زبان‌شناخت، پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
دوفصل‌نامهٔ علمی ـ پژوهشی، سال هشتم، شمارهٔ دوم، پاییز و زمستان ۱۳۹۶، ۲۷–۵۳

معرفی دستگاه عددنویسی پهلوی و رهیافتی موثر به حساب اعداد پهلوی

مهدی جعفری مته کلائی (آریا بزرگمهر)*

فرزانه گشتاسب**

چکیده

اعداد پهلوی برپایهٔ حروف الفبای پهلوی نوشته می‌شوند و از یک دستگاه عددنویسی توانمند و درخور توجه برخوردارند، با آنکه در این عددنویسی نمادی برای صفر نداریم و در نگاه نخست، ناموضعی به نظر می‌رسد ولی شیوهٔ نگارش آنها به گونه ای است که به سادگی می توان جایگاه یا مرتبهٔ هر عدد را روشن ساخت. رویکرد ما به حساب این اعداد نشان می‌دهد، در جمع این اعداد نیازمند الگوریتم ویژه‌ای نیستیم، همچنین شمار حاصل ضرب‌هایی که یک کودک ایران باستان می‌بایست از برمی‌بوده در مقایسه با دیگر دستگاه‌های عددنویسی کهن بسیار کمتر است. افزون بر همهٔ این ها برخی از اعداد بزرگ (بزرگتر از ده هزار) بیش از یک نمایش دارند و این خود توانمندی این دستگاه عدد نویسی را نشان می دهد.

کلیدواژه‌ها: اعداد پهلوی، الفبای فارسی میانه، متون پهلوی، حساب اعداد، دستگاه عددنویسی.

۱. مقدمه

«دانش عدد و اندازه» (science of number and magnitude) را شاید بتوان یکی از تعریف‌های کهن ریاضیات دانست. اگر چه ریاضیاتِ امروزی بسیار پیشرفته است، اما

* دانشجوی دکتری فیزیک، دانشگاه سمنان، Jafarimatehkolaee@semnan.ac.ir
** دانشیار فرهنگ و زبان‌های باستانی، پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی (نویسندهٔ مسئول)، f_goshtasb@yahoo.com

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۶/۱۲، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۹/۲۷

همچنان باید آن را برآیندِ اندیشه‌هایی بدانیم که به گونهٔ بنیادی روی مفاهیم عدد، اندازه و شکل (form) ، متمرکز می‌شوند (Boyer, 1991, p. 21). درفلسفهٔ ریاضی پورسینا، عدد، یک شی ریاضی است و اشیاء ریاضی، اشیاء ذهنی (mental object) هستند. وی هنگامی که در متافیزیکِ خود دربارهٔ عدد بحث می‌کند، مفهوم عدد را برگرفته از مفهوم وحدت (unity) می‌داند که این مفهوم یک ایدهٔ بنیادی در متافیزیک به شمار می‌رود (Ardeshir, 2008, pp. 33). در جهان فیثاغورسی، بهترین گونهٔ فلسفه با اعداد سروکار دارد زیرا از نگاه فیثاغورسیان، سرانجام همه چیز از عدد است. بر بنیاد باور آنها، همهٔ اشیاء دارای شکل، و اشیاء همان شکل‌ها هستند و همه شکل‌ها را می‌توان با اعداد تعریف کرد (کوستلر، ۱۳۸۷، ص ۱۵٦).

دربارهٔ پیدایش اعداد و دستگاه‌های عدد شماری، آگاهی درستی نداریم ولی گمان می‌رود شمردن و اندازه‌گیری، سرچشمهٔ پیدایش اعداد است از این رو پیش از دیگر مفاهیم ریاضی، بررسی می‌شود؛ برای نمونه، شمارش با انگشتان دست و پا را می‌بایست گامی در تکامل نام‌گذاری اعداد دانست[1].

برای شناخت اعداد ایرانی باستان، مهم‌ترین و کهن‌ترین منبع، کتاب اوستا است (Emmerick, 1992, p. 289). اعداد در اوستا به شکل عددواژه‌اند و به شکل‌های اصلی، ترتیبی، کسری و توزیعی دیده می‌شوند که برخی از آنها در شکل و کاربرد، با هم‌ارزهای سنسکریت خود همسان‌اند (حسینی شکرایی، ۱۳۹۰، صص ۷۲). خوشبختانه گزارشی گسترده و درخور توجه از عددواژه‌های اوستایی همراه با بررسی ریشه و روش خوانش آنها موجود است (Emmerick, 1992, pp. 289- 345)؛ بررسی سیر دگرگونی و دگردیسی این عددواژه‌ها تا زبان فارسی، پژوهش دیگری است که در این زمینه انجام گرفته است (نامور فرگی و ابراهیمی. ۱۳۹۱، صص ۸۲٦– ۸۳٦)؛ اما تاکنون دربارهٔ اعداد پهلوی پژوهش مستقلی انجام نشده است.

این پژوهش تلاشی است برای معرفی دستگاه عددنویسی و ارائهٔ فرضیه‌ای برای حساب اعداد پهلوی. در بخش نخست این مقاله پیشینه‌ای مختصر از دستگاه عدد نویسی در نظام‌های گوناگون نوشتاری ارائه می‌شود. سپس دستگاه عددنویسی پهلوی به تفصیل توضیح داده شده و بعد از آن فرضیهٔ ما دربارهٔ حساب (جمع و ضرب) اعداد پهلوی شرح داده می‌شود. برای ارزیابی یک دستگاه عددنویسی، باید به پرسش‌هایی از این دست پاسخ داد: آیا آموختن و نوشتن دستگاه آسان است؟ آیا دستگاه روشن و تهی از ابهام است؟ آیا

دستگاه برای محاسبه مناسب است؟ در حقیقت هر کدام از سیستم‌های عددنویسی که در گذشته به کارگرفته شده است را می‌توان با این پرسش‌ها آزمود و ما نیز تلاش خواهیم کرد پس از معرفی دستگاه عدد نویسی پهلوی و فرضیهٔ خود دربارهٔ حساب این اعداد، این دستگاه را بر اساس معیارهایی که گفته شد، ارزیابی کنیم.

۲. مروری بر پیشینهٔ دستگاه‌های عدد نویسی

امروزه می‌دانیم برای عددنویسی باید از دو قانون پیروی کرد. قانون نخست، به کارگیریِ اصل موضعی (positional) بودن رقم‌هاست به این معنی که ارزش هر رقم به مرتبه‌ای که در آن قرار دارد وابسته است. برای نمونه هنگامی‌که عدد ۹۹۹ را می نویسم، رقم ۹ را سه بار به کار برده‌ایم ولی ارزش هر یک از آنها به مرتبهٔ آن بستگی دارد، دراین عدد، نخستین ۹ از سمت راست نمایندهٔ ۹ و دومی نمایندهٔ ۹۰ و سومی نمایندهٔ ۹۰۰ است. افزون بر این، با جابجایی هر کدام از رقم‌های ۹ در عدد ۹۹۹ تغییری حاصل نخواهد شد. قانون دوم در عددنویسی امروزی، به کارگیری نماد و نشانه‌ای برای صفر است که بتوان آن را در مرتبه‌های خالی جای داد تا برای نمونه اعدادی مانند ۱۵، ۱۰۵ و۱۵۰ با هم اشتباه نشوند.

کهن‌ترین اسناد مربوط به کاربرد منظم اعداد نوشتاری متعلق به مصریان است (Boyer, 1991, p. 67) که همان عددنویسی هیروگلیف یا تصویری است (نک یوسف، ۱۳۸۵، ص۸٤). چگونگی این دستگاه‌های عددنویسی خارج از موضوع این مقاله است، تنها برای نمونه به این نکته اشاره می‌شود که در عددنویسی تصویری برای نشان دادن عدد نهصد و نود و نه باید از بیست و هفت نشانه استفاده کرد.

یکی از برجسته‌ترین دستاوردهای ریاضیات بابلی، نوآوری در ایجاد یک دستگاه عددنویسی موضعی بود (یوسف، ۱۳۸۵، ص ۱۲۳؛ Boyer, 1991, p. 45). به این ترتیب که بابلیان، برای نوشتن همهٔ اعداد تنها از دو نشانه یا نماد استفاده می‌کردند (: , 1) و با ترکیب آنها، تمامی اعداد دیگر را نشان می‌دادند[۲]. دستگاه عددنویسی بابلی به آسانی فراگرفته می‌شود و از نظر تعداد نمادها، یکی از اقتصادی‌ترین دستگاه‌های عددنویسی به شمار می‌رود (یوسف، ۱۳۸۵، ص ۱۲۵).

دستگاه عددنویسی دیگری که اقتصادی به شمار می‌رود، عددنویسی مایاهاست. در این دستگاه، دو نماد نقطه و خط به کارگرفته می‌شود. نشانه‌ای ویژه نیز برای صفر وجود دارد[۳]. روی هم رفته این عددنویسی از قاعده‌ای پیروی نمی‌کند و گمان می‌رود این شکل از

عددنویسی تنها مورد استفادهٔ گروه کوچکی از کاهنان بوده است که محاسبات نجومی و تنظیم گاهشماری را برعهده داشتند (یوسف، ۱۳۸۵، ص۶۹).

دستگاه عددنویسی چینی برپایهٔ دهدهی است. کهن‌ترین عددنویسی شناخته شدهٔ چینی به شکل استخوان‌های غیبی شانگ است که مربوط به ۱۵۰۰– ۱۲۰۰ پیش از میلاد است (یوسف، ۱۳۸۵، ص۱۶۵). در این دستگاه برای اعدادِ یک تا ده نماد ویژه‌ای وجود داشت و برای اعداد بالاتر، از نمادهای تکمیلی استفاده می‌کردند[۴].

عددنویسی یونانی با حروف الفبای یونانی که بیست و هفت حرف بود، ساخته شد. این عددنویسی دارای شکل موضعی نبود و برای صفر نیز نماد یا نشانه‌ای نداشت. عدد بیست به شکل xx (دو تا ده) و عدد سی به شکل xxx (سه تا ده) می‌باشد. نمایش این اعداد هم شکل افزایشی و هم شکل کاهشی دارد، مثلاً ix و xi به ترتیب نشانهٔ دو عدد «نُه» و «یازده» هستند. از آنجایی‌که فرایندهای جبری مانند جمع و تفریق و ضرب و غیره در این عددنویسی بسیار دشوار بوده است، بیشتر فرایندهای جبری به ویژه ضرب، به شکل استدلال‌های هندسی انجام می‌شده است (کوستلر، ۱۳۸۷، ص ۱۶).

عددنویسی ارمنی نیز از حروف الفبای ارمنی ایجادشده است.[۵] الفبای ارمنی در حدود سال ۳۹۶ یا ۴۰۵ میلادی به کوشش مسروپ ماشتوتس (Mesrop Mashtots) پدید آمد (باغداساریان، ۱۳۸۶، ص ۳۲). الفبای ارمنی، سی و شش حرف دارد. نُه حرف نخست نشانهٔ اعداد یک تا نه، نه حرف بعدی نشانهٔ اعداد ده تا نود، نه حرف بعدی نشانهٔ اعداد صد تا نهصد و نه حرف آخر نشانهٔ اعداد هزار تا نه هزار می‌باشد. برای ده هزار نیز واژهٔ «بیور» به کار می‌رود که با عددنویسی پهلوی مشترک است. برخلاف اعداد اصلی یونانی، اعداد ارمنی شکل ترکیبی ندارند و اعداد مرکب از کنار هم قرار گرفتن حرف‌های الفبا ایجاد می‌شوند. این دستگاه، مانند عددنویسی یونانی ناموضعی است و نمادی برای صفر ندارد. در عددنویسی یونانی تا نهصد و نود و نه، بدون نشان اضافی و در عددنویسی ارمنی تا نه هزار و نهصد و نود و نه، بدون نشان اضافی نوشته می شود، و پس از آن نمایش اعداد نیازمند نماد های تکمیلی است. خوشبختانه از سدهٔ هفتم میلادی، از ریاضیدان سرشناس ارمنی، آنانیاشیراکاتسی، کتابی برجای مانده است که در آن جدول‌های گوناگونی برای جمع و تفریق و ضرب، و همچنین شماری مسأله و پاسخ آنها و نیز سرگرمی‌های ریاضی موجود است (باغداساریان، ۱۳۸۶، ص ۴۵). بررسی دقیق این جدول‌ها نشان می‌دهد هنگامیکه سه حرف الفبایی (یا سه عدد ارمنی) با فاصله در یک ردیف کنار هم قرار می‌گرفتند با خوانش

از چپ به راست، عدد سوم حاصل یک فرایند جبری مانند جمع، تفریق یا ضرب می‌بود. در حقیقت از روی مقدار عدد سوم، نوع فرایند جبری تشخیص داده می‌شد زیرا برای انجام فرایندهای جبری، رابطه‌ای میان حروف الفبا یا اعداد ارمنی وجود نداشت، بلکه لازم بود نمایش اعداد را هم ارز با حروف الفبای متناظر، از بر شد. روشن است که برای ضرب دو عدد نیز، بسیاری از حاصل ضرب‌ها را می‌بایست از بر می‌شدند. در کتاب حساب شیراکاتسی، جدول‌های ضرب از سی و شش گروه و هر گروه از چهار جدول تشکیل می‌شود که در سه جدول، نه حاصل ضرب و در یکی از آنها ده حاصل ضرب قید شده است. از این رو در هر گروه سی و هفت حاصل ضرب و روی هم هزار و سیصد و سی و دو حاصل ضرب اشاره شده است (باغداساریان، ۱۳۸٦، ص ٦٥).

عددنویسی موضعی همراه با پذیرش نمادی برای صفر، در سده‌های نخست میلادی در هند پدید آمد. در عددنویسی موضعی دهدهی می‌توان با ده نماد (از صفر تا نه) هر عددی را، هر اندازه بزرگ، نشان داد. خوارزمی ریاضیدان پرآوازهٔ ایرانی، حساب هندی را نوشت و کتابش با ترجمهٔ لاتین به اروپای غربی راه یافت (شهریاری، ۱۳۸۵، ص ٢٤).[٦] بررسی پیشینهٔ عددنویسی در هند، مفید به نظر می‌رسد. در تاریخ کشور هند، دو دستگاه نوشتاری باستانی به نام‌های خط خروشتی (Kharoṣṭhī) و براهمی (Brāhmī) وجود داشته است. گمان می‌رود خط خروشتی در قرن چهارم پیش از میلاد یا شاید کمی پیش‌تر، از خط آرامی هخامنشی اقتباس شده باشد (رضایی باغ‌بیدی، ۱۳۹۱، ص ۷۱). در خط خروشتی دستگاه عددنویسی دهدهی بود و نمایش‌های اعداد، متمایز از حروف الفبا بوده است ولی همسان با حروف الفبا اعداد از راست به چپ نوشته می‌شدند و یک دستگاه افزایشی (سیر صعودی از راست به چپ) ایجاد می‌کردند. در این خط نمادی برای صفر و نیز اعداد پنج تا نه وجود نداشت (Marcos, 2014, p. 52). خط دیگر براهمی، نام خود را از برهما، خدای هندو گرفته است، زیرا هندوان او را آفرینندهٔ این خط می‌دانند. دربارهٔ منشأ این خط نظرات گوناگونی وجود دارد که هنوز هیچ یک از آنها را با قطعیت نمی‌توان پذیرفت (رضایی باغ‌بیدی، ۱۳۹۱، ص ۷۳). در خط براهمی برای صفر، نمادی هست و اعداد دو و سه شباهت زیادی به اعداد انگلیسی امروزی دارند.

اعداد و ارقام هندی در آغاز سدهٔ سوم هجری در زمان مامون عباسی در سرزمین‌های اسلامی رایج شد و از آن پس ـ البته به تدریج ـ بسیاری از نویسندگان کتاب‌های ریاضی

این نوگرایی را پذیرفتند (ریاحی، ۱۳٤۹، ص هیجده). پس از جنبش بزرگ علمی، فرهنگی و اندیشه‌ای در سده‌های چهارم و پنجم هجری، بسیاری از کتاب‌های علمی به زبان عربی نوشته می‌شد؛ اما در میان آنها، کتب انگشت‌شماری نیز به پارسی باقی مانده است که بی‌گمان ارزش ویژه‌ای دارند. سیصد و پنجاه سال پیش از جمشید کاشانی، ریاضی‌دان پرآوازهٔ ایرانی، شمس‌الدین محمدبن ایوب مازندرانی (محمدبن ایوب حاسب طبری) نویسندهٔ کتاب‌های *شمارنامه* (که آن را امروزه حساب یا حسابان می‌گوییم) و *مفتاح المعاملات*، یکی از ریاضیدانان و اخترشناسانی است که کتاب‌هایی را به پارسی به یادگار نهاده است[۷]. حاسب طبری در آغاز کتاب *مفتاح المعاملات*، دربارهٔ این کتاب چنین نوشته است:

> چون ما به پرداختیم از رسالهٔ شمارنامه که او اصل شمار هندی است خواستیم که تمامی و فایدهٔ او اندر این رسالهٔ مفتاح المعاملات پیدا کنیم، جز خداوندان صناعت نجوم را که در او تمام گفته‌ایم (حاسب طبری، ۱۳٤۹، ص ۳).

به نظر حاسب طبری «بنیان شمار به سه مراتب و نه عقد و دوازده نام نهاده است» (حاسب طبری، ۱۳٤۹، ص ٤۳). مراتب سه گانه از نگاه او، یکان، دهگان و صدگان است، و به باور وی هنگامی‌که به هزار می‌رسیم به مرتبهٔ نخستین باز می‌گردیم. عقد نه‌گانه همان ارقامی هستند که در مرتبهٔ یکان از یک تا نه و در مرتبهٔ دهگان از ده تا نود و در مرتبهٔ صدگان از صد تا نهصد می باشد. حاسب طبری دربارهٔ دوازده نام می گوید:

> اما دوازده نام آن است که از یکی تا ده بر نظم طبیعی برود و صد و هزار، و چون از هزار گذشت مکرر شود و ابتدا کند بار دوم به دوازده نام، همچنانکه اول بوده باشد (حاسب طبری، ۱۳٤۹، ص ٤٤).

حاسب طبری دربارهٔ جمع و تفریق به توضیح کوتاهی بسنده کرده و به روش ویژه‌ای اشاره نکرده است؛ ولی برای ضرب، پس از توضیح گسترده و مبسوط، دو جدول رسم کرده است که یکی دربارهٔ حاصل ضرب اعداد یکانی است و از بر شدن آن را ضروری می‌داند و دیگری جدول حاصل ضرب مراتب در مراتب است[۸]. در واقع وی برای فرایند ضرب، دو گام قائل شده است. گام نخست ضرب ارقام آن و گام دوم، تعیین جایگاه مراتب آن است. برای نمونه هنگامی‌که ۲٤ را در ۳٦ ضرب می‌کند پس از ضرب ۲ و ۳ از

جدول حاصل ضرب مراتب در مراتب، جایگاه عدد حاصل یعنی ٦ را در مرتبهٔ صدگان می‌داند و به همین روند می‌توان نتیجه گرفت:

٢٤×٣٦=٦٠٠+١٢٠+١٢٠+٢٤= ٨٦٤

کتاب دیگری که مطالب آن دربارهٔ جمع اعداد اهمیت دارد، *خلاصه‌الحساب* شیخ بهایی است. وی در این کتاب برای جمع اعداد، آنها را ستونی زیر هم می‌نوشت و از چپ به راست آن‌ها را جمع می‌کرد. در این شیوه، اعداد در مرتبه‌های بالاتر به یکدیگر وام داده نمی‌شوند (آنچه که امروز آن را روش ده بر یک می‌خوانیم)[9]. برای نمونه به جمع دو عدد زیر توجه کنید:

	٧	٤	٦
+	٣	٦	٤
	١٠		
		١٠	
			١٠
	١١	١	٠

۳. مروری بر عددنویسی در خط فارسی میانه کتابی

از گونهٔ زبان‌های ایرانی میانهٔ جنوب غربی، کتیبه‌ها و متون بسیاری به زبان فارسی میانه و چهار خط فارسی میانه کتیبه‌ای، فارسی میانه مانوی، فارسی میانه زبوری و فارسی میانه کتابی باقی مانده است. خط فارسی میانه کتابی که به خط شکسته یا متصل نیز مشهور است، ویژگی‌هایی خاص دارد که آن را نسبت به سه خط دیگر متمایز و خواندن متونی را که به خط شکسته نوشته‌شده‌اند، دشوارتر می‌کند. این دشواری به دلیل ابهامی است که در خواندن برخی حروف این خط وجود دارد. بیشتر حروف این خط نمایانگر چند آوای متفاوت هستند و برخی حروف در اتصال با حروف دیگر شبیه به حرفی دیگر می‌شوند. تغییر شکل برخی حروف در نگارش و یا هنگام اتصال با حروف دیگر، این ابهام را بیشتر می‌کند (← آموزگار و تفضلی، ۱۳۷۵، صص ۵۹– ٦٠)[10].

در خط فارسی میانه کتابی، همهٔ اعداد با یازده عدد و یک عدد–واژه ساخته می‌شوند که عبارتند از یک، دو، سه، چهار، ده، بیست، چهل، شصت، هشتاد، صد، هزار و واژهٔ بیور؛ در حقیقت دوازده عدد بنیادی داریم که همهٔ اعداد پهلوی به کمک آنها، ساخته می‌شوند[11]. در این اعداد، نمادی برای صفر وجود ندارد و روی هم رفته، ناموضعی به نظر می‌رسد. اعداد

پهلوی از راست به چپ نوشته می‌شوند و تنها چهار حرف پهلوی، بدون آنکه تغییری در شکل آنها داده شود برای نگارش اعداد به کار رفته‌اند: حرفِ ـل (b) برای نشان دادن عدد یک، حرفِ ـد (d/y/g) برای نمایش عدد ده، حرفِ ـل (l) برای نمایش عدد بیست، و حرفِ ـو (s) برای نشان دادن عدد چهل.

نمایش اعداد پهلوی یکانی به ترتیب از راست به چپ، به شکل زیراست:

ـل ـر ـس ـسر ـسر ـسر ـسر ـسرس

اعداد در فارسی میانه کتابی، جز آن که با دوازده عدد بنیادی نوشته می‌شوند، صورت آوایی آنها هم ممکن است نوشته‌شود مثلاً عدد یک به صورت **یک** نیز نوشته می‌شود؛ برخی اعداد هم مانند عدد دو و سه، گاه به صورت هزوارش (به ترتیب: **دو** و **سه**) نوشته می‌شوند.

با بررسی صورت نگارشی اعدادِ یک تا نه می‌بینیم که چهارعدد نخست، یک بخش؛ اعداد پنج تا هشت، دوبخش؛ و عدد نه، سه بخش دارد. همچنین در اعداد یکانی، عدد «دو» دوبار، عدد «سه» هشت بار و عدد «چهار» چهار بار تکرار شده‌اند، که تلویحاً بر اهمیت عدد «سه» در باورهای ایرانی تأکید می‌کند[۱۲]. دقیقاً نمی‌توان دانست که چرا اعداد پنج تا نه یک‌بخشی نیستند و با چهار عددِ نخست ساخته می‌شوند. اما نکته‌ای که باید دربارهٔ اعداد پهلوی بدان اشاره کرد، آن است که در اندیشه و فرهنگ ایرانی به بُعد کیفی اعداد به شدت توجه می‌شد. نمونهٔ بارز و مشهور آن را در متن پهلوی «گزارش شطرنج» می‌توان دید که چگونه بزرگمهر، وزیر اندیشمند انوشیروان در ساخت تخته نرد برای هر یک از اعدادِ روی تاس، معنایی در نظر می‌گیرد[۱۳]. همچنین می‌توان به نقش کیفی اعداد در اندرزنامه‌های پهلوی، برای نمونه متن فارسی میانهٔ «اندرز اوشنر دانا»، اشاره کرد که احتمالاً در سنت‌های ادبی هندوایرانی مانند ادبیات سنسکریت ریشه دارد (de Blois 1993, p.95).

در بیشتر دستنویس‌های پهلوی، نمایش اعداد یکانی با آنچه اشاره شد سازگار است، اما گاهی نیز این اعداد با املایی متفاوت نوشته شده‌اند که به برخی نمونه‌های آن اشاره می‌شود:

در *بندهش ایرانی* در بخش «دربارهٔ سروری کشورها»، عددی به شکل ـسرـ آمده است که اگر آن را شش بخوانیم با نمایش عدد شش سازگار نیست.[۱۴] عدد هفت در سراسر بندهش ایرانی همان شکل ـسرس را دارد ولی در بخش «دربارهٔ چگونگی زایش هر

سرده» که این عدد چند بار تکرار شده، یکبار به شکل 𐭮𐭮𐭮 آمده است.[۱۵] در *کارنامهٔ اردشیر بابکان*، سن شاهپور و روبرو شدن وی با اردشیر و سن اورمزد (نوهٔ اردشیر) و رویارویی‌اش با اردشیر، «هفت» با املای 𐭮𐭮𐭮 آمده است[۱۶]. در «چیده اندرز پوریوتکیشان» (، بند۱۵)، تعداد همراهان سوشیانس با هفت کی به شکل 𐭮𐭮𐭮 آمده است (Jamasp-Asana, 1897, p. 44). در «دربارهٔ بزرگداشت سور آفرین» (، بند ٤ و ٥) تعداد امشاسپندان هفت تا گزارش شده و عدد هفت به شکل 𐭮𐭮𐭮 آمده است (Ibid., p. 155). به این ترتیب برای نمایش عدد هفت بجز 𐭮𐭮𐭮 گاه شکل 𐭮𐭮𐭮 نیز در نسخه‌ها دیده می‌شود؛ این امر دربارهٔ عدد پنج نیز مصداق دارد.

عدد ده با حرف 𐭣/𐭫 از حروف الفبای پهلوی نمایش داده می‌شود، که معمولاً به شکل 𐭣 و گاه به شکل 𐭫 نوشته شده است. با قرار دادن اعداد یکانی در کنار عدد ده، اعداد یازده تا نوزده ساخته می‌شوند:

𐭠𐭫 𐭡𐭫 𐭢𐭫 𐭣𐭫 𐭤𐭫 𐭥𐭫 𐭦𐭫 𐭧𐭫 𐭨𐭫

در دستنویس‌های پهلوی، برای این اعداد نیز گاه املایی متفاوت با املای رایج آنها دیده می‌شود. برای نمونه در رسالهٔ «ماه فروردین روز خرداد» (، بند ۲۷) در جملهٔ «ماه فروردین روز خرداد، هیجده چیز به هیجده سال به خسرو هرمزان رسد»، نخستین «هیجده» در همهٔ دستنویس‌ها بجز دستنویس Ta، به شکل 𐭡𐭣𐭮𐭮𐭮 نوشته شده است (Ibid., p. 105) و در نخستین بندِ «گزارش شطرنج»، در دستنویس MU2 عدد شانزده دو بار با املای نامتعارف 𐭡𐭮𐭮𐭮 آمده است[۱۷].

چنان که پیش‌تر اشاره شد، عدد بیست و چهل به ترتیب، همان حروف لام و سین در خط فارسی میانه کتابی هستند. نمایش اعداد بیست، چهل، شصت، هشتاد، صد و هزار به این شکل است: 𐭫 𐭫𐭥 𐭫𐭫 𐭫𐭫𐭥 𐭮 𐭮𐭫

و اعداد سی، پنجاه، هفتاد و نود با جمع عدد ده با اعداد بیست، چهل، شصت و هشتاد ساخته می‌شوند[۱۸]: 𐭮𐭣 𐭥𐭣 𐭫𐭣 𐭫𐭥𐭣

در جدول زیر نشان داده‌ایم با ترکیب حرف لام پهلوی و حروف دیگر الفبای پهلوی، اعداد سی، صد و هزار ساخته می‌شوند.

جدول(۱): نمایش اعداد سی، صد و هزار
با ترکیب حروف الفبای پهلوی

⇩	𐭤
𐭥	𐭥𐭤
𐭧	𐭧𐭤
𐭩	𐭩𐭤

۱.۳ اعداد پهلوی، جمعی یا ضربی

اعداد فارسی میانه کتابی هم شکل جمعی و هم شکل ضربی دارند. حرف پیوند ud در این اعداد بسیار اهمیت دارد زیرا با قرار گرفتن در میان آنها، مرتبهٔ هر عدد را روشن می‌سازد. در حقیقت حضور حرف پیوند ud در این دستگاه عدد نویسی، تا حدودی به آن مفهوم موضعی می‌دهد[۱۹]. برای نمونه در عدد 𐭥𐭤𐭯𐭱 عدد 𐭥𐭤 در مرتبهٔ دهگان و عدد 𐭯𐭱 در مرتبهٔ یکان است. برای اعداد سه رقمی و بالاتر شکل ضربی را نیز داریم. دویست (دو صد) به شکل 𐭯𐭱𐭧 و سیصد (سه صد) به شکل 𐭯𐭱𐭧 نوشته می‌شوند. برای نمونه در متن پهلوی *یادگار زریران*، عدد نهصد و نود و نه به شکل 𐭯𐭯𐭱𐭧 𐭥𐭤𐭥 𐭯𐭯𐭱 نوشته‌شده است که هم شکل ضربی و جمعی را در اعداد نشان می‌دهد و به روشنی پیداست که حرف پیوند ud در نگارش اعداد معنای جمع می دهد یعنی: ۹×۱۰۰ + ۹۰ + ۹.

مرتبهٔ هزارگان نیز با عدد 𐭩 روشن می گردد و برای مثال دو هزار به شکل 𐭯𐭱𐭩 و پنج هزار به شکل 𐭯𐭯𐭱𐭩 نوشته می‌شوند. مرتبهٔ ده هزارگان نیز با واژه بیور (فارسی میانه: 𐭩𐭥) مشخص می‌شود و مثلاً عدد بیست هزار را در *یادگار زریران* (، بند٤) به شکل دو بیور، 𐭯𐭱 𐭩𐭥 نوشته‌اند (Jamasp-Asana, 1897, p.1)[۲۰].

تکرار عدد 𐭩 در کنار یکدیگر مرتبهٔ میلیون یا ۱۰^۶ را خواهد داد برای نمونه شش میلیون را می‌توان چنین نوشت: 𐭯𐭯𐭱𐭩𐭩. در *یادگار زریران* (، بند ٦٦) عدد صد و سی و یک بیور به شکل 𐭧𐭥𐭱 𐭯𐭯𐭱 𐭩𐭥[۲۱] (۱۰۰۰۰× ۱۳۱) نوشته شده است که هم ارز با یک

میلیون و سیصد و ده هزار است (Jamasp-Asana, 1897, p. 9). نکتهٔ مهم در نشان دادن اعداد بزرگ آن است که وقتی عدد پهلوی به یا پایان می یابد، اعدادِ پیش از آن، هرگز به شکل جمعی نیستند بلکه حتماً شکل ضربی دارند. از این رو قرار دادن حرف پیوند پیش از این دو واژه، نادرست است. همین عدد را بدون واژهٔ بیور و به شکل جمعی، با این املا می‌توان نوشت: . مقایسه این دو نمایش از عددِ یک میلیون و سیصد و ده هزار نشان می دهد در دورهٔ میانهٔ زبان‌های ایرانی و در نگارش اعداد پهلوی، درک روشنی از ضرب وجود داشته است.

به همین ترتیب تکرار واژهٔ بیور در کنار یکدیگر (فارسی میانه:) مرتبهٔ صد میلیون یا 10^8 را نشان می‌دهد، و بنابراین هر «ده بیور بیور» (فارسی میانه:)، هم ارز با یک میلیارد است. برای نمونه می‌توان به عدد دوازده بیور بیور یا در *یادگار زریران* اشاره کرد که هم‌ارز است با عدد یک میلیارد و دویست میلیون (Jamasp-Asana, 1897, p. 9).

نمایش اعداد به صورت ضربی در کنار صورت‌های جمعی در *شاهنامه* نیز دیده می‌شود؛ برای نمونه به ابیات زیر اشاره می‌کنیم که در آنها عدد دوازده به صورت «ده و دو»، و عدد هیجده به صورت «سه شش» به کار رفته است:

درو ده و دو برج آمد پدید ببخشید داننده چونان سزید
ابر ده و دو هفت شد کدخدای گرفتند هر یک سزاوار جای

شاهنامه، ج ۱، ص ٦

چو شد سال آن نامور بر سه شش دلاور گوی گشت خورشیدفش

همان، ج٦، ص ۳۷۰

البته در عددنویسی پهلوی کتابی نمایش دو شش، دو هفت و دو هشت را برای اعداد دوازده، چهارده و شانزده نمی‌بینیم و همه اعداد یازده تا نوزده به صورت جمعی و با عدد ده () ساخته می‌شوند. قاعدهٔ دیگر دربارهٔ اعداد دو رقمیِ کمتر از بیست آن است که، معمولاً بین رقم یکان و عدد ده، حرف پیوند قرار نمی‌گیرد، ولی به ندرت در برخی دستنویس‌ها خلاف این قاعده نیز دیده می‌شود؛ برای نمونه عدد دوازده هزار در یکی از دستنویس‌های «گزارش شطرنج»، شاید تحت تأثیر زبان فارسی، به شکل «ده و

دو هزار» آمده است[۲۲] که بر اساس نکته‌ای که گفته شد، بهتر است آن را به صورت 𐭮𐭭 𐭫 تصحیح کنیم.

در *روایت پهلوی* (فصل ۱۸، بند پ۱) عددی آمده است که بررسی و تحلیل آن، نکـاتی را که پیش‌تر گفته شد، روشن خواهد کرد[۲۳]:

𐭠𐭥𐭥𐭲 𐭮𐭭𐭮𐭭 𐭮𐭭𐭮𐭭 𐭮𐭭𐭮𐭭 𐭮𐭭𐭮𐭭 𐭮𐭭𐭮𐭭 𐭮𐭭𐭮𐭭[۲۴]

این عدد را مانند اعداد دیگر پهلوی از راست به چپ چنین می‌توان خواند: «نود و نه فرزند و نهصد و نه هزار و نه بیور». روشن است که اگر واژهٔ 𐭮𐭭𐭮𐭭 را حذف کنیم در خواندن عدد بالا دچار مشکل می‌شویم. اما اگر طبق قاعده‌ای که دربارهٔ شکل جمعی اعداد پهلوی شرح داده شد، با در نظر گرفتن حرف پیوندِ ud، این عدد را بخوانیم، به این عدد خواهیم رسید:

۹۹ + ۹۰۰ + ۹۰۰۰ + ۹۰۰۰۰ = ۹۹۹۹۹

بنابراین می‌بینیم که در عدد فوق، تمام اعداد پیش از بیور شکل جمعی دارند و اگر این عدد را از چپ به راست بخوانیم نیز به عدد درست خواهیم رسید. گمان می‌رود نویسندهٔ *روایت پهلوی* از نوشتن عدد بالا به این شکل هدفی خاص داشته است. اگر این عدد را بدون واژهٔ بیور می‌نوشتند، احتمالاً املای آن چنین بود: 𐭠𐭥𐭥𐭲 𐭮𐭭𐭮𐭭 𐭫 𐭮𐭭𐭮𐭭 𐭪 𐭠𐭥𐭥𐭲 𐭮𐭭𐭮𐭭 که خواندنِ آن، با در نظر گرفتن شکل جمعی اعداد، چنین است:

۹۹۰۰۰ + ۹۰۰ + ۹۰ + ۹ = ۹۹۹۹۹

بنابراین نویسندهٔ *روایت پهلوی* می‌توانست واژهٔ بیور را به کار نگیرد و واژهٔ 𐭮𐭭𐭮𐭭𐭮𐭭 را به عنوان معدودِ عددی که نوشته شد، در پایان عدد قرار دهد؛ اما به دلیلی کـه مـی‌تـوان در جایی دیگر دربارهٔ آن سخن گفت، نمایش نخست را برگزیده است.

به همین ترتیب اگر بخواهیم عدد ۹۹۹۹۹۹ را با دو املا، یک بار همـراه بـا بیـور و بـار دیگر بدون آن نشان دهیم، به ترتیب به دو نمایش زیر خواهیم رسید:

𐭮𐭭𐭮𐭭	𐭪	𐭮𐭭𐭮𐭭	𐭠𐭥𐭥𐭲	𐭪	𐭮𐭭𐭮𐭭	𐭠𐭥𐭥𐭲	𐭮𐭭𐭮𐭭
صدهزارگان		صدگان		دهگان		یکان	

𐭠𐭥𐭥𐭲	𐭮𐭭𐭮𐭭	𐭪	𐭮𐭭𐭮𐭭	𐭠𐭥𐭥𐭲	𐭪	𐭮𐭭𐭮𐭭	𐭠𐭥𐭥𐭲	𐭮𐭭𐭮𐭭
ده هزارگان		هزارگان		صدگان		دهگان		یکان

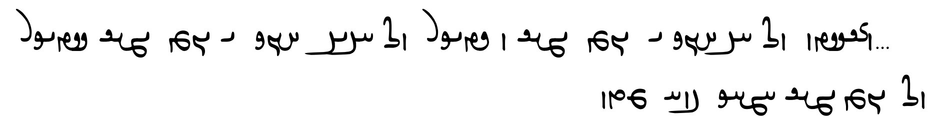
۲.۳ اعداد ترتیبی

در نوشته‌های پهلوی عدد ترتیبی «یکم» یا «نخستین» به شکل [illegible] یا [illegible] و عدد ترتیبی «دوم» به شکل [illegible] (دودیگر) و عدد ترتیبی «سوم» به شکل [illegible] (سه دیگر) نوشته می‌شوند. برای ساخت اعداد ترتیبی از چهارم به بالا پسوند [illegible] (om)، به اعداد افزوده می شود (←آموزگار و تفضلی، ۱۳۷۵، ص ۷۳). در *بندهش* نمونه‌های بسیاری را از اعداد ترتیبی می‌توان یافت. برخی از این اعداد با املای غیرمعمول نوشته‌شده‌اند، برای نمونه عدد ترتیبی شانزدهم که به شکل [illegible] آمده است. نمونه‌های دیگری از کاربرد اعداد ترتیبی در *بندهش* عبارت‌اند از: عدد هفدهم به شکل [illegible]، عدد هیجدهم به شکل [illegible]، عدد نوزدهم به شکل [illegible] و در نهایت عدد بیستم به شکل [illegible] مشاهده می‌شوند.

۳.۳ اعداد کسری

دربارهٔ اعداد کسری پهلوی، گفته می‌شود که ابتدا مخرج نوشته می‌شود (آموزگار و تفضلی، ۱۳۷۵، ص ۷۳). این امر دربارهٔ اعداد کسری که در صورت آنها عددی بجز یک وجود دارد، صادق نیست و باید به نحوی دیگر توضیح داده شود. بیان دقیق‌تر این سخن آن است که، در اعداد کسری که صورت آنها یک باشد، نخست مخرج و سپس عددواژهٔ [illegible] (یک) می‌آید، برای نمونه املای اعداد یک دوم به شکل [illegible] (دو یک) و عدد یک سوم به شکل [illegible] (سه یک) و عدد یک چهارم به شکل [illegible] (چهار یک یا چارک) است؛ و در دیگر اعداد کسری نخست صورت، سپس مخرج و در پایان، عددواژهٔ [illegible] را می‌آوریم، برای نمونه عدد سه چهارم را به شکل [illegible] (سه چهار یک یا سه چارک) می‌نویسیم. در *روایت پهلوی* (فصل ۸ بند ج۱) عدد [illegible][25] آمده است که با توجه به درونمایهٔ متن، قطعاً باید دوسوم خوانده شود[26].

دربارهٔ اعداد کسری نیز گاه صورت نوشتاری نامتعارفی دیده می‌شود. در *بندهش* در آغاز بخش «دربارهٔ نحوهٔ آن آفرینش‌ها» دو عدد کسری مشاهده می‌شود که عدد دوم را با توجه به مفهوم متن، نادرست به نظر می آید:



نخست بر یک سوم این زمین، دودیگر بر +دوسوم این زمین و سه دیگـر بـر همـهٔ ایـن زمین بیامد[۲۷].

عدد کسری نخست با هزوارش عدد سه (𐎳𐏑𐏓) به صورت «یک سوم» نوشته شده است، ولی عدد کسری بعدی در خط سه‌دوم (𐎳 𐎲 𐏓𐎢𐎲) نوشته شده است، در حالی که با توجه به مضمون این قطعه، باید دو سوم خوانده شود. به نظر می رسد تمایز میان دو عدد کسری دوسوم و سه دوم تنها در جابجا نوشتن اعداد دو و سه است، و اگر بخواهیم عدد کسری یک پنجم را بنویسیم، مشکل پیچیده‌تر می‌شود چون آن را هم باید به همین صورت (𐎳 𐎲 𐏓𐎢𐎲) نوشت. متاسفانه کوشش ما در یافتن اعداد کسری یک پنجم یا یک هفتم، در نوشتارهای پهلوی به نتیجه نرسید. بی گمان در یک دستگاه عدد نویسی مانند پهلوی، باید بتوان همهٔ اعداد را نوشت و بسیار بعید است که از نوشتن برخی اعداد ناتوان باشیم. همچنین استفاده از نماد تکمیلی برای نوشتن اعداد کسری غیرمنطقی به نظر می‌رسد زیرا در دستگاه عددنویسی پهلوی برای نمایش هر عددی، هر چقدر بزرگ، نیازی به نماد تکمیلی نداریم؛ از این رو به گمان ما، از آنجایی که در خوانش اعداد کسری به هیچ روی دچار مشکل نمی‌شویم، نگارش با فاصلهٔ آنها ابهام موجود را برطرف خواهد نمود، یعنی عدد یک‌پنجم به شکل 𐎳 𐎲 𐏓𐎢𐎲 و عدد سه دوم به شکل 𐎳 𐎲 𐏓𐎢𐎲 نوشته می‌شود[۲۸]. در حقیقت مخرج کسرهای امروزی در اعداد کسری پهلوی کنار واژهٔ 𐏓𐎢𐎲 نوشته می‌شود، مانند هفت چهارم که می‌توان آن را به شکل 𐎳𐎳 𐎳 𐏓𐎢𐎲 نوشت.

۴. فرضیه‌ای دربارهٔ حساب اعداد پهلوی: جمع[۲۹]

اعداد پهلوی کتابی با دوازده عدد ساخته می شوند ولی مبنای این اعداد دقیقاً برای ما روشن نیست، زیرا این دوازده عدد، پیاپی و به ترتیب نیستند. به نظر می‌رسد با توجه به تعریفی که در ریاضیات امروزی دربارهٔ مبنا وجود دارد، سخت بتوان دربارهٔ مبنای عددنویسی پهلوی تصمیم گرفت. مبنا در ریاضیات به گونه ای است که برای n عددِ نخستین، نشانه‌هایی قرار می‌دهند و برای عددهای بعدی از همان n نشانه استفاده می کنند و به این ترتیب سلسلهٔ عددها در دستگاه به مبنای n به وجود می آید (تاتون، ۱۳٦٤، ص ٦٥). برای نمونه در عددنویسی بر مبنای ده، برای هر عدد کوچک‌تر از ده، نشان و نام ویژه‌ای قرار داده شده است و عدد ۱۰، یعنی نمایندهٔ ۱۰ واحد، خود واحدی برای مرتبهٔ بالاتر به شمار می‌رود. اگر عددنویسی پهلوی را در مبنای دوازده بگیریم باید توجه داشت که دستگاه با مبنای

دوازده به اعداد دو، سه، چهار و شش بخش‌پذیر است و گمان می‌رود در گذشته بـه شـکل دستگاه وزن و اندازه‌گیری به کار می‌رفته است، زیرا واژهٔ «دوجین» به معنای دوازده واحـد، و واژهٔ «گروس» به معنای «دوازده دوجین»، یعنی ۱۲×۱۲، بر جای مانده اسـت (شـهریاری، ۱۳۸۷، ص ۲۵)[۳۰].

رونالد امریک (1992, p. 311) با بررسی اعداد اوستایی، دستگاه عددنویسی ایران باسـتان را دهدهی دانسته است. اما وی در ادامهٔ پژوهش خود، پس از ذکر نمونه‌هایی از گویش‌های بلوچی، تاتی، پشتو و جزآن، مدعی می‌شود که گرایش دستگاه عددنویسی ایرانی باستان بـر مبنای بیست است. برای نمونه، عدد چهل در بلوچی به شکل dō gīst (۲۰×۲)، عددشصـت به شکل sai gīst (۲۰×۳)، عدد هفتاد به شکل sai gīst u dah (۱۰+۲۰×۳)، عـدد هشـتاد بـه شکل čīār gīst (۲۰×٤)، عدد نود به شکل čīār gīst u dah (۱۰+۲۰×٤)، عدد صـد و بیسـت به شکل šaš gīst (۲۰×٦) و عدد صد و چهل به شکل hapt gīst (۲۰×۷)، می‌باشند. در زبـان تاتی عدد شصت به شکل säbist (۲۰×۳)، عـدد هفتـاد بـه شـکل säbistdäh (۱۰+۲۰×۳) و عدد هشتاد به شکل čarbist (۲۰×٤) می‌باشند (Ibid, pp. 312- 313)[۳۱]. نظـر امریـک دربـارهٔ مبنای بیست در دستگاه عددنویسی ایرانی باستان درست بـه نظـر مـی‌رسـد زیـرا در متـون پهلوی کتیبه‌ای نیز، با دستگاه عددنویسی بر مبنای بیست روبرو هستیم.

با آنکه عدد نویسی پهلوی را باید ناموضعی به شمار آورد ولی حضور حـرف پیونـد ud در این اعداد مراتب یکان، دهگان، صدگان و غیره را مشخص می‌کند و ایـن امـر، جمـع و ضرب آنها را ساده‌تر می‌سازد.

برای جمع اعداد یکانی، توجه بیشتر ما به شیوهٔ نمایش عدد بوده است. چنانچه پـیش از این اشاره شد، همهٔ اعداد یکانی پهلوی کتابی، دندانه‌دار هسـتند و بیشـترین دندانـه را عـدد س_ دارد. فرض نخست را بر این می‌گذاریم که در جمع عـدد س_ بـا هـر عـدد یکـانی دیگر، به این عدد دندانه‌ای افزوده نمی‌شود بلکه از آن وام گرفته می‌شود. همچنـین از عـدد پنج تا هشت، با اعداد دو بخشی روبرو هستیم و عدد نه یک عدد سه بخشی اسـت از ایـن رو، فرض دوم را بر این می‌گذاریم که در جمع عدد یکانیِ یک‌بخشی بـا عـدد دو بخشـی، دندانه‌ای از عددِ یک‌بخشی به عددِ دوبخشی افزوده می‌شود مگر اینکه این کار ممکن نباشد (مانند جمع اعداد یک و هشت).

برای نمونه به جمع اعداد چهار و یک می‌توان توجه کرد[۳۲]: س_ + ل_ = سل_

بر پایهٔ فرض نخست از عدد یک به عدد چهار نمی توان افزود از این رو، یک دندانـه از عدد چهار به عدد یک افزوده می‌شود. اگر از عدد چهار، دو دندانه به عدد یک افزوده شود، نمایش **𐏑𐏑** را خواهیم داشت که باز هم عدد پنج است.

اکنون به جمع اعداد پنج و یک توجه کنید: **𐏑𐏑** + **𐏑** = **𐏑𐏑**

بر پایهٔ فرض دوم، دندانه‌ای به بخش دوم عدد پنج افزوده می‌شود دقت شود که می‌توان آن را به بخش نخست عدد پنج نیز افزود ولی می‌دانیم نمایش **𐏑𐏑** نمایشی رایج بـرای عدد شش نیست.

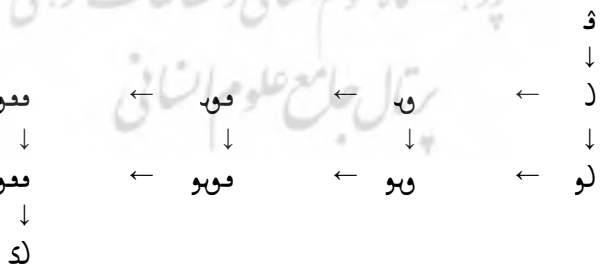
در جمع اعداد هشت و یک برپایهٔ فرض نخست، ناگزیر هستیم از عدد دو بخشی به عدد یک بخشی بیافزاییم: **𐏑𐏑𐏑** + **𐏑** = **𐏑𐏑𐏑**

جمع اعداد نه و یک، عبارتی است که شکل آن را باید از بر شد، زیرا وارد مرتبهٔ جدید (دهگان) می‌شویم: **𐏑𐏑𐏑** + **𐏑** = **𐏓**

از این رو در جمع اعداد نه و سه داریم:

𐏑𐏑𐏑 + **𐏑𐏑** → **𐏑𐏑𐏑** + **𐏑𐏑** → **𐏓𐏑𐏑**

جمع اعداد دو رقمی پهلوی با جمع اعداد دو رقمی امروزی بسیار متفاوت اسـت زیـرا هم نمادی برای صفر نداریم و هم هر کدام از اعداد دو رقمی (ده، بیسـت، چهـل، شصـت، هشتاد) نمایش ویژه‌ای دارند. گمان می‌رود نیاز به الگوی مشخصی برای جمـع ایـن اعـداد ضروری بوده است زیرا در غیر این صورت همهٔ حاصل جمـع‌هـایی ماننـد **𐏒𐏑** و **𐏒𐏒𐏑**را می‌بایست به حافظه می‌سپردند! الگوی فرضی ما برای جمع اعداد دو رقمی پهلوی به شـرح زیر است:



هر پیکان افقی ارزشی به اندازهٔ عدد بیست و هر پیکان عمودی ارزشی به اندازهٔ عدد ده دارد

توجه شود در به کارگیری از این الگو، آگاهی از حاصل‌ضرب‌هایی مانند دو بیست (برابر چهل)، یا سه بیست (برابر شصت)، یا چهاربیست (برابر هشتاد) و جز آن ضروری بوده است. با توجه به اشارهٔ رونالد امریک به گویش‌های تاتی و بلوچی و غیره، به نظر می‌رسد این حاصل‌ضرب‌ها بر زبان مردمان جاری بوده است[۳۳]. برای نمونه جمع دو عدد و سه بار پیکان افقی را می‌شماریم و به می‌رسیم. یا برای جمع اعداد و دو بار پیکان افقی و دوبار پیکان قائم را می‌شماریم و به می‌رسیم.

در جمع اعداد با مرتبه‌های بالاتر نیز، از آنجایی که حرف پیوند ud میان مرتبه‌ها فاصله می‌اندازد، با توجه به همین نکته اعدادِ هم‌مرتبه را جمع می‌کنیم، توجه شود که در شیوهٔ شیخ بهایی برای جمعِ اعداد، آنها را ستونی می‌نوشتند ولی در اینجا هم‌ردیف هستند. برای نمونه به جمع دو عدد «صد و پنجاه و هفت» و «سیصد و چهل و چهار» توجه کنید:

که حاصلِ آن، عدد حاصل خواهد شد:

(۱۰۰+۳۰۰) + (۵۰+۴۰) + (۷+۴) = ۴۰۰+ ۹۰+۱۱ = ۴۰۰+ ۹۰+۱۰+۱ = ۵۰۰+۱

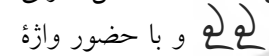
تشخیص مرتبهٔ هر عدد در اعداد پهلوی، همیشه هم ساده نیست و گاهی دارای ابهام نیز هست. در *بندهش* با عدد روبرو می‌شویم[۳۴] که حرف پیوند ud درمیان آن وجود ندارد. مهرداد بهار این عدد را «شش هزار هزار و چهارصد و هشتاد هزار» ترجمه کرده است (بهار، ۱۳۶۹، ص ۴۳). اگر حرف پیوند را مطابق با خوانش بهار در این عبارت اضافه کنیم ([۱] [۱])، آنگاه جایگاه و مرتبهٔ عدد دچار ابهام می شود؛ زیرا برای نمونه فرض کنید می‌خواهیم این عدد را با عدد «پانصد و یک» جمع کنیم، یعنی: + در نتیجه حاصل جمع به شکل خواهد بود که به روشنی نادرست است زیرا مرتبهٔ چهارصد در عدد نخست و مرتبهٔ پانصد در عدد دوم، یکی نیست. باید توجه شود که عدد اشاره شده در *بندهش* از دو مرتبهٔ هزارهزار (یا میلیون) و صدهزارگان برخوردار است از این رو اگر بخواهیم برای این عدد حرف پیوند را لحاظ کنیم می بایست به این شکل بنویسیم: [۱] یعنی بخش دوم این عدد باید ضربی باشد و نیاز به حرف پیوند ندارد. در حقیقت این عدد را باید به شکل «شش هزارهزار و چهارصد هشتاد هزار» ترجمه کنیم (یعنی میان واژهٔ چهارصد و واژهٔ

هشتادهزار حرف پیوند «و» را قرار ندهیم). این موضوع در جمع اهمیت دارد. اکنون دوباره اعداد بالا را جمع می کنیم:

که حاصل برابر است با:

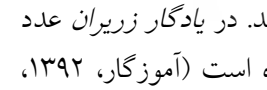
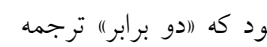
دهخدا، ذیل واژهٔ بیور، بیتی از شاهنامه را نمونه می‌آورد و از توجیه عدد اشاره شـده در این بیت، ابراز ناتوانی می‌کند:

بود بیست شش بار بیور هزار سخن‌های شایسته غمگسـار

اگر ضبط این بیت را به همین صورت بپذیریم[۳۵]، بیست شش بار هزار بیور، عددی است که هم ارز با دویست و شصت میلیون (یعنی ۲۶×10^7) است و فردوسی برای نگاه داشتن وزن شعر جای بیور و هزار را جابجا کرده است، از آنجایی که عدد به شکل ضربی است مشکلی ایجاد نمی‌کند. این عدد بدون واژهٔ بیور  و با حضور واژهٔ بیور به شکل است.

عدد اشاره شده در *بندهش* و *شاهنامه* هم کاربرد این اعداد بسیار بزرگ را نشان می‌دهد و هم اینکه نمایش هر عددی، هـر انـدازه بـزرگ، در دسـتگاه عددنویسـی پهلـوی، ممکـن بوده است.

۵. فرضیه‌ای دربارهٔ حساب اعداد پهلوی: ضرب

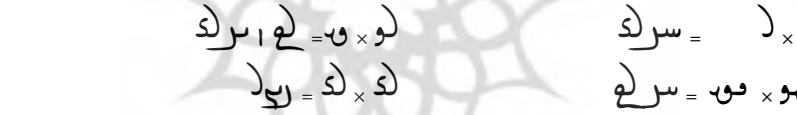
پیش از این اشاره شد که وقتی اعدادی مانند هزار و بیور کنار هم قرار می‌گیرند، شکل ضربی اعداد پهلوی مشاهده می‌شود و مرتبهٔ اعداد افزایش می‌یابد. به نظر می‌رسد تکرار دیگر اعداد در کنار یکدیگر بدون هیچ نمادی، مفهوم ضرب می‌دهد. در *یادگار زریران* عدد  را داریم که آموزگار آن را ۱۴۴۰۰۰۰ ترجمه کرده است (آموزگار، ۱۳۹۲، ص۳۰، ی۳). به گمان ما ضرب اعداد از راست به چپ، روند افزایشی دارد. در جمله‌ای از *روایت پهلوی* (فصل ۱۰، بند ژ۱) عبارت  دیده می‌شود که «دو برابر» ترجمه شده است:

این نیز پیداست که اورمزد به زرتشت گفت که: هر چه رادان بدهند پس من دو برابر بدیشان باز دهم ... (میرفخرایی، ۱۳۹۰، ص ۲۳۶)[۳۶].

عبارت‌های ضربی دیگری نیز وجود دارند که از معنایی مانند آنچه در بالا اشاره شد، برخوردارند؛ مثلاً واژهٔ «دوبرابر» به شکل 𐭣𐭥 𐭩𐭮 (dō-way) و «چهار برابر» به شکل 𐭪𐭠𐭣𐭥 𐭩𐭮 (čahār-way) که در *روایت پهلوی* (فصل ۱۱، بند۸) آمده است:

کسی که گوسفندی بدزدد یا غصب کند، پس او را در جا گناه است و باید چهار برابر و دو برابر باز پس دهد (میرفخرایی، ۱۳۹۰، ص ۲۳۸).

در عددنویسی پهلوی، به دلیل اینکه اعدادِ دو رقمی نمایش ویژه‌ای دارند (مضرب بیست) به سه جدول ضرب نیاز خواهیم داشت. افزون بر جدول ضرب اعداد یک رقمی که در عددنویسی امروزی نیز هست، دو جدول ضربِ صدخانه‌ای (ده در ده خانه‌ای) دیگر ضروری است؛ یکی جدول ضرب اعداد دو رقمی ده تا صد در یکدیگر، و دیگری جدول ضرب اعداد یک رقمی با اعداد دو رقمی ده تا صد. این سه جدول روی هم سیصد حاصل‌ضرب را به دست می‌دهد که در مقایسه با دیگر عددنویسی‌های کهن بسیار کمتر است. به نظر می‌رسد حاصل‌ضرب‌هایی مانند زیر را باید از بر می‌شدند:



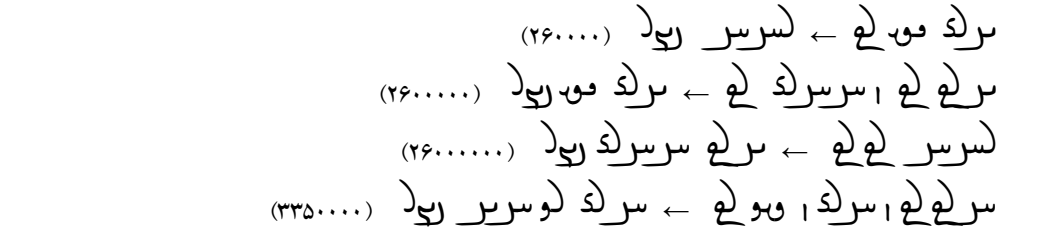
برای نمونه ضرب دو عدد «بیست و چهار» و «سی و شش» را می‌توان به همان شیوه‌ای که حاسب طبری در *مفتاح‌المعاملات* اشاره نموده است، به دست آورد:

چنانکه مشاهده می‌شود انجام این حاصل‌ضرب‌ها با روشی که حاسب طبری پیشنهاد داده چندان دشوار نیست.

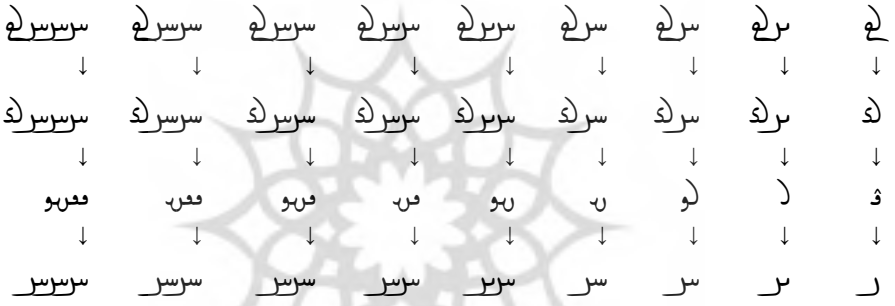
۶. اعداد پهلوی در دو نمایش

شاید برجسته‌ترین ویژگی دستگاه عددنویسی پهلوی، وجود دو نمایش برای اعداد بزرگتر از ۹۹۹۹ باشد. با توجه به اینکه در دیگر دستگاه‌های عددنویسی کهن، برای اعداد بیش از ده هزار نیازمندِ نماد تکمیلی بودند، این موضوع بسیار اهمیت دارد.

همهٔ اعداد بزرگ‌تر از ده‌هزار را، به یاری واژهٔ ، می‌توان با نمایشی ویژه نوشت، برای نمونه:



توجه ویژه به این دو نمایش نشان می‌دهد کاتبان متون پهلوی از تبدیل اعداد مانند آنچه در نمودار(۲) نشان داده‌ایم، آگاه بوده‌اند:



نمودار (۲): تبدیل اعداد برای نمایش دوم اعداد بزرگ‌تر از ده‌هزار

این نمودار نشان می‌دهد که با وجود آنکه نمادی برای صفر در سیستم عددنویسی پهلوی وجود نداشته است، نیاکان ما درک درستی از دهدهی بودن اعداد داشته‌اند، نکته‌ای که بسیار قابل توجه است. به سختی می‌توان حدس زد که آیا تبدیل‌های این نمودار را از بر بوده‌اند یا بر اساس رابطهٔ بین آنها تبدیل‌ها را انجام می‌دادند، ولی آنچه روشن است، بی‌آنکه نمادی برای صفر وجود داشته باشد، می‌توانستند بر اساس این نمودار اعداد بزرگ را به دو شیوه نمایش دهند.

۷. نتیجه‌گیری

دستگاه عددنویسی پهلوی را باید بسیار توانمند شمرد. نگارش اعداد، هر چند بزرگ، بدون هیچ نماد اضافی، در خط فارسی میانهٔ کتابی امکان‌پذیر بوده است؛ اعداد بسیار بزرگی که

در *یادگار زریران* و *بندهش* و دیگر متون پهلوی آمده است، این امر را ثابت می‌کند. برخی از اعداد، بیش از یک نمایش دارند، به ویژه آنهایی که توأم با واژهٔ بیور و یا بدون آن نوشته می‌شوند، امری که نشان دهندهٔ قابلیت این دستگاه عدد نویسی است. با توجه به نقشی که می‌توان برای حرف پیوند ud در نمایش اعداد دورقمی و بالاتر قائل شد، به نظر می‌رسد در جمعِ این اعداد دچار مشکل نمی‌شویم. در ضرب نیز روی هم رفته به سه جدول ضربِ ده‌خانه‌ای، نیازمندیم و حدود سیصد حاصل ضرب را می‌بایست از بر باشیم که در مقایسه با عددنویسی‌های یونانی و ارمنی و ... که ملزم به حفظ و ازبرکردن بیش از هزار و پانصد حاصل‌ضرب بوده‌اند، بسیار کمتر است. شاید قابل ملاحظه‌ترین نکتهٔ عددنویسی پهلوی، نوشتن اعداد بسیار بزرگ در آن باشد. با توجه به قرار گرفتن واژهٔ هزار کنار هم، واژهٔ بیور کنار هم و واژه‌های هزار و بیور کنار هم، به گمان ما بزرگ‌ترین عدد می‌تواند باشد که معادل 10^{14} است. البته دربارهٔ سیستم عددنویسی پهلوی هنوز هم پرسش‌هایی بی‌پاسخ مانده است، برای نمونه دقیقاً نمی‌دانیم مبنای این عدد نویسی چند است. با توجه به اینکه دوازده عدد سازنده داریم و همهٔ اعداد توسط آنها ساخته می شوند به نظر می رسد مبنای اعداد پهلوی کتابی دوازده باشد. همچنین در اعداد کسری، خوانش اعدادی مانند «یک پنجم» یا «یک هفتم» دارای ابهام است، زیرا عدد «یک پنجم» با اعداد «دوسوم» و «سه دوم»، و عدد «یک هفتم» با اعداد «سه چهارم» و «چهار سوم» املای یکسانی دارند. پرسش دیگری که پاسخش بر ما پوشیده است، زمان کنار رفتن عددنویسی پهلوی و جایگزینی آن با عددنویسی هندی است. متاسفانه از نسخهٔ اصلی کتاب خوارزمی هیچ اطلاعی در دست نیست و از این کتاب، تنها نسخه‌ای به زبان لاتین بر جای مانده است. آیا خوارزمی در کتاب خود به اعداد پهلوی اشاره‌ای نداشته است؟ اگر هم بپذیریم که کاربرد عددنویسی هندی، در زمان خلافت مأمون و به دستور وی رواج یافته باشد، میان زمان کشف عددنویسی هندی تا روزگار او، سده‌های بسیاری وجود دارد، پس چگونه ایرانیان را وادار به استفاده از آن نکرده است! بین سال‌های ۲۵۰ تا ٦٥١ میلادی، دانشگاه گندی شاپور، آنچنان رونق یافته بود که آوازهٔ آن به دورترین نقاط رسیده و پای مردمان سرزمین‌های دیگر، حتی یونانیان را به سرزمین ما گشوده بود، در چنین مرکز علمی بزرگ و شگرفی، نیاز به یک دستگاه عددنویسی توانمند که کار با آن نیز برای همگان آسان باشد، ضرورت داشته است. اما به کارگیریِ عدد نویسی پهلوی و وفاداری ایرانیان به آن تا چه

زمانی تداوم داشته است؟ این موضوع نیازمند پژوهشی جدی و دقیق است که دست کم از منظر تاریخی بتوان به آن پاسخ داد.

پی‌نوشت‌ها

۱. مثلاً در زبان‌های ایرانی می‌توان به ارتباط میان پنجه (پنج انگشت دست از مچ تا سر انگشتان) و عدد پنج، مشتق از واژهٔ ایرانی باستان panča* و نیز ارتباط fünf «پنج» و Finger «انگشت» و Faust «مشت، پنجه» در زبان آلمانی اشاره کرد (حسندوست، ۱۳۹۳، ج۲، ص ۷۲۸). این ارتباط در زبان‌ها و فرهنگ‌های دیگر نیز دیده می‌شود (برای نمونه نک. شهریاری، ۱۳۸۷، ص ٢٤). برای آگاهی بیشتر درباره واحدهای اندازه‌گیری طول در اوستا نک. گشتاسب، ۱۳۹٤.

2. cf. http: //gwydir. demon.co.uk/jo/number/Babylon/index.htm.

3. cf. http://gwydir. demon. co. uk/jo/numbers/maya/index.htm.

4. cf. http//gwydir.demon.co.uk/jo/numbers/china/standard.htm.

۵. در سرزمین باستانی ارمنیان، اورارتو، عددنویسی بابلی در نمایش میخی به کار گرفته می شد (باغداساریان، ١٣٨٦، ص ۳۰).

٦. این کتاب با عنوان *Algoritmi de numero indorum* در کتابخانهٔ دانشگاه کمبریج نگهداری می‌شود.

۷. برای آگاهی بیشتر از آثار حاسب طبری نک. شهیدی، ۱۳۹۱، صص ۵۷۷– ۵۷۹.

۸. برای مشاهدهٔ این جدول نک حاسب طبری، ١٣٤٩، ص ٤٨.

۹. نک. *ترجمه و شرح خلاصه‌الحساب شیخ بهایی*، ۱۳۹۱، صص ۵۰– ۵۱.

۱۰. برای ارزش آوایی هر یک از حروف فارسی میانه کتابی و نیز جدول‌های اتصال حروف به یکدیگر ← آموزگار و تفضلی، ۱۳۷۵، صص ٤٩– ٥٦.

۱۱. قس سخن حاسب طبری که به دوازده نام برای اعداد اشاره کرده است (حاسب طبری، ١٣٤٩، صص ٤٣–٤٤).

۱۲. ← شفق و نیازی وحدت، ۱۳۸۸، صص ١٠٦– ١١٥؛ حسینی شکرایی، ۱۳۹۰، ص ٢١٤؛ حسن‌زاده، ١٣٨٦، صص ١٦٥– ١٩٠.

۱۳. بزرگمهر عدد یک را به هرمزد، عدد دو را به مینو و گیتی، عدد سه را به هومت، هوخت و هورشت یا همان اندیشهٔ نیک، گفتار نیک و کردار نیک، عدد چهار را به چهار آمیزش که انسان از آن پدید می‌آید و چهار سوی گیتی یعنی خراسان و خاوران و نیمروز و باختر، عدد پنج را به

پنج روشنایی یعنی خورشید و ماه و ستاره، آتش و آذرخش و عـدد شـش را بـه شـش گاهنبـار همانند می‌کند (←دریایی، ۱۳۹۳، صص ٤٢– ٤٣).

١٤. دستنویس TD1، برگ ۸۳ روی برگ، سطر ۸ (نک *بندهش ایرانی*، ص ١٦٧).

١٥. دستنویس TD1، برگ ٤٥، پشت برگ، سطر ١٤ (نک *بندهش ایرانی*، ص ۹۲).

١٦. فره‌وشی، ۱۳۷۸، ص ۱۲۸، ۱۳۲، ۲۰۵، ۲۰۷. فره‌وشی در کتاب خود دو متن پهلوی را به چاپ رسانده است؛ یکی متن حروف‌چینی شدهٔ داراب دستور پشوتن سنجانا که در سال ١٨٩٦ در بمبئی به چاپ رسیده، و دیگری متنی که ادلجی آنتیا در سال ۱۹۰۰ در بمبئی چاپ کرده است. در هر دو متن، عدد هفت با همین املا آمده است و آنتیا نیز تفاوتی را در املای نسخه‌ها گزارش نکرده است.

١٧. *دستنویس م او ۲*، ص ۱۳۹، سطر ۳ و ٤.

١٨. برای اعداد پنجاه (**𐭯𐭲𐭭𐭣**) و هفتاد (**𐭧𐭯𐭣𐭣**)، به نمایش دیگری به شکل **𐭧𐭯𐭣** و **𐭯𐭲𐭣** نیز اشاره شده (آموزگار و تفضلی، ۱۳۷۵، ص ۵۸) که برای ما روشـن نیسـت چگونـه سـاخته شـده اسـت و نمونه‌ای برای آن در دستنویس‌هایی که جستجو کردیم، نیافتیم.

١٩. قس متون اوستایی که در آن با حرف ربط ca- به معنـی «و» اعـداد مرکـب مـی‌سـازند، ماننـد pancāca vīsaitica «بیست و پنج»، که نخست عدد پنج آمده و سپس عدد بیست.

٢٠. در *شاهنامه* و اکثر فرهنگ‌های فارسی نیز بیور به معنی «ده هزار» آمـده اسـت (نـک *لغـت‌نامـه دهخدا*، ذیل بیور). شاهدی که در *شاهنامه* آمده، این است: کجا بیور از پهلوانی شـمار/ بـود بـر زبان دری ده هزار؛ و نیز این بیت: سپه بود بیـور سـوی کـارزار/ کـه بیـور بـود در عـدد ده‌هـزار (همان‌جا). بسیاری از شاهنامه پژوهان بر این باورند که فردوسی از زبان پهلوی آگاهی داشت از این رو منطقی به نظر می رسد که از اعداد پهلوی و حساب آن نیز آگاه بوده است و *شـاهنامه* در این مورد می تواند راهنما باشد؛ بنابراین پژوهشی تطبیقی دربارهٔ ساختار اعداد *شاهنامه* و مقایسـه با اعداد پهلوی در یافتن پاسخ صحیح راهگشا است.

٢١. عدد «یک» به شکل واژه نوشته شده است، در اینجا اگر عدد «یک» به شکل **𐭤** نوشته شود این عدد دو بار کنار هم قرار میگیرند زیرا عدد بیور نیز با این حرف آغاز می شود

٢٢. *دستنویس م او ۲*، ص ١٤٧، سطر۱۱؛ ص ١٤٨، سطرهای ۲، ۳، ٤، ٥ و ٦؛ قس «ده و دوهـزار» در *شاهنامه*:

سگ و یوز و بازش ده و دوهـزار که با زنگ و زرّنـد و بـا گوشـوار

شاهنامه، ج۸ ص ٤٢٣

به خروار از آن پس ده و دوهزار کُـزنج آورد تـا کـی آیـد بکـار

همان، ج۸ ص ٤٤٦

۲۳. متن پهلوی *روایت پهلوی*، ص ۵۷، سطر ١٤ (نک میرفخرایی، ۱۳۹۰؛ برای آوانویسی و ترجمهٔ این بند نک همان، صص ۷۱، ٢٥٤).

٢٤. واژهٔ hunušak به معنی فرزند (اهریمنی)، معدود عدد مذکور است.

۲۵. متن پهلوی روایت پهلوی، ص ۱۸، سطر ۱۲ (نک میرفخرایی، ۱۳۹۰؛ برای آوانویسی و ترجمهٔ این بند نک همان، صص ۳۸، ٢٢٦)

٢٦. قس ساختار اعداد کسری مانند «سه یک»، «چهار یک»، «ده یک» و جز آن در شاهنامه و دیگر متون فارسی.

۲۷. بهار، ١٣٦٩، ص ٦٩؛ برای متن پهلوی نک دستنویس TD2، ص ۷۱، س ١٤– ١٥؛ برای آوانویسیِ متن نک پاکزاد، ١٣٨٤، ص ۱۱۸.

۲۸. این تنها یک فرضیه است و هیچ گواهی برای تأیید آن نداریم.

۲۹. آنچه دربارهٔ جمع و ضرب اعداد پهلوی اشاره می شود صرفا گمانه‌زنی است و هیچ‌گونه گواهی برای تأیید فرضیه های خود نداریم.

۳۰. پیش از این به اعداد دوازده بیور بیور (دوجین بیور بیور) و دوازده دوازده بیور (دوازده دوجین بیور یا گروس بیور) در یادگار زریران اشاره شد.

۳۱. این نوع گویش اعداد که رونالد امریک بدان اشاره کرده است، هنوز در برخی نقاط ایران، مانند تاکستان، کاربرد دارد.

۳۲. می‌دانیم که هیچ گزارهٔ ریاضی به شکل فرایندی جبری در نوشته‌های کهن ایرانی یافت نشده است، اما در این مقاله برای روشن بودن فرایندهای جمع و ضرب، ناگزیر از علائم و نمادهای قراردادی + × = بهره جسته‌ایم.

۳۳. شاید از اینکه در یادگیری جمع، از چند حاصل ضرب بهره‌مند باید شد کمی غیرمنطقی به نظر برسد ولی به گمان ما، آگاهی از اینکه ارزش عدد چهل به اندازهٔ دو بیست یا ارزش عدد شصت به اندازهٔ سه بیست است چندان نیازمند حاصل‌ضرب‌ها و روش‌های آن نیست چنانکه شاهنامه نیز از این دست عبارت‌ها مانند دوهشت که شانزده است و یا دوشش که دوازده است، فراوان برخوردار است.

٣٤. دستنویس TD1، برگ ۱۱، روی برگ، سطر ۱۲ (نک *بندهش ایرانی*، ص ۲۳)؛ در املای این عدد بین دو نسخهٔ TD1 و TD2 تفاوتی جزئی دیده می‌شود. در نسخهٔ TD1 به جای سرک «چهارصد»، واژهٔ «سیصد» با املای سلک آمده است.

۳۵. دربارهٔ این بیت که در آغاز مقدمهٔ خسرو و شیرین آمده است، بحث‌های زیادی شده است. احتمالاً صورت درست مصراع نخست «بود بیت شش بار بیور هزار» (یعنی شصت میلیون)

است و به تعداد بیت‌های شاهنامه اشاره دارد که البته نزد ادیبان و شاهنامه‌دوستان و پژوهشگران به شصت‌هزار مشهور است. استاد مینوی این بیت را به صورت «بود بیت شش بار بیور شمار» تصحیح کرده است که همان شصت هزار می‌شود.آیدنلو نیز در تأیید این نظر، نمونه‌هایی از صورت الحاقی همین بیت در مؤخرهٔ *شاهنامه* را، که در برخی نسخه‌های معروف به جای «هزار» با «شمار» قافیه شده، اشاره کرده است (نک آیدنلو، ۱۳۸۷، ص ٦).

۳٦. از مفهوم متن روشن است که **۲ـ۹و۳** یک عبارت ضربی به شکل ۲×۱ یا «دوبرابر» است و اگر به شکل **۲ـ۳و۹** می‌بود برابر یک دوم می شد که البته با درون‌مایهٔ متن ناسازگار است.

کتاب‌نامه

آموزگار، ژاله. ۱۳۹۲. *یادگار زریران، متنی حماسی از دوران کهن*. تهران: معین.

آموزگار، ژاله و احمد تفضلی. ۱۳۷۵. *زبان پهلوی ادبیات و دستور آن*. تهران: انتشارات معین.

آیدنلو، سجاد. ۱۳۸۷. «پرسشی دربارهٔ ضبط و معنای یک بیت از شاهنامه»، *گزارش میراث*، س ۳، ش ۲۹ و ۳۰، صص ۵– ۷.

اکبرزاده، داریوش. ۱۳۸۵. *کتیبه های پهلوی، سنگ نگاره، سکه، مهر، اثر مهر، ظرف نبشته*. تهران: موسسه فرهنگی و انتشاراتی پازینه.

باغداساریان، ادیک. ۱۳۸٦. *تاریخ ریاضیات ارمنیان*. کانادا–اتاوا.

بندهش ایرانی، چاپ عکسی از روی نسخه شمارهٔ ۱ تهمورس دینشاه (TD1)، [بی‌تا]، تهران: انتشارات بنیاد فرهنگ ایران.

بهار، مهرداد. ۱۳٦۹. *بندهش*. فرنبغ دادگی. تهران: توس.

پاکزاد، فضل‌الله. ۱۳۸٤. *بندهشن* (جلد ۱: متن انتقادی). تهران: مرکز دایره المعارف بزرگ اسلامی.

تاتون، رنه. ۱۳٦٤. *تاریخ حساب*، ترجمهٔ پرویز شهریاری. تهران: امیرکبیر.

ترجمه و شرح خلاصه‌الحساب شیخ بهایی، براساس نسخهٔ خطی دانشگاه اصفهان، از مؤلفی ناشناخته از هم‌روزگاران شیخ بهایی. ۱۳۹۱. به کوشش حمیده حجازی و یوسف بیک باباپور. تهران: انتشارات مجمع ذخائر اسلامی.

حاسب طبری، محمد بن ایوب. ۱۳٤۹. *مفتاح المعاملات (متن ریاضی از قرن پنجم) براساس نسخهٔ منحصر به فرد ٦۳۲*. به کوشش دکتر امین ریاحی. تهران: انتشارات بنیاد فرهنگ ایران.

حسن‌زاده، آمنه. ۱۳۸٦. «جایگاه اعداد در فرهنگ مردم ایران با تاکید بر اعداد هفت و چهل»، *فرهنگ مردم ایران*، ش ۱۰. صص ۱٦۵–۱۹۰.

حسندوست، محمد. ۱۳۹۳. *فرهنگ ریشه‌شناختی زبان فارسی*، ۵ج. تهران: فرهنگستان زبان و ادب فارسی.

حسینی شکرایی، احترام‌السادات. ۱۳۹۰. *بررسی نقش اعداد از باستان تاکنون*. تهران: پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی.

دستنویس م او ۲، سیزده متن گوناگون پهلوی، به کوشش ماهیار نوابی و کیخسرو جاماسپ‌آسا. ۱۳۵۵. شیراز: مؤسسهٔ آسیایی دانشگاه پهلوی شیراز.

ریاحی، محمدامین. ۱۳٤۹. «مقدمه مصحح»، در: *مفتاح المعاملات* از محمد بن ایوب حاسب طبری. صص پنج–چهل و سه. (نک. حاسب طبری، ۱۳٤۹).

رضایی باغ‌بیدی، حسن. ۱۳۹۱. «نظام‌های نوشتاری در هند»، *خط و نظام‌های نوشتاری در جهان اسلام*، تهران: کتاب مرجع. صص ٦۹–۸۲

شفق، اسماعیل و علیرضا نیازی وحدت. ۱۳۸۸. «اهمیت عدد سه با نگاهی به دیوان خاقانی»، *فصلنامه پژوهشهای ادبی*، س ٦، ش ۲۵. صص ۷۱– ۹۰.

شهریاری، پرویز. ۱۳۸۵. *نگاهی به تاریخ ریاضیات در ایران*. تهران: شرکت انتشارات علمی و فرهنگی.

شهریاری، پرویز. ۱۳۸۷. *عدد و عددنویسی و ریاضیات در زندگی*. تهران: انتشارات مدرسه.

شهیدی، محمود. ۱۳۹۱. «حاسب طبری»، *دایره المعارف بزرگ اسلامی*، ج ۱۹، صص ۵۷۷– ۵۷۹.

فردوسی، ابوالقاسم. ۱۳۸٦. *شاهنامه*. به کوشش جلال خالقی مطلق. ۸ ج. تهران: مرکز دایره‌المعارف بزرگ اسلامی.

فره‌وشی، بهرام. ۱۳۷۸. *کارنامهٔ اردشیر بابکان*. تهران: انتشارات دانشگاه تهران.

کریمی، اصغر. ۱۳۵۳. «واحدهای اندازه گیری در ایل بختیاری و حساب سیاق»، *فرهنگ‌شناسی و فرهنگ عامه*، ش ۱. صص ٤۷– ۵۷.

کوستلر، آرتور. ۱۳۸۷. *خوابگردها*. ترجمهٔ منوچهر روحانی. تهران: شرکت انتشارات علمی و فرهنگی.

مکنزی، دیوید نیل. ۱۳۷۹. *فرهنگ کوچک زبان پهلوی*. ترجمه مهشید میرفخرایی. تهران: پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی

میرفخرایی، مهشید. ۱۳۹۰. *روایت پهلوی*. تهران: پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی.

نامور فرگی، مجتبی و شیما ابراهیمی. ۱۳۹۱. «بررسی چگونگی پیدایش و تغییر اعداد در زبان فارسی از دیدگاه زبان شناسی»، *مجموعه مقالات هشتمین همایش زبان شناسی ایران*، به کوشش محمد دبیر مقدم. تهران: انتشارات دانشگاه غلامرضا طباطبایی. صص ۸۲٦– ۸۳٦.

یوسف، جورج گورگیس. ۱۳۸۵. *کاکل طاووس، ریشه‌های غیراروپایی ریاضیات*. ترجمهٔ غلامحسین صدری افشار، تهران: شرکت انتشارات علمی و فرهنگی.

مرادزاده فرد، مهدی و محسن روستایی و امیر سروش. ۱۳۹۰. «سیاق دروازهٔ حسابداری نوین»، *گنجینه اسناد*، س ۲۱، ش ۳، صص ۲۲– ٤۱.

Ardeshir, Mohammad. 2008. "Ibn Sīna's Philosophy of Mathematics", *The Unity of Science in the Arabic Tradition: Science Logic Epistemology and their Interaction*. edited by Shahid Rahman et al. pp. 43- 61.

de Blois, F. 1993. "Two sources of the handarz of Oshnar", *IRAN*, 31 . pp. 95-97

Boyer, C.B.A History of Mathematics, (2nd ed). New York: John wiley (1991).

Emmerick, R. E. 1992. Indo-European Numerals (chapter, 8: Iranian), Edited by Jadranka Gvozdanovic, New York: Mounte de Gruyter Berlin.

Jamasp-Asana, J.M. 1897. *Pahlavi Texts*. Bombay.

Marcos, Juan- Jose. 2014. *A Unicode Font For linguistics and Ancient languages* (in: http://guindo.pntic.mec.es/jmag0042/alphabet.html).

http: //gwydir. Demon.co.uk/jo/number/Babylon/index.htm.

http://gwydir. Demon. Co. uk/jo/numbers/maya/index.htm.

http//gwydir.demon.co.uk/jo/numbers/china/standard.htm.

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی