستشهاد فی اختلاف الإرصاد* خود (که نسخه‌ای از آن بر جای نمانده) درباره برتری روش سه نقطه‌ای بر دو روش پیشین سخن گفته است.<sup>۲</sup>

## II. دسته‌بندی و تعیین دقّت مقادیر تاریخی

چنانکه گفتیم، «روش فصول» و نوع اصلاح شده آن، روش «اوساط بروج»، تا حدّ زیادی به اندک تغییر در مقادیر ورودی (فاصله زمانی اعتدالین و انقلابین) که از طریق رصد به دست می‌آید حساس‌اند. حساسیت روش باعث می‌شود که در رصدهای مختلف که در بازه زمانی اندک انجام پذیرفته است مقادیر متفاوتی برای خروج از مرکز و طول نقطه اوج به دست آید. این مسئله به لحاظ تاریخی مورد توجه اخترشناسان قرار گرفته بوده؛ از آن جمله، بیرونی در مقاله<sup>۳</sup> قانون مسعودی، که به بحث در باب پارامترهای خورشیدی می‌پردازد، دلیل این امر را به درستی «عظمٌ مقدار التغییر عند أدنى تفاوتٍ يلحق بالرّصد» دانسته است.<sup>۴</sup> سپس، وی تقریباً تمام مقادیر محاسبه شده توسط

1. Saliba, p. 114.

2. بیرونی، آثار الباقیة، ۱۸۵-۱۸۴؛ ترجمه، ص ۲۲۶.

۳. همو، قانون، ۶۵۳/۲.

اخترشاسان اوایل دوران میانه اسلامی را که با روش فضول به دست آمده بوده به عنوان شاهد ذکر می‌کند که در جدول ۱ زیر فهرست شده است:

ستون ۱ نام اخترشناسانی است که اندازه‌گیری توسط آنان انجام گرفته است.

ستون ۲ زمان اندازه‌گیری را به دست می‌دهد. بیرونی زمان اندازه‌گیری را بر حسب سالهای یزدگردی ۶۴ ارایه داده است. این سال‌ها بر حسب نظام متقدم است که در آن ماه‌ها سی روزه بوده و پنج روز اضافه پس از ماه آبان منظور می‌شده است. در ذیل تاریخ بیزدگردی تاریخ متناظر ژولیانی آمده است.

در ستونهای ۳ و ۴ مدت زمان بهار (۷۵) و تابستان (۵۵) بر حسب اندازه‌گیری همان اخترشناسان است.

در ستون ۵ مقدار خروج از مرکز به دست آمده به وسیله آن اخترشناسان که بیرونی گزارش کرده ذکر گردیده است. اغلاط نگارشی فراوان در چاپ حیدرآباد /قانون المسعودی وجود دارد. در این پژوهش، ارقام ابجد متن با کمک مقادیری که بیرونی برای بیشینه مقدار تعديل مرکز خورشید  $q_{\max}$  در نزد اخترشناسان فوق الذکر ارایه گردیده است، و نیز با محاسبه مجدد بر اساس طول فضول اصلاح شده است. در دو مورد نخست، مقادیر خروج از مرکز بر حسب طول فضول ارایه شده در ستونهای ۳ و ۴ دوباره محاسبه شده است. نتایج، که به صورت کج نوشته در ذیل مقادیر تاریخی آمده است، تفاوت‌ها را از مقدار مضبوط توسط بیرونی نشان می‌دهد.

در ستون ۶ مقادیر طول دایره‌البروجی نقطه اوج مدار خورشید آمده است.

در ستونهای ۵ و ۶ مقادیر حقیقی خروج از مرکز،<sup>۱</sup>  $2e'$  (رابطه (۷) بند III) و نقطه اوج به صورت ارقام ضخیم در ذیل مقادیر تاریخی داده شده است.<sup>۱</sup> مقدار خروج از مرکز زمین در طی سال تفاوتی را نشان نمی‌دهد که در یک بررسی تاریخی شایان توجه باشد، اما در مورد نقطه اوج، زمان اعتدال پاییزی ملاک قرار گرفته است.

سایر توضیحات در مورد هر اندازه‌گیری در ذیل جدول با ارجاع به شماره ردیف آمده است.

۱. در این مقاله، زمان اعتدالین و نیز عناصر مداری بر حسب روابط استاندارد ارایه شده در Meeus Ch. 26 pp. 165–170 and Ch.30: pp. 197–224 محاسبه شده است.

جدول ۱

			γφ	φ	e	λ
۱	خالد المروزو ذی، علی بن عیسیٰ الحرنی و سند بن علی	212 Y 25 April 843–23 April 844	93;54,35 <sup>d</sup> <b>93;32,24</b>	93; 9,20 <sup>d</sup> <b>93; 2,47</b>	2;19,17, 6 2;19,28,43 2e= 2; 3,41	82;9,55° <b>83;7</b>
۲	ثابت بن قرۃ	201 Y 27 April 832–26 April 833	93;40	93;2,30	2; 7,40,49 2; 7,53, 5	81;38,22,28 81;23,10,10
۳	بنانی	251 Y 15 April 882–14 April 883	93;35 <b>93;30,55</b>	93;1,54 <b>93;4,18</b>	2;10,14,19 2; 7,46,57 2e= 2; 3,43	81;27,38,23 <b>83;46</b>
۴	سلیمان بن عصمت سمرقندی	257 Y 13 April 888–12 April 889	93;27, 3,45 <b>93;30,34,12</b>	93;2,25,25 <b>93;4,23,31</b>	2; 0,28,15 2e= 2; 3,33,18	83;11, 1, 1 <b>83;53</b>
۵	ابوالوفا بوزجانی	343 Y 23 March 974–22 March 975	93;30, 8 <b>93;27,46</b>	93;7,10 <b>93;7,33</b>	2; 4,10,49 2e= 2; 3,19	84;34,45,50 <b>85;21</b>
۶	ابوریحان بیرونی	385 Y 12 March 1016–11 March 1017	93;28 <b>93;26</b>	93;8 <b>93;9</b>	2; 3,36,34 2e= 2; 3,11,31	85;13,5,24 <b>86;4</b>

[۱] بیرونی مقادیر مربوط به منجمان مأمون را از کتاب *تفسیر المحسنی* ابو جعفر خازن (اکنون مفقود) نقل کرده است.<sup>۱</sup> چنانکه بیرونی ذکر می‌کند، برای طول سال اعتدالی، مقدار بطمیوسی ۳۶۵;۱۴,۲۴ روز مبنا قرار گرفته بوده است. این رصدها دومین برنامه رصدی روزگار مأمون است. پس از نارضایتی وی از نتایج رصدی شماشیه بغداد به سرپرستی بحی بن ای منصور (نک شم) [۷] و [۸] جدول پایین، برنامه رصدی دیگری با مدیریت مروزو ذی در کوه قلسیون حوالی دمشق انجام گرفته بوده است.<sup>۲</sup>

[۲] در مورد ثابت بن قرۃ، بیرونی یک بار طول تابستان را بر اساس طول سال ۳۶۵.۲۵ روز و بار دیگر بر اساس طول سال اعتدالی ۳۶۵;۱۴,۲۴ روز به دست می‌دهد که بر این اساس، دو مقدار مختلف برای خروج از مرکز به دست می‌آید. به نظر می‌رسد که در بار دوم، بیرونی مقدار خروج از مرکز را اشتباه محاسبه کرده است.<sup>۳</sup> منبع بیرونی کتاب (اینک مفقود) سنه الشمس بnomosی بوده است.

[۳] مقدار نهایی خروج از مرکز خورشید در زیج الصابئ بنانی ۴,45 است (فصل ۲۸) که بر اساس آن  $10^{\circ} 59,1 = q_{\max}$  در جداول تعديل مرکز خورشید وی ذکر شده است.<sup>۴</sup> از مقدار بنانی به کرات در منابع مختلف، بهویژه اثر کوپرینیک، یاد می‌شود.<sup>۵</sup>

۱. قانون، ۶۵۳/۲

2. Charette, 125.

۲. قانون، ۶۵۴/۲

4. Nallino, I, p. 47; II, pp. 79–83]:  $q_{\max}$  on p. 81.

5. گویا تا پیش از برقراری سنت نجومی مراگه مقدار بنانی بیشتر از مقادیر سایر منجمان مورد وثوق بوده، چنانکه در آثار عمومی نجومی نیز ذکر می‌شده است؛ برای نمونه، نک: طوسی، معینیه، ص. ۴۲

[۴] از ابن عصمت سمرقندی اثری مکتوب در دست نیست، ولی بیرونی پارامترهای مختلفی را از اوی در آثار خویش ذکر کرده<sup>۱</sup> و قضاوت خوبی نسبت به نتایج رصدهای اوی ابراز داشته که قابل تأیید است (نک سطور بعد).

[۵] از ابوالوفاء بوزجانی نیز اثری که در آن پارامترهای خورشیدی مورد بررسی قرار گرفته باشد در دست نیست. زیج اوی بر جای نمانده و مختصری از «المجسطی» اوی به دست ما رسیده است.<sup>۲</sup>

[۶] بیرونی در همین سال اندازه‌گیری‌های دیگری بر اساس دو روش دیگر انجام داده بوده است که در ادامه خواهد آمد.

چنانکه بهوضوح در جدول بالا می‌توان دید، با گذشت زمان میزان دقّت اندازه‌گیری طول فصول افزایش و در نتیجه، میزان خطای در اندازه‌گیری خروج از مرکز مدار زمین- خورشید کاهش یافته است. بتانی، ابوالوفاء و بویژه بیرونی دقیق‌ترین مقادیر را به دست آورده بوده‌اند.

واضح است که منشأ خطای در روش فصول به خطاهای احتمالی در تعیین فواصل زمانی بین اعتدال و انقلاب باز می‌گردد. پس، یافتن منشأ خطاهای احتمالی در زمان‌شماری بین اعتدال و انقلاب می‌تواند بالقوه در تصحیح مقادیر و تحقیق در امکان تصحیح مؤثر باشد. برای تعیین زمان اعتدالین و انقلابین، منجمان ارتفاع نصف‌النهاری خورشید را با ابزارهای نصف‌النهاری اندازه‌گیری می‌کردند؛ یعنی، ابزارهایی مانند ذات‌الربع/البنه، سدس فخری، ذات الشعوبتين و... که در امتداد خط نصف‌النهار نصب و برای تعیین بیشینه و کمینه و میانگین ارتفاع نصف‌النهاری خورشید در طی سال (انقلاب تابستانی، زمستانی و اعتدالین)، عرض جغرافیایی محل و بیشینه فاصله زاویه‌ای دایره بروج از استوای سماوی (میل کلی) استفاده می‌شدند. منشأ خطای در زمان‌شماری را می‌توان به یک یا چند عامل منتبه ساخت: (۱) دقّت/خطای راصد؛ (۲) دقّت/خطای نظامدار یا ساختاری ابزارهای مورد استفاده؛ (۳) خطاهای احتمالی در تعیین زمان اعتدالین و انقلابین.

در مورد عوامل (۱) و (۲) باید مقادیر مضبوط در منابع تاریخی را که از اندازه‌گیری مقادیر کمی دخیل در تعیین پارامترهای خورشیدی به دست آمده است با مقادیر حقیقی محاسبه شده برای زمانهای رصد مقایسه نمود. یا در صورت فقدان مقادیر کمی، قضاوت منجمان را درباره برخی اسلاف خویش یا ابزارهای نجومی مورد استفاده ایشان،

۱. پارامترهای خورشیدی در قانون، ۶۵۴/۲

۲. پارامترهای خورشیدی در قانون، ۶۵۴-۵/۲، نیز نک: 73 Kennedy, A Survey of Islamic..., nos. 29 and

هرچند به صورت یک مدرک کیفی و غیراستدلای، می‌توان محک قرار داد یا در صورت وجود مقادیر تاریخی، از آنها برای راستی آزمایی قضاوت‌ها استفاده نمود (مانند، قضاوت بیرونی درباره رصدہای سلیمان بن عصمت سمرقندی: «المجتهد فی طلب التحقیق بِأَقصى الْوُسْعِ»؛<sup>۱</sup> نک: ادامه مقاله). شایان ذکر است که خطاهای متأثر از عوامل (۱) و (۲) را نمی‌توان از یکدیگر تمییز داد. سعید و استیونسون اندازه‌گیری‌های ارتفاع نصف‌النهاری خورشید توسط منجمان اوایل دوران اسلامی، موروذی، بن‌موسى، سلیمان بن عصمت، عبدالرحمن صوفی، ابو‌محمد خجندي و بیرونی (در جرجانیه و غزنه)، را تحلیل کرده‌اند. کمترین میزان خطا در مورد موروذی،  $\pm 0.01^\circ$ ، به دست آمده، در حالی که کل خطاهای هیچ گاه از  $\pm 0.02^\circ$  (= حدود یک دقیقه قوسی) تجاوز نکرده بوده است. این مقدار در حد بیشینه توانایی تفکیک (Resolution) چشم غیرمسلح انسان است<sup>۲</sup> (قس: قضاوت بیرونی در مورد سمرقندی). با وجود این دقّت بالا در رصدہای ارتفاع خورشید که تقریباً تماشان برای تعیین اعتدالین و انقلابین به کار گرفته شده است، حالا افتراق عوامل (۱) و (۲) از اهمیت کمتری برخوردار خواهد شد. به عنوان مثال برای یافتن خطاهای ابزاری می‌توان به این مورد اشاره کرد: رصدہای بیرونی در غزنه از خطای نظامداری در حدود  $-0.04^\circ$ – $0.04^\circ$  متأثر شده که این احتمالاً یا ناشی از قرار گرفتن مکان رصد اندکی در شمال مکان کنونی شهر غزنه یا خطای ساختاری در ابزار مورد استفاده وی بوده است. این خطای نظامدار در رصدہای وی در جرجانیه وجود ندارد و میزان خطای میانگین وی در حد کمتر از  $0.02^\circ$  باقی می‌ماند.<sup>۳</sup>

در مورد عامل (۳) می‌دانیم که تعیین زمان انقلابین با ابزارهای نصف‌النهاری دشوارتر از تعیین زمان اعتدالین است. در همان پژوهش فوق‌الذکر نشان داده شده است که خطای منجمان اوایل دوره اسلامی در تعیین زمان اعتدالین حدود ۱.۲ ساعت، ناشی از خطای میانگین حدود  $0.02^\circ$  در تعیین ارتفاع، بوده است.<sup>۴</sup> در رصد انقلابین میزان خطا افزایش می‌یابد. دلیل این امر کاهش سرعت تغییرات ارتفاع خورشید در نقاط انقلابین نسبت به اعتدالین است. در نمودار شکل ۵ (الف) تغییرات ارتفاع  $h$  خورشید برای شهری با عرض جغرافیایی  $\varphi=37;20^\circ$  در زمانی که میل کلی  $\epsilon=23;30^\circ$  باشد، بر حسب طول  $\lambda$  خورشید و در نمودار شکل ۵(ب) سرعت تغییرات ارتفاع ( $dh/d\lambda$ ) نشان

۱. قانون، ۲/۹۵.

2. Said and Stephenson, 125-130.

3. Said and Stephenson, 123 (Table), 125.

4. Said and Stephenson, 127.

داده شده است. در انقلابین ( $\lambda=90^\circ$ ) سرعت تغییرات ارتفاع در یک شبانه روز پیش یا پس از انقلاب به حدود  $3 \times 10^{-3}$  (≈ صفر) می‌رسد، در حالی که در اعتدالین سرعت تغییرات حدود  $4/0$  است؛ بنابراین، تعیین زمان دقیق حدوث انقلابین بسیار دشوارتر از تعیین زمان وقوع اعتدالین است. این اصلی‌ترین منشأ خطا در محاسبه زمان‌های  $75^\circ$  و  $225^\circ$  در جدول بالا است. بنابراین، منجمان برای احتراز از بروز خطاهای چشمگیر نقاط سنجش فواصل زمانی را از اعتدالین به انقلابین به نقاط میانی فاصله زمانی اعتدال - انقلاب انتقال دادند که در آن‌ها آهنگ تغییر ارتفاع خورشید در یک شبانه‌روز به حدود  $0/3$ ، یعنی کمتر از هنگام اعتدالین و بیشتر از هنگام انقلابین،<sup>۱</sup> می‌رسد. در این صورت، منجمان می‌بایست فاصله زمانی رسیدن خورشید به، مثلاً  $\lambda=315^\circ$  (وسط برج دلو $\text{♌}$ ) تا رسیدن آن به  $\lambda=45^\circ$  (وسط برج ثور $\text{♉}$ )، یا فاصله زمانی بین  $\lambda=45^\circ$  تا  $\lambda=135^\circ$  (وسط برج اسد $\text{♌}$ ) و الی آخر، را اندازه می‌گرفتند. بنابراین، چهار ربع شرقی ( $\text{♈}-\text{♉}$ )، شمالی ( $\text{♉}-\text{♊}$ )، غربی ( $\text{♊}-\text{♋}$ ) و جنوبی ( $\text{♋}-\text{♌}$ ) به دست می‌آمد. سپس، همان روش اندازه‌گیری بر اساس ربع‌های چهارگانه فصول برای این چهار ربع، که از «اوساط بروج» حاصل آمده بود، به کار می‌رفت. بیرونی اندازه‌گیری‌های انجام یافته بر اساس این روش به دست منجمان اوایل دوران اسلامی را ذکر کرده است که در جدول ۲ ذیل می‌آید. چنانکه مشهود است، کاربرد این روش در ادوار میانه اسلامی دست کم از زمان برنامه رصدی شمسیّه در روزگار مأمون سابقه داشته است.

## جدول ۲

			$\frac{1}{2}\text{♈}-\frac{1}{2}\text{♉}$	$\frac{1}{2}\text{♉}-\frac{1}{2}\text{♊}$	$\frac{1}{2}\text{♊}-\frac{1}{2}\text{♋}$	$\frac{1}{2}\text{♋}-\frac{1}{2}\text{♌}$	$e$	$\lambda_a$
۷	مأمون در شماشیه	199 Y 28 April 830–27 April 831		94;48,20	98;35,50	2;14,28,21	61;23,22,40	
						2; 3,43	<b>82;54</b>	
۸	مأمون در شماشیه	200–201 Y 30 Jan 832–3 August 832	91;45,20 91;45,20	94;11,20 94;11,15		2; 7,18,40 2; 7,19,27	81; 1,50,32 81; 4,22,40	
						2; 3,43	<b>82;56</b>	
۹	أبوآقا، بوزجانی	345 Y 22 Match 976–21 March 977	91;34,25	94;9,7,30		2; 5,11,17 2; 3,18	85; 0,15,32 <b>85;24</b>	
۱۰	أبوhammad صغاني	355 Y 20 March 986–19 March 987	91;46,40	94;10		2; 6,33,17 2; 3,17	81; 2,29,45 <b>85;34</b>	
۱۱	أبوريحان بيروني	385 Y 12 March 1016–11 March 1017		93;16,40 93;33	91; 3,16 91;10,40	2; 4,43,25 2; 3,11	84;11,9 <b>86; 5</b>	

۱. قانون، ۶۵۷/۲.

[۷] و [۸] این نتایج متعلق به برنامه رصدی روزگار مأمون در شمسیّة بغداد (پھی بن ابی منصور، خوارزمی و سند بن علی) است. نتایج رصد [۷] شگفت‌آور است، از این بابت که مختصات نقطه اوج متقدم بر مقدار بطلمیوس ( $65^{\circ}, 30^{\circ}$ ) و نیز مقادیر تجوم هندی به دست آمده بوده است. منشاء خطاء، آنگونه که بیرونی ذکر کرده، اشتباه در رصد خورشید در میانه تابستان ( $\frac{1}{2}\delta\right)$  بود.<sup>۱</sup> بیرونی مقادیر [۸] را از کتاب سنّه الشّمس بنوموسی نقل کرده و زمان رصدها پس از گذر نصف‌النهاری خورشید بر حسب کسری از روز را به ترتیب ذیل داده است. (مقادیر خطای بر حسب ساعت و زمان محلی بغداد درون دو کمان ارائه شده است).

### جدول ۳

$\frac{1}{2}\delta$	3 August	832 AD, 0;32, 5 d	(+2;39 h)
$\frac{1}{2}\mathbb{M}$	1 May	832 AD, 0;20,50	(+1;20 )
$\frac{1}{2}\mathbb{A}$	30 Jan	832 AD, 0;35,30	(-1;15 )

زمان‌های محاسبه شده در بر دارنده مقادیر تعدل زمان (equation of time) هستند که باید از فواصل زمانی بین زمان‌های میانه فضول کاسته یا بر آن افروده شوند. برای تبدیل «زمان مطلق» به «زمان معدّل» بیرونی  $0;0,5$  روز ( $= 2$  دقیقه) از بازه زمانی  $\frac{1}{2}\delta$  می‌کاهد<sup>۲</sup> و سپس به این نکته توجه می‌دهد که با این تغییر کوچک، تغییر قابل ملاحظه‌ای در  $\sigma$  و  $\lambda$  حادث می‌شود: «هر دو موردی که درباره رصدهای مأمون ذکر کردیم شاهدی است بر اینکه تفاوت مقدار بین زمان مطلق و زمان معدّل موجب بروز این اختلاف می‌گردد تا آنچه که پیشتر گفتیم و به تحقیق آورده‌یم نشان داده شود».<sup>۳</sup>

[۹] و [۱۰] مقادیری که بیرونی از ابوالوفاء و صفاری ذکر می‌کند در جای دیگری ذکر نشده است. چنانچه می‌توان دید، میزان دقّت اندازه‌گیری ابوالوفاء در روش «اوساط بروج» نسبت به روش «فضول» کاهش یافته است.

[۱۱] بیرونی ذکر می‌کند که در سه بار اندازه‌گیری طول زمانی  $\frac{1}{2}\delta$  و  $\frac{1}{2}\mathbb{M}$  به دو مقدار نخست جدول بالا دست یافته است. وی اختلاف زیاد در مقادیر را به اشکال در ابزار و نیز ناتوانی خویش از ضبط مقدار واحد نسبت می‌دهد. سپس، با ذکر اینکه در شهر غزنی امکان حصول مقادیر فراهم نشده بود، وی اندازه‌گیری خروج از مرکز با روش اوساط بروج را در خوارزم به حسب عرض جرجانیّه انجام داده است. بیرونی فقط جزئیات اندازه‌گیری ارتفاع نصف‌النهاری خورشید را در روز ۲۰ اردیبهشت ۳۸۵ یزدگردی (= ۳۰ آوریل ۱۰۱۶م) برای تعیین زمان میانه بهار (منتصف ریبع:  $\sigma$ ) ذکر کرده است.

۱. قانون، ۶۵۶-۷/۲

۲. مقدار حقیقی تعدل زمان برای سه رصد یاد شده به ترتیب  $-4$ ،  $+5$  و  $-16$  دقیقه است؛ یعنی، باید یک دقیقه بر بازه زمانی  $\frac{1}{2}\delta$  افزود و از بازه زمانی  $\frac{1}{2}\mathbb{A}$  ۱۱ دقیقه کاست.

۳. قانون، ۶۵۸/۲

جدول ۴

اختلاف زمان <sup>۱</sup>	$\frac{1}{2}\gamma$	اختلاف زمان	زمان بیشینه ارتفاع	ارتفاع	ارتفاع حقیقی	زمان رصد	مرصد
+19 minutes	29 April 1016 + 0,51,30 d	64;11,25°	64;9,55°	1.5'			

با کاربرد روش اوساط بروج نیز مقادیر واحد و قابل اعتمادی برای پارامترهای ساختاری خورشید به دست نیامده بوده است. (جالب اینکه هم ابوریحان و هم ابوالوفاء با کاربرد روش فضول مقادیر دقیق‌تری به دست آورده بوده‌اند). از این رو، بیرونی ناگزیر پیش از آنکه به شرح اندازه گیری‌های خود برسد لازم می‌بینند تا درباره مقادیر مختلفی که از کاربرد این روش حاصل آمده است توضیح دهد: «اندیشنده نباید از ناتوانی اش در درک ذات موجودات در اضطراب افتد، بلکه باید بداند که ممکن نیست خروج از مرکز، حتی اگر مقدار آن متغیر باشد، یا نقطه اوج، حتی اگر از اقبال و ادبام تأثیر شود، در طی یک سال تغییر کند». <sup>۲</sup> سپس، برای اینکه نشان دهد که این تغییرات ناشی از محدودیت‌های موجود در روش‌های به کاربسته است، اندازه گیری طول فضول توسط ابن عصمت سمرقندی و اندازه گیری فاصله زمانی بین نیمه‌های بروج توسط ابوحامد صغانی را ذکر و سپس بر اساس هر جفت از آن مقادیر، خروج از مرکز زمین را محاسبه می‌کند؛ نتایج بسیار متفاوت از مقادیر زمانی اندازه گیری شده به وسیله یک فرد واحد و در زمان واحد حاصل می‌شود که مؤید محدودیت هر دو روش است.

با گذشت زمان، منجمان به استعمال هر دو روش فضول و سه نقطه‌ای ادامه دادند. هرچند در پاره‌ای موارد صراحتاً به مقدار حاصل یا در بسیاری موارد به جزئیات اندازه گیری خود اشاره نمی‌کردند، اما مقادیر مربوطه را می‌توان از جداول تعديل مرکز موجود در زیج‌ها به آسانی استخراج نمود (البته، مقدار مستخرج معمولاً گرد شده است و ممکن است اختلاف اندکی با مقدار اصلی حاصل از رصد داشته باشد). علاوه بر این، در زیج/شرفی، محمد ابن ابی عبدالله سنجر الکمالی همه مقادیری را که منجمان شرق اسلامی برای تعديل مرکز به دست آورده بودند، معرفی کرده است:<sup>۳</sup>

۱. با لحاظ کردن مقدار انکسار جوی، مقدار اختلاف زمان برای این رصد حدود ۴۱–۴۲ دقیقه است. نک: آنالیز این رصد در: Said and Stephenson, 129 (Table 6)

۲. فانون، ۶/۲: ۶۵۹.  
۳. زیج اشرفی، ۶: III: ۴۹.

باب ششم: در شرح اختلاف تعديل آفتاب و تعديل ثانی قمر. در ارصاد قدیم غایت تعديل آفتاب ب کد [=  $2^{\circ};24$ ] یافته‌اند؛ و بطلمیوس: ب کج [=  $2^{\circ};23$ ] یافته، و حکماً قرش [بخوانید: «فرس»، نک ذیل]: ب ک [=  $2^{\circ};20$ ، و نیریزی: ب یچ [=  $2^{\circ};13$ ]، و خازنی: ب یب [=  $2^{\circ};12$ ]، و هندوان: ب یا [=  $2^{\circ};11$ ]، و بتانی: ا نط ی [=  $1^{\circ};59,10$ ، و مصنف زیج علایی: ا نط [=  $1^{\circ};59$ ]، و اکمل المتقدّمین و افضل المتأخّرين نصیر الملة والدين - طاب ثراه: ب ۰ ل [=  $0^{\circ};0,30$ ] و محیی الدین مغری - رحمه الله - ب کا [=  $2^{\circ};0,21$ ].

مقدار  $2^{\circ};23$  بطلمیوس در مجسطی بر اساس خروج از مرکز  $2;30$  است که هیپارخوس پیشتر محاسبه کرده بود، اما الگوی خورشیدی مبتنی بر فلك خارج مرکز احتمالاً پیش از هیپارخوس وجود داشته است، چرا که بطلمیوس تنها از کاربرد این الگو توسط هیپارخوس (و نه ابداع آن) سخن گفته است. محتمل است که آپولونیوس الگوی خورشیدی خارج مرکز را می‌شناخته است.<sup>1</sup> بنابراین، «ارصاد قدیم» در عبارت بالا، اگرچه واضح نیست، اما تأمّل برانگیز است. برای رسیدن به مقدار  $2^{\circ};24$  به خروج از مرکزی کمی بیش از مقدار  $2;30$ <sup>2</sup> بطلمیوس نیاز است: مقدار نسبتاً دقیق  $2;30,45$  یا مقدار تقریبی  $2;31$  درباره «حکمای قرش»: دست کم سه مکان با نام‌های مشابه می‌توان یافت: «قرشی» یا «قرشی» در نزدیکی بخارای قدیم، «قرشنه» در روم، و «قرشیه» که روستایی در سواحل حمص نزدیک حلب، در سوریه، و انطاکیه بوده است. لیکن به احتمال بسیار این نام تصحیف «فرس» است؛ به این قرینه که چهار مقدار از مقادیر فوق الذکر در مقدمه وجیز زیج المعتبر السنجیری آمده که از آن میان مقدار  $2^{\circ};20$  به ایرانیان («عندالفرس») نسبت داده شده است.<sup>3</sup> مقادیری که در سنن مختلف نجومی در هند از سال ۴۰۰ م به این طرف یافت می‌شوند، همگی به تقریب با مقدار مذکور در بند بالا،  $2^{\circ};11$ ، توافق دارند.<sup>3</sup> جداول تعديل الشمس از پنج مؤلف باقیمانده، به همراه جداول

1. Pedersen, p. 135 and pp. 340ff.

2. وجیز زیج سنجری، ۱پ. سه مقدار دیگر مربوط به هندوان، بطلمیوس و نیریزی است. خازنی، چنانکه خود تصویح دارد، مقدار  $2^{\circ};13$  را از شرح المجسطی نیریزی نقل کرده است. این اثر نیز همانند دو زیج وی در دست نیست.

3. Pingree, esp. pp. 97–98, 100 and 105.

یحیی بن ابی منصور و ابن الأعلم، را می‌توان در آخرین بخش این زیج، مقالت هشتم، یافت. این مقادیر از آن رو اهمیت دارند که هیچ یک از زیج‌های ابن الأعلم، علائی (به جز در ترجمه یونانی) و دو زیج نیریزی باقی نمانده است.<sup>۱</sup> مقادیر فوق الذکر در جدول ۵ زیر آمده است.

جدول ۵

$e$	$q_{\max}$		
2;5,34 <sup>p</sup>	1;59,56	یحیی بن ابی منصور	:۲۳۶ ر.
2;19 <sup>p</sup>	2;13	نیریزی	:۴۹ ر.
2;4,45 <sup>p</sup>	1;59,10	بتنانی	:۲۳۹ پ.
2;5,49 <sup>p</sup>	2;0,10	ابن الأعلم	:۲۳۶ پ.
2;18,38 <sup>p</sup>	2;12,25	خازنی	:۲۳۸ ر.
2;4,35 <sup>p</sup>	1;58,59	مؤلف زیج علائی	:۲۴۰ ر.
2;6,10 <sup>p</sup>	2;0,30	ابن یونس، نیز در زیج ایلخانی <sup>۲</sup>	:۲۴۱ پ.
2;5,59 <sup>p</sup>	2;0,21	محیی الدین مغربی	:۲۴۳ پ.

جداول تعديل خورشید یحیی بن ابی منصور بر اساس متن اصلی، زیج الممتحن، و نیز جداول موجود در همین زیج/شرفی پیشتر بررسی شده‌اند.<sup>۳</sup> توجه کنید که این مقدار از مقادیر [۷] و [۸] بالا که از رصدهای اولیّه زمان مأمون که توسط یحیی بن ابی منظور صورت گرفته بوده‌اند، متفاوت، و در عین حال دقیق‌تر، است. مقادیر  $q(\bar{c})$  در زیج الممتحن بر اساس فرمول‌های تقریبی هندی محاسبه شده‌اند؛ به همین جهت در این جداول  $q(90^\circ) = q_{\max}$  مقدار بتنانی پیشتر در ش. [۳] بالا ذکر شد.

مقدار 2;5,49<sup>p</sup> که ابن أعلم برای  $e$  به دست آورده است، اختلاف اندکی با مقدار 2;5,59<sup>p</sup> محیی الدین دارد؛ بنابراین، به نظر می‌رسد که ناشی از رصدهایی نسبتاً دقیق و درست بوده باشد.

1. Kennedy, A Survey of Islamic..., nos. 70; 84; 46 and 75.

۲. زیج ایلخانی، جداول تعديل شمس:  $T = \frac{\pi}{2} - \arcsin(q)$ . صص ۶۰-۶۵.

3. Kennedy, "The Solar Equation...".

4. Neugebauer, pp. 20 and 95-6.

خازنی و عبدالکریم بن فهّاد، مؤلف زیج علایی، که به فاصله حدود نیم قرن از یکدیگر می‌زیستند، دو مقدار مختلف برای  $e$  به دست داده‌اند که مقدار خازنی بسیار نزدیک به مقدار نیریزی، و مقدار عبدالکریم بن فهّاد بسیار نزدیک به مقدار بتانی است.

مقدار به کار رفته در زیج ایلخانی که مؤلف زیج اشرفی آن را به خود نصیرالدین طوسی نسبت داده است در حقیقت مأخوذه از زیج الحاکمی الكبير ابن یونس است.<sup>۱</sup>

گزارش رصدهای محیی‌الدین در سال‌های ۶۳۳ و ۶۳۴ یزدگردی (۱۲۶۴-۵م) در رصدخانه مراغه، که وی مقدار  $2;5,59^p$  را بر اساس آن‌ها به دست آورد، و نیز روش محاسبه او را در تلخیص الماجسٹری وی در اختیار داریم.<sup>۲</sup> در جدول زیر مقادیر رصدی وی - که در هنگام گذر نصف‌النهاری خورشید به دست آمده بودند - فهرست، و با مقادیر حقیقی مقایسه شده است.

جدول ۶

		اختلاف	زمان گذر نصف‌النهاری خورشید	JD
	رصد $\lambda$	حقيقي $\lambda$		
8 Sep. 1264	172;53,59	172;58,16	- 4' 17"	11h 55m 2182985
26 Oct. 1264	220;42,44	220;44,25	- 1' 41"	11h 45m 2183033
5 Mar. 1265	352;19,54	352;16,49	+ 3' 5"	12h 11m 2183163

چنانکه در جدول بالا می‌توان دید، رصدهای محیی‌الدین از دقّت خوبی برخوردار بوده است. وی بر اساس همین رصدها با کاربرد روش سه نقطه‌ای (شکل ۴) مقدار  $e = 2;5,59^p$  را به دست آورد. هرچند، مقداری که برای محاسبه جدول تعديل مرکز شمس به کار برد،  $e = 2;6^p$  است. وابکنوی همین جدول را در زیج خود آورده است.<sup>۳</sup> آزمون موردي مداخل نشان می‌دهد که مقادیر آن بر اساس رابطه داده شده در مقدمه مقاله محاسبه شده است. مقدار محیی‌الدین در رسالات نجومی پس از او به

۱. ابن یونس، ص ۱۷۴.

2. Saliba, pp. 115-120.

۳. وابکنوی، نسخه ت: ۱۵۴.

عنوان کمیت جدیدی «که متأخران از رصد به دست آورده‌اند» در کنار مقدار بطلمیوس ذکر می‌شده است.<sup>۱</sup>

بیش از یک سده پس از رصدخانه مراغه، مقدار دیگری برای  $e$  در رصدخانه سمرقند به دست آمد که از همه مقادیر سابق الذکر دقیق‌تر بود. این مقدار در زیج گورکانی الغ بیگ به کار رفت: مقدار اندکی بیش از ۱;۲۰ که از مقدار ۱;۵۵،۵۳،۱۲ برای بیشینه تعديل مرکز خورشید، مذکور در جداول زیج، قابل استخراج است.<sup>۲</sup>

### III. بحث و استنتاج

#### ۱. تأثیر خطاهای بر طول خورشید

همه مقادیر جدول‌های بالا نشان می‌دهند که در ادوار میانه اسلامی برای  $e$  مقادیری کمتر از ۰;۳۰ بطلمیوس به دست آمده بود. این امر با توجه به کاهش خروج از مرکز مدار زمین درست است. اگر خروج از مرکز مدار زمین، یعنی خروج از مرکز الگوی خورشید مرکزی، را  $e'$  بگیریم، آنگاه به تقریب می‌توان نوشت:

$$e' \approx \frac{1}{2} e \quad (7)$$

یعنی، مرکز دایره حامل (مدار) خورشید (زمین) و مرکز زمین در الگوی زمین مرکزی (نقاط O و T در شکل ۱) منطبق بر دو کانون بیضی در الگوی خورشید مرکزی فرض شود.

در زمان بتانی خروج از مرکز حقیقی خورشید مرکزی برابر بوده است با:

$$e' = 0.01716^{\circ}$$

اگر شعاع مداری را برابر واحد فرض کنیم ( $R=1$ ) مقداری که بتانی به دست داده است برابر است با:  $e = 0.01733$  بنابراین بیشینه خطای الگوی خورشیدی وی در تعیین  $\lambda$  (هنگامی که  $|\lambda - \bar{\lambda}| = 90^{\circ}$ ، یعنی، خورشید به تربیع مداری خود برسد)، بالغ

$$\text{بر } \frac{360}{\pi} (e - e') = \frac{360}{\pi} (0.01733 - 0.01716) \approx 0.0195^{\circ} \equiv 0^{\circ};1 \text{ خواهد بود}$$

۱. برای نمونه، نک: شیرازی، اختیارات، ۰۵؛ شیرازی، تحفه، ۳۸ پ.

۲. زیج سلطانی، ت: ۱۱۰-۱۱۵، آپ: ۱۱۷-۱۲۳، آپ: ۱۱۷-۱۲۳.

۳. برای روش محاسبه، نک: Meeus, p. 151. چنانکه بتانی می‌گوید، وی رصدهایی که کمیتهای خورشیدی را از آن به دست آورد، در سال ۱۱۹۴ اسکندر/ذوالقرنین = پس از ۱ سپتامبر (یا اکتبر) (JD=2043452) ۸۸۲ انجام داد.

(قس: با خطای  $\lambda = 23^{\circ}$  در مورد بطلمیوس). این مقدار خطای ممکن است هنگامی که  $\bar{c} = 45^{\circ}$  است حدود  $\frac{180}{\pi} \cdot \frac{3}{4} e'^2 = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{3}{4} \cdot (0.01716)^2 = 0^{\circ}; 0,46$  کاهش یابد.<sup>۱</sup>

پس از روزگار بتانی قاعده‌تاً باید شاهد به دست آوردن مقادیر کوچک‌تر برای  $e'$  و  $q_{\max}$  باشیم، اماً به جز مقداری که عبدالکریم بن فهاد از ایه داده است، بقیه مقادیر بیشتر از مقدار بتانی، و بنا بر این نا دقیق‌تر، هستند. مقادیر  $e'$  مربوط به ابن الأعلم، ابن فهاد و محیی‌الدین در جدول ۷ زیر فهرست و با مقدار حقیقی در روزگار هریک مقایسه شده است.

جدول ۷

$e'$ حقیقی	$e'$ به دست آمده	بیشینه خطای در $\lambda$
$>2.3'$	0.01747	ابن الأعلم
$>1.7'$	0.01730	ابن فهاد
$>3.5'$	0.01752	زیج/یلخانی
$>3.3$	0.01750	محیی‌الدین مغربی

توضیح جدول ۷: مقادیر حقیقی در مورد ابن الأعلم و ابن فهاد با توجه به روزگار نسبی فعالیت ایشان محاسبه شده است. برای ابن الأعلم: دهه‌های ۹۸۰-۳۵۰ق/ ۱۴۰۰-۸۰م (با توجه به گزارش رصد قران اعظم سال ۵۳۵ق/ ۱۴۶۶م به وسیله‌ی ایشان) و سیله‌ی او که حدود تقریبی تألیف زیج وی را به دست می‌دهد). البته بازه‌های زمانی کوتاه به اختلاف چندانی در مقادیر  $e'$  منجر نمی‌شوند. برای محیی‌الدین، تاریخ دقیق اندازه‌گیری رصدی وی، دهه ۶۴۰ق/ ۱۲۶۰م، را در اختیار داریم (نک جدول ۲-۴) که با تقریب خوبی می‌توان همان را برای زیج/یلخانی نیز در نظر گرفت.

چنانکه در ابتدای مقاله آمد،  $e'$  یکی از پارامترهای ساختاری برای یافتن وضعیت خورشید است، بنابراین خطای در  $e'$  به خطای نظامدار در محاسبه مقادیر  $\lambda$  می‌انجامیده است. این مقدار با توجه به دقّت ابزارهای رصدی دوران باستان غیرقابل تشخیص بوده است،<sup>۲</sup> اماً با توجه به ابزارهای نجومی ادوار میانه اسلامی می‌توانست قابل تشخیص باشد.

۱. برای این روش محاسبات، نک: Neugebauer, III, pp. 1095-1101.

2. Neugebauer, III, p. 1102.

کمترین مقدار خطای ناشی از خروج از مرکز متعلق زیج سلطانی است:

جدول ۷

بیشینه خطای در $\lambda$	$e'$ حقیقی	$e'$ به دست آمده	$q_{\max}$
<1°	0.01694	0.01685	1°, 55, 53, 15

## ۲. روش‌ها و مقدار خطایها

در ابتدای مقاله در مثالی حساسیت روش فصول نشان داده شد. به عنوان بررسی موردی از میزان دقّت روش سه نقطه‌ای، شایان ذکر است که نگارنده با استفاده از مقادیر حقیقی برای سه زمان رصد خورشید به وسیله محیی الدین که پیشتر در بالا ذکر شد، و ادامه دادن روش محاسبه مثلثاتی محیی الدین (Saliba 1985) به مقدار  $e=0.01693$  رسید، یعنی خطای در حدود  $8 \times 10^{-5}$  یا تقریباً صفر نسبت به مقدار حقیقی خروج از مرکز زمین- خورشید (خطای محیی الدین حدود ۶۲ برابر این مقدار است). بنابراین، می‌توان آشکارا دید که برخلاف روش فصول، روش سه نقطه‌ای به دلیل عدم حساسیت به داده‌های ورودی نتایج قابل اطمینانی به دست می‌داده است. از این رو، خطای مقادیر تاریخی محاسبه شده بر اساس این روش می‌تواند ناشی از خطای مقادیر ورودی، خطای محاسب در گرد کردن مقادیر واسطه یا هر عامل دیگر باشد، ولی خود روش عامل بالقوه در تولید خطای نبوده است و مقادیر حاصل از کاربرد این روش دست کم واگرایی‌های غیرقابل قبول نسبت به مقادیر حقیقی نشان نمی‌داده‌اند.

برای ارایه مقایسه‌ای بهتر از کاربرد سه روش، مقادیر تاریخی مذکور در مقاله در نمودار شکل ۵ تصویر شده است. خط ضخیم ممتد نشان‌دهنده تغییرات حقیقی در خروج از مرکز است.<sup>۱</sup> چنانکه دیده می‌شود، خروج از مرکز زمین با گذشت زمان در حال کاهش است. تمام مقادیر تاریخی که در این مقاله ذکر شد، کاهش خروج از مرکز را با گذشت زمان نشان می‌دهند. برای مقایسه مقادیر تاریخی (بر حسب  $R=60$ ) با مقادیر حقیقی، همه آنها بر حسب رابطه (۱) بند III به مقادیر بر حسب  $R=1$  تبدیل و تا دقّت  $10^{-5}$  گرد شده است. به این دلیل که تاریخ دقیق رصدهای خورشیدی برخی منجمان، مانند ابن الأعلم، ابن یونس، فهاد و الخ بیگ، را در اختیار نداریم، اما میزان تغییرات

۱. براساس رابطه داده شده در Meeus, p. 151

خروج از مرکز در طی<sup>۵</sup> دو دهه بندرت از ۱۰<sup>-۵</sup> تجاوز می‌کند و در نتیجه تعیین مقدار حقیقی خروج از مرکز بر حسب حدود زمانی فعالیت آن منجمان از تقریبی قابل قبول برخوردار خواهد شد.

در نمودار شکل ۶، پنج مقداری که با ○ مشخص شده، مقادیر مذکور در شماره‌های [۱]، [۲]، [۴]-[۶] جدولهای بند II را نشان می‌دهد که بر اساس روش فضول به دست آمده بوده است. چهار مقداری که با ● مشخص شده، شماره‌های [۸]-[۱۱] مربوط به بند II را نشان می‌دهد که از طریق روش اوساط بروج محاسبه شده است. سه مقداری که با ♦ مشخص شده، به ترتیب مقادیر مربوط به یحیی بن ابی منصور، نیریزی و بتانی (نک: شم. [۳] بند II) است که از جداول تعديل مرکز زیجهای این منجمان استخراج شده است (چنانکه پیشتر آمد، مقدار خروج از مرکز که بیرونی بر اساس طول فضول اندازه‌گیری شده توسط بتانی محاسبه کرده، اندکی متفاوت از مقداری است که بتانی در زیج خود آورده است). مقادیر متأخر با <sup>7</sup> نشان داده شده است: ابن الأعلم، ابن یونس، ابن فهاد، خازنی، محیی الدین و الغ بیگ. ستاره (\*) مقدار کوپرنیک را نشان می‌دهد.

### ۳. نتایج

با نگاهی کلی به این مقادیر نتایج زیر حاصل می‌شود:

۱- چنانکه می‌توان به وضوح مشاهده نمود، انحراف یا واگرایی‌ها در مقادیر حاصل از روش فضول بیشتر از روش‌های دیگر است. نتایج روش اوساط بروج انحراف مشابهی را نسبت به یکدیگر نشان می‌دهند و خطای میانگین آنها کمتر از روش فضول است.

۲- با این حال، محدودیت ذاتی و حساسیت بالای روش فضول یا سهولت و اطمینان روش اوساط بروج یا دقّت بالای روش سه نقطه‌ای هیچ ضمانت یا الزامی برای حصول نتیجه دقیق از یک روش و نتیجه نادرست از روش دیگر به وجود نمی‌آورد. چنانکه می‌توان دید، دقیق‌ترین مقدار حاصل شده در ادوار میانه اسلامی، متعلق به اندازه‌گیری سال ۳۸۵ یزدگردی / ۱۰۱۶ م به وسیله بیرونی، از روش فضول حاصل آمده است. همچنین مقدار دقیق یکی از اسلاف نزدیک به وی، یعنی ابوالوفاء، با کاربرد همان روش حاصل شده است.

۳- با استفاده از نتیجه (۱)، می‌توان با اطمینان بالا چنین نتیجه گرفت که نیریزی (که آثار وی بر جای نمانده است) و همچنین خازنی از روش فضول برای تعیین خروج از

مرکز استفاده کرده‌اند. میزان خطای مقادیر آنان در حد خطای مروروذی در رصد دوم روزگار مأمون است.

۴- مقدار خروج از مرکز تعیین شده به وسیله منجمی نسبتاً گمنام مانند ابن فهاد از دقّت بالایی (مثلاً بیشتر از ابن الأعلم، ابن یونس و محیی الدین) برخوردار بوده است.

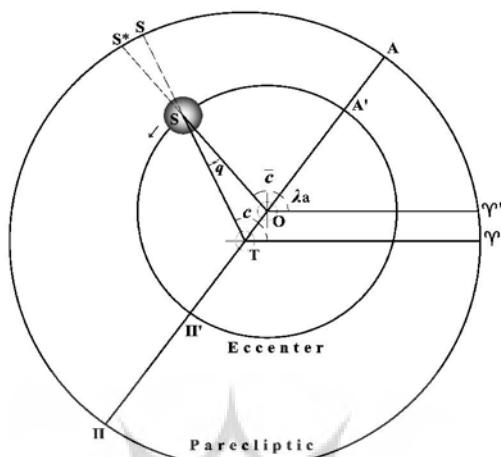
۵- بهترین دقّت در تعیین خروج از مرکز خورشید در میان منجمانی که زیج‌های آنان نفوذ زیادی در دوران میانه اسلامی داشته‌اند (یعنی بتانی، ابن الأعلم، ابن یونس، ایلخانی، محیی الدین و الغ بیگ) متعلق به زیج سلطانی الغ بیگ بوده است.

۶- دقّت بیشترینه اندازه‌گیری‌های صورت گرفته در ادوار میانه اسلامی بیش از دقّت اندازه‌گیری کوبرنیک در دهه‌های آغازین سده ۱۶ م است.

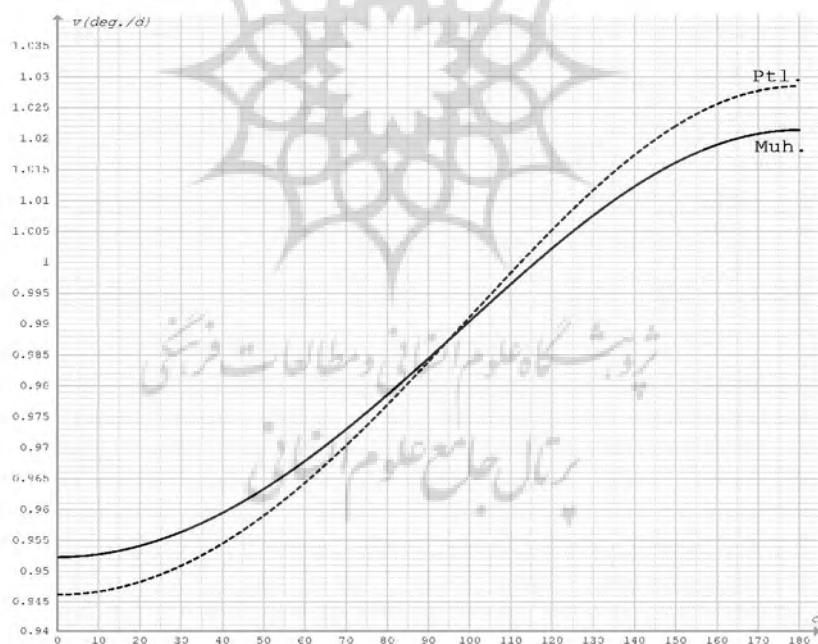
در پایان باید بر این نکته مهم تأکید داشت که دقّت بیشتر در مقدار خروج از مرکز الزاماً به معنای دقّت در تعیین طول خورشید نیست؛ زیرا، چنانکه در بند ۱-III دیدیم، خروج از مرکز تنها یکی از پارامترهای خورشیدی است که خطای آن تأثیر کمتری در تعیین طول خورشید دارد. هرچند، تعیین سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای خورشید تماماً به این پارامتر بستگی دارد (I-۲).



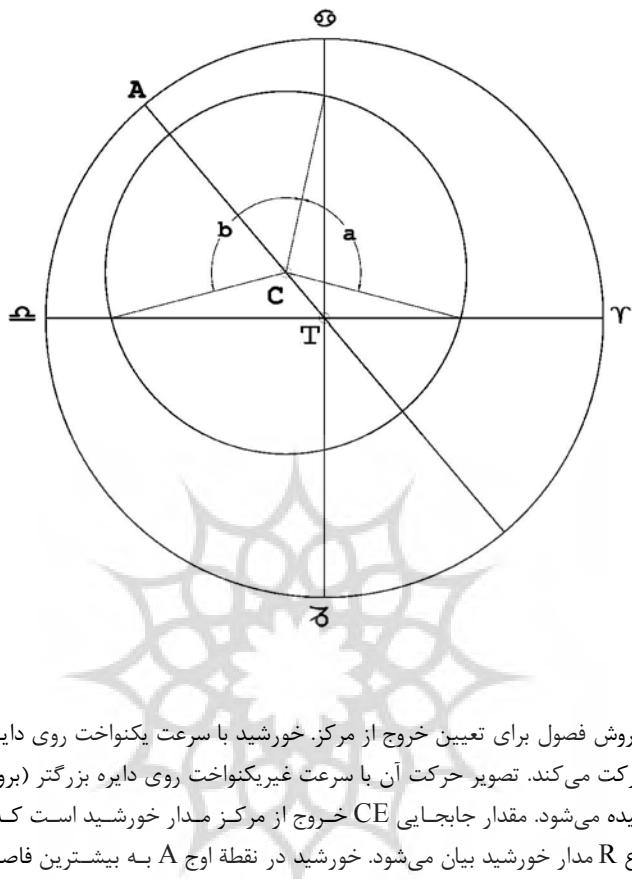
### پیوست مقاله



شکل ۱: الگوی خورشیدی در نظام زمین مرکزی بطلمیوس

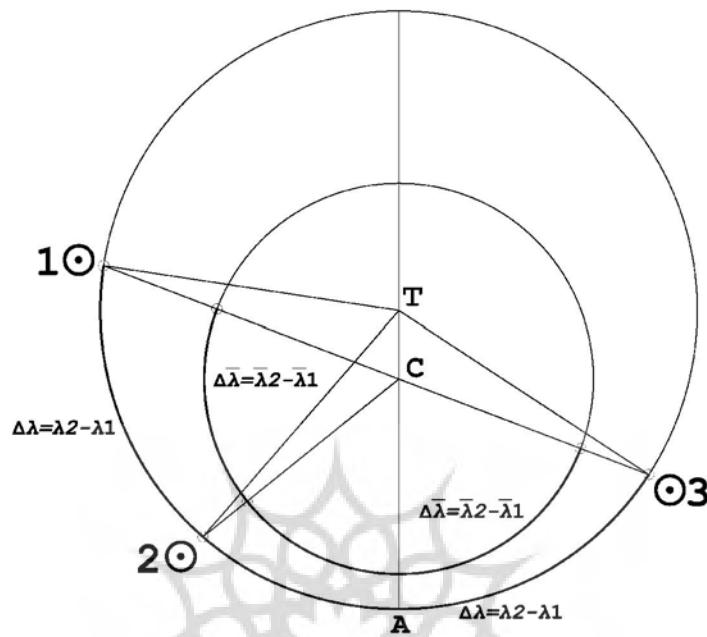


شکل ۲: مقایسه تغییر سرعت زاویه‌ای خورشید در اثر تغییر خروج از مرکز  
بین مقادیر بطلمیوس و محیی‌الدین



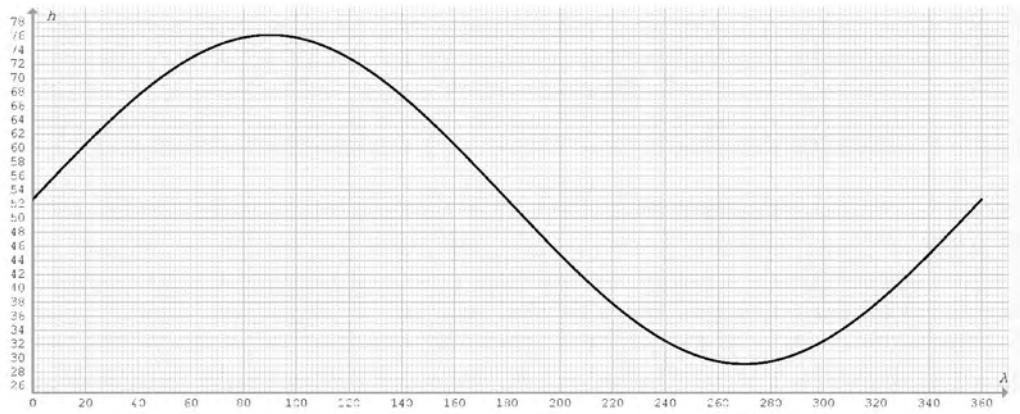
شکل ۳: روش فضول برای تعیین خروج از مرکز. خورشید با سرعت یکنواخت روی دایره کوچکتر به مرکز C حرکت می‌کند. تصویر حرکت آن با سرعت غیریکنواخت روی دایره بزرگتر (بروج) به مرکز زمین E سنجهده می‌شود. مقدار جابجایی CE خروج از مرکز مدار خورشید است که بر حسب واحدهای شعاع R مدار خورشید بیان می‌شود. خورشید در نقطه اوج A به بیشترین فاصله از زمین می‌رسد.

پژوهشنامه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی  
پرستال جامع علوم انسانی

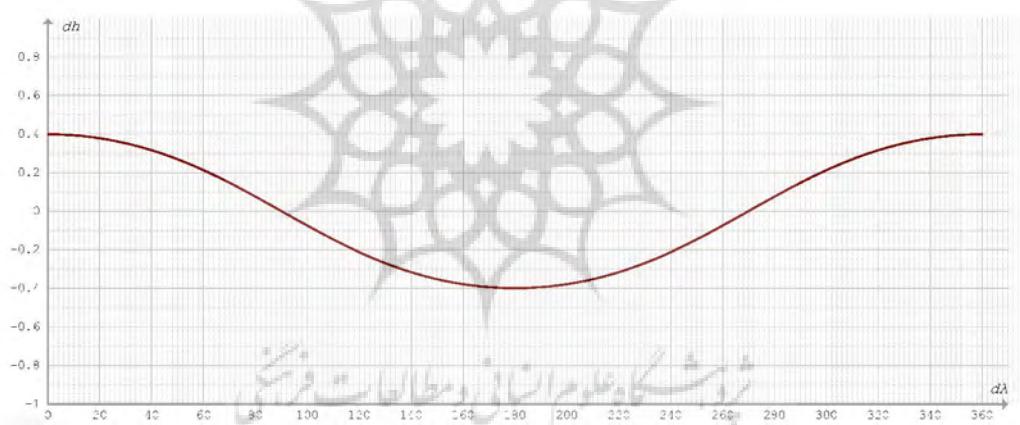


شکل ۴: روش سه نقطه‌ای برای تعیین خروج از مرکز. مقادیر  $\Delta\lambda$  از طریق رصد به دست می‌آید و مقادیر  $\bar{\Delta\lambda}$  با اندازه‌گیری طول سال اعتدالی و فاصله زمانی بین دو رصد متوالی محاسبه می‌شود. سپس، با کاربرد قواعد مثلثات مسطحه، اندازه CE، خروج از مرکز، بر حسب اندازه شعاع دایره حامل خورشید (دایره کوچکتر در شکل) تعیین می‌شود.

پرستال جامع علوم انسانی  
دانشکده علوم انسانی و مطالعات فرهنگی

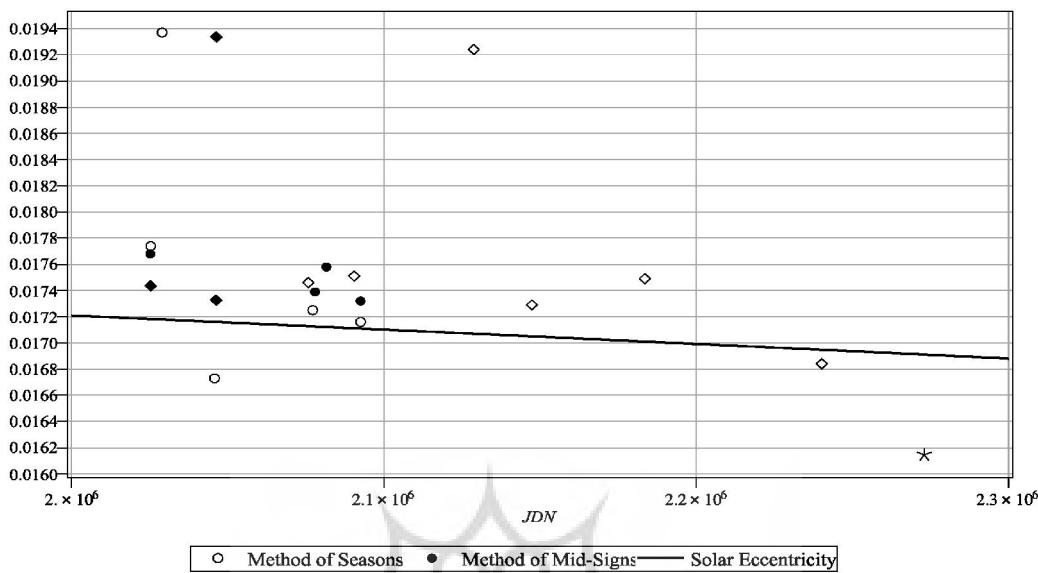


(الف)



(ب)

شکل ۵: (الف) تغییرات ارتفاع  $h$  خورشید بر حسب طول خورشید در عرض جغرافیایی  $\varphi=37;20^\circ$  (ب) سرعت تغییرات ارتفاع  $(dh/d\lambda)$



شکل ۶: نمودار تغییرات خروج از مرکز زمین بر حسب روز ژولیانی و مقادیر تاریخی. مقادیر تاریخی بر حسب روش به کار رفته در اندازه‌گیری آنها دسته‌بندی شده است:

○ : مقادیر مذکور در شماره‌های [۱]، [۲]، [۴]-[۶] جدولهای بند II، بر اساس روش فصول.

● : مقادیر شماره‌های [۸]-[۱۱] مربوط به بند II، روش اوساط بروج.

◆ : به ترتیب تاریخی، مقادیر مربوط به یحیی بن ابی منصور، نیزی و بتانی (نک. ش. [۳] بند II).

◊ : مقادیر به کار رفته در زیجه‌های معتبر دوران اسلامی؛ به ترتیب تاریخی، ابن الأعلم، ابن یونس، ابن فهاد، خازنی، محیی الدین و الغ بیگ.

ستاره (\*): کوپرنیک.

## منابع

1. ابن یونس، ابوالحسن علی بن عبدالرحمٰن، زیج الکبیر الحاکمی، نسخه خطی لیدن، ش. Or. 143
2. الغ بیگ، زیج سلطانی (گورکانی)، نسخه خطی ت: دانشگاه تهران، شم ۱۳۱۳ج؛ نسخه خطی م: مجلس، شم ۷۲

۳. بیرونی، ابویحان، *القانون المسعودی*، حیدرآباد، دائرة المعارف العثمانية، ۱۹۵۴م.
۴. بیرونی، ابویحان، *آثار الباقية عن القرون الخالية*، تصحیح ادوارد زاخاو، لاپیزیگ، ۱۹۲۳؛ ترجمه آثار الباقیة عن القرون الخالية، اکبر داناسرشت، تهران، ابن سینا، ۱۳۵۲.
۵. خازنی، عبدالرحمن، *التّریج المعتبر السنجّری*، Vatican, Arabo, No. 761 و 6669 Istanbul, British Museum, No. Or. Suleymaniye Library, Hamadiye collection, No. 859
۶. شیرازی، قطب الدین، اختیارات مظفری، نسخه خطی تهران، کتابخانه ملی، ش. ۷۴۰ (استنساخ شده در سده هفتم هجری در روزگار حیات مؤلف)
۷. شیرازی، قطب الدین، *تحفة الشاهیة*، نسخه خطی تهران، مجلس، ش. ۶۱۳۰ (استنساخ شده در ۷۳۰ق / ۱۳۲۹م)
۸. طوسی، نصیرالدین و منجمان مراغه، زیج ایلخانی، نسخه خطی دانشگاه تهران، ش. ۱۶۵ از مجموعه حکمت.
۹. طوسی، نصیرالدین، رساله المعینیة فی علم الهیئة، نسخه خطی تهران، مجلس، ش. ۶۳۴۷.
۱۰. الکمالی، محمد بن ابی عبدالله سنجر، زیج اشرفی، Paris: MS. Paris, Bibliothèque Nationale, suppl. Pers. No. 1488
۱۱. واکنی بخاری، شمس الدین محمد، زیج محقق سلطانی، نسخه خطی ای: ایران، کتابخانه علومی یزد، بدون شماره؛ میکروفیلم آن در دانشگاه تهران، ش. ۲۵۴۶. نسخه خطی ت: ترکیه، کتابخانه ایاصوفیا، ش. ۲۶۹۴.
۱۲. یحیی بن ابی منصور، زیج الممتحن، Escorial, No. Arab 927
13. Charette, François, “The Locales of Islamic Astronomical Instrumentation”, *History of Science*, 44 (2006), 123–138.
14. Copernicus, Nicolaus, *De Revolutionibus Orbium Coelestium* [On the Revolutions of the Heavenly Spheres], Norimbergae, apud Ioh. Petreium, 1543.
15. Grasshoff, Gerd, *The History of Ptolemy's Star Catalogue*, London, Springer, 1990.
16. Hughes, D. W., “Hipparchus' spring and summer and the ellipticity of the Earth's orbit”, *Journal of the British Astronomical Association*, 99.2 (1989), 90–94.
17. Kennedy, E. S., *A Survey of Islamic Astronomical Tables*, Philadelphia: American Society Publishing, 1956.
18. Kennedy, E. S., “The Solar Equation in the *Zīj* of Yahya b. Abī Manūr”, *Prismata: Festschrift für Willy Hartner*, Wiesbaden, Steiner, 1977, pp. 183–186. Reprinted in Kennedy, E. S., *Studies in the Islamic exact sciences*, Beirut, American University of Beirut, 1983, 136–139.
19. Meeus, Jean, *Astronomical Algorithms*, Richmond, William–Bell, 1998.

20. Meeus, J. and Savoie, D., "The history of the tropical year" *Journal of the British Astronomical Association*, 102.1(1992), 40–42
21. Nallino, C. A. (ed.), *Al-Battani sive Albatenii. Opus Astronomicum*, 3 vols., Milan, University of Milan Press, 1899–1907.
22. Newton, R. R., "The Authenticity of Ptolemy's Parallax Data-Part 1", *Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society* 14(1973), 367–388.
23. Neugebauer, Otto, *The Astronomical Tables of Al-Khwarizmi*, Hist. Filos. Skr. Dan. Vid. Selsk. Vol. 4, no. 2, Copenhagen, 1962.
24. Neugebauer, Otto, *A History of Ancient Mathematical Astronomy*, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 19745.
25. Pederson, Olaf, *A survey of Almagest*, Odense, Odense University Press, 1974.
26. Pingree, David, "On the Classification of Indian Planetary Tables", *Journal for the History of Astronomy*, 1(1970), 95–108
27. Said, S. S. and Stephenson, F. R., "Precision of medieval Islamic measurements of solar altitudes and equinox times", *Journal for the History of Astronomy*, 26(1995), 117–132.
28. Saliba, George, "Solar Observations at Maragha observatory", *Journal for the History of Astronomy*, 16(1985), 113–122.

