

## زمان بهینه برای خرید مستمری براساس فرایند پخش-پرش روی صندوق و مرگومیر تصادفی

حسن داداشی آرانی\*

وحید مختاری\*\*

### چکیده

در چند دهه اخیر، در بسیاری از کشورها نظام‌های بازنشستگی با مشارکت معین، جایگزین نظام‌های با مزایای معین شده است. با توجه به این که در نظام‌های با مشارکت معین، ریسک مالی بیش تر متوجه اعضای صندوق می‌باشد، مدیریت سید در قبل از بازنشستگی و همچنین بعد از بازنشستگی برای اعضا دارای اهمیت بسیاری است. در این مقاله، دوران بعد از بازنشستگی را فرض کرده و به مسئله انتخاب بهینه زمان خرید مستمری بعد از بازنشستگی (دوران توزیع سرمایه) که در کاهش ریسک مستمری اهمیت دارد، می‌پردازیم. محققان زیادی مسئله زمان بهینه خرید مستمری را در مدل‌های مختلف حرکت برآونی و برای توابع مطلوبیت مختلف بررسی کرده‌اند. این مطالعه از سه جهت متفاوت مورد بررسی قرار گرفته است. اولاً، استفاده از دینامیک پخش - پرش برای مدل کردن دارایی ریسکی، به جای استفاده از حرکت برآونی است. دوماً، به جای ماکزیم‌سازی یک مطلوبیت اقتصادی، ارزش بازاری جریان نقدی آینده را ماکزیم می‌کنیم. همچنین، با استفاده از تجزیه وینر - هوف نشان می‌دهیم که ناحیه تداوم به وسیله یکی از کران‌های بالا و یا پایین در دامنه زمان - بازده محدود می‌شود. به علاوه، از نرخ مرگومیر غیر ثابت با توزیع گامپرتز ما کهام استفاده می‌کنیم. در نهایت یک روش برای محاسبه احتمال خرید مستمری ارائه می‌شود.

**کلیدواژه‌ها:** معمای خرید مستمری، زمان توقف، تجزیه وینر - هوف، ارزش حال مورد انتظار.

\* هیئت علمی گروه ریاضیات مالی دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان (IASBS)، (dadashi@iasbs.ac.ir).

\*\* دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضیات مالی دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان (IASBS).

خرید یک مستمری عمر با پرداخت ثابت راه حل مناسبی برای حفظ استانداردهای زندگی در زمان بازنشستگی است و اشخاص را در برابر فقر در زمان پیری محافظت می‌کند. ایراد اصلی این نوع بیمه، برگشت‌ناپذیری آن و این حقیقت است که پرداخت‌های آن مشروط به بقای دریافت‌کننده است. از طرف دیگر شرکت‌های بیمه یا بانک‌ها خدمات مالی برپایه صندوق‌های سرمایه‌گذاری مشترک ارائه می‌دهند. این صندوق‌ها برای افرادی طراحی شده‌اند که حاضر به پذیرش ریسک بیش‌تری در مقابل رشد بالاتری از سرمایه‌گذاری خود هستند. در این زمینه مطالعات قبلی مدارک وسیعی از این حقیقت ارائه می‌دهند که افراد باید قبل از بازنشستگی در چنین طرح‌هایی سرمایه‌گذاری کنند. در این صورت سوالی که پیش می‌آید این است که آیا چنین سرمایه‌گذاری را با یک مستمری عمر تعویض کنیم یا نه؟ در صورت تعویض چه زمانی مبادرت به انجام این کار کنیم؟

مقالات متعددی از جنبه‌های مختلف مسئله خرید مستمری را بررسی کرده‌اند. مقاله معروف یاری (Yaari, 1965) نشان داد اشخاصی که انگیزه‌ای برای ارث گذاشتن ندارند، بهتر است با همه ثروتشان مستمری بخرند. میلووسکی (Milevsky, 1998) با مدل کردن دینامیک صندوق روی حرکت برآونی و استفاده از نرخ‌های بهره CIR احتمال موفقیت آمیز بودن تأخیر در خرید مستمری را بررسی کرد. یعنی خرید مستمری را تا زمانی که سرمایه‌گذاری انجام شده درآمدی حداقل برابر با یک مستمری داشته باشد، به تأخیر انداخت. هاینات و دیوالدر (Hainaut, and Devolder, 2006) یک مسئله ماکزیم‌سازی مطلوبیت را با بررسی عددی درباره تخصیص بهینه بین مستمری‌ها و دارایی‌های مالی ارائه دادند. میلووسکی و همکارانش (Milevsky, Moore, and Young, 2006) سرمایه‌گذاری بهینه و استراتژی خرید مستمری را برای شخص بازنشسته‌ای بررسی کرده‌اند که هدفش می‌نیمم کردن احتمال به‌صفر رسیدن سرمایه‌اش می‌باشد. آن‌ها در مدل خود بازنشسته‌ای را فرض کرده‌اند که در حال حاضر برای خرید مستمری عمری که بتواند مصرف مطلوبش را تأمین کند، سرمایه کافی ندارد و به‌دنبال

تخصیص بهینه دارایی و همچنین استراتژی بهینه خرید مستمری برای می نیم کردن احتمال از دست دادن ثروتش است. بنابراین شخص تا زمانی که نتواند مصرف مطلوبش را با یک مستمری عمر پوشش دهد اقدام به خرید مستمری نخواهد کرد (در این مدل دینامیک دارایی ریسکی از یک حرکت برآونی هندسی پیروی می کند).

استیبل (Stabile, 2006) زمان بهینه خرید مستمری و سرمایه گذاری بهینه را برای شخص بازنشسته ای با نیروی میرایی ثابت در قالب سرمایه گذاری همه-یا-هیچ و با توابع مطلوبیت مختلف، برای دوران قبل و بعد از بازنشستگی ارائه می دهد. او نشان می دهد درحالی که شخص در مورد خرید مستمری خیلی ریسک گریز باشد به تعویق انداختن خرید مستمری تا زمانی که سرمایه او به مرز نامشخصی برسد، بهینه است. در مقاله استیبل، انگیزه به ارث گذاشتن در نظر گرفته نمی شود. بنابراین مشکل انتقال بین نسلی وجود ندارد و هدف شخص، ماکزیم کردن تنزیل شده مطلوبیت مصرف مورد انتظار در طول سرمایه گذاری و جریان پرداخت های مستمری با استفاده از میزان مصرف و زمان خرید مستمری است. نرخ مخاطره ثابت و دینامیک دارایی ریسکی با حرکت برآونی مدل بندی می شود. همچنین توابع مطلوبیت مختلفی برای دوران قبل و بعد از بازنشستگی در نظر گرفته شده است. میلوسکی و یانگ (Milevsky, and Young, 2007) نیز مسئله استیبل را تحلیل می کنند با این تفاوت که فرضیات آماری واقعی تری را در نظر می گیرند. برای مثال از نیروی میرایی افزایشی استفاده می کنند و استراتژی های بهینه خرید مستمری را برای ماکزیم کردن بازده های سرمایه گذاری در دو حالت همه یا هیچ و حالتی که شخص می تواند با درصدی از ثروتش مستمری بخرد مقایسه و مورد بررسی قرار می دهند. امس و هابرم (Emms, and Haberman, 2008) درباره زمان بهینه خرید مستمری با می نیم سازی تابع زیان و با استفاده از تابع مرگ و میر گامپرتز و یک صندوق مبتنی بر حرکت برآونی بحث کرده اند. جرارد و همکارانش (Gerrard, Højgaard, and Vigna, 2012) با استفاده از تابع ضرر مربعی بر پایه یک تابع هدف، مسئله سرمایه گذاری بهینه را تا یک زمان مشخص خرید مستمری بررسی می کنند. در ادامه مقاله دی جیاچینتو و همکارانش (Di Giacinto,

(Federico, Gozzi, and Vigna, 2014) یک سطح اطمینان حداقلی برای فرایند ثروت طراحی کردند که صندوق را از خطر ورشکستگی حفظ می‌کند.

در این مقاله ما به دنبال یک زمان بهینه برای تعویض سرمایه‌گذاری مالی با یک مستمری عمر هستیم که از سه جهت قابل توجه است. اولاً دارایی مالی که شخص در آن سرمایه‌گذاری می‌کند (قبل از خرید مستمری) به جای حرکت برآونی هندسی به وسیله یک فرآیند پخش - پرش مدل‌بندی می‌شود. کاربردهای عددی که در آن بازده دارایی با شاخص S&P500 تنظیم می‌شود، نشان می‌دهد که وجود پرش‌ها در مقایسه با پیش‌بینی‌ای که با مدل برآونی صورت می‌گیرد، به طور قابل ملاحظه‌ای نقطه تعویض را تغییر می‌دهد. دوماً به جای ماکزیمم کردن یک مطلوبیت اقتصادی، با استفاده از زمان توقف، ارزش بازاری جریان نقدی آینده را ماکزیمم می‌کنیم. سومین جنبه قابل توجه مطالعه جاری، مفروضات مربوط به نیروی مرگ و میر می‌باشد که برخلاف اکثر کارهای انجام شده وابسته به زمان می‌باشد. نهایتاً این مقاله روشی را برای تخمین عددی احتمال خرید مستمری بررسی می‌کند. وقتی نرخ تنزیل برابر نرخ بهره بدون ریسک باشد، هدف ماکزیمم کردن قیمت یا ارزش بازاری است که از تنزیل شده پرداخت‌های مورد انتظار آینده به دست می‌آید. از آنجایی که این مسئله شباهت‌هایی با قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی دارد، این مقاله یک راه‌حل نیمه‌بسته‌ای در قالب عملگرهای ارزش حال مورد انتظار (EPV) پیشنهاد می‌کند که توسط بویارچینکو و لوندوفسکی (Boyarchenko, and Levendorskii, 2007) برای قیمت‌گذاری اختیارهای آمریکایی تعریف شده‌اند. اما برای قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی از قبل می‌دانیم کران محدودکننده ناحیه اجرا یک مانع بالایی (اختیار خرید) یا یک مانع پایینی (اختیار فروش)، در دامنه «زمان-بازده» است. درحالی که در رویکرد فعلی، این جنبه را نمی‌توان در ابتدا شناخته شده دانست. از طرفی یک دلیل اساسی پیشنهاد می‌کند که شخص فرض بر این گذارد که اگر دارایی مالی ضعیف عمل کرد، به خاطر ترس از کم شدن سرمایه در مراحل بعد، بهتر است سرمایه‌گذاری را با یک مستمری عمر تعویض کند. در این حالت ناحیه تداوم

به وسیله یک کران پایین در فضای زمان و بازده محدود می شود. از طرف دیگر، زمانی که بازده های صندوق به اندازه ای بالا باشد که خرید مستمری مطلوبی را تضمین کند، شخص اقدام به خرید مستمری می کند که در این حالت ناحیه تداوم به وسیله یک کران بالا محدود می شود. در این مطالعه شرایط لازم برای وجود این مرزهای دو به دو ناسازگار ارائه و روشی برای محاسبه آنها به دست می آوریم. هردو دلیل فوق برای خرید مستمری با توجه به مشاهدات تجربی قابل توجیه هستند. استنتون بیان می کند که در سپتامبر و اکتبر ۱۹۹۸ خلبان های خطوط هوایی آمریکا، سه برابر بیش تر از متوسط بازنشستگی در یک ماه بازنشسته شدند. به گزارش مجله وال استریت این استقبال زیاد از بازنشستگی به دلیل رشد بازار سهام در ماه جولای بوده که تأثیر خود را روی افزایش مقادیر مستمری داشته است. به طور مشابه افزایش خریدهای مستمری بعد از سقوط بازار سهام در سال ۱۹۸۷ است. در روز دوشنبه، ۲ نوامبر ۱۹۸۷، سهام بیش از ۶۰۰ شرکت لاکهید (شرکت ساخت هواپیما در آمریکا) پایین آمد. در حالی که بیشتر کارمندان این شرکت ها، برگه های بازنشستگی زود هنگام خود را ۳۰ اکتبر ارائه داده بودند (تقریباً سه برابر بیش تر از شکل متداول ماهانه).

مقاله حاضر شامل بخش های زیر است: بخش اول: دینامیک دارایی مالی را ارائه می دهد که شخص پس اندازش را قبل از خرید مستمری در آن سرمایه گذاری می کند، در مورد مفروضات مربوط به مرگ و میر بحث می کند و مسئله ماکزیم سازی را معرفی می کند.

بخش دوم: تجزیه وینر- هوف را بیان و با استفاده از ترکیب روش های گسسته سازی و تجزیه وینر- هوف، زمان بهینه خرید مستمری را بررسی می کند.

بخش سوم: احتمال خرید مستمری در سن های مختلف را بررسی می کند.

بخش چهارم: مقاله حاضر به وسیله یک کار عددی نتیجه گیری می شود. در این کار عددی از نرخ مرگ و میر گامپرتز ماکهام و نرخ مرگ و میر کشور ایران استفاده شده است و بازده صندوق سرمایه گذاری مشترک با روش درست نمایی ماکزیم روی بازده های روزانه S&P۵۰۰ تنظیم شده است. همچنین یک مقایسه با حرکت برآونی محض به خوبی در چند سناریو بحث

شده است.

## ۱. مدل بازار مالی

ارزش و بازده صندوق سرمایه‌گذاری مشترکی که شخص در آن سرمایه‌گذاری می‌کند را به ترتیب با فرآیندهای تصادفی  $W_t$  و  $X_t$  در فضای احتمالاتی  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P})$  تعریف می‌کنیم که به وسیله فرمول زیر به هم مربوط می‌شوند:

$$W_t = W_0 e^{(X_t)}. \quad (1-1)$$

بازده  $X_t$  به وسیله یک فرآیند پخش-پرش نمایی مرتبه دوم به صورت زیر مدل‌بندی می‌شود (مدل‌بندی بازده سرمایه‌گذاری به وسیله فرآیند پخش-پرش نسبت به فرایند حرکت برآونی به بازده واقعی سرمایه‌گذاری نزدیک‌تر است چرا که بازده‌های واقعی نیز دارای پرش هستند):

$$dX_t = (\theta - \alpha)dt + \sigma d\tilde{W}_t + YdN_t; \quad (1-2)$$

که در آن  $X_0=0$ ، میانگین بازده‌های صندوق،  $\sigma$  تلاطم و مقداری ثابت،  $\tilde{W}_t$  حرکت برآونی و  $\alpha$  نرخ سود تقسیمی و مقداری ثابت می‌باشند. این مدل در (Hainaut, and Deelstra, 2014) با روش درست‌نمایی ماکزیمم به داده‌های روزانه مشاهده‌شده بین ژوئن ۲۰۰۳ و ژوئن ۲۰۱۳ از شاخص S&P500 برازش داده شده است که در فصل کاربرد عددی از این پارامترها استفاده خواهیم کرد. اگر  $\alpha$  نسبت به میانگین بازده‌های صندوق بزرگ‌تر باشد، می‌توان آن را به عنوان نرخ برداشت یا یک مستمری متغیر تفسیر کرد. میزان این درآمد متغیر که درصدی از ارزش بازاری صندوق می‌باشد، بستگی به مدیریت اجرایی سبد دارد. ترکیبی از برداشتها و نزول بازار می‌تواند ارزش حساب مستمری متغیر را به صفر کاهش دهد که در این صورت قرارداد سرمایه‌گذاری به پایان خواهد رسید. مقاله‌های بسیاری روی نرخ برداشت از صندوق کار شده‌اند تا میزان برداشت ثابتی را از صندوق تضمین کنند. اگر  $\alpha$  مقداری منفی باشد، می‌توان آن را به عنوان نرخ مشارکت، پرداختی دوران تجمعی تفسیر کرد. توجه کنید که نرخ مشارکت یا برداشت می‌تواند وابسته به زمان باشد که بعداً توضیح داده خواهد شد. قسمت پرش

از فرآیند پخش-پرش به وسیله یک فرآیند پواسون  $N_t$  با شدت ثابت  $\lambda$  مدل بندی می شود که مستقل از حرکت براونی  $\tilde{W}_t$  است. میزان پرش ها به وسیله متغیرنمایی مرتبه دوم  $Y$  با چگالی زیر توزیع می شود:

$$f_Y(y) = P\lambda^+ e^{-\lambda^+ y} 1_{\{y \geq 0\}} - (1-P)\lambda^- e^{-\lambda^- y} 1_{\{y < 0\}}, \quad (1-3)$$

که  $P$  و  $\lambda^+$  مقدارهای ثابت و مثبت هستند و  $\lambda^-$  مقدار ثابت منفی می باشد که به ترتیب احتمال پرش های نمایی به سمت بالا و پایین را نشان می دهند. مقدار مورد انتظار  $Y$  برابر است با مجموع وزن دار از میانگین پرش های مورد انتظار به سمت بالا و پایین یعنی:

$$E(Y) = P \frac{1}{\lambda^+} + (1-P) \frac{1}{\lambda^-}. \quad (1-4)$$

حال می توان سرمایه شخص را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$W_t = W_0 e^{X_t} = W_0 e^{(\theta - \alpha)t + \sigma \tilde{W}_t + \sum_{j=1}^{N_t} Y_j}. \quad (1-5)$$

باتوجه به این که فرآیندهای پخش و پرش مستقل از یکدیگر هستند، تبدیل لاپلاس از  $X_t$  برابر حاصل ضرب تبدیل لاپلاس این دو بخش می باشد. تبدیل لاپلاس فرآیند پواسون مرکب در مرجع (Shreve, 2004) به صورت زیر به دست آمده است:

$$\left( \exp \left( z \sum_{j=1}^{N_t} Y_j \right) \right) = \exp(\lambda t (\phi_Y(z) - 1)), \quad (1-6)$$

که  $\phi_Y(z)$  تبدیل لاپلاس از  $Y$  است. برای به دست آوردن  $\phi_Y(z)$  فرض کنید  $\xi^+$  و  $\xi^-$  به ترتیب متغیرهای نمایی با شدت  $\lambda^+$  و  $\lambda^-$  باشند که در این صورت برای  $\lambda^- < z < \lambda^+$  خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \phi_Y(z) &= \mathbb{P} E(\exp(zY)) \\ &= \mathbb{P} E(\exp(z\xi^+)) + (1 - \mathbb{P}) E(\exp(-z\xi^-)) \\ &= \mathbb{P} \frac{\lambda^+}{\lambda^+ - z} - (1 - \mathbb{P}) \frac{\lambda^-}{z - \lambda^-}. \end{aligned} \quad (1-7)$$

تبدیل لاپلاس  $X_t$  را بر حسب نمای مشخصه آن  $\psi(z)$  به صورت زیر به دست می آوریم:

$$\mathbb{E}(e^{zX_t}) = e^{t\psi(z)},$$

که در آن  $\psi(z)$  به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \psi(z) &= (\theta - \alpha)z + \frac{1}{2}z^2\sigma^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{zy} - 1)\lambda f_Y(dy) \\ &= (\theta - \alpha)z + \frac{1}{2}z^2\sigma^2 + \lambda(\phi_Y(z) - 1). \end{aligned} \quad (1-8)$$

### احتمالات مرگومیر و مدل بقاء

در این مطالعه، شخص سرمایه گذاری را فرض کرده ایم که در یک زمان (سن) بهینه می خواهد با همه سرمایه خود یک مستمری عمر بخرد. سن بهینه به نیروی میرایی و به طور بدیهی به جنسیت او و مهم تر از همه به وضعیت سلامتی شخص که شرکت بیمه از آن ناآگاه است، بستگی دارد. در حقیقت، می توان گفت حقوق بگیرها یا همان بیمه شده ها نسبت به شرکت های بیمه اطلاع بیش تری از امید به زندگی خودشان دارند و نیازهای خود را مطابق آن تنظیم می کنند. برای مشخص کردن این اطلاعات نامتقارن بین شرکت بیمه و حقوق بگیرها، نرخ مرگومیری را که شرکت بیمه تعیین می کند متفاوت با نرخ مرگومیر واقعی حقوق بگیرها در نظر خواهیم گرفت. زمان مرگ شخص را با  $\tau_d$  نمایش می دهیم که به وسیله یک فرآیند پواسون ناهمگن در فضای احتمالاتی  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}\}_t, \mathbb{P})$  مدل بندی می شود. فرآیند مرگ را مستقل از  $N_t$  و  $\tilde{W}_t$  فرض کرده و شدت این فرآیند را که نرخ مرگومیر نامیده می شود با  $\mu(t)$  که یک تابع معین از زمان است، نشان می دهیم. با این مفروضات، احتمال این که یک شخص  $\eta$  ساله در زمان صفر،  $u$  سال دیگر زنده بماند به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$\begin{aligned} {}_u P_\eta &= \mathbb{P}(\tau_d > u) \\ &= e^{-\int_0^u \mu(\eta+s) ds}, \end{aligned} \quad (1-9)$$



و احتمال این که همان شخص در طول  $u$  سال آینده بمیرد برابر است با  $q_{\eta} = 1 - p_{\eta}$  علاوه بر این احتمال آنی مرگ در زمان  $u$ ، مشتق  $q_{\eta}$  نسبت به  $u$  تعریف می‌شود. به عبارت دیگر، احتمال این که یک شخص  $\eta$  ساله در بازه زمانی  $(u, u + du)$  بمیرد به صورت زیر است:

$$\frac{\partial}{\partial u} q_{\eta} = \mu(\eta + u) e^{-\int_0^u \mu(\eta+s) ds} du. \quad (1-10)$$

فرض کنید  $\rho$  یک نرخ تنزیل ثابت باشد. ارزش حال مورد انتظار از یک مستمری عمر، با پرداخت یک واحد پولی از زمان  $t$  تا زمان مرگ شخص به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{a}_{\eta+t} = \int_t^{T_m} e^{-\rho(s-t)} {}_{s-t}P_{\eta+t} ds, \quad (1-11)$$

که  $T_m$  حداکثر طول عمر یک انسان است. از طرف دیگر، شرکت بیمه با نرخ مرگ و میر و تابع بقایی که به ترتیب با  $\mu^{tf}(t)$  و  ${}_uP_{\eta}^{tf} = e^{-\int_0^u \mu^{tf}(\eta+z) dz}$  نشان داده می‌شود، کار می‌کند. شرکت‌های بیمه این اطلاعات را از مشاهدات آماری، مثلاً براساس مرگ و میر تجربی جمعیت یک کشور به دست می‌آورند که متفاوت از اطلاعات شخص واحد است. اگر نرخ بهره‌ای را که به وسیله شرکت بیمه تضمین می‌شود با  $\rho^{tf}$  تعریف کنیم، ضریب مستمری به صورت زیر خواهد بود:

$$\bar{a}_{\eta+t}^{tf} = \int_t^{T_m} e^{-\rho^{tf}(s-t)} {}_{s-t}P_{\eta+t}^{tf} ds. \quad (1-12)$$

میزان حقوق پرداختی به شخص بعد از خرید مستمری به وسیله ضریب فوق تعیین می‌شود. فرض کنید شخص در زمان  $t$  مستمری بخرد. جریان نقدی که به عنوان مستمری برای شخص پرداخت می‌شود، با  $B_{\eta+t}$  نشان می‌دهیم:

$$B_{\eta+t} = \frac{W_t - K}{\bar{a}_{\eta+t}^{tf}} \frac{1}{1-\delta}, \quad (1-13)$$

در اینجا  $\epsilon$  یک بارگذاری تجاری است و  $K$  می‌تواند به دو صورت بیان شود. اگر  $K > 0$  باشد به عنوان حق الزحمه و اگر  $K < 0$  باشد، آن را یک مشوق مالیاتی در نظر می‌گیریم. نسبت زیر برای مقایسه ارزش حال مورد انتظار از پرداخت‌های مستمری، با قیمت پرداخت شده برای مستمری به کار می‌رود.

$$f(s) = \frac{1}{1 - \delta} \frac{\bar{a}_{\eta+s}}{\bar{a}_{\eta+s}^{ff}} \quad (1-14)$$

نسبت فوق مستقیماً به تفاوت بین نرخ مرگ و میری که شرکت بیمه برای قیمت‌گذاری مستمری به کار می‌برد با نرخ مرگ و میر واقعی شخص خریدار مربوط می‌شود. برای شخصی که سلامتی بیش‌تری نسبت به میانگین جامعه دارد، این تابع بزرگ‌تر از  $100\%$  است و قیمتی که شرکت بیمه برای مستمری تعیین کرده، برای این شخص زیر قیمت می‌باشد. در بخش کاربرد عددی نشان خواهیم داد چنین شخصی با احتمال بیش‌تری مستمری عمر می‌خرد. از طرف دیگر برای شخصی که از سلامتی پایین‌تری نسبت به میانگین جامعه برخوردار است. تابع  $f(s)$  کم‌تر از  $100\%$  است. در این حالت قیمت‌گذاری بیمه عمر برای این شخص بالاتر از قیمت عادلانه می‌باشد. همان‌طور که در بخش کاربرد عددی نیز خواهیم دید، چنین شخصی اشتیاق کمتری برای خرید زودتر مستمری دارد.

### تابع هدف

سیاست سرمایه‌گذاری که برای خریدار مستمری در نظر گرفتیم شامل دو مرحله است. در مرحله اول، شخص سرمایه صندوق خود را در بازار سرمایه‌گذاری کرده و سود تقسیمی سبدها به بیان دیگر یک مستمری متغیر را دریافت می‌کند و امورات زندگی خود را می‌گذراند که در این مرحله اگر شخص سرمایه‌گذار فوت کند سرمایه وی به ذینفع او به ارث خواهد رسید. دوره اول در یکی از حالات زیر پایان می‌یابد و شخص وارد مرحله دوم می‌شود. اول این که سبدها سرمایه‌گذاری شخص خیلی خوب عمل کرده و سرمایه موجود در صندوق به حدی

برسد که بتواند یک مستمری خوب بخرد و دوم این که سبد سرمایه گذاری شخص ضعیف عمل کند و او برای جلوگیری از ضرر و زیان بیش از حد مجبور به ترک سرمایه گذاری یا همان دوره اول سیاست کرده و با سرمایه موجود در صندوق مستمری بخرد و وارد مرحله دوم از سیاست سرمایه گذاری شود که در این صورت مابقی عمر خود را با حقوق یا مستمری ثابتی خواهد گذرانید که از بیمه دریافت می کند.

زمان توقف سرمایه گذاری را طوری انتخاب می کنیم که ارزش بازاری (تنزیل شده) جریان نقدی آینده) سبد سرمایه گذاری شخص ما کزیمم شود. نرخ تنزیل استفاده شده در محاسبات را ثابت و برابر با  $p$  در نظر می گیریم و برای سادگی محاسبات از فاکتور تنزیل نمایی استفاده می کنیم. زمان یا لحظه ای را که شخص مستمری می خرد با  $\tau$  تعریف می کنیم که به سن و سرمایه موجود در صندوق او وابسته است. وابستگی اول ناشی از مشاهدات عملی تجاری است. در واقع، شرکت های بیمه در عمل به منظور کاهش خطر انتخاب بد از فروختن مستمری به افراد مسن خودداری می کنند. این سن را با  $\eta + \tilde{T}_m$  نشان می دهیم. یعنی یک شخص  $\eta$  ساله در زمان صفر، بعد از  $\tilde{T}_m$  سال به ما کسیمم سن خود خواهد رسید. به عبارت دیگر، او  $\tilde{T}_m$  سال وقت دارد که مستمری بخرد و پس از آن شرکت بیمه از فروختن مستمری به او خودداری می کند. پس قبل از رسیدن به این سن باید دوره اول سیاست سرمایه گذاری که در بالا ذکر شد تمام شود و برای این کار باید بازده مالی سبد سرمایه گذاری شخص از مرز ناشناخته ای در دامنه زمان - بازده دارای بگذرد. این کران را با  $b_t$  نشان می دهیم. ناحیه قبل از رسیدن به  $b_t$  را که در دامنه  $\mathbb{R} \times [0, \tilde{T}_m]$  قرار دارد با  $C$  نشان می دهیم که در این ناحیه به تعویق انداختن خرید مستمری بهینه می باشد  $C$  را ناحیه تداوم یا ناحیه استمرار می گویند. در ادامه بحث مکمل ناحیه  $C$  را با  $\bar{C}$  نشان خواهیم داد.

چنان که گفته شد یک دلیل اصلی که باعث می شود شخص سرمایه گذاری را متوقف کند، ضعیف عمل کردن سبد سرمایه گذاری شخص است. در این حالت ناحیه تداوم باید به وسیله یک کران پایین محدود شود. پس برای ناحیه  $C$  داریم:

$$C = \{(t, x) \mid 0 \leq t \leq \tilde{T}_m, W_0 e^x \geq b_t\}.$$

زمان توقف مسئله یا همان زمان خرید مستمری  $\tau$  به صورت  $\inf \{s \mid W_s \leq b_s, s \geq t\} \wedge \tilde{T}_m$  تعریف می‌شود. اما تنها دلیل دیگری که منجر به توقف سرمایه‌گذاری و خرید مستمری می‌شود افزایش کافی سرمایه صندوق است که بتواند مستمری معقولی را برای شخص فراهم کند. در این صورت ناحیه  $C$  باید به وسیله یک کران بالا محدود شود.

$$C = \{(t, x) \mid 0 \leq t \leq \tilde{T}_m, W_0 e^x \leq b_t\}.$$

زمان خرید مستمری  $\tau$  به صورت  $\inf \{s \mid W_s \geq b_s, s \geq t\} \wedge \tilde{T}_m$  تعریف می‌شود. در این مرحله نمی‌توان مشخص کرد که  $C$  بخش بالایی یا بخش پایینی دامنه  $[0, \tilde{T}_m] \times \mathbb{R}$  است ولی می‌توان حدس زد که تعاریف بالا برای  $C$  باهم ناسازگار هستند.

هدف ما در این بخش، بررسی سرمایه‌گذاری شخص در زمان‌های  $t \leq \tilde{T}_m$  است تا مرز ماکزیمم‌کننده ارزش بازاری سبد او را تعیین کنیم. ارزش بازاری را که تنزیل شده جریان نقدی آینده است با  $V(t, X_t)$  نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(1-15) \quad V(t, X_t) = \max_{\tau} E \left( \int_t^{\tau \wedge \tilde{T}_m} e^{-\rho(s-t)} \alpha W_s ds + e^{-\rho(\tau-t)} 1_{\tau_d \leq (\tau \wedge \tilde{T}_m)} W_{\tau_d} + \int_{\tau \wedge \tilde{T}_m \wedge \tau_d}^{\tau_d} e^{-\rho(s-t)} B_{\eta+(\tau \wedge \tilde{T}_m)} | F_t \right).$$

اگر شخص تا زمان  $\tilde{T}_m$  سرمایه‌گذاری خود را به مستمری تبدیل نکرده باشد تابع ارزش به صورت زیر خواهد بود:

$$V(\tilde{T}_m, X_{\tilde{T}_m}) = E \left( \int_{\tilde{T}_m \wedge \tau_d}^{\tau_d} e^{-\rho(s-\tilde{T}_m)} B_{\eta+\tilde{T}_m} ds | F_{\tilde{T}_m} \right).$$

باتوجه به این که زمان مرگ  $\tau_d$  از فیلتر تولید شده توسط بازده‌های مالی  $X_t$  مستقل است، تابع ارزش برای  $t \leq \tilde{T}_m$  به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

(1-16)

$$V(t, X_t) = \max_{\tau} E \left( \int_t^{\tau \wedge \tilde{T}_m} e^{-\rho(s-t)} \left( p_{\eta+s} \alpha + \frac{\partial}{\partial S} q_{\eta+s} \right) W_s ds + \int_{\tau \wedge \tilde{T}_m}^{\tilde{T}_m} e^{-\rho(s-t)} p_{\eta+s} B_{\eta+\tau \wedge \tilde{T}_m} ds \mid F_t \right)$$

$$= \max_{\tau} E \left( \int_t^{\tau \wedge \tilde{T}_m} e^{-\int_t^s (\rho + \mu(\eta+u)) du} (\alpha + \mu(\eta+s)) W_s ds + e^{-\int_t^{\tau \wedge \tilde{T}_m} (\rho + \mu(\eta+u)) du} (W_{\tau \wedge \tilde{T}_m} - K) f(\tau \wedge \tilde{T}_m) \mid F_t \right).$$

برای زمان  $\tilde{T}_m$  تابع ارزش برابر  $V(\tilde{T}_m, X_{\tilde{T}_m}) = (W_{\tau \wedge \tilde{T}_m} - K) f(\tilde{T}_m)$  است (البته اگر تا زمان  $\tilde{T}_m$  مستمری خرید نشده باشد).

### فرم کلاسیک تابع ارزش

از نظر کنترل تصادفی تابع ارزش روی بازه زمانی  $t \leq s \leq \tilde{T}_m$  از حل دستگاه معادلات

زیر با مرز داده شده به دست می آید (Fleming, and Rishel, 1975):

(1-17)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V(s, x)}{\partial s} - (\rho + \mu(\eta + s))V(s, x) + LV(s, x) \\ \quad = -(\alpha + \mu(\eta + s))W_t e^{(x-X_t)} \quad \forall (s, x) \in C, \\ V(s, x) = (W_t e^{(x-X_t)} - K) f(s) \quad \forall (s, x) \in \bar{C}, \end{array} \right.$$

که  $\mathcal{L}u(x)$  مولد بی نهایت کوچک فرآیند  $X_t$  است و به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathcal{L}u(x) = (\theta - \alpha) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda E(u(x+y)) - u(x),$$

(1-18)

و  $V(\tilde{T}_m, x) = (W_{\tilde{T}_m} - K) f(\tilde{T}_m)$  (اگر قبل از  $\tilde{T}_m$  مستمری خرید نشود) شرط

نهایی برای حل دستگاه معادلات فوق می باشد.

## ۲. مرز بهینه خرید مستمری برای دینامیک پخش - پرش و حرکت برآونی

## تجزیه وینر- هوف

اصول ابتدایی از تجزیه وینر - هوف برای عملگرهای ارزش حال مورد انتظار به وسیله بویارچینکو و لوندوفسکی به خوبی تعریف شده است. فرض کنید  $q > 0$  نرخ بهره بدون ریسکی باشد. عملگر ارزش حال مورد انتظار برای جریان  $g(X_t)$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$(E_q g)(x) = q E^x \left( \int_0^\infty e^{-qt} g(X_t) dt \right), \quad (2-1)$$

که در حالت کلی  $E^x(g(X_t)) = E(g(X_t) | X_0 = x)$  برای تابع نمایی  $g(x) = e^{zx}$  با استفاده از نمای لوی و انتگرال گیری مستقیم داریم:

$$(E_q g)(x) = q E^x \left( \int_0^\infty e^{-qt} g(X_t) dt \right) = \frac{q e^{zx}}{q - \psi(z)}. \quad (2-2)$$

آخرین تساوی اگر  $z$  حقیقی باشد به شرط  $q - \psi(z) < 0$  برقرار است و اگر  $z$  مختلط باشد به شرط  $q - \psi(\operatorname{Re} z) < 0$  برقرار است.

توابع  $X_t = \inf_{0 \leq s \leq t} X_s$  و  $\bar{X}_t = \sup_{0 \leq s \leq t} X_s$  را به ترتیب سوپریمم و اینفیمم فرآیند  $X_s$  روی بازه زمانی  $[0, t]$  در نظر بگیرید. اگر یک زمان تصادفی نمایی را با  $\Gamma$  نشان دهیم که دارای شدتی برابر با  $q$  است تجزیه وینر-هوف در حالتی که  $X_0 = 0$  باشد برای  $z \in i\mathbb{R}$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$E^0(e^{zX_\Gamma}) = E^0(e^{z\bar{X}_\Gamma}) E^0(e^{z\underline{X}_\Gamma}). \quad (2-3)$$

رابطه فوق با وجود رابطه  $X_\Gamma = \bar{X}_\Gamma + X_\Gamma - \bar{X}_\Gamma$  و مستقل بودن  $X_\Gamma - \bar{X}_\Gamma$  و  $\bar{X}_\Gamma$  از یکدیگر و این حقیقت که  $X_\Gamma$  و  $X_\Gamma - \bar{X}_\Gamma$  هم توزیع هستند قابل اثبات است.

فاکتورهای تجزیه وینر- هوف را به صورت زیر نماد گذاری می کنیم:

$$\begin{aligned} \kappa_q^+(z) &= q E^0 \left( \int_0^\infty e^{-qs} e^{z\bar{X}_s} ds \right) = E^0(e^{z\bar{X}_\Gamma}), \\ \kappa_q^-(z) &= q E^0 \left( \int_0^\infty e^{-qs} e^{z\underline{X}_s} ds \right) = E^0(e^{z\underline{X}_\Gamma}). \end{aligned} \quad (2-4)$$

از آنجا که  $E^0(e^{zX_T}) = q/(q - \psi(z))$ ، می توان تجزیه وینر-هوف را به صورت زیر نمایش داد:

$$\frac{q}{q - \psi(z)} = \kappa_q^+(z) \kappa_q^-(z). \quad (2-5)$$

برای هر تابع  $g(\cdot)$  تعریف شده روی  $\mathbb{C}$  عملگرهای EPV به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} (E_q g)(x) &= q E^x \left( \int_0^\infty e^{-qs} g(X_s) ds \right), \\ (E_q^+ g)(x) &= q E^x \left( \int_0^\infty e^{-qs} g(\bar{X}_s) ds \right), \\ (E_q^- g)(x) &= q E^x \left( \int_0^\infty e^{-qs} g(\underline{X}_s) ds \right). \end{aligned} \quad (2-6)$$

با استفاده از فاکتورهای وینر-هوف  $\kappa_q^+(z)$  و  $\kappa_q^-(z)$  تعریف شده در (2-4) برای تابع  $g(\cdot) = e^{z\cdot}$  که در آن  $z \in i\mathbb{R}$  می توان نوشت:

$$\begin{aligned} (E_q e^{z\cdot})(x) &= \frac{q}{q - \psi(z)} e^{zx}, \\ (E_q^+ e^{z\cdot})(x) &= e^{zx} \kappa_q^+(z), \\ (E_q^- e^{z\cdot})(x) &= e^{zx} \kappa_q^-(z). \end{aligned} \quad (2-7)$$

بنابراین با استفاده از (2-3) به دست می آوریم:

$$(E_q e^{z\cdot}) = (E_q^+ E_q^- e^{z\cdot}) = (E_q^- E_q^+ e^{z\cdot}).$$

از موارد فوق می توان نتیجه گرفت  $E = q(q - L)^{-1}$  که  $L$  مولد بی نهایت کوچک  $X_t$  است همچنین  $E_q^{-1} = (E_q^-)^{-1} (E_q^+)^{-1}$  و  $E_q^{-1} = (E_q^+)^{-1} (E_q^-)^{-1}$  که در ادامه از آنها استفاده خواهیم کرد. در حالت کلی فاکتورهای وینر-هوف فرمول بسته ای ندارند. بویارچینکو و لوندوفسکی ثابت کرده اند، فاکتورهای تجزیه وینر-هوف منحصر به فرد هستند و توانسته اند آنها را از تجزیه  $q - \psi(z)$  به دست آورند که نسبت بین دو چند جمله ای  $P(z)$  و  $Q(z)$  است:

$$q - \psi(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}. \quad (2-8)$$

صورت کسر فوق، یعنی  $P(z)$  یک چند جمله‌ای از مرتبه چهار است.

$$P(z) = -((\theta - \alpha)z + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 - \lambda - q)(\lambda^+ - z)(z - \lambda^-) - \lambda P \lambda^+(z - \lambda^-) + \lambda(1 - P)\lambda^-(\lambda^+ - z),$$

و مخرج کسر  $Q(z)$  حاصلضرب زیر می‌باشد:

$$Q(z) = (\lambda^+ - z)(z - \lambda^-),$$

که  $\lambda^+$  و  $\lambda^-$  به ترتیب ریشه‌های مثبت و منفی  $Q(z)$  هستند. نسبت  $(\frac{P}{Q})(z)$  دارای دو مجانب، واقع در ریشه‌های  $Q(z)$  است. یکی از مجانب‌ها در نیم صفحه چپ و دیگری در نیم

صفحه راست قرار دارند. با توجه به موارد زیر:

$$q - \psi(0) > 0 \text{ و } q - \psi(z) \rightarrow -\infty \text{ وقتی که } z \rightarrow \pm\infty \text{ و } z \rightarrow \lambda^+ - 0 \text{ و } z \rightarrow \lambda^- + 0$$

از طرفی  $q - \psi(z) \rightarrow +\infty$  وقتی که  $z \rightarrow \lambda^- - 0$  و  $z \rightarrow \lambda^+ + 0$

می‌توان نتیجه گرفت  $P(z)$  چهاربار محور  $x$  را قطع می‌کند. یعنی دارای چهار ریشه حقیقی است. دو تا از ریشه‌ها مثبت و دو تای دیگر منفی است که به ترتیب با  $\beta_k^+$  و  $\beta_k^-$  که  $k=1,2$  نشان می‌دهیم. ترتیب این ریشه‌ها به صورت زیر می‌باشد.

$$\beta_2^- < \lambda^- < \beta_1^- < 0 < \beta_1^+ < \lambda^+ < \beta_2^+.$$

با توجه به این که فاکتورهای وینر-هوف منحصر به فرد هستند با تجزیه  $(\frac{P}{Q})(z)$  با

استفاده از ریشه‌ها داریم:

$$\begin{aligned} \kappa_q^+(z) &= \frac{\lambda^+ - z}{\lambda^+} \prod_{k=1}^2 \frac{\beta_k^+}{\beta_k^+ - z}, \\ \kappa_q^-(z) &= \frac{\lambda^- - z}{\lambda^-} \prod_{k=1}^2 \frac{\beta_k^-}{\beta_k^- - z}. \end{aligned} \quad (2-9)$$



می توان فاکتورهای وینر- هوف را به صورت زیر نیز نمایش داد:

$$\kappa_q^\pm(z) = a_1^\pm \frac{\beta_1^\pm}{\beta_1^\pm - z} + a_2^\pm \frac{\beta_2^\pm}{\beta_2^\pm - z}, \quad (2-10)$$

که در آن ضرایب  $a_1^\pm$  و  $a_2^\pm$  به صورت زیر است:

$$a_1^\pm = \frac{\beta_2^\pm(\beta_1^\pm - \lambda^\pm)}{\lambda^\pm(\beta_1^\pm - \beta_2^\pm)}; \quad a_2^\pm = \frac{\beta_1^\pm(\beta_2^\pm - \lambda^\pm)}{\lambda^\pm(\beta_2^\pm - \beta_1^\pm)}. \quad (2-11)$$

و در نهایت عملگرهای  $E_q^+$  و  $E_q^-$  برای تابع اندازه پذیر  $g(\cdot)$  به وسیله انتگرال های زیر به دست می آیند.

$$\begin{aligned} (E_q^+ g)(x) &= \sum_{j=1}^2 a_j^+ \int_0^{+\infty} \beta_j^+ e^{-\beta_j^+ y} g(x+y) dy = \sum_{j=1}^2 a_j^+ \int_x^{+\infty} \beta_j^+ e^{-\beta_j^+(x-y)} g(y) dy, \\ (E_q^- g)(x) &= \sum_{j=1}^2 a_j^- \int_{-\infty}^0 (-\beta_j^-) e^{-\beta_j^- y} g(x+y) dy = \sum_{j=1}^2 a_j^- \int_{-\infty}^x (-\beta_j^-) e^{-\beta_j^-(x-y)} g(y) dy. \end{aligned} \quad (2-12)$$

به راحتی می توان نشان داد که این فرمول ها برای توابع نمایی  $g(x) = e^{zx}$  و هر ترکیب خطی از توابع نمایی برقرار هستند. عبارت های فوق در بخش های بعدی استفاده خواهند شد.

### گسسته سازی زمان

بازه زمانی  $[t, \tilde{T}_m]$  را به  $n$  زیربازه زمانی به صورت  $t = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \tilde{T}_m$  گسسته سازی می کنیم و فاصله زمانی بین  $t_j$  و  $t_{j+1}$  را با  $\Delta_j$  نشان می دهیم. روی این بازه های زمانی توابع  $(\rho + \mu(\eta + s))$  و  $b_s$  مقادیری ثابت هستند که برای ادامه کار به صورت زیر نمایش می دهیم:

$$\begin{cases} (\rho + \mu(\eta + s)) = (\rho + \mu_j), & s \in [t_j, t_{j+1}], \\ b_s = b_j, & s \in [t_j, t_{j+1}], \end{cases} \quad (2-13)$$

که  $b_j = b_{t_j}$  و  $\mu_j = \mu(\eta + t_j)$  همچنین در ادامه کار  $V(t_j, x)$  را با  $v_j(x)$  و  $f(t_j)$

را با  $f_j$  نمایش خواهیم داد. در دستگاه (1-17) مشتق جزئی تابع ارزش نسبت به زمان را با استفاده از تعریف مشتق مرتبه اول با روش تفاضلات متناهی جایگزین می‌کنیم در نتیجه شکل زمان گسسته سیستم به صورت زیر خواهد بود:

$$(2-14) \quad \begin{cases} v_{j+1}(x) - (1 + \Delta_j(\rho + \mu_j) - \Delta_j L)v_j(x) = -(\alpha + \mu_j)\Delta_j W_t e^{(x-X_t)} & \forall (j, x) \in C, \\ v_j(x) = (W_t e^{(x-X_t)} - K)f_j & \forall (j, x) \in \bar{C}, \end{cases}$$

که  $v_n(x) = (W_t e^{(x-X_t)} - K)f_n$  شرط نهایی برای حل آن است. به منظور حل سیستم با استفاده از عملگرهای (EPV) تابع جدیدی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(2-15) \quad \tilde{v}_j(x) = v_j(x) - (W_t e^{(x-X_t)} - K)f_j,$$

که تفاوت بین ارزش سیاست سرمایه‌گذاری و ارزش خرید آتی یک مستمری عمر می‌باشد. به عبارتی  $\tilde{v}_j(x)$  ارزش به تأخیر انداختن اختیار خرید مستمری است و روی ناحیه C مثبت است. با دخالت تابع اخیر و مولد بی‌نهایت کوچک  $X_t$  در معادله اول سیستم (2-14) به دست خواهیم آورد:

$$(2-16) \quad \begin{aligned} \left(\frac{1}{\Delta_j} + (\rho + \mu_j) - L\right)\tilde{v}_j(x) &= \frac{1}{\Delta_j}v_{j+1}(x) - \left(-(\alpha + \mu_j) + f_j\left(\frac{1}{\Delta_j} + \rho + \mu_j - (\theta - \alpha) - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda(\phi_j(1) - 1)\right)\right)W_t e^{(x-X_t)} \\ &+ \left(\frac{1}{\Delta_j} + (\rho + \mu_j)\right)f_j K \quad \forall (j, x) \in C. \end{aligned}$$

که  $\delta_j$  در بازه‌های زمانی  $[t_j, t_{j+1}]$  مقداری ثابت است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(2-17) \quad \delta_j := -(\alpha + \mu_j) + f_j \left( \frac{1}{\Delta_j} + \rho + \mu_j - (\theta - \alpha) - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda(\phi_j(1) - 1) \right).$$

و شرط مرزی برابر می شود با:

$$\tilde{v}_j(x) = 0 \quad \forall (j, x) \in \bar{C} \quad (2-18)$$

حال می توان راه حلی با استفاده از گزاره های زیر و عملگرهای EPV از توابع پی در پی ارائه داد (برای اثبات تمامی گزاره های زیر مراجعه کنید به (داداشی آرانی و مختاری، ۱۳۹۵)).

گزاره ۲/۱

فرض کنید تابع  $g_j(\cdot)$  را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$g_j(x) = \frac{1}{\Delta_j} v_{j+1}(x) - \delta_j W_0 e^x + q_j f_j K, \quad (2-19)$$

$$q_j = \frac{1}{\Delta_j} + (\rho + \mu_j)$$

که در آن  $\rho + \mu_j$

اگر  $g_j(\cdot)$  نزولی باشد، تابع ارزش در زمان  $t_j$  برابر است با:

$$v_j(x) = (W_0 e^x - K) f_j + q_j^{-1} (E_{q_j}^+ 1_{(-\infty, \ln b_j / W_0]} E_{q_j}^- g_j)(x), \quad (2-20)$$

و ناحیه تداوم C نیم صفحه ای از  $R \times [0, \tilde{T}_m]$  و زیر مرز  $\ln(\frac{b_j}{W_0})$  است.

اگر  $g_j(\cdot)$  صعودی باشد، تابع ارزش در زمان  $t_j$  برابر است با:

$$v_j(x) = (W_0 e^x - K) f_j + q_j^{-1} (E_{q_j}^- 1_{[\ln b_j / W_0, +\infty)} E_{q_j}^+ g_j)(x), \quad (2-21)$$

و ناحیه تداوم C نیم صفحه ای از  $R \times [0, \tilde{T}_m]$  و بالای مرز  $\ln(\frac{b_j}{W_0})$  است.

فرض کنید  $\beta_k^\pm$  که  $k=1,2$  ریشه های صورت کسر  $q_j - \psi(z)$  و  $a_k^\pm$  که  $k=1,2$  ضرایب تعریف شده در (2-11) باشند. آنگاه عبارتی تحلیلی برای عملگرهای EPV در قضیه زیر بیان می شود. بعداً روش هایی برای محاسبه عددی عملگرهای EPV برای شناسایی مرزهای بهینه ارائه خواهد شد.

گزاره ۲/۲

مقدار  $E_{q_j}^+ g_j(x)$  و  $E_{q_j}^- g_j(x)$  به صورت زیر است:

$$(E_{q_j}^- g_j)(x) = -\frac{1}{\Delta_j} \sum_{k=1}^2 a_k^- \beta_k^- w_{k,j+1}^-(x) - \delta_j W_0 \kappa_{q_j}^- (1) e^x + q_j f_j K, \quad (2-22)$$

$$(E_{q_j}^+ g_j)(x) = \frac{1}{\Delta_j} \sum_{k=1}^2 a_k^+ \beta_k^+ w_{k,j+1}^+(x) - \delta_j W_0 \kappa_{q_j}^+ (1) e^x + q_j f_j K,$$

که توابع  $w_{k,j+1}^-(\cdot)$  و  $w_{k,j+1}^+(\cdot)$  به صورت زیر تعریف می شوند:

$$w_{k,j+1}^-(\cdot) = e^{\beta_k^- x} \int_{-\infty}^x e^{-\beta_k^- y} v_{j+1}(y) dy, \quad (2-23)$$

$$w_{k,j+1}^+(\cdot) = e^{\beta_k^+ x} \int_x^{+\infty} e^{-\beta_k^+ y} v_{j+1}(y) dy.$$

می توان از روش های عددی برای محاسبه انتگرال ها، به منظور به دست آوردن  $w_{k,j+1}^-(\cdot)$  و  $w_{k,j+1}^+(\cdot)$  استفاده کرد.

نکته: نرخ مشارکت یا برداشت  $\alpha$  می تواند وابسته به زمان  $\alpha(t)$  باشد. در این صورت می توان  $\alpha(t)$  را به صورت یک تابع پله ای تعریف کرد که در بازه های زمانی  $[t_j, t_{j+1}]$  مقداری ثابت است و با جایگذاری  $\alpha(t)$  به جای  $\alpha$  در تعریف  $\delta_j$  تمام نتایج به دست آمده درست خواهند بود.

نتیجه ۲/۳

وقتی  $g_j(\cdot)$  به ترتیب یک تابع نزولی یا صعودی با یک ریشه باشد، آنگاه مرز بهینه  $h_j^* = \ln \frac{b_j}{W_j}$  به ترتیب از حل معادلات زیر به دست می آید. (2-24)

$$(E_{q_j}^- g_j)(h_j^*) = -\frac{1}{\Delta_j} \sum_{k=1}^2 a_k^- \beta_k^- w_{k,j+1}^-(h_j^*) - \delta_j W_0 \kappa_{q_j}^- (1) e^{h_j^*} + q_j f_j K = 0,$$

$$(E_{q_j}^+ g_j)(h_j^*) = \frac{1}{\Delta_j} \sum_{k=1}^2 a_k^+ \beta_k^+ w_{k,j+1}^+(h_j^*) - \delta_j W_0 \kappa_{q_j}^+ (1) e^{h_j^*} + q_j f_j K = 0.$$

گزاره زیر شرایطی لازم و نه کافی، برای صعودی یا نزولی بودن  $g_j(x)$  با یک ریشه،

معرفی می کند.

گزاره ۲/۴

اگر  $g_j(x)$  تابعی صعودی و دارای یک ریشه باشد، آنگاه:

$$\frac{1}{\Delta_j} f_{j+1} - \delta_j > 0 \quad \& \quad (q_j f_j - \frac{1}{\Delta_j} f_{j+1}) K < 0. \quad (2-25)$$

اگر  $g_j(x)$  تابعی نزولی و دارای یک ریشه باشد، آنگاه:

$$\frac{1}{\Delta_j} f_{j+1} - \delta_j < 0 \quad \& \quad (q_j f_j - \frac{1}{\Delta_j} f_{j+1}) K > 0. \quad (2-26)$$

شرایط معرفی شده در گزاره فوق شرایطی لازم ولی کافی نیستند. یعنی عکس گزاره فوق برقرار نیست. با وجود اینکه هیچ نویسنده‌ای کافی بودن این شروط را اثبات نکرده، اما در کاربردهای عددی آنها شرایطی کافی به نظر می آید. به هر حال این شرایط در تشخیص حل مسائلی مانند گزاره ۲/۱ قابل استفاده هستند. وقتی شرایط فوق برقرار نباشند،  $g_j(x)$  نمی تواند صعودی یا نزولی با یک ریشه باشد. در این حالت مسئله بهینه سازی ما خوش ساخت نخواهد بود. برای این که بدانید در این حالت چه اتفاقی می افتد، فرض کنید،  $\frac{1}{\Delta_j} f_{j+1} - \delta_j > 0$  است. یعنی  $g_j(x)$  صعودی است. پس ناحیه تداوم C به وسیله یک کران پایین محدود می شود. اما اگر  $(q_j f_j - \frac{1}{\Delta_j} f_{j+1}) K > 0$  باشد تابع  $g_j(x)$  اکیداً مثبت می شود و نمی تواند روی مرز  $\bar{C}$  صفر شود. در این حالت قیمت اختیار به تأخیر انداختن خرید مستمری نیز مثبت می شود و با  $\ln(b_j/W_0)$  افزایش می یابد. در این صورت انتخاب  $b_j = +\infty$  بهینه بوده و تابع ارزش را ماکزیم می کند و نباید خرید مستمری قبل از رسیدن به  $\tilde{T}_m$  رخ دهد.

در بالا فرض کردیم هر دو شرط  $\frac{1}{\Delta_j} f_{j+1} - \delta_j$  و  $(q_j f_j - \frac{1}{\Delta_j} f_{j+1}) K$  بزرگ تر از صفر باشند. تنها حالت دیگری که برای عدم برقراری گزاره اخیر وجود دارد کوچک تر از صفر بودن این دو شرط است. اگر  $\frac{1}{\Delta_j} f_{j+1} - \delta_j < 0$  باشد  $g_j(x)$  نزولی است و ناحیه تداوم C از بالا کران دار است. در این حالت اگر  $(q_j f_j - \frac{1}{\Delta_j} f_{j+1}) K < 0$

باشد، تابع  $g_j(x)$  اکیداً منفی خواهد بود، پس روی مرز  $\bar{C}$  صفر نمی‌شود. در این صورت قیمت به تعویق انداختن خرید مستمری منفی بوده و با  $\ln(b_j/W_0)$  کاهش می‌یابد. پس انتخاب  $b_j = -\infty$  بهینه بوده و باید خرید مستمری فوراً انجام شود. در زیر گزاره‌ای برای به دست آوردن  $(x) = q_j^{-1}(E_{q_j}^+ 1_{(-\infty, \ln b_j/W_0]} E_{q_j}^- g_j)$  بیان می‌شود.

### گزاره ۲/۵

ارزش به تعویق انداختن اختیار خرید مستمری در زمان  $t_j$  درحالتی که  $g_j(\cdot)$  تابعی نزولی باشد، برابر است با

$$q_j^{-1}(E_{q_j}^+ 1_{(-\infty, \ln b_j/W_0]} E_{q_j}^- g_j)(x) = \left[ -\frac{1}{\Delta_j} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 a_k^- \beta_k^- a_l^+ \beta_l^+ z_{k,l,j+1}^+(x) - \delta_j W_0 \kappa_{q_j}^- \right] (1) \\ \sum_{k=1}^2 a_k^+ \frac{\beta_k^+}{1-\beta_k^+} e^x (e^{(1-\beta_k^+)(\ln b_j/W_0-x)} - 1) - q_j f_j K \sum_{l=1}^2 a_l^+ (e^{\beta_l^+(x-\ln b_j/W_0)} - 1) \Big] q_j^{-1},$$

در حالتی که  $g_j(\cdot)$  تابعی صعودی باشد، برابر است با

$$q_j^{-1}(E_{q_j}^- 1_{[\ln b_j/W_0, +\infty)} E_{q_j}^+ g_j)(x) = \left[ -\frac{1}{\Delta_j} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 a_k^- \beta_k^- a_l^+ \beta_l^+ z_{k,l,j+1}^-(x) - \delta_j W_0 \kappa_{q_j}^+ \right] (1) \\ \sum_{k=1}^2 a_k^- \frac{\beta_k^-}{1-\beta_k^-} e^x (e^{(1-\beta_k^-)(\ln b_j/W_0-x)} - 1) - q_j f_j K \sum_{l=1}^2 a_l^- (e^{\beta_l^-(x-\ln b_j/W_0)} - 1) \Big] q_j^{-1},$$

که توابع  $z_{k,l,j+1}^+(\cdot)$  و  $z_{k,l,j+1}^-(\cdot)$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$z_{k,l,j+1}^+(\cdot) = e^{\beta_l^+ x} \int_x^{\ln b_j/W_0} e^{-\beta_l^+ y} w_{k,j+1}^-(y) dy \quad \forall x \leq \ln \frac{b_j}{W_0}, \\ z_{k,l,j+1}^-(\cdot) = e^{\beta_l^- x} \int_{\ln b_j/W_0}^x e^{-\beta_l^- y} w_{k,j+1}^+(y) dy \quad \forall x \geq \ln \frac{b_j}{W_0}.$$

و در جاهای دیگر برابر صفر است.

### ۳. احتمال خرید مستمری

از آنجا که سرمایه گذار می تواند در هر زمان دلخواه سرمایه گذاری را متوقف کرده و یک مستمري عمر بخرد، مدیر صندوق قطعاً با خطر واگذاری روبه رو خواهد شد. یعنی مجبور است پول سرمایه گذاری را یکجا تحویل دهد. مثلاً در فرانسه با توجه به مشوق های مالیاتی، بیمه گران و بانکداران تشویق می شوند تا ذخیره خود را در صندوق های سرمایه گذاری خصوصی سرمایه گذاری کنند. این صندوق ها با سهام ذکر نشده شرکت های SME (شرکت های متوسط و کوچک) بازده نسبتاً بالایی دارند. با این کار ریسک نقدینگی کاهش می یابد ولی اگر انگیزه برای برداشت پول قوی باشد خروج مقدار زیادی از پول باعث کم شدن نقدینگی می شود. بنابراین دانستن احتمال خرید مستمري در مدیریت ریسک نقدینگی کمک می کند. مدیران صندوق ها این احتمال را با روش شبیه سازی مونت-کارلو و یا معکوس تبدیل لاپلاس زمان توقف  $\tau$  به دست می آورند که در این مطالعه از روش دوم برای به دست آوردن این احتمال استفاده خواهد شد.

برای ثابت داده شده  $\gamma$  تبدیل لاپلاس از  $\tau$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$E(e^{-\gamma\tau} | F_t) = \gamma \int_t^{+\infty} e^{-\gamma s} P(\tau \leq s | F_t) ds = \gamma L_\gamma(P(\tau \leq s | F_t)), \quad (3-1)$$

که  $L_\gamma$  عملگر لاپلاس و  $\tau > t$  می باشد. در این صورت احتمال این که شخص از صندوق سرمایه گذاری مشترک خارج شده و مستمري عمر بخرد، از معکوس لاپلاس و به صورت زیر به دست می آید:

$$(3-2)$$

$$P(\tau \leq s | F_t) = L_\gamma^{-1}\left(\frac{1}{\gamma} E(e^{-\gamma\tau} | F_t)\right) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\gamma_0 - iT}^{\gamma_0 + iT} e^{\gamma s} \frac{1}{\gamma} E(e^{-\gamma\tau} | F_t) d\gamma,$$

که  $\gamma_0$  از قسمت حقیقی همه نقاط تکین  $E(e^{-\gamma\tau} | F_t)$  بزرگ تر است. می دانیم که این

تبدیل لاپلاس تابعی از بازده صندوق  $(X_t)$  است، فرض کنید:

$$E(e^{-\gamma\tau} | F_t) := u(t, X_t), \quad (3-3)$$

و از حل دستگاه زیر به دست می آید:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(s, x)}{\partial s} + (L - \gamma)u(s, x) = 0 & x \in C, \\ u(t, x) = 1 & x \in \bar{C}, \end{cases} \quad (3-4)$$

که  $L$  مولد  $X_t$  است. هدف ما حل این دستگاه معادلات می باشد که راه حل تحلیلی برای آن وجود ندارد. اما می توان بر آورد عددی از آن با گسسته سازی زمان به دست آورد. یک بار دیگر بازه زمانی  $[t, T_m]$  را به  $n$  زیربازه زمانی  $t = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T_m$  تقسیم می کنیم. و  $\Delta_j$  را فاصله زمانی  $t_j$  تا  $t_{j+1}$  می نامیم. روی این بازه های زمانی  $b_s$  ثابت فرض می شود و اگر  $b_s = b_j$   $s \in [t_j, t_{j+1})$  باشد. حال مشتق جزئی  $u$  نسبت به زمان در سیستم فوق را با استفاده از تعریف مشتق اول از روش تفاضلات متناهی، جای گذاری می کنیم و  $u(t_j, x)$  را با

$u_j(x)$  نشان می دهیم، داریم:

$$\begin{cases} u_{j+1}(x) - (1 + \Delta_j \gamma - \Delta_j L)u_j(x) = 0 & x \in C, \\ u_j(x) = 1 & x \in \bar{C}, \end{cases} \quad (3-5)$$

که  $u_n(x) = 1$  شرط نهایی مسئله است. مشابه بخش قبل می توان با استفاده از عملگرهای EPV تبدیل لاپلاس  $\tau$  یا به عبارت دیگر  $u_j(x)$  را به دست آورد. برای این منظور تابع جدید زیر را تعریف می کنیم.

$$\tilde{u}_j(x) = u_j(x) - 1, \quad (3-6)$$

که باعث می شود سیستم اخیر به صورت زیر بازنویسی شود:

$$\begin{cases} \left( \frac{1}{\Delta_j} + \gamma - L \right) \tilde{u}_j(x) = \frac{1}{\Delta_j} u_{j+1}(x) - \left( \frac{1}{\Delta_j} + \gamma - L \right) & x \in C, \\ \tilde{u}_j(x) = 0 & x \in \bar{C}, \end{cases} \quad (3-7)$$

از آنجا که این سیستم شبیه (2-16) است، نتایج زیر را می توان به دست آورد.

نتیجه ۳/۱



تابع  $g_j^u(\cdot)$  را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$g_j^u(x) = \frac{1}{\Delta_j} u_{j+1}(x) - q_j^u, \quad (3-8)$$

که در آن  $q_j^u = \frac{1}{\Delta_j} + \gamma$  است. اگر  $C = \{(t, x) | 0 \leq t \leq \tilde{T}_m, x \leq \ln(b_j / W_0)\}$  باشد. آن گاه تبدیل لاپلاس در زمان  $t_j$  برای  $j = n-1, n-2, \dots, 0$  برابر می شود با:

$$u_j(x) = 1 + (q_j^u)^{-1} (E_{q_j^u}^+ 1_{(-\infty, \ln b_j / W_0]} E_{q_j^u}^- g_j^u)(x). \quad (3-9)$$

اگر  $C = \{(t, x) | 0 \leq t \leq \tilde{T}_m, x \geq \ln(b_j / W_0)\}$  باشد. آن گاه:

$$u_j(x) = 1 + (q_j^u)^{-1} (E_{q_j^u}^- 1_{[\ln b_j / W_0, \infty)} E_{q_j^u}^+ g_j^u)(x). \quad (3-10)$$

اگر  $\beta^\pm$  ریشه های  $q_j^u - \psi(z)$  و  $a^\pm$  را ضرایب تعریف شده در (2-11) تعریف کنیم، آن گاه برای عملگرهای EPV می توان عبارتهای تحلیلی زیر را نتیجه گرفت.

نتیجه ۳/۲

عملگرهای ارزش حال مورد انتظار  $(E_{q_j^u}^- g_j^u)$  و  $(E_{q_j^u}^+ g_j^u)$  برابر هستند با:

$$(E_{q_j^u}^- g_j^u)(x) = -\frac{1}{\Delta_j} \sum_{k=1}^2 a_k^- \beta_k^- w_{k,j+1}^{u-}(x) - q_j^u, \quad (3-11)$$

$$(E_{q_j^u}^+ g_j^u)(x) = \frac{1}{\Delta_j} \sum_{k=1}^2 a_k^+ \beta_k^+ w_{k,j+1}^{u+}(x) - q_j^u,$$

که توابع  $w_{k,j+1}^{u+}$  و  $w_{k,j+1}^{u-}$  به صورت زیر تعریف می شوند:

$$w_{k,j+1}^{u-}(\cdot) = e^{\beta_k^- x} \int_{-\infty}^x e^{-\beta_k^- y} u_{j+1}(y) dy, \quad (3-12)$$

$$w_{k,j+1}^{u+}(\cdot) = e^{\beta_k^+ x} \int_x^{+\infty} e^{-\beta_k^+ y} u_{j+1}(y) dy.$$

نتیجه ۳/۳

برای عملگرهای EPV سمت راست تساوی های (3-9) و (3-10) داریم:

(3-13)

$$\begin{aligned} \left( E_{q_j^+}^+ 1_{(-\infty, \ln b_j / W_0]} E_{q_j^-}^- g_j^u \right)(x) &= -\frac{1}{\Delta_j} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 a_k^- \beta_k^- a_l^+ \beta_l^+ z_{k,l,j+1}^{u+}(x) + q_j^u \sum_{l=1}^2 a_l^+ \left( e^{\beta_l^+(x - \ln b_j / W_0)} - 1 \right), \\ \left( E_{q_j^-}^- 1_{[\ln b_j / W_0, \infty)} E_{q_j^+}^+ g_j^u \right)(x) &= -\frac{1}{\Delta_j} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 a_k^- \beta_k^- a_l^+ \beta_l^+ z_{k,l,j+1}^{u-}(x) + q_j^u \sum_{l=1}^2 a_l^- \left( e^{\beta_l^-(x - \ln b_j / W_0)} - 1 \right), \end{aligned}$$

جدول ۱. پارامترهای تنظیم شده با شاخص *S & P500*، (Hainaut, and Deelstra, 2014: 137).

پارامتر	بخش-پریش	پارامتر	براونی
$\theta$	16.15%   16.65%	$\bar{\theta}$	2.38%
$\sigma$	3.92%	$\bar{\sigma}$	8.61%
<b>P</b>	0.3825		
$\lambda$	148.2928		
$\lambda^+$	217.1081		
$\lambda^-$	-229.5335		
Log. Lik.	10200	Log. Lik.	9720

جدول ۲. دیگر پارامترها.

$\alpha$	0.5%   1%	$\eta + \tilde{T}_m$	80
$W_0$	100	K	+2 -2
$\rho$	3%	f(t)	1

که توابع  $(\cdot) z_{k,l,j+1}^{u+}$  و  $(\cdot) z_{k,l,j+1}^{u-}$  به صورت زیر تعریف می شوند:

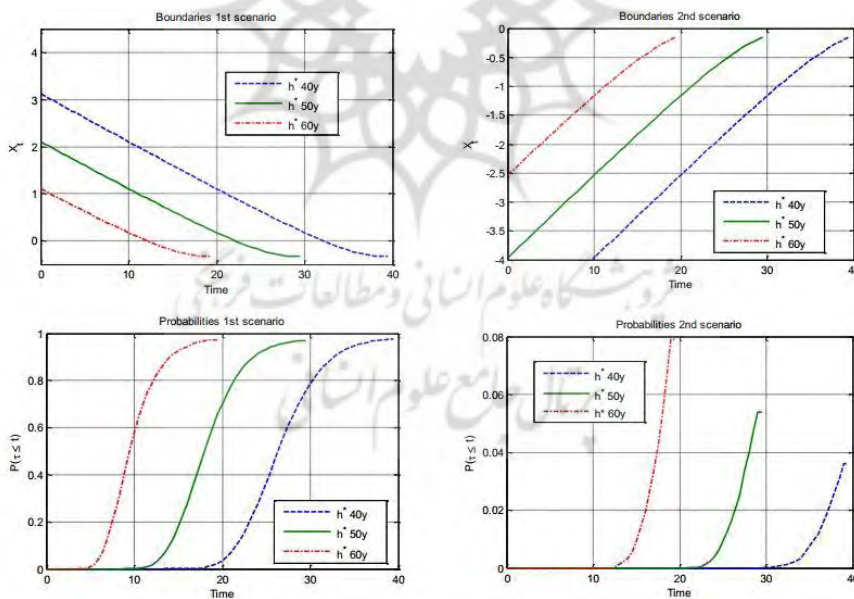
$$\begin{aligned}
 z_{k,l,j+1}^{u+}(\cdot) &= e^{\beta_l^+ x} \int_x^{\ln b_j / W_0} e^{-\beta_l^+ y} w_{k,j+1}^{u-}(y) dy \quad \forall x \leq \ln \frac{b_j}{W_0}, \\
 z_{k,l,j+1}^{u-}(\cdot) &= e^{\beta_l^- x} \int_{\ln b_j / W_0}^x e^{-\beta_l^- y} w_{k,j+1}^{u+}(y) dy \quad \forall x \geq \ln \frac{b_j}{W_0}.
 \end{aligned}
 \tag{3-14}$$

و در جاهای دیگر برابر صفر است.

اثبات نتیجه‌های ۳/۲ و ۳/۳ مشابه اثبات گزاره‌های 2.2 و 2.5 می‌باشد. تا این جای کار تبدیل لاپلاس  $\tau$  را برای زمان‌های از پیش تعیین شده  $t = t_0 < t_1 \dots < t_n = \tilde{T}_m$  به دست آوردیم. ولی ما به لاپلاس وارون  $\tau$  یعنی احتمال خرید در این زمان‌ها نیاز داریم که برای به دست آوردن آن از الگوریتم گیور- استفست استفاده خواهیم کرد. می‌دانیم  $F(\gamma) = \frac{1}{\gamma} E(e^{-\gamma \tau} | F_t)$  حال فرض کنید  $N$  عددی صحیح باشد. آن‌گاه تقریب عددی لاپلاس وارون، از مجموع زیر به دست می‌آید.

$$P(\tau \leq s | F_t) \approx \frac{\ln 2}{s-t} \sum_{j=1}^N \gamma_j F\left(\frac{\ln 2}{s-t} j\right),$$

که ضرایب  $\gamma_j$  به صورت زیر تعریف می‌شوند.



شکل ۱. مرزهای بهینه و احتمال‌های خرید مستمری برای سن‌های اولیه متفاوت.

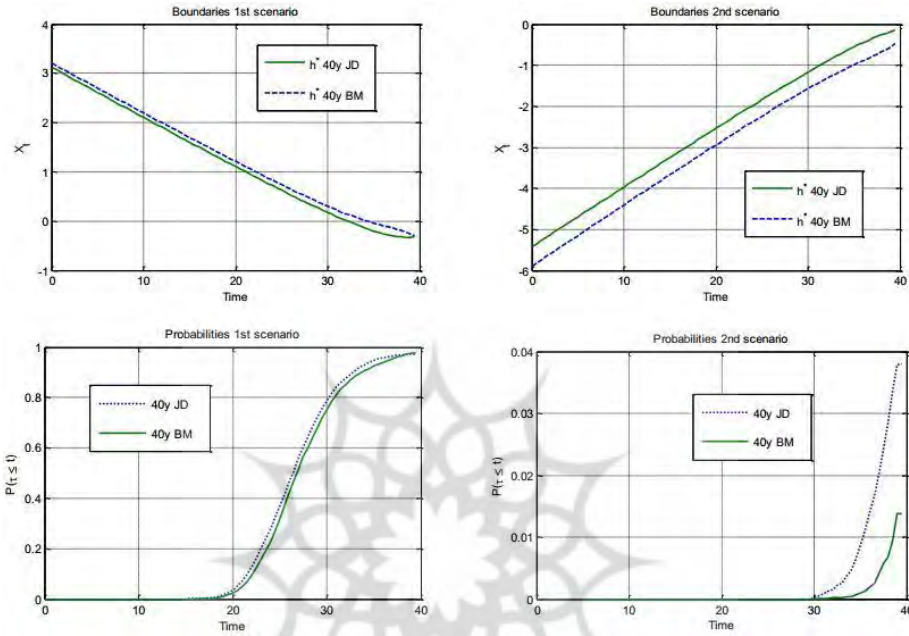
جدول ۳. متوسط سن خرید مستمری، به عنوان تابعی از سن اولیه شخص. سن های مورد انتظار، با احتمالات خرید مستمری ارائه شده در شکل ۱. محاسبه شده اند.

سن	سناریوی اول، $E(\eta + \tau   \eta)$	سن	سناریوی دوم، $E(\eta + \tau   \eta)$
$\eta = 40$ سال	۶۷/۳۵	$\eta = 40$ سال	۷۹/۸۹
$\eta = 50$ سال	۶۹/۱۸	$\eta = 50$ سال	۷۹/۸۵
$\eta = 60$ سال	۷۰/۷۱	$\eta = 60$ سال	۷۹/۸۲

$$\gamma_j = (-1)^{\frac{N}{2}+j} \sum_{k=\lfloor \frac{j+1}{2} \rfloor}^{\min(j, N/2)} \frac{k^{N/2} (2k)!}{\left(\frac{N}{2} - k\right)! k! (k-1)! (j-k)! (2k-j)!}$$

در کاربردهای عددی معمولاً از  $N=12$  استفاده می شود. توجه کنید که الگوریتم گیور-استفست گاهی اوقات ناپایدار عددی است. در این حالت احتمال خرید مستمری را می توان از شبیه سازی مونت-کارلو برای  $X_T$  به دست آورد.

شکل ۲. مقایسه مرزها و احتمال خرید مستمری برای فرآیندهای پخش - پرش و حرکت برآونی. سن اولیه: ۴۰ سال.

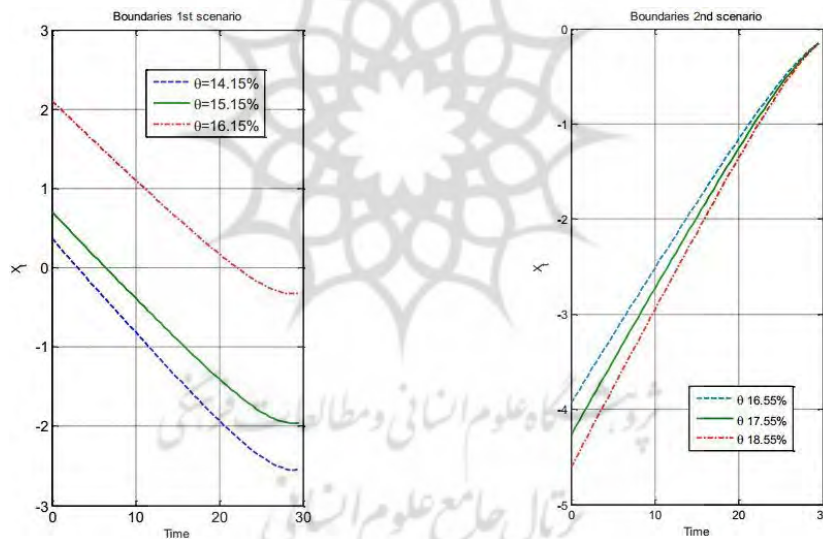


جدول ۴. متوسط سن خرید مستمری، وقتی  $X_t$  به وسیله حرکت برآونی مدل بندی می شود. سنین اولیه مختلفی برای سرمایه گذار استفاده می شود.

سن	سناریوی اول،	سن	سناریوی دوم،
$E(\eta + \tau   \eta)$	$E(\eta + \tau   \eta)$		
سال $\eta = 40$	۶۸/۱۵	سال $\eta = 40$	۷۹/۹۷
سال $\eta = 50$	۷۰/۰۹	سال $\eta = 50$	۷۹/۹۷
سال $\eta = 60$	۷۱/۸۵	سال $\eta = 60$	۷۹/۹۸

#### ۴. کاربرد عددی و نتیجه گیری

این فصل ناحیه خرید مستمری را برای یک شخص مذکری مشخص می کند که سرمایه اش را در یک صندوق سرمایه گذاری مشترک از شاخص S&P500 سرمایه گذاری می کند. نرخ مرگ و میر مربوطه  $\mu(\eta + t)$  برای افراد مذکر، به وسیله توزیع گامپرتز-ماکهام ارائه می شود. خرید مستمری باید قبل از سن ۸۰ سالگی ( $\eta + \tilde{T}_m = 80$ ) انجام شود، زیرا شرکت بیمه برای کم کردن خطر انتخاب بد، به افراد مسن مستمری نمی فروشد. همچنین گام زمانی استفاده شده در روش گسسته سازی زمان، برابر با نیم سال ( $\Delta_j = 0.5$ ) در نظر گرفته می شود. همان طور که در بخش های قبلی ذکر شد، دینامیک بازده صندوق سرمایه گذاری مشترک به وسیله یک فرآیند پخش-پرش نمایی مرتبه دوم مدل بندی می شود که پارامترهای این دینامیک با روش درست نمایی ماکزیمم از داده های روزانه بین ژوئن



شکل ۳. تأثیر رانش  $\theta$  روی موقعیت مرزهای بهینه.

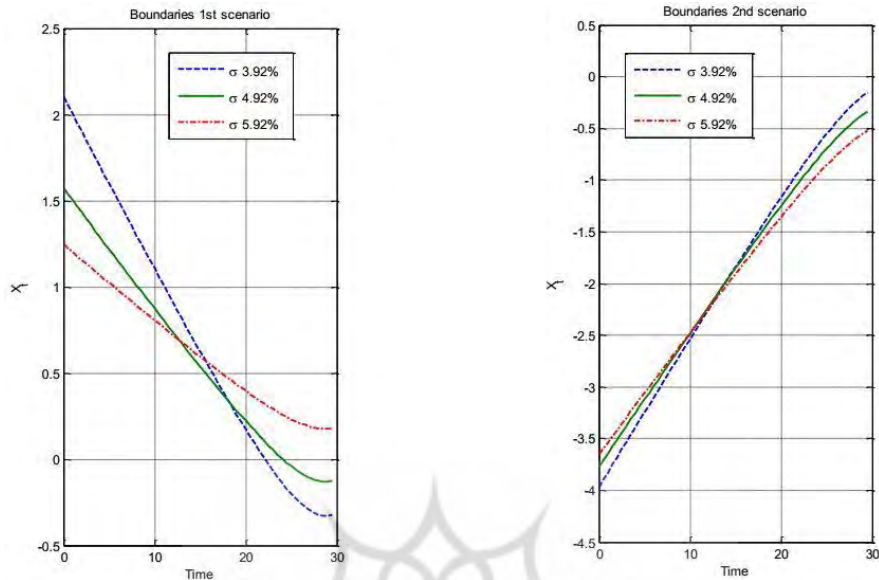
جدول ۵. متوسط سن خرید مستمری، برای پارامترهای رانش مختلف.

سناریوی دوم،	رانش	سناریوی اول،	رانش
$E(\eta + \tau   \eta)$		$E(\eta + \tau   \eta)$	
۷۹/۸۵	$\theta = 16.15$	۵۶/۷۸	$\theta = 14.15$
۷۹/۸۷	$\theta = 17.15$	۵۸/۶۰	$\theta = 15.15$
۷۹/۸۹	$\theta = 18.15$	۶۹/۱۸	$\theta = 16.15$

۲۰۰۳ تا ژوئن ۲۰۱۳ به دست آمده‌اند. جدول ۱ این پارامترها را نمایش می‌دهد.

همان‌طور که در جدول ۲ مشاهده می‌کنید نرخ تنزیل، سرمایه‌اولیه‌شخص و رانش صندوق به ترتیب برابر با  $\rho = 3\%$ ،  $W_0 = 100$  و  $\theta = 16.15\%$  در نظر گرفته شده‌اند. در سناریوی اول تابع  $f(t)$  را که به وسیله معادله (1-14) نمایش داده می‌شود برابر با عدد یک ( $f(t) = 100\%$ ) در نظر می‌گیریم،  $K$  عددی مثبت و برابر با ۲٪ از سرمایه اولیه‌شخص ( $K=2$ ) است که شرکت بیمه به عنوان حق الزحمه می‌گیرد و سود تقسیمی  $\alpha = 0.5\%$  می‌باشد. از آنجا که  $f(t)$  برابر با ۱۰۰٪ است شخص همان پیش‌بینی را از بقای خود دارد که شرکت بیمه برای او تعیین کرده و یا حداقل از خرید مستمری، که معامله‌ای برگشت‌ناپذیر است نگران نیست. با مفروضات بیان‌شده شرایط (2-26) برقرارند و همچنین آزمایش‌های عددی نشان می‌دهد که همه توابع  $g_j(x)$  نزولی، با یک ریشه هستند (چون این شرایط، شرایطی لازم هستند و نه کافی، لذا نزولی بودن  $g_j(x)$ ها باید بررسی شود). در نتیجه با توجه به گزاره ۲/۱ ناحیه تداوم در این سناریو به وسیله یک کران بالا محدود می‌شود.

شکل ۴. تأثیر تلاطم روی مرزهای بهینه.



جدول ۶. متوسط سن خرید مستمری، برای پارامترهای تلاطم مختلف.

سناریوی اول، تلاطم	سناریوی دوم، تلاطم
$E(\eta + \tau   \eta)$	$E(\eta + \tau   \eta)$
۶۹،۱۸ $\sigma = 3.92$	۹۷،۸۵ $\sigma = 3.92$
۶۸،۶۲ $\sigma = 4.92$	۹۷،۹۴ $\sigma = 4.92$
۷۱،۲۰ $\sigma = 5.92$	۷۹،۹۸ $\sigma = 5.92$

در سناریوی دوم،  $K$  یک مشوق مالیاتی و برابر با ۲٪- از سرمایه اولیه شخص است ( $K=-2$ ). سود تقسیمی برابر با ۱٪ و رانش  $\theta$  نسبت به سناریوی اول کمی افزایش یافته است ( $\theta = 16.65\%$ ). تحت این مفروضات شرایط (2-25) برقرار می‌شوند. علاوه بر این

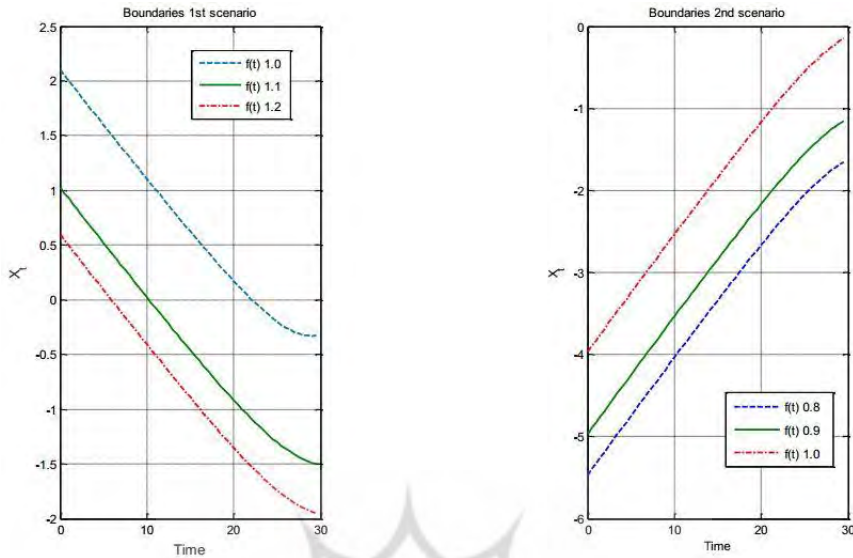


آزمایش‌های عددی نشان می‌دهد که همه توابع  $g_j(x)$  صعودی با یک ریشه هستند. ناحیه تداوم در این سناریو به وسیله یک کران پایین محدود می‌شود و خرید مستمری باید زمانی اتفاق افتد که بازده صندوق به شدت پایین بیاید.

شکل ۱ احتمال خرید مستمری و همچنین مرزهای بهینه را در دامنه «زمان-بازده دارایی» برای افراد با سن‌های اولیه  $\eta = 40, 50, 60$  نشان می‌دهد. شکل‌های بالایی، سمت چپ و راست به ترتیب مرزهای بهینه را برای سناریوی اول و دوم نشان می‌دهند. خرید مستمری قبل از سن ۸۰ سالگی اتفاق می‌افتد، اگر مسیر بازده‌های تعلق گرفته برای صندوق، با شروع از صفر ( $X_0=0$ ) حداقل یک بار مرز سناریوی اول (شکل چپ) را از زیر یا مرز سناریوی دوم (شکل راست) را از بالا قطع کند.

در سناریوی اول شخص تا زمانی که بازده صندوق به حد کافی رشد نکرده باشد خرید مستمری را به تعویق می‌اندازد. یعنی شخص صبر می‌کند تا سرمایه‌اش به قدری افزایش یابد که بتواند از خرید یک مستمری مناسبی اطمینان حاصل کند. در این سناریو اگر صندوق سرمایه‌گذاری شخص ضعیف عمل کند شخص خرید مستمری را تقریباً تا سن ۸۰ سالگی خود به تعویق می‌اندازد. اما همان‌طور که در شکل پایین، سمت چپ می‌بینید، احتمال خرید چنین مستمری دیرتری در این سناریو کم‌تر از ۳٪ است. علاوه بر این با تحلیلی روی شکل احتمال خرید مستمری، می‌توان دید که خرید مستمری در ۹۵٪ از حالت‌ها قبل از اینکه سرمایه‌گذار ۷۵ ساله شود اتفاق می‌افتد. می‌توان گفت به‌طور متوسط مستمری بین سن‌های ۶۷ تا ۷۱ خریداری می‌شود (جدول ۳ را مشاهده کنید).

شکل ۵. تأثیر  $f(t)$  روی مرزهای بهینه.



جدول ۷. متوسط سن خرید مستمری، برای مقادیرهای مختلفی از  $f(t)$ .

سناریوی دوم، $E(\eta + \tau   \eta)$	ارزش پول $f(t)$	سناریوی اول، $E(\eta + \tau   \eta)$	ارزش پول $f(t)$
79.85	$f(t) = 1.0$	69.18	$f(t) = 1.0$
79.92	$f(t) = 0.9$	60.50	$f(t) = 1.1$
79.98	$f(t) = 0.8$	57.01	$f(t) = 1.2$

در سناریوی دوم، خرید مستمری موکول می‌شود مگر این که بازده صندوق خیلی سریع سقوط کند. در این سناریو احتمال خرید مستمری قبل از سن ۸۰ سالگی کم‌تر از ۸% می‌باشد. علاوه بر این، به‌طور متوسط مستمری بین ۷۹ تا ۸۰ سالگی خریداری می‌شود (جدول ۳ را مشاهده کنید). با وجود یک مشوق مالیاتی، شخص علاقه‌ای به تبدیل سرمایه‌گذاری به یک مستمری

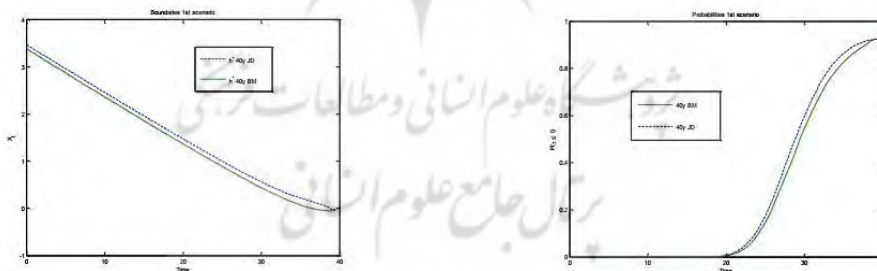
با حقوق ثابت ندارد. مگر اینکه صندوق افت کند. در واقع دلیل مقاومت شخص در مقابل خرید مستمری به خاطر سود تقسیمی بالاتر در این سناریو می‌باشد ( 1% به جای 0.5%).

یکی از نتایج مهم این مطالعه، نشان دادن تأثیر پرش‌ها روی مرز بهینه می‌باشد. شکل ۲ مقایسه احتمال خرید مستمری و مرزهای بهینه بدون پرش (یعنی بازده صندوق یک حرکت برآونی است - خط منقطع) با مرزهای بهینه با پرش (یعنی بازده صندوق یک فرایند پخش - پرش است - خط پیوسته) می‌باشد. حضور پرش‌ها در دینامیک صندوق، روی شکل مرزهای بهینه تأثیر می‌گذارد. در سناریوی اول (شکل چپ)، مرز برآونی بالاتر از مرز فرایند پخش - پرش است. از طرف دیگر در سناریوی دوم (شکل راست)، مرز برآونی تحت سلطه مرز فرایند پخش - پرش است که این عوامل باعث احتمالات خرید متفاوتی می‌شود. همان‌طور که در شکل هم می‌بینید، برای سررسید  $T_m$  احتمال خرید مستمری در مدل برآونی کم‌تر از مدل پخش - پرش است. در سناریو اول با مقایسه جدول ۳ و جدول ۴ می‌توان دید که برای مدل برآونی، خرید مستمری به‌طور متوسط یک سال دیرتر از مدل پخش - پرش اتفاق می‌افتد. درحالی که در سناریو دوم، در هر دو مدل برآونی و پخش - پرش، خرید مستمری تا رسیدن به ۸۰ سالگی به تعویق انداخته می‌شود.

شکل 3 مرزهایی با رانش  $\theta$  مختلف را برای مرد ۵۰ ساله‌ای نشان می‌دهد که در سناریوی اول (شکل سمت چپ) با رانش 14.15% میانگین بازده سالانه مورد انتظار صندوق (0.12%-) نزدیک به صفر می‌شود. در نتیجه با وجود این سود سرمایه‌گذاری، شخص هیچ انگیزه‌ای به ادامه سرمایه‌گذاری نخواهد داشت و همان‌طور که در شکل می‌بینید این فقدان انگیزه کران بالایی ناحیه تداوم را به سمت پایین هل داده است. یعنی با کاهش  $\theta$  کران بالا به سمت پایین کشیده می‌شود و خرید مستمری به‌طور متوسط در سن‌های جوان‌تر اتفاق می‌افتد (جدول ۵ را مشاهده کنید).

در سناریوی دوم (شکل سمت راست) اگر  $\theta = 18.55\%$  باشد، بازده سالانه مورد انتظار صندوق (بعد از سود تقسیمی) برابر  $3.88\%$  می‌شود. این بازده سرمایه‌گذاری مورد انتظار بزرگ، انگیزه بالایی برای سرمایه‌گذاری در صندوق نشان می‌دهد. سود تقسیمی بالایی برای سرمایه‌گذار، اطمینان از یک درآمد مناسبی قبل از خرید مستمری می‌دهد. بنابراین در این حالت هیچ دلیلی وجود ندارد شخص یک مستمری با حقوق ثابت بخرد. مگر اینکه بازار مالی رکود کند. در این سناریو وقتی رانش  $\theta$  افزایش می‌یابد مرز محدود کننده ناحیه تداوم به سمت پایین هل داده می‌شود و خرید مستمری به آینده موکول می‌شود. با توجه به بحران‌های مالی گذشته، مردم از سرمایه‌گذاری در صندوق‌های سرمایه‌گذاری مشترک، به‌خاطر تلاطم آنها می‌ترسند. همان‌طور که در شکل ۴ مشاهده می‌کنید، تلاطم در تصمیم‌گیری برای خرید مستمری تأثیر به‌سزایی دارد. تحلیل شکل‌های چپ و راست به ترتیب برای سناریوی اول و دوم نشان می‌دهد که در هر دو سناریو با افزایش  $\sigma$  شیب کران‌ها کاهش پیدا می‌کند. جدول ۶ نشان می‌دهد با افزایش تلاطم، خرید مستمری به تأخیر انداخته می‌شود.

شکل ۶. مقایسه مرزها و احتمالات خرید مستمری برای فرایند پخش- پرش و حرکت برآونی با نرخ مرگ و میر ایران.



جدول ۸. متوسط سن خرید مستمری، برای فرایندهای پخش- پرش و برآونی با سن‌های اولیه متفاوت

(سناریوی اول).

سن	پخش-پرش، $E(\eta + \tau   \eta)$	سن	برآونی، $E(\eta + \tau   \eta)$
$\eta = 40$	۷۰/۰۰	$\eta = 40$	۷۰/۷۰
$\eta = 50$	۷۱/۸۴	$\eta = 50$	۷۲/۶۰
$\eta = 60$	۷۳/۵۵	$\eta = 60$	۷۴/۶۰

ارزش پولی  $f(t)$ ، تفاوت بین نرخ مرگ‌ومیر اشخاص  $\mu(x+t)$  و نرخ مرگ‌ومیر به‌دست آمده از جامعه آماری بیمه‌گران  $\mu^{f(x+t)}$  را اندازه می‌گیرد. اگر  $f(t)$  بیش‌تر یا کم‌تر از 100% باشد، ارزش حال مورد انتظار از پرداخت‌های مستمری، به‌ترتیب بزرگ‌تر یا کوچک‌تر از قیمت پرداخت‌شده برای مستمری است. پس  $f(t)$  نقش مهمی در تصمیم‌گیری برای خرید مستمری دارد. همان‌طور که در شکل ۵ می‌بینید، در سناریوی اول (شکل چپ)، افزایش  $f(t)$  کران بالا را به سمت پایین هل می‌دهد. با توجه به این که  $f(t)$  در دینامیک  $X_t$  درگیر نیست ولی با افزایش آن به‌طور متوسط در زمان کم‌تری می‌توان به مرز رسید و در نتیجه خرید مستمری زودتر اتفاق می‌افتد. این نتایج در جدول ۷ خلاصه می‌شوند: وقتی  $f(t)$  به‌طور قابل ملاحظه‌ای از عدد یک بیش‌تر شود، خرید مستمری به‌طور متوسط در سن پایین‌تری اتفاق خواهد افتاد. به‌عبارتی دیگر شخص مستمری را زیرقیمت می‌خرد و این مزیتی برای خریدار از اطلاعات نامتقارن بین شرکت بیمه و خودش است و انگیزه‌ای قوی برای خرید بیمه برای شخص ایجاد می‌کند.

در سناریوی دوم (شکل سمت راست) افزایش  $f(t)$  کران پایین را به سمت بالا هل می‌دهد. همچنان که در جدول ۷ می‌بینید، نتیجه چنین حرکتی شبیه به نتیجه حرکت مشاهده

شده در سناریوی اول، ولی با شدت کم‌تری است. یعنی خرید مستمری به‌طور متوسط زودتر اتفاق می‌افتد. در نهایت می‌توان گفت چه در سناریوی اول (با کران بالا) و چه در سناریوی دوم (با کران پایین) یک شخصی که طول عمر بهتری از یک فرد معمولی از جامعه آماری بیمه دارد، علاقه‌مند به خرید مستمری عمر در زمان زودتری خواهد بود.

جدول ۹. نرخ مرگ‌ومیر برای تعدادی از سن‌ها، گروه مردان کشور ایران سال ۱۳۹۱.

$\mu(x)(\%)$	سن (x)
0.20	30
0.24	40
0.51	50
1.30	60
3.36	70
8.59	80

### نتایج عددی با نرخ مرگ‌ومیر ایران

در این بخش از نرخ مرگ‌ومیر مردان کشور ایران برای به‌دست آوردن مرز بهینه خرید مستمری استفاده می‌شود. نرخ مرگ‌ومیر از جدول امید به زندگی سال ۱۳۹۱ کشور ایران (سوری، 1395) برداشته شده است. با مقایسه نرخ مرگ‌ومیر کشور ایران (جدول ۹) با کشور بلژیک (جدول 11) مشاهده می‌شود که نرخ مرگ‌ومیر ایرانی بالاست یعنی احتمال آن که فردی با سن  $x$  زودتر، یعنی در بازه زمانی کوتاه‌تر نسبت به یک فرد بلژیکی فوت کند بیش‌تر است و چون فوت فرد در دوران تجمعی یا همان ناحیه تداوم باعث به‌ارث رسیدن سرمایه او خواهد شد بنابراین همان‌طور که در شکل ۶ سمت چپ مشاهده می‌کنید مرز بهینه در سناریوی اول به سمت بالا کشیده می‌شود یعنی ناحیه تداوم بزرگ‌تر می‌شود. بزرگ شدن ناحیه تداوم به این معناست که شخص مدت زیادی سرمایه‌گذاری می‌کند و دیرتر مستمری می‌خرد. شکل ۶ سمت

راست این نکته را نشان می‌دهد چرا که با مقایسه آن با تصویر پایین از سمت چپ شکل ۲ احتمال خرید با نزدیک شدن به سن ۸۰ سالگی کم تر شده است. نتایج عددی و متوسط سن خرید در جدول جدول ۸ نیز این واقعیت را نشان می‌دهد. علاوه بر این مشاهده می‌کنید متوسط سن خرید در حالت برآونی تقریباً یک سال دیرتر از حالت پخش - پرش است.

### نتیجه گیری

بازده مالی مورد انتظار از دارایی‌های خریداری شده قبل از خرید مستمري، به وسیله یک فرآیند پخش - پرش نتیجه می‌شود درحالی که بیش تر مطالعات موجود از چهارچوب حرکت برآونی استفاده می‌کنند. مطالعه موردی که در این مقاله بررسی شد، آشکار کرد که وجود پرش‌ها در دینامیک دارایی، مرزهای تعیین کننده ناحیه تداوم را به طور قابل ملاحظه‌ای اصلاح می‌کنند. راه حل، در قالب عملگرهای ارزش حال مورد انتظار (EPV) ارائه می‌شود. این عملگرها در ابتدا برای قیمت گذاری اختیار آمریکایی توسط بویارچینکو و لوندوفسکی استفاده شدند. اما برخلاف کارایی خود در مطالعات مربوط به اکچوئری خیلی مرسوم نیستند. همچنین با استفاده از عملگرهای ارزش حال مورد انتظار، روشی برای تخمین احتمال تبدیل ارائه شد. وقتی که صندوق مالی از شاخص S&P 500 گرفته شود و تحت مرگ و میر واقعی، دو سناریوی مختلف مطرح می‌شود. در سناریوی اول خرید مستمري صورت می‌گیرد تنها اگر بازده دریافتی به یک کران بالا برسد. درحالی که در سناریوی دوم خرید مستمري تنها در صورتی انجام می‌شود که صندوق عملکرد مالی ضعیفی داشته باشد. می‌توان فرآیند پخش - پرش را با استفاده از داده‌های بازار ایران (بومی سازی طرح) مدل بندی کرد. همچنین می‌توان خرید مستمري با درصدی از سرمایه شخص را مورد بررسی قرار داد.

### پیوست

در مطالب ارائه شده در این پایان نامه، نرخ مرگ و میر واقعی  $\mu(x+t)$  از یک توزیع گامپرتز ماکهام پیروی می‌کند. پارامترهای انتخاب شده برای این توزیع، پارامترهای تعریف

شده توسط تنظیم کننده بلژیکی هستند که برای قیمت گذاری مستمری عمر خریداری شده توسط مردان به کار گرفته بود (Hainaut, and Deelstra, 2014:143). برای شخصی با سن  $x$  نرخ مرگ و میر به وسیله توزیع زیر ارائه می شود:

$$\mu(x) = a_{\mu} + c \cdot c_{\mu}^x, \quad a_{\mu} = -\ln(s_{\mu}), \quad b_{\mu} = -\ln(g_{\mu}) \cdot \ln(c_{\mu}),$$

که پارامترهای  $s_{\mu}$ ،  $g_{\mu}$  و  $c_{\mu}$  دارای مقادیر داده شده در جدول ۱۰ هستند. برای مثال جدول ۱۱ پیشرفت نرخ مرگ و میر نسبت به سن را برای اشخاص مذکر نشان می دهد.

جدول ۱۰. پارامترهای قانونی بلژیکی برای مدل کردن نرخهای مرگ و میر به منظور محصولات بیمه عمر که هدف جمعیت مردان بوده است.

$s_{\mu}$	۰/۹۹۹۴۴۱۷۰۳۸۴۸
$g_{\mu}$	۰/۹۹۹۷۳۳۴۴۱۱۱۵
$c_{\mu}$	۱/۱۰۱۰۷۷۵۳۶۰۳۰

جدول ۱۱. نرخهای مرگ و میر، پیش بینی شده با مدل گامپرتز ماکهام، مبتنی بر پارامترهای جدول ۱۰.

$\mu(x)(\%)$	سن (x)
۰,۱۰	۳۰
۰,۱۸	۴۰
۰,۳۷	۵۰
۰,۸۸	۶۰
۲,۲۳	۷۰
۵,۷۴	۸۰



## منابع

### کتاب

۱. روتار، ولادیمیر ایلیچ، مدل‌های اکچوئری - ریاضیات بیمه - مدل‌های بیمه عمر و توزیع‌های بقا، جلد ۳، ترجمه: میرمهدی سید اصفهانی و سمیه نماینده، انتشارات پژوهشکده بیمه (وابسته به بیمه مرکزی ج.ا.ا.)، ۱۳۹۱.

۲. داداشی آرانی، حسن و مختاری، وحید، زمان بهینه برای خرید مستمری براساس فرایند پخش - پخش و مرگ و میر تصادفی، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، مرداد ۱۳۹۵.

### مقالات

۳. سوری، علی (هیئت علمی دانشگاه تهران) تحت نظر گروه پژوهشی بیمه‌های اشخاص، تدوین جداول زندگی مردان و زنان سال ۱۳۹۱ کشور به تفکیک شهری و روستایی و کاربرد آن در محاسبه حق بیمه انواع قراردادهای بیمه زندگی طرح‌های پژوهشی سفارشی بیمه مرکزی ج.ا.ا. ایران، ۱۳۹۵، شماره ۵۰.

4. Boyarchenko, S. and Levendorskii, S. *Irreversible Decisions Under Uncertainty: Optimal Stopping Made Easy*, vol. 27. Springer Science & Business Media, 2007.

5. Di Giacinto, M., Federico S., Gozzi F. and Vigna, E. Income drawdown option with minimum guarantee. *European Journal of Operational Research*, 234(3):610-624, 2014.

6. Emms, P. and Haberman, S. Income drawdown schemes for a defined contribution pension plan. *Journal of Risk and Insurance*, 75(3):739-761, 2008.

7. Gerrard, R., Højgaard, B., and Vigna, E. Choosing the optimal annuitization time post-retirement. *Quantitative Finance*, 12(7):1143-1159, 2012.

8. Hainaut, D. and Deelstra, G. Optimal timing for annuitization, based on jump diffusion fund and stochastic mortality. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 44:124-146, 2014.

9. Hainaut, D. and Deelstra, G. Optimal timing for annuitization, based on jump diffusion fund and stochastic mortality. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 44:124–146, 2014.
10. Milevsky, M.A. Optimal asset allocation towards the end of the life cycle: to annuitize or not to annuitize? *Journal of Risk and Insurance*, pp. 401–426, 1998.
11. Milevsky, M.A. and Young, V.R. Annuitization and asset allocation. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 31(9):3138–3177, 2007.
12. Milevsky, M.A., Moore K.S. and Young, V.R. Asset allocation and annuity purchase strategies to minimize the probability of financial ruin. *Mathematical Finance*, 16(4):647–671, 2006.
13. Shreve, S.E. *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*, vol. 11. Springer Science & Business Media, 2004.
14. Stabile, G. Optimal timing of the annuity purchase: Combined stochastic control and optimal stopping problem. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 9(02):151–170, 2006.
15. Yaari, M.E. Uncertain lifetime, life insurance, and the theory of the consumer. *The Review of Economic Studies*, 32(2):137–150, 1965.

پروفیسر شہناز گل خان  
پرنسپل جامعہ اسلامیہ اسلامیہ