

مطالعه تطبیقی مدل بهینه‌سازی پرتفوی چند دوره‌ای چندهدفه در محیط

اعتبار فازی با معیارهای متفاوت ریسک^۱

امیر شیری قهی^۱، حسین دیده خانی^۲، آکاوه خلیلی دامغانی^۳ و پرویز سعیدی^۴

چکیده

هدف از پژوهش حاضر مقایسه تطبیقی مدل‌های بهینه‌سازی پرتفوی در محیط اعتبار فازی می‌باشد. به این منظور سه مدل بهینه‌سازی پرتفوی طراحی گردید. به‌جای در نظر گرفتن مدل تک دوره‌ای پرتفوی از مدل سه دوره‌ای استفاده گردید. معیارهای ریسک استفاده شده در مدل‌ها عبارت‌اند از ارزش در معرض خطر، ارزش در معرض خطر میانگین و نیم آنتروپی. همچنین به‌منظور نزدیک شدن مدل به دنیای واقعی سرمایه‌گذاری با در نظر گرفتن هزینه معاملات و سرمایه‌گذاری بخشی از ثروت در دارایی بدون ریسک علاوه بر محدودیت‌های اصلی، از محدودیت‌هایی نظیر، حداقل و حداکثر تخصیص ثروت به هر دارایی، حداقل و حداکثر تعداد سهام موجود در پرتفوی و همچنین از آنتروپی نسبت برای رسیدن به حداقل درجه تنوع بخشی استفاده شد. هر سه مدل این پژوهش با استفاده از الگوریتم MOPSO اجرا گردید. نتایج حاصل از ارزیابی عملکرد پرتفوی‌های بهینه با در نظر گرفتن معیارهای شارپ و ترینر نشان داد، مدل Mean-AVaR نسبت به دو مدل Mean-Semi Entropy و Mean-VaR عملکرد بهتری دارد.

واژه‌های کلیدی: بهینه‌سازی پرتفوی، تئوری اعتبار فازی، ریسک، الگوریتم MOPSO

طبقه‌بندی موضوعی: G11, G32, D53

۱. کد DOI مقاله: 10.22051/jfm.2017.16640.1450

۲. گروه مدیریت مالی، واحد علی‌آباد کتول، دانشگاه آزاد اسلامی، علی‌آباد کتول، ایران، Email: amir_shiri1212@yahoo.com

۳. گروه مهندسی مالی، واحد علی‌آباد کتول، دانشگاه آزاد اسلامی، علی‌آباد کتول، ایران، نویسنده مسئول،

Email: h.didehkhani@gmail.com

۴. گروه مهندسی صنایع، واحد تهران جنوب، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران، Email: kaveh.khalili@gmail.com

۵. گروه مدیریت مالی، واحد علی‌آباد کتول، دانشگاه آزاد اسلامی، علی‌آباد کتول، ایران، Email: Dr.parvizsaedi@yahoo.com

مقدمه

تئوری پرتفوی و انتخاب سبد سهام بهینه پس از اولین تلاش‌های مارکوویتز (۱۹۵۲)، همواره به‌عنوان یکی از زمینه‌های جذاب پژوهشی برای پژوهشگران و همچنین سرمایه‌گذاران در بازارهای مالی بوده است. مسئله انتخاب سبد سهام و یا بهینه‌سازی پرتفوی شامل طراحی مدل مناسب بهینه‌سازی و انتخاب معیارهای مناسب جهت انتخاب سهام می‌باشد. از اولین معیارهایی که توسط مارکوویتز در مدل سنتی پرتفوی مورد استفاده قرار گرفت نرخ بازده مورد انتظار و واریانس نرخ بازده پرتفوی می‌باشد. منطق مورد استفاده در این مدل این بود که واریانس به‌عنوان یک معیار پراکندگی می‌تواند سنجشگر میزان ریسک یک پرتفوی باشد. نظری که بعدها توسط پژوهشگران بسیاری مورد نقد قرار گرفت (گروتولد و هالرباخ، ۱۹۹۹). با وجود این نقدها واریانس توسط خود مارکوویتز (۱۹۵۹) به نیمه واریانس تبدیل گردید. اشکال اساسی واریانس به‌عنوان یک معیار ریسک این است که انحرافات مطلوب و انحرافات نامطلوب را مانند هم در نظر می‌گرفت؛ منطقی که با اصول مالی و سرمایه‌گذاری همخوانی نداشت. واژه ریسک طی دهه‌های اخیر دستخوش تغییرات بسیاری شد و برای آن معیارهای متفاوتی در شرایط مختلف معرفی و در مسئله انتخاب پرتفوی از آن استفاده شد. یکی دیگر از چالش‌ها و موضوعات مورد علاقه در سالیان اخیر در بین پژوهشگران مسئله بهینه‌سازی پرتفوی چند دوره‌ای می‌باشد. در مدل‌های تک دوره‌ای سرمایه‌گذار در ابتدای دوره اقدام به سرمایه‌گذاری نموده و تا پایان دوره امکان تجدیدنظر در تخصیص دوباره ثروت در دارایی‌های دیگر را ندارد؛ اما در عمل، سرمایه‌گذاران دائماً در حال ارزیابی و تخصیص مجدد ثروت از دوره‌ای به دوره دیگر با تغییر شرایط بازار و ترجیحات خود می‌باشند. مدل‌های تک دوره‌ای ماهیت پویای انتخاب سبد سرمایه‌گذاری و مسائل مربوط به تجدیدنظر در تخصیص دارایی را نادیده می‌گیرد؛ اما در مدل‌های چند دوره‌ای امکان تخصیص مجدد ثروت در ابتدای هر دوره وجود دارد. این مدل اولین بار توسط ماسین (۱۹۶۸) معرفی گردید.

بحث عدم قطعیت همواره به‌عنوان یکی از چالش‌های اساسی در بازارهای مالی و محیط‌های سرمایه‌گذاری مطرح بوده است. اولین ویژگی یک دارایی مالی عدم قطعیت و عدم اطمینان نرخ بازده آن می‌باشد. به طوری که مفهوم ریسک منبعث از همین ویژگی در بازارهای مالی می‌باشد. اگر عدم قطعیت وجود نداشته باشد به تبع آن ریسکی نیز وجود نخواهد داشت. برای مواجهه با این عدم

قطعیّت در مسائل مربوط به بهینه‌سازی پرتفوی چندین رویکرد وجود داشته است که می‌توان به رویکرد تئوری احتمال رویکرد بهینه‌سازی استوار و همچنین رویکرد تئوری فازی اشاره نمود. بنابراین با توجه به موارد و چالش‌های بیان شده هدف از این پژوهش ابتدا طراحی و به کارگیری سه مدل برنامه‌ریزی ریاضی چندهدفه برای انتخاب یا بهینه‌سازی سبد سهام چند دوره‌ای با معیارهای ریسک مانند ارزش در معرض خطر میانگین (AVaR) به عنوان معیار ریسک منسجم، ارزش در معرض خطر (VaR) و نیم آنتروپی می‌باشد؛ به این منظور پارامترهای مورد استفاده در این پژوهش نظیر نرخ بازده مورد انتظار دارایی‌ها در دوره‌های مختلف به صورت اعداد فازی مثلثی^۱ در نظر گرفته می‌شود. همچنین علاوه بر محدودیت‌های اصلی در مسئله بهینه‌سازی پرتفوی از محدودیت‌های دیگری نظیر حداقل درجه تنوع بخشی پرتفوی، حداقل و حداکثر میزان سرمایه گذاری در دارایی‌ها، حداقل و حداکثر تعداد سهام مجاز نگهداری شده در پرتفوی و در نظر گرفتن هزینه معاملات و تخصیص بخشی از ثروت به دارایی بدون ریسک جهت نزدیک شدن مدل‌ها به دنیای واقعی سرمایه گذاری استفاده شد. با توجه ماهیت غیرخطی و چندهدفه مسئله بهینه‌سازی، از الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات چندهدفه (MOPSO) برای حل استفاده می‌گردد. در پایان مدل‌های توسعه داده شده با معیارهای ارزیابی عملکرد پرتفوی نظیر معیار شارپ و ترینر با یکدیگر مقایسه خواهند شد.

مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش

در این قسمت مروری خواهیم داشت بر معیارهای مختلفی که در مسائل بهینه‌سازی پرتفوی به عنوان ریسک در نظر گرفته شده و ویژگی‌ها و تفاوت‌های آن‌ها را بیان می‌کنیم.

معیارهای ریسک منسجم^۲

با معرفی ارزش در معرض خطر (VaR) و پذیرش آن به عنوان معیار ریسک در دهه ۱۹۹۰، این معیار به صورت گسترده‌ای برای بیان ریسک مالی در میان فعالان بازار سرمایه و به ویژه مدیران پرتفوی و پژوهشگران (کمپیل و همکاران، ۲۰۰۱) استفاده شد. از مزیت‌های ارزش در معرض خطر نسبت به معیارهای انحراف می‌توان به حساسیت نسبت به انتقال اشاره کرد به این معنی که با اضافه شدن یک مقدار مثبت (مانند سود)، ارزش در معرض خطر به همان میزان کاهش پیدا می‌کند.

1. Fuzzy triangular numbers

2. coherent risk measure

$$\text{VaR}(X + C) = \text{VaR}(X) - C$$

اما از معایب ارزش در معرض خطر می‌توان به عدم در نظر گرفتن خاصیت تنوع بخشی اشاره کرد. به این معنی که VaR پرتفوی از مجموع VaR دارایی‌های تشکیل دهنده آن پرتفوی بیشتر می‌باشد. ارزش در معرض خطر به دلیل فقدان ویژگی جمع پذیری جزئی^۱ نمی‌توانست به عنوان یک شاخص ریسک منسجم مورد استفاده قرار گیرد (آرتزور و همکاران، ۱۹۹۹).

$$\text{VaR}(X + Y) > \text{VaR}(X) + \text{VaR}(Y)$$

علی‌رغم تمام مزایایی که ارزش در معرض خطر به عنوان یک معیار ریسک دارد به دلیل عدم در نظر گرفتن خاصیت تنوع بخشی برخی از ویژگی‌های مورد نظر برای ریسک پرتفوی را برآورده نمی‌سازد. آرتزور و همکاران (۱۹۹۹) یک سری از اصول قراردادی برای یک معیار ریسک منسجم ارائه دادند. (اگر $\rho(\cdot)$ به عنوان تابع ریسک در نظر بگیریم).

$\rho(Y) \leq \rho(X)$, if $Y \geq X$	ویژگی اول: خاصیت یکنواختی ^۲
$\rho(0) = 0$, $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$, $\lambda > 0$	ویژگی دوم: همانندی مثبت ^۳
$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$	ویژگی سوم: زیر جمع پذیری
$\rho(X + C) = \rho(X) - C$, $C \in \mathbb{R}$	ویژگی چهارم: بی تفاوتی ^۴

خاصیت اول بیان می‌کند اگر در تمامی حالات ممکن بازدهی پرتفوی Y از بازدهی پرتفوی X بیشتر باشد در این حالت ریسک پرتفوی Y هیچ‌گاه بیشتر از ریسک پرتفوی X نخواهد بود. خاصیت دوم اشاره دارد بر این که افزایش یا کاهش در بازدهی پرتفوی ریسک آن را به همان میزان افزایش یا کاهش می‌دهد.

1. Subadditive
2. Monotonicity Property
3. Positive homogeneity
4. Invariance

خاصیت سوم در حقیقت همان خاصیت تنوع سازی پرتفوی می‌باشد و خاصیت چهارم بیان‌کننده این موضوع است که اضافه شدن یک مقدار ثابت همانند یک اوراق بهادار با درآمد ثابت، ریسک را تغییر می‌دهد اگر این مقدار ثابت مثبت باشد، اضافه شدن آن منجر به کاهش ریسک خواهد شد.

کاربرد آنتروپی در مالی

آنتروپی درجه سختی پیش‌بینی مقدار خاصی که یک متغیر خواهد گرفت را می‌سنجد. فیلیپاتوس و ویلسون (۱۹۷۲) از نخستین پژوهشگرانی بودند که از مفهوم آنتروپی در انتخاب پرتفوی استفاده کردند. آن‌ها یک مدل میانگین - آنتروپی را در مقایسه با مدل‌های سنتی ارائه دادند. از آن زمان بسیاری از پژوهشگران تئوری انتخاب پرتفوی را با مفهوم آنتروپی پرمحتواتر ساختند و انواع مختلفی از آنتروپی را پیشنهاد داده و در مسائل مالی از آن استفاده کردند. از جمله کاربردهای آنتروپی در مسئله بهینه‌سازی پرتفوی می‌توان به استفاده از آنتروپی به‌عنوان معیار ریسک (یوستا و کانتار، ۲۰۱۱) اشاره نمود. آنتروپی در بیان عدم قطعیت بازده، هر دو حد بالا و پایین بازده را در نظر می‌گیرد، عدم قطعیت بازده‌ای که برای سرمایه‌گذار نامطلوب است، بازده‌های کمتر از بازده مورد انتظار می‌باشد. به این منظور ژو و همکاران (۲۰۱۶) نیم آنتروپی فازی^۱ را معرفی و به‌عنوان معیار ریسک در مسئله بهینه‌سازی پرتفوی استفاده نمودند.

آنتروپی به‌عنوان یک معیار پذیرفته‌شده برای اندازه‌گیری درجه تنوع‌بخشی پرتفوی نیز استفاده شده است (کاپور، ۱۹۹۰). درجه تنوع‌بخشی پرتفوی با استفاده از آنتروپی نسبت^۲ اندازه‌گیری می‌شود. همچنین از آنتروپی در قیمت‌گذاری دارایی‌ها، قیمت‌گذاری اختیار معامله و دیگر مشتقات مالی استفاده شده است. (ژو و همکاران، ۲۰۱۳).

در مجموع می‌توان گفت با معرفی معیارهای پراکندگی و انحراف، در حقیقت انحراف معیار، میانگین قدر مطلق انحرافات (MAD)، نیم انحراف مطلق و معیارهای انحراف روبه پایین مانند نیم واریانس با عنایت به خواص (۱) انتقال مثبت^۳ (۲)، همگنی مثبت^۴ و (۳) مثبت بودن (نامنفی بودن)^۵ (۴) زیر جمع‌پذیری^۶ و (۵) بی‌تفاوتی نسبت به انتقال^۷ به‌عنوان معیارهای پراکندگی و انحراف طبقه می‌شوند (راکفلر و همکاران،

-
1. Fuzzy semi-Entropy
 2. proportion entropy
 3. Positive shift
 4. Positive homogeneity
 5. Positivity
 6. Subadditivity
 7. Translation invariance

۲۰۰۶؛ راشف و همکاران، ۲۰۰۸). هرچند یک معیار انحراف روبه پایین بسیار نزدیک به یک معیار ریسک می‌باشد اما به دلیل برآورده نکردن خاصیت بی تفاوتی نسبت به انتقال نمی‌تواند به‌عنوان معیار ریسک در نظر گرفته شود. (راشف و همکاران، ۲۰۰۸) این نقص در معرفی معیار ارزش در معرض خطر (VaR) وجود ندارد. از طرفی معیار نیم آنتروپی به‌عنوان معیار ریسک، برخلاف نیم واریانس که انحرافات نامطلوب را در نظر می‌گیرد، عدم قطعیت نامطلوب رسیدن بازده پرتفوی به میزان خاصی را اندازه‌گیری می‌کند.

پیشینه پژوهش

در این بخش عمده پژوهش‌های صورت گرفته در زمینه بهینه‌سازی پرتفوی در محیط فازی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

لی وانجی (۲۰۰۰) مسئله بهینه‌سازی پرتفوی چند دوره‌ای را با استفاده از رویکرد برنامه‌ریزی پویا در دوره‌های زمانی پیوسته ارائه دادند. ژو و همکاران (۲۰۰۴) مسئله انتخاب پرتفوی چند دوره‌ای را با در نظر گرفتن ورشکستگی توسعه دادند. چن (۲۰۰۵) مدل بهینه‌سازی چند دوره‌ای را با استفاده از ارزش در معرض خطر میانگین به‌عنوان معیار ریسک ارائه داد. وی و یه (۲۰۰۷) مدل چند دوره‌ای میانگین واریانس را تحت کنترل ریسک ورشکستگی ارائه نمودند. گبر و همکاران (۲۰۰۹) از رویکرد برنامه‌ریزی خطی تصادفی در بهینه‌سازی پرتفوی چند دوره‌ای استفاده نمود. چن و سانگ (۲۰۱۲) مدل انتخاب پرتفوی چند دوره‌ای بر مبنای مدل چندعاملی با در نظر گرفتن ریسک ورشکستگی توسعه دادند. هوانگ (۲۰۰۸) مدل‌های انتخاب پرتفوی میانگین - واریانس، میانگین - نیم واریانس و میانگین - منحنی ریسک را مطرح نمود. لی و همکاران (۲۰۰۹، ۲۰۱۰) الگوریتم‌های هوشمند ترکیبی را برای حل مدل‌های فازی میانگین - واریانس و میانگین - واریانس - چولگی انتخاب پرتفوی طرح و پیشنهاد نمودند. برخی از پژوهشگران به بررسی محدودیت‌های استقرایی پرداخته‌اند. به‌عنوان مثال، دنگ و لی (۲۰۱۲) یک پرتفوی میانگین - واریانس فازی را با محدودیت استقرایی پیشنهاد نمودند. سجادی و همکاران (۲۰۱۱) انتخاب پرتفوی چند دوره‌ای فازی با نرخ‌های متفاوت برای قرض کردن و قرض دادن را پیشنهاد کردند.

پور احمدی و نجفی (۱۳۹۴) بهینه‌سازی تک دوره‌ای را به بهینه‌سازی پویا و چند دوره‌ای ارتقا داده و ضمن در نظر گرفتن هزینه معاملات کارایی به این نتیجه رسیدند مدل چند دوره‌ای در بلندمدت عملکرد بهتری نسبت به مدل تک دوره‌ای دارد.

همایی‌فر و روغنیان (۱۳۹۵) مدل میانگین - ارزش در معرض خطر شرطی را با برنامه‌ریزی آرمانی مدل‌سازی نمودند و در نهایت مدل پویای ارائه‌شده را با مدل قطعی مقایسه نمودند و به این نتیجه رسیدند با مدل ارائه‌شده به پاسخ‌های کارا تر و کاربردی تری دست پیدا می‌کنند.

کاظمی و همکاران (۱۳۹۶) با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها، مسئله بهینه‌سازی سبد سهام را با در نظر گرفتن ارزش در معرض خطر بر روی کارایی متقاطع به کار گرفته‌اند. نتایج نشان داد معیار شارپ عملکرد بهتری برای روش پیشنهادی نسبت به روش‌های دیگر نشان داد. در جدول ۱ برخی از مهم‌ترین پژوهش‌های انجام‌شده در خصوص بهینه‌سازی چند دوره‌ای پرتفوی در محیط فازی در سال‌های اخیر برای مقایسه فهرست شده است.

تئوری اعتبار فازی

به دلیل وجود معایبی در نظریه امکان مجموعه‌های فازی نظیر عدم وجود خاصیت خود-دوگانگی، رویکرد نوینی در این زمینه با عنوان تئوری اعتبار فازی توسط لیو و لیو (۲۰۰۲) به عنوان یک گزینه رقیب برای تئوری امکان مجموعه فازی، ارائه گردید. با استفاده از تئوری امکان هنگامی که سرمایه‌گذاران میزان امکان رسیدن پرتفوی به بازده هدف را می‌دانند، نمی‌توانند میزان امکان حادثه مخالف را بشناسند یعنی حادثه‌ای که پرتفوی نتواند به بازده هدف برسد؛ این مسئله سرمایه‌گذاران را سردرگم و نگران می‌کند. لیو در سال ۲۰۰۴ یک تئوری جایگزین برای نظریه امکان ارائه داد به طوری که دارای خاصیت خود-دوگانگی بود. این تئوری به تئوری اعتبار فازی مشهور گردید. امتیاز معیار اعتبار، برآورده ساختن خاصیت خود-دوگانگی است که پس از توسعه آن، این رویکرد به طور وسیعی در بهینه‌سازی پرتفوی در محیط فازی نیز بکار گرفته شد.

روش‌شناسی پژوهش

فرآیند مدل‌سازی پژوهش حاضر مبتنی بر ۴ گام اصلی است. در گام اول اهداف و شاخص‌های مسئله بهینه‌سازی پرتفوی را بر اساس پیشینه پژوهش و ماهیت کاربردی مسئله حاضر مورد بررسی و در نهایت شاخص‌های اصلی انتخاب می‌گردد. سپس در مرحله دوم هر یک اهداف و محدودیت‌ها را در حالت عدم قطعیت و ابهام و بر اساس اصول تئوری اعتبار فازی برای حالتی که نرخ بازده مورد انتظار سهام به صورت عدد فازی مثلثی است به دست می‌آید و در مرحله سوم سه مدل چندهدفه فازی مبتنی بر معیارهای انتخاب‌شده طراحی می‌کنیم و در نهایت روش فراابتکاری به کار گرفته شده برای حل مسئله تشریح و نتایج مدل‌ها با یکدیگر مقایسه می‌گردد.

روش سنجش اهداف پژوهش، مبتنی بر تئوری اعتبار

در این بخش اهداف مورداستفاده در پژوهش معرفی و نحوه اندازه گیری آن بیان می گردد.

معیار	نحوه اندازه گیری اهداف در مسئله بهینه سازی فازی پرتفوی
ارزش مورد انتظار فازی ^۱	$E[\xi] = \frac{a + 2b + c}{4}$
(لیو لیو، ۲۰۰۸)	
ارزش در معرض خطر فازی	$\xi VaR(\alpha) = \begin{cases} 2(a-b)\alpha - a & \text{if } \alpha \leq 0.5 \\ 2(b-c)\alpha + c - 2b & \text{if } \alpha > 0.5 \end{cases}$
(پنگ، ۲۰۱۱)	
ارزش در معرض خطر میانگین فازی	$\xi AVaR(\alpha) = \begin{cases} (a-b)\alpha - a & \text{if } \alpha \leq 0.5 \\ c - 2b - \frac{1}{4\alpha}(a - 2b + c) + (b-c)\alpha & \text{if } \alpha > 0.5 \end{cases}$
(پنگ، ۲۰۱۱)	
نیم آنتروپی فازی (ژو و همکاران، ۲۰۱۶)	$S_h(\xi) \begin{cases} (b-a)\rho - (b-a)\zeta(\rho), & \text{if } \frac{a+2*b+c}{4} \leq b \\ \frac{b-a}{2} + (c-b)\zeta(\tau), & \text{if } \frac{a+2*b+c}{4} > b \end{cases}$
	$\zeta(x) = x^2 \ln x - (1-x)^2 \ln(1-x)$
	$\rho = (2b + c - 3a)/8(b - a) \text{ و } \tau = (3c - 2b - a)/8(c - b)$

مدل سازی پرتفوی مبتنی بر نظریه اعتبار

در این بخش مدل چند هدفه پژوهش شامل اهداف، محدودیت ها پارامترها و متغیرهای مدل بیان می گردد.

مفروضات مدل سازی

قیمت ها مستقل از هم فرض می شوند.

1. Fuzzy Expected value
2. Average value at Risk
3. Semi-Entropy

جدول ۱. مقایسه پژوهش حاضر با پژوهش‌های انجام شده در زمینه بهینه‌سازی پرتفوی در

سال‌های اخیر

محدودیت حداقل درجه تنوع بخشی	تخصیص بخشی از سرمایه در دارایی بدون ریسک	در نظر گرفتن هزینه معاملات	نوع داده‌های مورد استفاده	تعداد اهداف	معیار ریسک	چارچوب نظریه	روش حل	افت سرمایه‌گذاری	پژوهشگر (پژوهشگران)
x	x	x	قطعی	تک هدف	واریانس	توری احتمال	برنامه‌ریزی پویا	چند دوره‌ای	یانو و همکاران (۲۰۱۶)
x	x	√	فازی	چندهدفه	فازی	توری اعتبار	برنامه‌ریزی آرمانی	چند دوره‌ای	مهلاوات (۲۰۱۶)
x	√	√	فازی	تک هدف	واریانس فازی	توری اعتبار	شیسه‌سازی فازی بر مبنای الگوریتم ژنتیک (FSGA)	چند دوره‌ای	جیو و همکاران (۲۰۱۶)
x	x	√	قطعی	تک هدف	واریانس	توری احتمال	-	چند دوره‌ای	دیبیگول و همکاران (۲۰۱۶)
x	√	x	قطعی	تک هدف	واریانس	توری احتمال	شیسه‌سازی مونت کارلو	چند دوره‌ای	کونگ و اوسرلی (۲۰۱۶)
x	x	x	فازی	چندهدفه	نیم قدر مطلق انحرافات	توری اعتبار	الگوریتم ژنتیک	تک دوره‌ای	ورچر و برمودز (۲۰۱۵)
x	x	√	فازی	چندهدفه	انحرافات مطلق رویه پایین	توری اعتبار	الگوریتم ترکیبی PSO	چند دوره‌ای	لیو و همکاران (۲۰۱۶)
√	x	√	فازی	چندهدفه	نیم واریانس فازی	توری امکان	الگوریتم ژنتیک	چند دوره‌ای	لیو و ژانگ (۲۰۱۵)
x	√	√	فازی	تک هدف	میانگین قدر مطلق انحرافات (MAD)	توری امکان	روش تکراری تقریبی گسسه	چند دوره‌ای	ژانگ و ژانگ (۲۰۱۴)
√	x	√	فازی	تک هدف	نیم قدر مطلق انحرافات رویه پایین	توری امکان	الگوریتم تکاملی تفاضلی	چند دوره‌ای	ژانگ و همکاران (۲۰۱۴)
√	x	√	فازی	تک هدف	واریانس	توری امکان	PSO الگوریتم	چند دوره‌ای	لیو و همکاران (۲۰۱۳)
x	x	√	فازی	چندهدفه	واریانس و کشیدگی	توری امکان	TOPSIS	چند دوره‌ای	لیو و همکاران (۲۰۱۲)
√	√	√	فازی	چندهدفه	ارزش در معرض خطر میانگین (AVAR) - ارزش در معرض خطر - نیم آنرویی	توری اعتبار	MPSO	چند دوره‌ای	پژوهش حاضر

- عایدی غیر قطعی است و توسط عدد فازی مثلثی مدل می‌شوند.
- آنتروپی نسبت به عنوان معیاری برای درجه تنوع بخشی در نظر گرفته می‌شود.
- برنامه ریزی در یک افق زمانی چند دوره‌ای انجام می‌شود.
- فروش استقراضی مجاز نیست.
- هزینه معاملات برای خرید و فروش در نظر گرفته می‌شود.
- سرمایه گذار بخشی از ثروت خود را به دارایی بدون ریسک تخصیص می‌دهد.
- در هر مدل اهداف دو گانه هستند. هدف اول حداکثر سازی ثروت و هدف دوم حداقل نمودن ریسک می‌باشد.
- حد پایین و بالای سرمایه گذاری در هر یک از دارایی‌ها در هر دوره در نظر گرفته شده است.
- حد پایین و بالای تعداد سهام موجود در پرتفوی در هر دوره در نظر گرفته شده است.
- حداقل میزان بازدهی مطلوب سرمایه گذار در هر دوره مشخص است.
- حد پایین سطح تنوع بخشی در کل دوره ثابت و مشخص است.

تشریح مسئله و نمادهای مدل

فرض می‌کنیم سرمایه گذار ثروت اولیه (W_1) خود را π دارایی تخصیص دهد و ثروت پایانی خود را در پایان دوره به دست آورد. با در نظر گرفتن هزینه معاملات، هدف سرمایه گذار حداکثر سازی ثروت پایانی در پایان دوره سرمایه گذاری است. در عین حال، تعداد مطلوب دارایی‌ها در پرتفوی نباید مساوی یا بیشتر از تعداد معین مجاز باشد. به منظور مقایسه سه مدل با معیارهای ریسک مختلف اجرا گردید. مدل میانگین - ارزش در معرض خطر شرطی (AVaR)، مدل میانگین - ارزش در معرض خطر (VaR) و مدل میانگین - نیم آنتروپی (Semi Entropy) اجرا و نتایج با یکدیگر مقایسه می‌گردد.

نمادهای مدل:

W_t : وت مورد انتظار در شروع دوره t $t = 1, 2, \dots, T$

x_{it} : میزان (نسبت از کل وجوه) سرمایه گذاری در دارایی i ام در دوره $t = 1, 2, \dots, T$ $i = 1, 2, \dots, n$

x_{ft} : میزان (نسبت از کل وجوه) سرمایه گذاری در دارایی بدون ریسک در دوره $t = 1, 2, \dots, T$

ξ_{it} : نرخ بازده فازی دارایی i در دوره $t = 1, 2, \dots, T$ $i = 1, 2, \dots, n$

r_f : نرخ بازده بدون ریسک

R_t : نرخ بازده خالص پرتفوی x_t در دوره $t = 1, 2, \dots, T$

$\min_r r_t$: حداقل نرخ بازده مورد قبول پرتفوی در دوره $t = 1, 2, \dots, T$

(α) : ضریب اطمینان ارزش در معرض خطر میانگین

e : درجه تنوع بخشی مورد انتظار پرتفوی

U_{it} : حداکثر نسبت سرمایه که می‌تواند به دارایی i در دوره t تخصیص داده شود. $t = 1, 2, \dots, T$ $i = 1, 2, \dots, n$

L_{it} : حداقل نسبت سرمایه که می‌تواند به دارایی i در دوره t تخصیص داده شود. $t = 1, 2, \dots, T$ $i = 1, 2, \dots, n$

$COST_{it}$: هزینه معاملات هر واحد دارایی i در پرتفوی $t = 1, 2, \dots, T$ $i = 1, 2, \dots, n$

K_t : حداکثر تعداد دارایی که می‌تواند در پرتفوی وجود داشته باشد

h_t : حداقل تعداد دارایی که می‌تواند در پرتفوی وجود داشته باشد.

y_{it} : متغیر باینری که نشان‌دهنده این است که دارایی i در پرتفوی t وجود دارد یا نه،

$$y_{it} = \begin{cases} 1 & \text{اگر دارایی } i \text{ در پرتفوی } t \text{ وجود داشته باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad t = 1, 2, \dots, T \quad i = 1, 2, \dots, n$$

مسئله انتخاب پرتفوی بر اساس تئوری اعتبار برای مدل Mean-AVaR به صورت زیر ارائه

می‌گردد:

$$\text{Max } W_{T+1} = W_1 \prod_{t=1}^T \left(1 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_{it} + 2b_{it} + c_{it}}{4} \right) x_{it} + r_t x_{r,t} - \sum_{i=1}^n \text{COST}_{it} (|x_{it} - x_{i(t-1)}|) \right) \quad (1)$$

$$\text{Min } \text{AVaR}(\alpha) = \sum_{t=1}^T \left[\sum_{i=1}^n \left((c_{it} - 2b_{it}) - \frac{1}{4\alpha} (a_{it} - 2b_{it} + c_{it}) + (b_i - c_i) \alpha \right) x_{it} \right] \quad \alpha \geq 0.5 \quad (2)$$

Subject to

$$\sum_{i=1}^n x_{it} + x_{r,t} = 1 \quad i = 1 \dots n \quad t = 1, \dots, T \quad (3)$$

$$R_t \geq \min_r r_t \quad t = 1, \dots, T \quad (4)$$

$$-\sum_{i=1}^n x_{it} \ln x_{it} \geq e \quad t = 1, \dots, T \quad 0 \leq e \leq \ln n \quad (5)$$

$$x_{it} \geq 0 \quad i = 1 \dots n \quad ; \quad t = 1, \dots, T \quad (6)$$

$$L_{it} \leq x_{it} \leq U_{it} \quad i = 1 \dots n \quad ; \quad t = 1, \dots, T \quad (7)$$

$$h_t \leq \sum_{i=1}^n y_{it} \leq K_t \quad t = 1, 2, \dots, T. \quad (8)$$

$$y_{it} \in [0, 1] \quad i = 1 \dots n \quad ; \quad t = 1, \dots, T \quad (9)$$

$$R_t = \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_{it} + 2b_{it} + c_{it}}{4} \right) x_{it} - \sum_{i=1}^n Cost_{it} (|x_{it} - x_{it-1}|); \quad t = 1, \dots, T \quad *$$

تعریف عملیاتی

توابع هدف

- (۱) هدف اول: حداکثر سازی ثروت در پایان دوره
 (۲) هدف دوم: حداقل نمودن ریسک

تعریف عملیاتی

- (۳) نرمال بودن وزن دارایی‌ها در سبد،
 (۴) حداقل میزان بازدهی که پرتفوی باید به آن دست پیدا کند.
 (۵) حداقل میزان درجه تنوع بخشی سبد
 (۶) مجاز نبودن فروش استقراضی
 (۷) حداقل و حداکثر میزان سرمایه گذاری در دارایی‌ها
 (۸) حداقل و حداکثر تعداد سهام موجود در پرتفوی
 (۹) متغیر باینری وجود یا عدم وجود یک دارایی در پرتفوی
 * نرخ بازده خالص پرتفوی در هر دوره

مدل Mean-VaR به صورت زیر ارائه می گردد:

$$\text{Max } W_{T+1} = W_1 \prod_{t=1}^T \left(1 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_{it} + 2b_{it} + c_{it}}{4} \right) x_{it} + r_t x_{r,t} - \sum_{i=1}^n \text{COST}_{it} (|x_{it} - x_{i(t-1)}|) \right)$$

$$\text{Min } VaR(\alpha) = \sum_{t=1}^T \left[\sum_{i=1}^n ((2(b_{it} - c_{it})\alpha + c_{it} - 2b_{it})) x_{it} \right] \quad \alpha \geq 0.5$$

محدودیت‌های ۳ تا ۹؛

مدل Mean-Semi Entropy به صورت زیر ارائه می گردد:

$$\text{Max } W_{T+1} = W_1 \prod_{t=1}^T \left(1 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_{it} + 2b_{it} + c_{it}}{4} \right) x_{it} + r_t x_{r,t} - \sum_{i=1}^n \text{COST}_{it} (|x_{it} - x_{i(t-1)}|) \right)$$

$$\min S_h[\xi] = \begin{cases} \sum_{t=1}^T \left[\sum_{i=1}^n ((b_{it} - a_{it})\rho_{it} - (b_{it} - a_{it})\zeta(\rho_{it}))x_{it} \right] & \text{if } \frac{a_{it} + 2b_{it} + c_{it}}{4} \leq b_{it} \\ \sum_{t=1}^T \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{b_{it} - a_{it}}{2} + (c_{it} - b_{it})\zeta(\tau_{it}) \right) x_{it} \right] & \text{if } \frac{a_{it} + 2b_{it} + c_{it}}{4} > b_{it} \end{cases}$$

$$\rho_{it} = \frac{(2b_{it} + c_{it} - 3a_{it})}{8(b_{it} - a_{it})} \cdot i = 1 \dots n ; t = 1 \dots T$$

$$\tau_{it} = \frac{(3c_{it} - 2b_{it} - a_{it})}{8(c_{it} - b_{it})} \cdot i = 1 \dots n ; t = 1 \dots T$$

محدودیت‌های ۳ تا ۹؛

تجزیه و تحلیل داده‌ها و اجرای مدل بهینه‌سازی پرتفوی چند دوره‌ای

در این بخش برای بیان ایده اصلی و همچنین قابلیت کاربرد مدل، مسئله بهینه‌سازی پرتفوی چند دوره‌ای، مثال عددی را ارائه می‌دهیم. فرض کنید سرمایه‌گذار در نظر دارد از میان سهام موجود در شاخص DOW30، که شامل ۳۰ شرکت می‌باشد. تعدادی سهام انتخاب نماید به طوری که در سه دوره که به صورت هفتگی در نظر گرفته شده بتواند ثروت خود را در پایان هر دوره تخصیص مجدد دهد تا اهداف مسئله پژوهش یابد. علاوه بر انتخاب سهام شرکت‌های مذکور سرمایه‌گذار می‌تواند بخشی از ثروت خود را در دارایی بدون ریسک سرمایه‌گذاری کند. برای محاسبه بازده‌های مثلی فازی ما از روش تخمین ساده (ژانگ و همکاران، ۲۰۰۵) استفاده نمودیم (جدول ۲). دوره زمانی برای استخراج داده‌های تاریخی از ژانویه ۲۰۱۱ تا دسامبر ۲۰۱۶ می‌باشد که به صورت ۳ دوره دوساله در نظر گرفته شده و قیمت‌های بسته شدن هفتگی لحاظ گردیده است. بازده‌های مثلی محاسبه شده در جدول ۲ نمایش داده شده است. ثروت ابتدایی ۱۰۰۰۰ دلار، نرخ بازده بدون ریسک ۰/۰۰۹ و هزینه معاملات ۰/۰۰۳، حداقل درجه تنوع بخشی پرتفوی ۱/۵، حداقل نرخ بازدهی برای هر دوره ۰/۰۸، حداقل و حداکثر میزان سرمایه‌ای که می‌تواند به هر دارایی اختصاص داده شود به ترتیب صفر و ۳۰ درصد و حداقل و حداکثر تعداد سهامی که می‌تواند در پرتفوی در هر دوره وجود داشته باشد به ترتیب ۵ و ۹ می‌باشد. برای حل مسئله بهینه‌سازی از نرم‌افزار MATLAB استفاده گردید.

جدول ۲. محاسبه بازده سهام شرکت‌ها در محیط فازی

ASSET	t=1	t=2	t=3
3M	(۰۰۰۲۰۵۲, ۰۰۰۶۰۵۲, ۰۰۰۷۹۴۸)	(۰۰۰۱۹۹۹, ۰۰۰۵۹۹۹, ۰۰۰۸۰۰۱)	(۰۰۰۱۵۹۳, ۰۰۰۶۳۳۱, ۰۰۰۸۴۰۷)
(AXP)	(۰۰۰۱۶۰۳, ۰۰۰۸۹۲۵, ۰۰۱۳۳۹۷)	(۰۰۰۲۵۷۹, ۰۰۰۹۰۷۶, ۰۰۱۲۴۲۱)	(-۰۰۰۰۲۴۶, ۰۰۱۰۲۳۲, ۰۰۱۳۲۴۶)
(AAPL)	(۰۰۰۱۸۴۶, ۰۰۱۰۷۳۶, ۰۰۱۳۱۵۴)	(۰۰۰۳۴۹۶, ۰۰۰۹۴۹۶, ۰۰۱۱۵۰۴)	(۰۰۰۰۳۳۱, ۰۰۰۹۶۳, ۰۰۱۱۶۶۹)
(CVX)	(۰۰۰۰۱۲۸, ۰۰۰۶۷۸۳, ۰۰۱۰۰۵۸)	(۰۰۰۱۹۷۹, ۰۰۰۹۱۶۷, ۰۰۱۱۰۲۱)	(-۰۰۰۱۶۹۶, ۰۰۰۹۲, ۰۰۱۱۵۳۱)
(CAT)	(-۰۰۰۱۹۶۴, ۰۰۱۰۰۵۲, ۰۰۱۳۳۱۲)	(۰۰۰۰۷۱۳, ۰۰۰۸۰۹۶, ۰۰۱۰۲۸۷)	(۰۰۰۳۰۸۶, ۰۰۰۸۰۸۶, ۰۰۰۹۹۱۳)
(CSCO)	(۰۰۰۰۵۰۶, ۰۰۰۶۱۹۳, ۰۰۰۸۱۵۹)	(-۰۰۰۰۲۹۲, ۰۰۰۸۰۸۷, ۰۰۱۵۱۷۴)	(۰۰۰۳۰۹۷, ۰۰۰۷۳۲۸, ۰۰۱۱۴۹)
(DD)	(۰۰۰۱۵۱۵, ۰۰۱۳۴۸۴, ۰۰۱۶۴۸۵)	(۰۰۰۰۹۱۷, ۰۰۰۷۲۴۴, ۰۰۰۹۰۷)	(۰۰۰۱۶۶۷, ۰۰۱۱۲۲۱, ۰۰۱۳۳۵۳)
(XOM)	(۰۰۰۱۲۳۶, ۰۰۰۷۲۶۵, ۰۰۰۸۷۶۴)	(۰۰۰۰۳۲۳, ۰۰۰۸۰۱۸, ۰۰۰۹۶۷۷)	(۰۰۰۰۸۸۹, ۰۰۰۶۸۳۹, ۰۰۰۹۱۱۱)
(GE)	(-۰۰۰۲۵۷۳, ۰۰۰۵۲۴۳, ۰۰۱۲۰۲۹)	(۰۰۰۰۴۲۷, ۰۰۰۵۷۱۶, ۰۰۰۹۰۶۸)	(-۰۰۰۰۸۸۳, ۰۰۰۷۷۸۴, ۰۰۱۵۱۹۸)
(INTC)	(-۰۰۰۰۶۰۸, ۰۰۰۶۵۰۹, ۰۰۱۲۱۳۱)	(۰۰۰۱۰۰۶, ۰۰۰۴۲۳۶, ۰۰۰۷۰۹۵)	(-۰۰۰۱۳۰۷, ۰۰۰۷۰۴۸, ۰۰۰۹۲۴۸)
(IBM)	(۰۰۰۰۵۷۹, ۰۰۰۶۵۲۸, ۰۰۰۸۴۲۱)	(-۰۰۰۰۹۹۷, ۰۰۰۷۹۷۳, ۰۰۰۹۹۹۷)	(-۰۰۰۱۵۴۹, ۰۰۰۵۸۴۷, ۰۰۱۱۴۹۶)
(JNJ)	(۰۰۰۱۲۳۹, ۰۰۰۴۸۸۳, ۰۰۰۶۷۶۱)	(۰۰۰۱۶۳۱, ۰۰۰۵۳۱۲, ۰۰۰۶۳۶۹)	(-۰۰۰۰۰۸۳, ۰۰۰۴۳۵۶, ۰۰۰۸۰۳۲)
(JPM)	(۰۰۰۱۴۶۲, ۰۰۱۰۹۴۹, ۰۰۱۳۵۳۸)	(۰۰۰۲۷۱۸, ۰۰۰۹۲۵۹, ۰۰۱۱۲۸)	(۰۰۰۱۷۵۳, ۰۰۱۰۵۲۱, ۰۰۱۳۲۴۷)
(MCD)	(-۰۰۰۰۵۱۸, ۰۰۰۳۳۵۶, ۰۰۰۵۱۷۳)	(-۰۰۰۰۳۹۸, ۰۰۰۵۵۱, ۰۰۰۷۳۹۸)	(-۰۰۰۰۸۸۴, ۰۰۰۵۳۸۸, ۰۰۰۸۲۹۷)
(MRK)	(-۰۰۰۱۱۶۱, ۰۰۰۶۱۹۲, ۰۰۰۸۱۵۷)	(۰۰۰۱۸۶۳, ۰۰۰۷۷۷۳, ۰۰۱۰۱۳۷)	(-۰۰۰۱۸۷۴, ۰۰۰۴۹۵۳, ۰۰۱۱۲۶۴)
(MSFT)	(۰۰۰۰۴۰۳, ۰۰۰۶۴۱۶, ۰۰۰۸۵۹۷)	(۰۰۰۲۱۳۲, ۰۰۱۲۱۰۳, ۰۰۱۴۸۶۸)	(۰۰۰۰۲۶۳, ۰۰۱۰۶۳۴, ۰۰۱۴۷۵۴)
(NKE)	(۰۰۰۱۰۳۶, ۰۰۱۰۷۲۶, ۰۰۱۲۹۶۴)	(۰۰۰۰۴۵۷, ۰۰۰۵۰۴۶, ۰۰۰۸۹۴۳)	(-۰۰۰۰۶۶۲, ۰۰۰۷۱۴۳, ۰۰۰۹۵۱۷)
(PFE)	(-۰۰۰۱۲۹۵, ۰۰۰۶۸۴۸, ۰۰۰۹۱)	(-۰۰۰۱۲۵۶, ۰۰۰۵۸۹۵, ۰۰۰۷۴۸۹)	(۰۰۰۱۱۲۹, ۰۰۰۵۱۷۳, ۰۰۰۷۵۰۴)
(BA)	(۰۰۰۲۶۹۸, ۰۰۰۸۶۹۸, ۰۰۱۰۸۷۴)	(۰۰۰۲۲۹۲, ۰۰۰۸۹۴۵, ۰۰۱۱۷۰۸)	(۰۰۰۱۷۶۵, ۰۰۱۱۱۳۱, ۰۰۱۳۲۳۵)
(KO)	(-۰۰۰۰۵۶۸, ۰۰۰۳۷۸۱, ۰۰۰۵۴۳۵)	(۰۰۰۱۸۳۱, ۰۰۰۵۸۵, ۰۰۰۸۱۶۹)	(۰۰۰۰۰۸۶, ۰۰۰۴۰۲۷, ۰۰۰۵۹۱۴)
(GS)	(۰۰۰۲۰۲۵, ۰۰۱۱۴۷۷, ۰۰۱۳۹۷۵)	(۰۰۰۱۷۶۳, ۰۰۰۸۷۲۸, ۰۰۱۳۲۳۷)	(-۰۰۰۰۲۹۷, ۰۰۰۸۷۴۲, ۰۰۱۶۲۲۴)
(HD)	(۰۰۰۲۵۷۹, ۰۰۱۲۵۷۴, ۰۰۱۵۴۲۱)	(۰۰۰۱۰۰۴, ۰۰۰۴۶۵, ۰۰۰۸۶۶۶)	(۰۰۰۰۷۴۹, ۰۰۰۷۱۶۸, ۰۰۰۹۲۵۱)
(PG)	(۰۰۰۰۴۸۱, ۰۰۰۴۳۳۲, ۰۰۰۵۷۳۶)	(۰۰۰۱۱۰۱, ۰۰۰۷۳۵۴, ۰۰۰۸۸۹۹)	(-۰۰۰۰۵۱۱, ۰۰۰۴۹۱۷, ۰۰۰۶۱۰۸)
(TRV)	(۰۰۰۲۱۶۸, ۰۰۰۸۰۶۴, ۰۰۰۹۶۹۱)	(۰۰۰۱۷۶۳, ۰۰۰۵۳۸۳, ۰۰۰۸۲۳۷)	(۰۰۰۰۷۳۳, ۰۰۰۵۸۲, ۰۰۰۷۲۶۷)
(DIS)	(-۰۰۰۰۱۶۲, ۰۰۰۷۱۹۷, ۰۰۰۹۴۱۳)	(۰۰۰۲۰۸۸, ۰۰۰۴۳۴, ۰۰۰۶۵۴۵)	(۰۰۰۰۵۳۵, ۰۰۰۹۴۱, ۰۰۱۱۶۲۴)
(UTX)	(-۰۰۰۲۳۴۷, ۰۰۰۷۱۵۵, ۰۰۱۰۰۸۹)	(-۰۰۰۱۴۸, ۰۰۰۳۶۷۸, ۰۰۰۵۱۴۶)	(۰۰۰۰۳۰۴, ۰۰۰۸۶۲۵, ۰۰۱۰۶۹۶)
(UNH)	(۰۰۰۰۴۷۳, ۰۰۰۶۶۷۳, ۰۰۱۱۰۳۹)	(۰۰۰۰۳۱۶, ۰۰۰۶۷۳۵, ۰۰۰۸۲۳۱)	(۰۰۰۱۲۷۹, ۰۰۰۷۶۳۸, ۰۰۰۹۷۲۱)
(VZ)	(۰۰۰۰۳۵۹, ۰۰۰۵۵۲۴, ۰۰۰۶۷۱۳)	(-۰۰۰۰۱۵۶, ۰۰۰۴۰۷۷, ۰۰۰۶۳۵۷)	(۰۰۰۳۰۲۶, ۰۰۰۸۲۹۲, ۰۰۱۰۱۷۸)
(V)	(۰۰۰۰۷۱۹, ۰۰۰۸۲۴۶, ۰۰۱۰۶۱۸)	(۰۰۰۴۱۰۷, ۰۰۰۹۵۲۷, ۰۰۱۰۸۰۳)	(-۰۰۰۰۳۳۶, ۰۰۰۴۶۹۶, ۰۰۰۵۹۵۲)
(WMT)	(۰۰۰۰۵۴۹, ۰۰۰۵۱۰۴, ۰۰۰۷۴۵۱)	(-۰۰۰۰۸۱۱, ۰۰۰۳۱۰۸, ۰۰۰۶۱۳)	(-۰۰۰۲۹۰۵, ۰۰۰۸۶۷۶, ۰۰۱۱۸۵۱)

حل مدل با استفاده از الگوریتم MOPSO

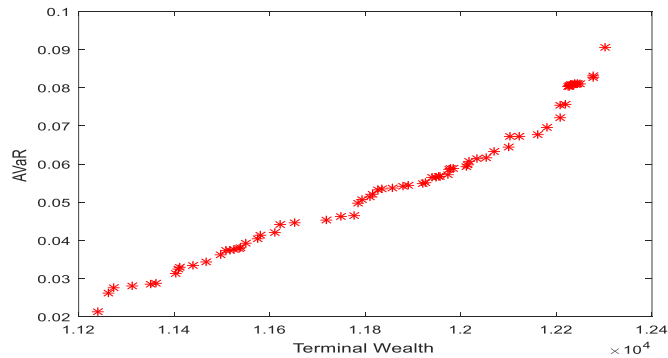
یکی از مشکلاتی که در مسائل کاربردی بهینه‌سازی سبد سهام با آن روبرو می‌باشیم، چگونگی حل مدل‌های توسعه داده شده می‌باشد از آنجاکه استفاده از معیارهای ریسک مختلف

و همچنین گشتاورهای مراتب بالاتر در بهینه‌سازی سبد سهام منجر به غیرخطی شدن و NP Hard مسئله می‌شود می‌بایست از روش‌های فرا ابتکاری در مسائل کاربردی استفاده کرد. طیف وسیعی از این روش‌ها و الگوریتم‌های مختلف در این زمینه مورد استفاده قرار گرفته‌اند. یکی از بهترین روش‌ها با توجه به ماهیت چند هدفه مدل توسعه داده شده الگوریتم MOPSO می‌باشد. این الگوریتم توسط کوئولو (۲۰۰۸) معرفی شد. در این الگوریتم بهترین جواب‌های نامغلوب در یک حافظه خارجی نگهداری می‌شود. مراحل الگوریتم MOPSO به شرح زیر است:

- گام اول: ایجاد جمعیت اولیه
- گام دوم: مقداردهی اولیه به سرعت هر ذره
- گام سوم: ارزیابی هر ذره از جمعیت
- گام چهارم: جدا کردن اعضای نامغلوب جمعیت و ذخیره آن‌ها در آرشیو خارجی؛
- گام پنجم: جدول‌بندی فضای هدف کشف شده؛
- گام ششم: هر ذره از میان اعضای آرشیو، رهبری انتخاب کرده و حرکت می‌کند؛
- گام هفتم: بهترین خاطره شخصی هر یک از ذرات به‌روز می‌شود؛
- گام هشتم: اعضای نامغلوب جمعیت فعلی به آرشیو اضافه می‌شود؛
- گام نهم: اعضای مغلوب آرشیو حذف می‌شود؛
- گام دهم: اگر تعداد اعضای آرشیو بیش از ظرفیت تعیین شده باشد، اعضای اضافی نیز حذف می‌شوند (اندازه آرشیو محدود است)؛
- گام یازدهم: اگر شرایط خاتمه محقق نشده باشد، به مرحله ۵ بازمی‌گردیم و در غیر این صورت، کار پایان می‌یابد.

اجرای مدل Mean -AVaR

با اجرای مدل توسط الگوریتم MOPSO، نمودار ۱ جبهه‌های بهینه پارتو را با ۱۰۰۰ با تکرار نشان می‌دهد. با در نظر گرفتن درجه تنوع‌بخشی پرتفوی برابر ۱/۵، تعداد پرتفوی‌های نامغلوب به دست آمده ۷۵ پرتفوی می‌باشد.



نمودار ۱. جبهه‌های بهینه پارتو حاصل از اجرای مدل Mean-AVaR

جدول ۳ تعداد سهام موجود در پرتفوی و درصد سرمایه‌گذاری در هر یک از آنها و میزان تخصیص ثروت به دارایی بدون ریسک برای چند پرتفوی انتخابی در نمایش داده شده است. جدول ۴ حداکثر، حداقل، میانگین و انحراف معیار پرتفوی‌های بهینه را نشان می‌دهد.

جدول ۳. مقادیر بهینه پرتفوی Mean-AVaR به ازای برخی مقادیر از مجموعه پارتو

پرتفوی	دوره	ثروت نهایی						ریسک	
۱	دوره ۱	WMT	PG	MSFT	CVX	AXP	3M	۱۱۵۳۵/۶۸	۰/۰۳۷
		۰/۰۵۷	۰/۱۸۳	۰/۱۴۶	۰/۰۸	۰/۱۲۸	۰/۱۰۷		
		Xrf							
	۰/۳								
	دوره ۲	VZ	UTX	BA	MCD	IBM	3M		
		۰/۲۳۶	۰/۱۵۹	۰/۰۱۹۷	۰/۰۹۳	۰/۰۹۹	۰/۱۰۹		
		Xrf							
	۰/۱۰۷								
	دوره ۳	JPM	INTC	CSCO	CVX	CAT	3M		
۰/۱۷۷		۰/۱۵۱	۰/۱۸۸	۰/۰۲۸	۰/۱۸۶	۰/۱۴۲			
Xrf		NKE							
۰/۰۰۱	۰/۱۲۳								
...	...								
۷۵	دوره ۱	BA	DD	CVX	AAPL	Xrf	۱۲۲۳۸/۴۶	۰/۰۸	
		۰/۱۷۵	۰/۲۸۹	۰/۱۸۸	۰/۲۹۲	۰/۰۵۵			
		Xrf							
	دوره ۲	V	UTX	MRK	IBM	DD			AAPL
		۰/۱۲۵	۰/۰۹۵	۰/۱۸۶	۰/۱۷۶	۰/۱۶۱			۰/۱۵
		Xrf							
	۰/۱۰۷								
	دوره ۳	MSFT	JPM	XOM	CSCO	AXP			3M
		۰/۱۳۷	۰/۲۲۴	۰/۰۹۱	۰/۱۷۸	۰/۱۶۸			۰/۱۱۱
Xrf									
۰/۰۹۲									

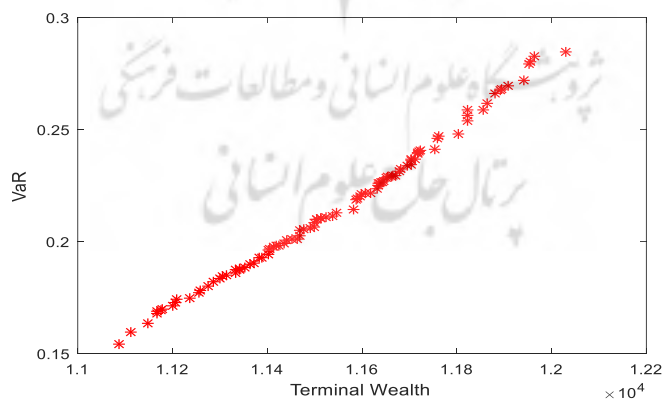
جدول ۴. حداقل، حداکثر، میانگین و انحراف استاندارد پرتفوی‌های بهینه

ریسک	ثروت	
۰/۰۲۱۱۷	۱۱۲۴۰	حداقل
۰/۰۹۰۵۶	۱۲۳۰۰	حداکثر
۰/۰۵۶۱۸	۱۱۸۷۰	میانگین
۰/۰۱۸۰۱	۳۱۶	انحراف استاندارد

در میان پرتفوی‌های بهینه ایجاد شده در مدل Mean- AVaR حداقل میزان ثروت ایجاد شده ۱۱۲۴۰ دلار با میزان ریسک ۲ درصد و حداکثر ثروت نهایی ۱۲۳۰۰ دلار با ریسک ۹ درصد می‌باشد. میانگین کل پرتفوی‌ها ۱۱۸۷۰ و میانگین ریسک ۵ درصد می‌باشد.

اجرای مدل Mean-VaR

با اجرای این مدل تعداد پرتفوی‌های نامغلوب به دست آمده ۹۸ پرتفوی می‌باشد، نمودار ۲ پرتفوی‌های پارتو بهینه را نشان می‌دهد.



نمودار ۲. جبهه‌های بهینه پارتو حاصل از اجرای مدل Mean-VaR

میزان تخصیص هر دارایی همچنین میزان تخصیص ثروت به دارایی بدون ریسک برای چند پرتفوی انتخابی در جدول ۵ نمایش داده شده است.

جدول ۵. مقادیر بهینه پرتفوی Mean-VaR به ازای برخی مقادیر از مجموعه پارتو

پرتفوی	دوره	ثروت نهایی							ریسک
۱	دوره ۱	Xrf	GS	IBM	INTC	DD	AAPL	۱۱۸۲۲/۵۸	۰/۲۵۳
		۰/۳	۰/۳۳۸	۰/۰۷۵	۰/۱۴۴	۰/۱۴۲	۰/۱		
	دوره ۲	Xrf	V	MCD	IBM	CAT	AAPL		
		۰/۳۳۳	۰/۰۸	۰/۰۸۸	۰/۱۶۱	۰/۱۷۵	۰/۱۶۱	۰/۱۰۳	
	دوره ۳	Xrf	BA	JPM	INTC	AAPL			
		۰/۳	۰/۱۷۸	۰/۲۳۷	۰/۱۸	۰/۱۱۴			
...	...								
۹۸	دوره ۱	Xrf	VZ	JNJ	DD	AAPL		۱۱۵۹۵/۷۷	۰/۲۲
		۰/۳	۰/۲۰۴	۰/۱۸۱	۰/۱۴۱	۰/۱۷۴			
	دوره ۲	Xrf	V	JNJ	IBM	3M			
		۰/۲۴۴	۰/۱۹۷	۰/۱۵۵	۰/۱۹	۰/۲۱۵			
	دوره ۳	Xrf	VZ	HD	MSFT	CVX	3M		
		۰/۱۷۴	۰/۱۵۱	۰/۱۷۸	۰/۱۴۷	۰/۱۷۱	۰/۱۷۹		

جدول ۶ حداکثر، حداقل، میانگین و انحراف معیار پرتفوی‌های بهینه را نشان می‌دهد.

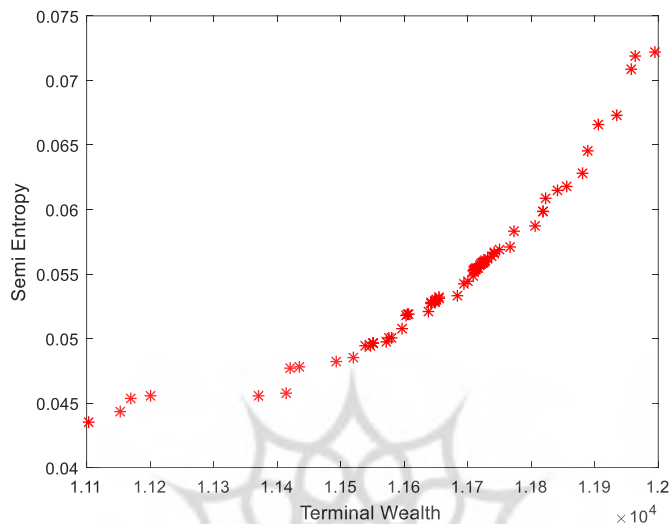
جدول ۶. حداکثر، حداقل، میانگین و انحراف استاندارد پرتفوی‌های بهینه

ریسک	ثروت	
۰/۱۵۴۳	۱۱۰۹۰	حداقل
۰/۲۸۴۶	۱۲۰۳۰	حداکثر
۰/۲۱۵۵	۱۱۵۴۰	میانگین
۰/۰۳۱۲۷	۲۲۶/۶	انحراف استاندارد

در میان پرتفوی‌های بهینه ایجاد شده در مدل Mean-VaR حداقل میزان ثروت ایجاد شده ۱۱۰۹۰ دلار با میزان ریسک ۱۵ درصد و حداکثر ثروت نهایی ۱۲۰۳۰ دلار با ریسک ۲۸ درصد می‌باشد. میانگین کل پرتفوی‌ها ۱۱۵۴۰ و میانگین ریسک ۲۱ درصد می‌باشد.

اجرای مدل Mean-semi Entropy

با اجرای این مدل تعداد پرتفوی‌های نامغلوب به دست آمده ۷۶ پرتفوی می‌باشد. نمودار ۳ پرتفوی‌های بهینه پارتو را نشان می‌دهد.



نمودار ۳. جبهه‌های بهینه پارتو حاصل از اجرای مدل Mean-Semi Entropy

میزان تخصیص هر دارایی همچنین میزان تخصیص ثروت به دارایی بدون ریسک برای چند پرتفوی انتخابی در جدول ۷ نمایش داده شده است.

جدول ۷. مقادیر بهینه پرتفوی Mean-semi Entropy به ازای برخی مقادیر از

پرتفوی	دوره	ثروت نهایی	ریسک
۱	دوره ۱	Xrf ۰/۳ VZ ۰/۱۷۳ TRV ۰/۱۲۵ KO ۰/۲۱۱ MCD ۰/۱۲۱ 3M ۰/۰۷	۱۱۱۰۴/۰۷ ۰/۰۴۳
	دوره ۲	Xrf ۰/۳ TRV ۰/۳ PG ۰/۰۹۳ MRK ۰/۱۵۵ JNJ ۰/۱۵۲	
	دوره ۳	Xrf ۰/۳ VZ ۰/۱۱۹ TRV ۰/۱۸۶ PG ۰/۰۹۶ MRK ۰/۳	
...	...		
۷۶	دوره ۱	Xrf ۰/۳ PG ۰/۱۸۸ HD ۰/۱ DD ۰/۲۰۱ AAP L ۰/۲۱۱	۱۱۱۰۹/۷۹ ۰/۰۵۵
	دوره ۲	Xrf ۰/۳ V ۰/۱۶۳ JNJ ۰/۱۰۹ CAT ۰/۰۷۶ AAP L ۰/۱۸۵ AXP ۰/۱۶۷	
	دوره ۳	Xrf ۰/۳ V ۰/۱۵۶ VZ ۰/۱۳۶ NKE ۰/۰۶۳ DD ۰/۱۷۷ CVX ۰/۱۶۷	

جدول ۸ حداکثر، حداقل، میانگین و انحراف معیار پرتفوی های بهینه را نشان می دهد. در میان پرتفوی های بهینه ایجاد شده در مدل Mean- Semi Entropy حداقل میزان ثروت ایجاد شده ۱۱۱۰۰ دلار با میزان ریسک ۴ درصد و حداکثر ثروت نهایی ۱۱۹۹۰ دلار با ریسک ۷ درصد می باشد. میانگین کل پرتفوها ۱۱۶۶۰ و میانگین ریسک ۵ درصد می باشد.

جدول ۸. حداقل، حداکثر، میانگین و انحراف استاندارد پرتفوهای بهینه

ریسک	ثروت	
۰/۰۴۳۵۴	۱۱۱۰۰	حداقل
۰/۰۷۲۲۱	۱۱۹۹۰	حداکثر
۰/۰۵۴۷۶	۱۱۶۶۰	میانگین
۰/۰۰۵۸۹۱	۱۷۳	انحراف استاندارد

به منظور مقایسه هر چه بهتر پرتفوی های بهینه حاصل از مدل های اجرا شده، از دو معیار شارپ^۱ و ترینر^۲ برای ارزیابی عملکرد پرتفوی های بهینه استفاده شد. به این منظور برای تمامی پرتفوی های بهینه در هر سه مدل واریانس و بتا پرتفوی جهت محاسبه این شاخص ها محاسبه گردید. آمار توصیفی معیار شارپ در جدول ۹ و معیار ترینر در جدول ۱۰ نشان داده شده است.

$$T_p = \frac{r_p - r_f}{\beta_p} \quad SR_p = \frac{r_p - r_f}{\sigma_p}$$

SR_p = معیار شارپ T_p = معیار ترینر r_p = بازده پرتفوی

β_p = ریسک سیستماتیک پرتفوی σ_p = انحراف معیار پرتفوی

جدول ۹. نتایج حاصل از ارزیابی عملکرد پرتفوی با معیار شارپ

Mean-Semi ent	Mean-VaR	Mean-AVaR	
۱۰۱۵۵۲۶	۱۰۱۰۹۹	۱۱۲۷۷۱	حداقل
۱۸۱۴۶۵۵	۱۷۵۸۵۴	۱۸۴۳۵۲	حداکثر
۱۵۳۸۷۷۴	۱۵۲۹۰۲	۱۵۵۰۴۳	میانگین
۰۰۲۹۳۰۷	۰۰۲۶۱۸	۰۰۱۷۷۲	انحراف استاندارد
۷۶	۹۸	۷۵	تعداد پرتفوی

1. Traynor Ratio
2. Sharp Ratio

جدول ۱۰. نتایج حاصل از ارزیابی عملکرد پرتفوی با معیار ترینر

Mean-Semi ent	Mean-VaR	Mean-AVaR	
۰ ۱۸۰۲۲۴	۰ ۱۶۴۲۵۶	۰ ۱۶۰۸۴۶	حداقل
۰ ۲۷۶۰۴	۰ ۳۴۶۵۴۸	۰ ۳۹۱۶۹	حداکثر
۰ ۲۴۰۶۰۸	۰ ۲۴۶۶۳	۰ ۲۵۰۶۳۶	میانگین
۰ ۰۰۲۷۶۷	۰ ۰۰۲۹۶	۰ ۰۰۶۳۳۵	انحراف استاندارد
۷۶	۹۸	۷۵	تعداد پرتفوی

نتایج نشان می‌دهد با در نظر گرفتن معیار شارپ به‌عنوان شاخص ارزیابی عملکرد پرتفوی، مدل Mean-AVaR به میانگین بالاتری از دو مدل دیگر دست پیدا کرده است. همچنین در این مدل پرتفویی با حداکثر میزان شاخص شارپ (۱/۸۴) وجود دارد که از بیشترین میزان در دو مدل دیگر بیشتر است. کمترین میزان شاخص شارپ (۱/۱۲) بوده که در مقایسه با دو مدل دیگر در وضعیت بهتری قرار دارد. همچنین میانگین شاخص شارپ در مدل Mean-Semi entropy بالاتر از مدلی است که از VaR به‌عنوان معیار ریسک استفاده شده است. با در نظر گرفتن شاخص ترینر نیز به نتایج مشابهی در خصوص میانگین عملکرد بهتر پرتفوی‌های بهینه مدل Mean-AVaR می‌رسیم. با در نظر گرفتن میانگین، در هر دو معیار شارپ و ترینر مدل Mean-Semi entropy با مدل Mean-VaR میانگین تقریباً برابری دارند.

نتیجه‌گیری و بحث

در این پژوهش مسئله بهینه‌سازی پرتفوی چند دوره‌ای با معیارهای متفاوت ریسک در محیط اعتبار‌فازی مدل‌سازی و اجرا گردید.

به دلیل ماهیت غیرقطعی بازده اوراق بهادار، علاوه بر بازده‌های سهام شرکت‌های موجود ۳ معیار ریسک در نظر گرفته شده در محیط اعتبار‌فازی محاسبه گردید. با اجرای سه مدل Mean-AVaR و Mean-VaR و mean-semi entropy و اعمال محدودیت‌های اصلی و همچنین محدودیت‌های دیگری مانند حداقل درجه تنوع‌بخشی (آنتروپی نسبت)، حداقل و حداکثر میزان تخصیص سرمایه به هر یک از دارایی‌ها و حداقل و حداکثر تعداد سهام موجود در پرتفوی مدل‌ها اجرا گردید. همچنین در نظر گرفتن هزینه معاملات و ایجاد فرصت وام‌دهی برای سرمایه‌گذار نیز در مدل‌سازی لحاظ گردید. مدل‌ها با الگوریتم ازدحام ذرات چند هدفه (MOPSO) حل گردیدند. از آنجایی که معیارهای ریسک

در نظر گرفته شده از یک جنس نبوده لذا امکان مقایسه مدل‌ها بر اساس میزان ریسک هر پرتفوی وجود ندارد، بنابراین برای ارزیابی عملکرد پرتفوی‌های بهینه در هر سه مدل، از شاخص شارپ و ترینر به عنوان معیارهای ارزیابی عملکرد پرتفوی استفاده گردید. نتایج نشان داد در مدلی که از ارزش در معرض خطر میانگین (AVaR) به عنوان معیار ریسک استفاده شده، میانگین شاخص شارپ و ترینر پرتفوی‌های بهینه در این مدل از دو مدل دیگر بالاتر می‌باشد. همان‌طور که در ادبیات پژوهش به آن اشاره شد، ارزش در معرض خطر دارای تمامی خواص یک معیار ریسک منسجم می‌باشد به همین دلیل استفاده از آن در بهینه‌سازی سبد سهام و اندازه‌گیری ریسک سرمایه‌گذار توصیه می‌گردد. همچنین با در نظر گرفتن معیار شارپ مدل mean-semi entropy با بالاتر بودن میانگین معیار شارپ پرتفوی‌های بهینه از عملکرد بهتری نسبت به مدل Mean-VaR برخوردار است. این مقایسه در خصوص معیار ترینر برای هر دو مدل تقریباً برابر و اختلاف زیادی ندارند. بسیاری از نهادهای مالی در پی شناسایی منابع ریسک و سپس کنترل و مدیریت آن می‌باشند. با عنایت به نتایج پژوهش و نظر به قابلیت‌های معیار ارزش در معرض خطر میانگین به عنوان معیار ریسک منسجم پیشنهاد می‌گردد مدیران پرتفوی با توجه به مزیت‌های مدل چند دوره‌ای با استفاده از این معیار ریسک بتوانند ریسک پرتفوی را به خوبی اندازه‌گیری کنند و در نهایت دارایی‌های مالی را که باعث بالا رفتن ریسک می‌شوند را شناسایی کرده و در جهت حداقل کردن ریسک پرتفوی اقدام به تخصیص بهینه و مجدد دارایی‌ها نمایند.

در مقایسه با سایر پژوهش‌های صورت گرفته در مدل‌های چند دوره‌ای در این پژوهش از معیار ارزش در معرض خطر میانگین و همچنین نیم آنتروپی فازی که اخیراً معرفی شده است استفاده شد. همچنین برخلاف مدل توسعه داده شده توسط یائو و همکاران (۲۰۱۶)، در هر سه مدل ارائه شده هزینه معاملات، تخصیص بخشی از ثروت به دارایی بدون ریسک و در نظر گرفتن محدودیت حداقل درجه تنوع بخشی مطلوب سرمایه‌گذار لحاظ شده است. مدل‌های ارائه شده توسط ژانگ و ژانگ (۲۰۱۴)، ژان و همکاران (۲۰۱۴)، لیو و همکاران (۲۰۱۳)، دیمیگوتل و همکاران (۲۰۱۶) که به صورت تک هدفه و با استفاده از تئوری امکان فازی ارائه شده، تمامی مدل‌ها در این پژوهش به صورت چندهدفه و با استفاده از تئوری اعتبار فازی توسعه داده شده‌اند.

به منظور پژوهش‌های آتی پیشنهاد می‌گردد از سایر الگوریتم‌های بهینه‌سازی چندهدفه مانند الگوریتم ژنتیک چندهدفه مبتنی بر مرتب‌سازی نامغلوب (NSGA-II) و یا سایر الگوریتم‌های بهینه‌سازی چندهدفه تکاملی استفاده گردد همچنین سایر معیارهای ریسک نیز می‌تواند در پژوهش‌های بعدی مدنظر قرار گیرد.

منابع

- پور احمدی، زهرا و نجفی، امیرعباس، (۱۳۹۴). "بهینه‌سازی پویای سبد سرمایه‌گذاری با توجه به هزینه معاملات"، مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، ۶(۲۲)، صص. ۱۲۷-۱۴۶.
- کاظمی میان‌گسگری، مینا؛ یاکیده، کیخسرو و قلی‌زاده، محمدحسن، (۱۳۹۶). "بهینه‌یابی سبد سهام (کاربرد مدل ارزش در معرض ریسک بر روی کارایی متقاطع)". راهبرد مدیریت مالی، ۲(۵)، صص. ۱۵۹-۱۸۳. doi: 10.22051/jfm.2017.12040.1155
- همائی‌فر، ساغر و روغنیان، عماد، (۱۳۹۵). "به کارگیری الگوهای بهینه‌سازی پایدار و برنامه‌ریزی آرمانی در مسئله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری چند دوره‌ای"، مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، ۷(۲۸)، صص. ۱۵۳-۱۶۷.
- Andersson, F., Mausser, H., Rosen, D., & Uryasev, S. (2001). "Credit risk optimization with conditional value-at-risk criterion". (2), pp.273-291.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M., & Heath, D. (1999). "Coherent measures of risk"... , 9(3), pp.203-228.
- Campbell, R., Huisman, R., & Koedijk, K. (2001). "Optimal portfolio selection in a Value-at-Risk framework". (9), pp.1789-1804.
- Chen, Z. (2005). "Multiperiod consumption and portfolio decisions under the multivariate GARCH model with transaction costs and CVaR-based risk control". (4), pp.603-632.
- Chen, Z., & Song, Z. (2012). "Dynamic portfolio optimization under multi-factor model in stochastic markets". (4), pp.885-919.
- Chunhachinda, P., Dandapani, K., Hamid, S., & Prakash, A. J. (1997). "Portfolio selection and skewness: Evidence from international stock markets". (2), pp.143-167.
- Coello, C. A. C., Lamont, G. B., & Van Veldhuizen, D. A. (2007). "Evolutionary algorithms for solving multi-objective problems" (Vol. 5).
- Cong, F., & Oosterlee, C. W. (2016). "Multi-period mean-variance portfolio optimization based on Monte-Carlo simulation". (64), pp.23-38.
- Consigli, G. (2002). "Tail estimation and mean-VaR portfolio selection in markets subject to financial instability". (7), pp.1355-1382.
- DeMiguel, V., Mei, X., & Nogales, F. J. (2016). "Multiperiod Portfolio Optimization with Multiple Risky Assets and General Transaction Costs".

- DeMiguel, V., Mei, X., & Nogales, F. J. (2016). "Multiperiod portfolio optimization with multiple risky assets and general transaction costs". , pp.108-120.
- Deng, X., & Li, R.(2012). "A portfolio selection model with borrowing constraint based on possibility theory". , (2), pp.754-758.
- Dubois, D., & Prade, H. (2012). Possibility theory: an approach to computerized processing of uncertainty. "Springer Science & Business Media".
- Feinstein, C. D., & Thapa, M. N. (1993). "A Reformulation of a Mean-absolute Deviation Portfolio Optimization Model". , (12).
- Geyer, A., Hanke, M., & Weissensteiner, A. (2009). "A stochastic programming approach for multi-period portfolio optimization". , (2), pp.187-208.
- Grootveld, H., & Hallerbach, W. (1999). "Variance vs downside risk: Is there really that much difference?" , (2), pp.304-319.
- Guo, S., Yu, L., Li, X., & Kar, S. (2016). "Fuzzy multi-period portfolio selection with different investment horizons". , (3), pp.1026-1035.
- Gupta, P., Mehlawat, M. K., Inuiguchi, M., & Chandra, S. (2014). "Fuzzy Portfolio Optimization". Springer-Verlag, Berlin.
- Homaeifar, S., Roghanian, E. (2016). "The Application of Robust Optimization and Goal Programming in Multi Period Portfolio Selection Problem". , 7(28), pp.153-167. (In Persian)
- Huang, X. (2006). "Fuzzy chance-constrained portfolio selection. Applied mathematics and computation", 177(2), pp.500-507.
- Huang, X. (2008). "Mean-variance model for fuzzy capital budgeting". , (1), pp.34-47.
- Huang, X. (2008). "Risk curve and fuzzy portfolio selection". , (6), pp.1102-1112.
- Huang, X. (2008). "Mean-entropy models for fuzzy portfolio selection". , (4), pp.1096-1101.
- Kazemi miyangaskari, M., Yakideh, K., Gholizadeh, M. (2017). "Portfolio optimization (the application of Value at Risk model on cross efficiency)". , 5(2), pp.159-183. (In Persian)
- Kapur, J. N. (1990). "Maximum Entropy Models in Science and Engineering". Wiley Eastern Limited, New Delhi
- Konno, H., & Yamazaki, H. (1991). "Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market". , (5), pp.519-531.

- Li, D., & Ng, W. L. (2000). "Optimal dynamic portfolio selection: Multiperiod mean-variance formulation". , .. (3), pp.387-406.
- Li, X., Qin, Z., & Kar, S. (2010). "Mean-variance-skewness model for portfolio selection with fuzzy returns". (1), pp.239-247.
- Li, X., Zhang, Y., Wong, H. S., & Qin, Z. (2009). "A hybrid intelligent algorithm for portfolio selection problem with fuzzy returns". (2), pp.264-278.
- Lin, C. C., & Liu, Y. T. (2008). "Genetic algorithms for portfolio selection problems with minimum transaction lots"... , 185(1), pp.393-404.
- Liu, B. D. (2004). "Uncertain theory: An introduction to its axiomatic foundation. Berlin": Springer-Verlag.
- Liu, B., & Liu, Y. K. (2002). "Expected value of fuzzy variable and fuzzy expected value models". , 10(4), pp.445-450.
- Liu, Y. J., & Zhang, W. G. (2015). "A multi-period fuzzy portfolio optimization model with minimum transaction lots". (3), pp.933-941.
- Liu, Y. J., Zhang, W. G., & Xu, W. J. (2012). "Fuzzy multi-period portfolio selection optimization models using multiple criteria". , 48(12), pp.3042-3053.
- Liu, Y. J., Zhang, W. G., & Zhang, Q. (2016). "Credibilistic multi-period portfolio optimization model with bankruptcy control and affine recourse". , 38, pp.890-906.
- Liu, Y.-J., Zhang, W.-G., & Zhang, P. (2013). "A multi-period portfolio selection optimization model by using interval analysis". , 33, pp.113-119.
- Liu, Y.-J., Zhang, W.-G., & Zhang, Q. (2016). "Credibilistic multi-period portfolio optimization model with bankruptcy control and affine recourse". Applied Soft Computing, 38, pp.890-906.
- Markowitz, H. (1952). "Portfolio selection". , 7(1), 77-91.
- Markowitz, H., & Selection, P. (1959). "Efficient diversification of investments". , .. , pp.26-31.
- Mehlawat, M. K. (2016). "Credibilistic mean-entropy models for multi-period portfolio selection with multi-choice aspiration levels". , 345, pp.9-26.
- Mossin, J. (1968). "Optimal multiperiod portfolio policies". (2), pp.215-229.

- Peng, J. (2011). "Credibilistic value and average value at risk in fuzzy risk analysis"....., 3(1), pp.69-79.
- Philippatos, G. C., & Wilson, C. J. (1972). "Entropy, market risk, and the selection of efficient portfolios"..... (3), pp.209-220.
- Pourahmadi, Z., Najafi, A.A. (2015). "Dynamic Portfolio Optimization with Transaction Cost"....., 6(24), pp.152-172. (In Persian)
- Rachev, S. T., Stoyanov, S. V., & Fabozzi, F. J. (2008). "Advanced stochastic models, risk assessment, and portfolio optimization: The ideal risk..... (Vol. 149). John Wiley & Sons.
- Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. (2000). "Optimization of conditional value-at-risk"....., 2, pp.21-42.
- Rockafellar, R. T., Uryasev, S., & Zabarankin, M. (2006). "Generalized deviations in risk analysis"..... (1), pp.51-74.
- Sadjadi, S. J., Seyedhosseini, S. M., & Hassanlou, K. (2011). "Fuzzy multi period portfolio selection with different rates for borrowing and lending"..... (4), pp.3821-3826.
- Speranza, M. G. (1993). "Linear programming models for portfolio optimization"..... 14, pp.107-123.
- Usta, I., & Kantar, Y. M. (2011). "Mean-variance-skewness-entropy measures: a multi-objective approach for portfolio selection"..... (1), pp.117-133.
- Vercher, E., & Bermúdez, J. D. (2015). "Portfolio optimization using a credibility mean-absolute semi-deviation model"....., 42(20), pp.7121-7131.
- Wei, S. Z., & Ye, Z. X. (2007). "Multi-period optimization portfolio with bankruptcy control in stochastic market"..... (1), pp.414-425.
- Yao, H., Li, Z., & Li, D. (2016). "Multi-period mean-variance portfolio selection with stochastic interest rate and uncontrollable liability"....., 252(3), pp.837-851.
- Zhang, W. G., Liu, Y. J., & Xu, W. J. (2012). "A possibilistic mean-semivariance-entropy model for multi-period portfolio selection with transaction costs"....., 222(2), pp.341-349.
- Zhou, J., Li, X., & Pedrycz, W. (2016). "Mean-Semi-Entropy Models of Fuzzy Portfolio Selection"..... (6), pp.1627-1636.
- Zhou, R., Cai, R., & Tong, G. (2013). "Applications of entropy in finance: A review"..... (11), pp.4909-4931.
- Zhu, S. S., Li, D., & Wang, S. Y. (2004). "Risk control over bankruptcy in dynamic portfolio selection: A generalized mean-variance formulation"....., 49(3), pp.447-457.