بررسی عملکرد انواع مختلف توابع پایه‌ی شعاعی کروی در مدلسازی محلی میدان گرانی زمین

محبوبه محمدیوسفی بهلولی احمدی[1] عبدالرضا صفری[2]
آناهیتا شهبازی[3]

تاریخ دریافت مقاله: ۹۴/۰۵/۲۶ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۴/۰۸/۰۸

****

چکیده

میدان ثقل جهانی معمولاً توسط توابع پایه‌ی هارمونیک کروی تا درجه معینی از قدرت تفکیک طیفی و مکانی مدل می‌شود. توزیع غیریکنواخت و کیفیت متفاوت داده‌ها، این توابع را در مدل‌سازی محلی میدان ثقل محدود می‌کند. این توابع بیشتر خاصیت جهانی میدان ثقل را نمایش می‌دهند و برای نمایش فرکانس‌های پایین میدان ثقل مناسب هستند. در کاربردهای محلی، توابع پایه‌ی شعاعی بر روی سطح کره با برخورداری از خاصیت محمل شبه محلی می‌توانند به عنوان جایگزین مناسبی برای هارمونیک‌های کروی استفاده شده و میدان گرانی زمین را تا درجه‌ی بالایی از قدرت تفکیک طیفی و مکانی تقریب زنند. این مدل‌های محلی معمولاً دقت بهتری در محل مورد نظر نسبت به مدل‌های جهانی دارند. توابع پایه‌ی شعاعی کروی معمولاً بر روی کره متعامد نیستند که این امر منجر به پیچیدگی بیشتر مسئله می‌شود. در این مقاله، عملکرد انواع مختلف توابع پایه‌ی شعاعی کروی شامل کرنل جرم نقطه‌ای، چندقطبی شعاعی، کرنل پواسن و ویولت پواسن در مدل‌سازی محلی میدان ثقل زمین با استفاده از داده‌های شتاب گرانی در منطقه‌ی فارس ساحلی مقایسه شده است. برای حل مسئله‌ی معکوس غیرخطی مدل‌سازی میدان گرانی زمین با استفاده از توابع پایه‌ی شعاعی کروی، تکنیک "کمترین مربعات" به کار رفته است. بدین منظور، الگوریتم بهینه‌سازی لونبرگ-مارکواردت طی یک پروسه‌ی تکراری با مینیمم کردن اختلاف بین مقادیر مشاهداتی و مقادیر مدل شده، پارامترهای مدل‌سازی را تخمین می‌زند. این پارامترها شامل تعداد، مکان، عمق و ضرایب مقیاس توابع پایه شعاعی هستند. به منظور افزایش کارایی عددی الگوریتم لونبرگ- مارکواردت در حل مسئله‌ی مدل‌سازی میدان‌گرانی، مقدار اولیه‌ی پارامتر پایدارسازی از طریق رابطه‌ای بر مبنای ژاکوبین تابع هدف تعیین و روشی برای به هنگام‌سازی این پارامتر ارائه شده است. نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که در صورت انتخاب عمق مناسب توابع پایه، دقت مدل‌سازی محلی میدان گرانی برای انواع توابع پایه‌ی شعاعی مورد بررسی تقریباً یکسان خواهد بود.

واژه‌های کلیدی: میدان ثقل، تابع پایه‌ی شعاعی کروی، الگوریتم لونبرگ- مارکواردت، روش کمترین مربعات.

****

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه تهران mmyusefi@ut.ac.ir

۲- دانشیار گروه ژئودزی، دانشکده مهندسی نقشه‌برداری و اطلاعات مکانی، دانشگاه تهران asafari@ut.ac.ir

۳- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه تهران ana.shahbazi@ut.ac.ir

۱- مقدمه

یکی از مهم‌ترین اهداف ژئودزی، تعیین ژئوئید به عنوان یک سطح هم پتانسیل منطبق بر سطح آبهای آزاد زمین است. بنابر قانون مشهور انتگرال نیوتن، پتانسیل ثقل زمین در فضای خارج از سطح آن می‌تواند توسط بی‌نهایت عنصر جرمی در درون زمین تولید شود که لازمه‌ی استفاده از این رابطه، معلوم بودن توزیع جرم در هر یک از نقاط زمین است. اگرچه برآورد دقیق توزیع جرم زمین امری غیرممکن است اما می‌توان با استفاده از کمیت‌های قابل مشاهده‌ی میدان‌گرانی زمین نظیر آنومالی جاذبه، کمیت‌های غیرقابل مشاهده میدان گرانی را برآورد نمود که از آن به عنوان مسئله معکوس در ژئودزی نام برده می‌شود *(لمن، ۱۹۹۳ ; کلیسنس و همکاران، ۲۰۰۱)*. میدان جاذبه‌ی جهانی به طور وسیع توسط توابع پایه‌ی هارمونیک کروی مدل‌سازی می‌شود *(پاولیس و همکاران، ۲۰۱۲)*. هارمونیک‌های کروی توابعی متعامد برروی سطح کره هستند. این توابع برای مدلسازی‌های جهانی بسیار مناسب می‌باشند و با داده‌های جهانی و همگن‌سازگاری بیشتری دارند و نمی‌توان از آنها برای بهبود محلی میدان گرانی زمین استفاده نمود *(اسچمیدات و همکاران، ۲۰۰۷ ; ایکر، ۲۰۰۸ ; بنتل و همکاران، ۲۰۱۳)*.

برای مدل‌سازی محلی میدان گرانی روش‌های مختلفی موجود است که از بین آنها، استفاده از توابع پایه شعاعی کروی[1] (SRBF) به دلیل ویژگی‌های منحصر به فرد آنها به روشی رایج در مدلسازی محلی تبدیل شده است. توابع پایه‌ی شعاعی دارای محمل شبه‌محلی[2] هستند و ویژگی بارز آن‌ها این است که با فاصله از مبداء به سرعت کاهش می‌یابند و به همین دلیل برای کاربردهای محلی مناسب می‌باشند (لین و همکاران، ۲۰۱٤). از بین انواع مختلف کرنل‌های توابع پایه‌ی شعاعی می‌توان به کرنل جرم نقطه‌ای،چندقطبی شعاعی، کرنل پواسن وویولت پواسن اشاره کرد که دارای کاربردهای گسترده‌ای در زمینه‌ی مدلسازی میدان‌گرانی زمین هستند.

1-Spherical Radial Basis Function

2-Quasi-local support

به هنگام مدل‌سازی میدان‌گرانی زمین بااستفاده از توابع پایه‌ی شعاعی لازم است که نوع کرنل، پارامترهای این توابع شامل موقعیت مراکز، عمق و ضرایب مقیاس آنها، و تعداد توابع مورد نیاز در مدل‌سازی را تعیین نمود*(ویتور، ۲۰۰۹)*. دقت وصحت مدل‌های محاسبه شده بااستفاده از توابع پایه‌ی شعاعی به نحوه‌ی انتخاب این عوامل بستگی دارد *(ویتور،۲۰۰۹)*.

از جمله کارهای انجام گرفته در زمینه تعیین پارامترهای توابع پایه شعاعی می‌توان به موارد زیر اشاره نمود: هکنین (۱۹۸۱) و ورمیر (۱۹۸۲، ۱۹۸۳، ۱۹۸٤) با قرار دادن توابع پایه در موقعیت نقاط مشاهده، شبکه‌ی توابع پایه‌ی شعاعی را تشکیل دادند. مارچنکو (۱۹۹۸) در زیر هر یک از نقاط مشاهده، یک تابع پایه‌ی شعاعی قرارداد و مختصات مسطحاتی آنها را با استفاده از الگوریتم چندقطبی دنباله‌ای[3] بهینه‌سازی کرد. مارچنکو و همکاران (۲۰۰۱) موقعیت مراکز هرتابع پایه را به ازای یک زیرمجموعه از نقاط مشاهده تعیین کردند که به موجب آن، تعداد توابع پایه مورد نیاز برای مدل‌سازی کاهش یافت. ایکر و همکاران (۲۰۰٤) با مثلث‌بندی یک بیست وجهی، موقعیت مراکز توابع پایه را تثبیت کردند. اشمیت وهمکاران (۲۰۰٤) شبکه‌ی توابع پایه‌ی شعاع کروی را به صورت منظم و برمبنای نظریه‌ی انتگرال عددی توابع کروی تعیین کردند.

هکنین (۱۹۸۱) عمق توابع پایه را به صورت تجربی بر اساس فواصل داده‌ها از یکدیگر و ماتریس کوواریانس وابسته‌ی آنومالی جاذبه تعیین کرد. بارتلمس (۱۹۸٦) ازیک روش بهینه‌سازی غیرخطی برای تعیین عمق توابع پایه‌ی شعاعی برمبنای اطلاعات موجود در داده‌ها استفاده کرد. مارچنکو (۱۹۹۸) پهنای باند هر یک از توابع پایه را به این صورت تعیین کرد که ماتریس کوواریانس سیگنال در همسایگی داده‌ها بر شکل تابع پایه منطبق شود. کلیس و ویتور (۲۰۰۷) الگوریتمی را برای داده‌های ناهمگن ارائه دادند که درآن عمق توابع پایه‌ی شعاعی به روش اتوماتیک

3- Sequential Multi-pole Algorithm

به صورت تابعی از توزیع داده‌ها و با در نظرگرفتن نویز آنها انتخاب می‌شوند. آنها در این الگوریتم از روش Generalized Cross Validation برای تعیین عمق توابع پایه‌ی شعاعی استفاده نمودند. بدین منظور، آنها هر بار یکی ازمشاهدات را حذف کرده و مجهولات مدلسازی را بدون حضور این مشاهده برآورد کردند. سپس بااستفاده از این پارامترها به برآورد مشاهده‌ی حذف شده پرداختند و عمق بهینه را به ازای مینیمم مقدار خطا در بازیابی مشاهدات حذف شده انتخاب نمودند.

اگرچه تاکنون از انواع مختلفی از توابع پایه‌ی شعاعی برای مدلسازی میدان ثقل استفاده شده است، اما مقایسه‌ای برای بررسی عملکرد این کرنل‌ها و انتخاب بهترین نوع آن‌ها انجام نگرفته است. دراین تحقیق، عملکرد انواع کرنل‌های توابع پایه شعاعی درمدل‌سازی محلی میدان ثقل در منطقه‌ی فارس ساحلی با استفاده از داده‌های شتاب جاذبی موجود در این منطقه مورد بررسی قرارگرفته است. برای تعیین پارامترهای مجهول توابع پایه‌ی شعاعی از الگوریتم پایدارسازی لونبرگ-مارکواردت استفاده شده است. همواره از الگوریتم لونبرگ- مارکواردت به عنوان یک الگوریتم بهینه‌سازی در حل مسائل کمترین مربعات غیرخطی، و به طور خاص دریافتن پارامترهای مجهول توابع پایه‌ی شعاعی استفاده شده است *(آنتونی و همکاران، ۲۰۰۹؛وایگلت و همکاران، ۲۰۱۰، صفری و همکاران، ۲۰۱۳؛ فروغی و تنزر، ۲۰۱٤)*. این الگوریتم در واقع ترکیبی از دو روش مینیمم‌سازی کاهش گرادیان[1] و گوس-نیوتن می‌باشد. علاوه بر بررسی عملکرد انواع مختلف توابع پایه‌ی شعاعی، به منظور افزایش کارایی عددی الگوریتم لونبرگ- مارکواردت در حل مسئله‌ی مدل‌سازی میدان‌گرانی، این الگوریتم را با ارائه‌ی رابطه‌ای برای تعیین مقدار اولیه‌ی پارامتر پایدارسازی و پیشنهاد روشی برای به هنگام‌سازی این پارامتر بهبود می‌دهیم که در بخش‌های بعدی به طور مفصل در مورد آنها توضیح داده می‌شود.

این مقاله در ٦ بخش سازماندهی شده است. در بخش۲، توابع پایه‌ی شعاعی تعریف شده و انواع کرنل‌های آن مورد بررسی قرار گرفته‌اند. دربخش ۳، میدان‌گرانی زمین برحسب توابع پایه‌ی شعاعی مطرح و روش حل مسئله توضیح داده شده است. بخش ٤ الگوریتم پایدارسازی لونبرگ-مارکواردت را موردبررسی قرارداده است. دربخش ۵ به مدلسازی محلی میدان‌گرانی زمین بااستفاده ازانواع مختلف توابع پایه‌ی شعاعی کروی در منطقه‌ی خلیج‌فارس و مقایسه‌ی نتایج حاصل از آنها پرداخته شده‌است. بخش ٦ به بحث و نتیجه‌گیری می‌پردازد.

۲. توابع پایه‌ی شعاعی

از توابع پایه شعاعی به طورگسترده در مدل‌سازی میدان ثقل زمین استفاده می‌شود. توابع پایه شعاعی هر دوخاصیت محمل جهانی[2] و محلی را دارا می‌باشند. در حالتی که محمل توابع پایه شعاعی از نوع جهانی است، این توابع هیچگونه تفاوتی با توابع هارمونیک کروی ندارند ولی خاصیت محلی بودن آن‌ها منجر به کاهش پیچیدگی عددی سیستم‌های معادلات مشاهداتی می‌شود*(ویتور،۲۰۰۹)*.

در مدل‌سازی میدان ثقل با استفاده از توابع پایه‌ی شعاعی، به منظور دستیابی به یک تقریب دقیق از میدان به ۳ انتخاب در مورد این توابع نیاز است:

نوع کرنل: هرکدام ازکرنل‌های توابع پایه‌ی شعاعی در حوزه مکانی و طیفی، رفتاری متفاوت دارند که می‌توانند بر روند مدل‌سازی میدان ثقل با استفاده از این توابع تأثیر بگذارند.

پهنای باند توابع پایه شعاعی: پهنای باند توابع پایه شعاعی مهمترین عامل درتعریف رفتار این توابع در حیطه‌ی مکان است. به منظور دستیابی به یک تقریب دقیق از میدان‌گرانی، لازم است که پهنای باند بهینه برای هر تابع پایه تعیین شود. پهنای باند بسیار کوچک ممکن است که منجر به تقریب دقیق میدان‌گرانی در نقاط مشاهده و یک سیستم معادلات خوش وضع[3] شود ولی جواب در نقاطی غیر از نقاط مشاهده (نقاط درونیابی) کیفیت پایینی داشته باشد. از

1- Steepest decent

2- Global support

3- Well-posed

طرفی، انتخاب پهنای باند بسیار بزرگ یک سیستم معادلات بد وضع[1] را نتیجه می‌دهد که ممکن است تغییرات سیگنال را به خوبی نشان ندهد *(ویتور،۲۰۰۹)*.

طراحی شبکه: طراحی شبکه RBFها مرتبط با تعداد توابع پایه شعاعی مورد استفاده در تخمین پارامترها و همچنین موقعیت افقی آن‌ها می‌باشد. درحالت کلی دو انتخاب محتمل برای طراحی شبکه موجود می‌باشد:

- قرارگیری توابع پایه برروی یک گرید
- قرارگیری توابع پایه به صورت پراکنده

تابع پایه شعاعی کروی به صورت تابعی از فاصله‌ی کروی بین دو نقطه تعریف می‌شود *(ایکر، ۲۰۱۲)*. به منظور تعریف تابع پایه شعاعی، ابتدا کره‌ی مرجع با شعاع R به صورت زیرتعریف می‌شود *(کلیس و همکاران، ۲۰۰۷)*:

$$\sigma_R = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\} \quad (۱)$$

با در نظر گرفتن دو نقطه $x, y \in R^3, y \neq 0$ که x در فضای بیرون کره‌ی مرجع و y در فضای داخل این کره واقع شده‌اند، تابع پایه شعاعی به مرکز y نسبت به نقطه‌ی ارزیابی x از طریق رابطه‌ی (۲) محاسبه می‌شود *(کلیس و همکاران، ۲۰۰۷)*:

$$\Psi_i(x, y_i) = \sum_{l=0}^{\infty} \psi_l \left(\frac{R}{|x|}\right)^{l+1} p_l(\hat{x}^T, y) \quad (۲)$$

در رابطه‌ی (۲)، p_l بیانگر چندجمله‌ای‌های لژاندر از درجه l هستند. Ψ_i نیز نشان دهنده‌ی نوع کرنل توابع پایه است که ویژگی‌های طیفی و مکانی این توابع را مشخص می‌کند. به بیان دیگر، رفتار تابع پایه شعاعی درحوزه طیفی و مکانی به انتخاب کرنل تابع پایه و ضرایب لژاندر آن بستگی دارد. ساده‌ترین نوع کرنل تابع پایه‌شعاعی، کرنل جرم نقطه‌ای است که فرم تحلیلی آن به صورت زیر تعریف می‌شود *(هکینن، ۱۹۸۱؛ ورمیر، ۱۹۸٤، ۱۹۸۹، ۱۹۹۰؛ بارتلمس، ۱۹۸٦)*:

$$\Psi(x, y) = \frac{1}{|x - y|} \quad (۳)$$

بدین ترتیب، ضرایب لژاندر کرنل جرم نقطه‌ای به صورت زیر خواهندبود *(کلیس و همکاران، ۲۰۰۷)*:

$$\psi_l = \frac{|y|^l}{R^{l+1}} \quad (٤)$$

رفتار طیفی کرنل تنها به فاصله شعاعی تابع پایه از مرکز کره‌ی مرجع بستگی دارد که پهنای باند تابع پایه ($|y|$) نامیده می‌شود. پهنای باند تابع پایه شعاعی هم‌ارز عمق آن است که به صورت فاصله‌ی بین تابع پایه از سطح کره‌ی مرجع تعریف می‌شود و برابر است با:

$$d = R - |y| \quad (٥)$$

در رابطه‌ی (٥)، d عمق زیر کره‌ی بیرهامر می‌باشد. کرنل جرم نقطه‌ای مانند یک فیلتر پایین گذر[2] عمل می‌کند و قرارگیری توابع پایه در عمق‌های کم، حساسیت کرنل را نسبت به درجات بالاتر هارمونیک‌های کروی افزایش می‌دهد *(ویتور، ۲۰۰۹)*.

چندقطبی‌های شعاعی نوع دیگری از توابع پایه‌ی شعاعی هستند که با مشتق‌گیری از کرنل جرم نقطه‌ای به دست می‌آیند. شکل تحلیلی این توابع که نخستین بار توسط مارچنکو وهمکاران (۲۰۰۱) برای مدل‌سازی میدان‌گرانی زمین مورد استفاده قرارگرفت، به صورت زیر است *(ویتور،۲۰۰۹)*:

$$\Psi(x, y) = \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial |y|}\right)^n \frac{1}{|x - y|} \quad (٦)$$

در رابطه‌ی (٦)، n بیانگر مرتبه‌ی چندقطبی شعاعی است. شکل چند قطبی شعاعی به عمق تابع و مرتبه‌ی آن بستگی دارد.کرنل چند قطبی شعاعی ویژگی‌های یک فیلتر باند محدود را دارد اما از آنجا که ضرایب لژاندر آن هیچگاه صفر نمی‌شوند، از نوع توابع باند محدود نیست *(ویتور، ۲۰۰۹)*. ضرایب لژاندر چندقطبی شعاعی به صورت زیر تعریف می‌شوند *(کلیس و همکاران، ۲۰۰۷)*:

$$\psi_l = \binom{l}{n} \frac{|y|^{l-n}}{4\pi R^2} \quad (٧)$$

ویولت پواسن یکی دیگر ازانواع توابع پایه شعاعی است که نخستین بار توسط هالچسیندر و همکاران (۲۰۰۳) معرفی شد*(ویتور،۲۰۰۹)*:

$$\psi(x, y) = \frac{1}{4\pi R^2}(2x_{n+1} + x_n) \quad (٨)$$

$$x_n = \left(|y| \frac{\partial}{\partial |y|}\right) \frac{1}{|x - y|} \quad (٩)$$

1- Ill-posed

2- Low-pass filter

$$\psi_l = \frac{(2l+1)}{4\pi R^3} l^n |y|^l \qquad (۱۰)$$

بررسی کرنل ویولت پواسن درحوزه طیفی نشان می‌دهد که تغییر مرتبه n، اثری معادل با تغییرعمق دارد اما مرتبه‌های بالاتر ویولت پواسن شیب شدیدتری نسبت به مرتبه‌های پایین درعمق‌های مشابه دارند *(ویتور،۲۰۰۹)*. کرنل پواسن نیز نوع دیگری از توابع پایه شعاعی است که معادل ویولت پواسن مرتبه صفر می‌باشد و با استفاده از رابطه‌ی تحلیلی زیر بیان می‌شود *(کلیس و همکاران،۲۰۰۸)*:

$$\psi(x,y) = \frac{1}{4\pi R}\frac{|x|^2 - |y|^2}{|x-y|^3} \qquad (۱۱)$$

کرنل پواسن مانند کرنل چندقطبی شعاعی ویژگی‌های فیلتر باند محدود را دارد. ضرایب لژاندر متناظر به کرنل پواسن به صورت زیر تعریف می‌شوند *(کلیس و همکاران،۲۰۰۷)*:

$$\psi_l = \frac{(2l+1)}{4\pi R^3}|y|^l \qquad (۱۲)$$

۳. میدان گرانی زمین بر حسب توابع پایه‌ی شعاعی

آنومالی پتانسیل ثقل زمین در فضای خارج سطح زمین، یک تابع هارمونیک و منظم است که بر اساس قضیه‌ی رونگه-کراراپ می‌توان آن را بر حسب ترکیبی خطی از توابع پایه‌ی غیر متعامد نمایش داد *(مارچنکو،۱۹۹۸)*.

به بیان دیگر، آنومالی پتانسیل ثقل T در بیرون کره‌ی بیرهامر به شعاع R می‌تواند توسط ترکیبی خطی از تعداد محدودی از توابع پایه‌ی شعاعی کروی که توابعی غیر متعامد هستند، به صورت زیر بیان شود *(ویتور،۲۰۰۹)*:

$$T(x) = \frac{GM}{R}\sum_{n=1}^{N}\alpha_n \psi_n(x, y_n) \qquad (۱۳)$$

در رابطه‌ی (۱۳)، نقطه‌ی ارزیابی آنومالی پتانسیل ثقل، مرکز تابع پایه‌ی شعاعی، ضرایب مقیاس بسط توابع پایه‌ی شعاعی، تعداد توابع پایه، و حاصل‌ضرب ثابت جهانی نیوتن در جرم زمین است. بدین ترتیب، هدف از مدل‌سازی محلی میدان ثقل، تعیین مراکز، عمق‌ها و ضرایب مقیاس توابع پایه شعاعی با استفاده از تعداد مشخصی از تابک‌های خطی میدان گرانی زمین می‌باشد. آنومالی جاذبه، نوسان جاذبه و آنومالی ارتفاعی از جمله تابک‌های خطی میدان گرانی زمین هستند که به کرات در مدل‌سازی‌های محلی میدان مورد استفاده قرار می‌گیرند و به ترتیب در روابط زیر نشان داده شده‌اند *(موریتز، ۱۹۸۰)*:

$$\Delta g(x) = \frac{-2}{|x|}T(x) - \frac{\partial T(x)}{\partial |x|} \qquad (۱٤)$$

$$\delta g(x) = -\frac{\partial T(x)}{\partial |x|} \qquad (۱۵)$$

$$\zeta(x) = \frac{T(x)}{\gamma(x')} \qquad (۱٦)$$

در روابط بالا x نقطه‌ای بر روی سطح زمین ، x' نقطه متناظر آن بر روی سطح تلوروئید و γ جاذبه نرمال می‌باشد. با توجه به اینکه در این تحقیق تنها از مشاهدات آنومالی جاذبه برای مدل‌سازی محلی میدان گرانی استفاده شده، در ادامه سیستم معادلات مشاهداتی تنها برای این نوع تابعک سازماندهی می‌شود. عملگر آنومالی جاذبه بر حسب توابع پایه شعاعی به صورت زیر تعریف می‌شود *(ویتور،۲۰۰۹)* :

$$\Delta g(x_i) = \sum_{n=1}^{N}\alpha_i D_{\Delta g}\psi(x_i, y_n) \qquad (۱۷)$$

در رابطه‌ی (۱۷)، $\Delta g(x_i)$ آنومالی جاذبه است که در نقطه‌ی x_i ارزیابی می‌شود و $D_{\Delta g}$ عملگر آنومالی جاذبه می‌باشد که با استفاده از رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$D_{\Delta g} = \frac{-\partial}{\partial |x_i|}(\Psi(x_i, y_i)) - \frac{2}{|x_i|}\Psi(x_i, y_i) \qquad (۱۸)$$

بدین ترتیب، می‌توان سیستم معادلات مشاهداتی را بر حسب مشاهدات آنومالی جاذبه با استفاده از رابطه‌ی (۱۸) تشکیل داد.

$$l = AX \qquad (۱۹)$$

در رابطه‌ی بالا (رابطه ۱۹)، l بردار مشاهدات شامل مشاهدات آنومالی شتاب جاذبه، A ماتریس ضرایب و X بردار مجهولات مدلسازی شامل ضرایب مقیاس توابع پایه‌ی شعاعی (α) و موقعیت مراکز توابع پایه شعاعی(λ, φ, r) است. شکل ماتریسی سیستم معادلات مشاهداتی با استفاده از دستگاه (۲۰) نمایش داده می‌شود:

(۲۰)
$$\begin{bmatrix} \Delta g(x_1) \\ \Delta g(x_2) \\ \vdots \\ \Delta g(x_{I-1}) \\ \Delta g(x_I) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(x_1, y_1) & . & . & . & \phi(x_1, y_N) \\ \phi(x_2, y_1) & . & . & . & \phi(x_2, y_N) \\ \vdots & . & . & . & \vdots \\ \phi(x_{I-1}, y_1) & . & . & . & \phi(x_{I-1}, y_N) \\ \phi(x_I, y_1) & . & . & . & \phi(x_I, y_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \lambda_1 \\ \varphi_1 \\ r_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \\ \lambda_N \\ \varphi_N \\ r_N \end{bmatrix}$$

تعیین مجهولات مدلسازی با استفاده از مشاهدات آنومالی جاذبه به عنوان یک مسئله‌ی معکوس غیرخطی در ژئودزی شناخته می‌شود که برای بدست آوردن مجهولات مسئله به یک روش پایدارسازی غیرخطی نیاز است. یکی از پرکاربردترین روش‌های پایدارسازی غیرخطی، الگوریتم لونبرگ- مارکواردت می‌باشد که در بخش بعدی درباره‌ی این الگوریتم به تفصیل توضیح داده شده‌است.

٤. حل مسئله معکوس و پایدارسازی

الگوریتم لونبرگ- مارکواردت یکی از پرکاربردترین الگوریتم‌های پایدارسازی برای حل مسائل معکوس غیرخطی است. این الگوریتم روشی بین روش نیوتن و روش گرادیان نزولی است. هدف از این الگوریتم یافتن جواب مسائل مینیمم سازی کمترین مربعات غیرخطی است و جواب این مسئله به صورت تکراری از طریق رابطه زیر محاسبه می‌شود *(تیاگی، ۲۰۱۱)*:

$$\Delta x_k = -(H + \mu diag(H))^{-1} J(x_k)^T r(x_k) \qquad (۲۱)$$

در رابطه‌ی (۲۱)، X_k بردار پارامترهای مجهول، Δx_k بردار تغییرات پارامترها در k امین تکرار، $J(x)$ ماتریس ژاکوبین، $H = J(x_k)^T J(x_k)$ ماتریس هسین، $r(x_k)$ بردار باقیمانده‌ها که به صورت تفاضل بین تابعک‌های مشاهده شده و برآورد شده تعریف می‌شود، و μ پارامتر پایدارسازی است. نحوه‌ی تعیین پارامتر پایدارسازی به این صورت است که اگر خطای خروجی در مرحله‌ای کاهش یابد، μ را با استفاده از یک ضریب ثابت کاهش می‌دهند تا اثر گرادیان نزولی کاهش یابد و برعکس اگر خطای خروجی در مرحله‌ای افزایش یابد، به منظور افزایش اثر گرادیان نزولی μ را با همان ضریب ثابت افزایش می‌دهند. در هر مرحله از تکرار، مقادیر جدید مجهولات به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i \qquad (۲۲)$$

به منظور افزایش کارایی عددی الگوریتم لونبرگ- مارکواردت، رابطه‌ای برای تعیین مقدار اولیه‌ی پارامتر پایدارسازی و روشی برای به‌هنگام‌سازی آن در نظر گرفته شد. رابطه‌ی ارائه شده برای تعیین مقدار اولیه‌ی پارامتر پایدارسازی بر اساس ارزیابی ماتریس ژاکوبین مجهولات به ازای مقادیر اولیه‌ی پارامترهای توابع پایه‌ی شعاعی است *(گاوین،۲۰۱۳)*. به منظور افزایش کارایی عددی الگوریتم لونبرگ-مارکواردت، این الگوریتم با ارائه‌ی رابطه‌ای مناسب برای تعیین مقدار اولیه‌ی پارامتر پایدارسازی و روشی برای به هنگام‌سازی آن بهبود داده می‌شود. مقدار اولیه‌ی پارامتر پایدارسازی را می‌توان با استفاده از رابطه‌ی (۲۳) تعیین کرد *(گاوین،۲۰۱۳)*.

$$\mu_0 = \max\left(diag\left(J(x_0)^T J(x_0) \right) \right) \qquad (۲۳)$$

در رابطه‌ی فوق، $J(x_0)$ ماتریس ژاکوبین ارزیابی شده به ازای مقادیر اولیه‌ی مجهولات x_0 و μ_0 یک ضریب ثابت دلخواه است. در الگوریتم لونبرگ- مارکواردت، مقدار پارامتر پایدارسازی در هر مرحله بر رفتار سیستم معادلات مشاهداتی تأثیر می‌گذارد. انتخاب نامناسب پارامتر پایدارسازی می‌تواند موجب کاهش سرعت همگرایی به جواب مینیمم مطلق، همگرایی به جواب مینیمم نسبی، و یا ناپایداری سیستم معادلات مشاهداتی گردد *(آراندا، ۲۰۰٤)*. به همین دلیل، در این تحقیق روشی مناسب برای به هنگام‌سازی پارامتر پایدارسازی ارائه می‌شود. در این روش پارامتر ρ به صورت یک عدد ثابت درنظر گرفته می‌شود *(گاوین،۲۰۱۳)*

$$\rho_k = \alpha_0 \qquad (۲٤)$$

در صورتی که خطای خروجی در یک تکرار کاهش یابد، پارامتر P جایگزین مقدار به دست آمده در رابطه (۲٤)

می‌شود و پارامتر پایدارسازی(μ) با استفاده از رابطه‌ی (۲۵) به هنگام می‌شود *(گاوین،۲۰۱۳)*.

$$\mu_{k+1} = \mu_k \times \max[1/3, 1-(2\times P_k - 1)^3] \qquad (۲۵)$$

در رابطه‌ی (۲۵)، P_k در هر تکرار با استفاده از رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود*(گاوین،۲۰۱۳)*.

$$P_k = \frac{e(x_k) - e(x_{k-1})}{\sigma_k^2} \qquad (۲۶)$$

در رابطه‌ی (۲۶)، مجموع مربعات باقیمانده‌ها، و مجموع تغییرات پارامترها و باقیمانده‌ها است که به صورت زیر تعریف می‌شود*(گاوین،۲۰۱۳)*.

$$\sigma_k{}^2 = 2\Delta x_k{}^T \left(\mu\Delta x_k + J\left(x_k\right)^T r\left(x_k\right)\right) \qquad (۲۷)$$

در صورت افزایش خطای خروجی در یک تکرار، پارامتر پایدارسازی به ترتیب زیر به هنگام می‌شود *(گاوین،۲۰۱۳)*

$$\mu_{k+1} = \mu_k \rho_k \quad \text{و} \quad \rho_{k+1} = \alpha_0 \rho_k \qquad (۲۸)$$

۵. مطالعه موردی: منطقه‌ی فارس ساحلی

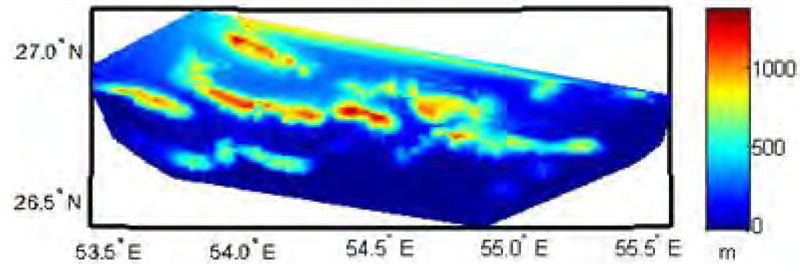
به منظور بررسی کارایی انواع مختلف توابع پایه‌ی شعاعی کروی در مدل‌سازی محلی میدان گرانی زمین، منطقه‌ی فارس ساحلی در محدوده‌ی طول جغرافیایی $53.42 < \lambda < 55.58$ و عرض جغرافیایی $26.54 < \varphi < 27.28$ در نظر گرفته شد. مجموعه داده‌های این منطقه شامل مشاهدات شتاب گرانی در ۶۳۵۰ نقطه است که از بین آنها تعداد ۱۰۶ نقطه به عنوان نقطه‌ی کنترل انتخاب شد. علاوه بر این، از ٤ نقطه‌ی GPS/Leveling موجود در این منطقه به عنوان نقاط کنترل ارتفاعی برای ارزیابی دقت مدل‌های ژئوئید محاسبه شده با انواع مختلف توابع پایه‌ی شعاعی استفاده شد. تغییرات ارتفاعی و تغییرات شتاب گرانی منطقه‌ی فارس ساحلی به ترتیب در نگاره‌های (۱) و (۲) نمایش داده شده است. ابتدا با کم کردن شتاب گرانی نرمال از مشاهدات شتاب جاذبه، آنومالی جاذبه در نقاط مشاهداتی و نقاط کنترل این منطقه بدست آمد. برای محاسبه‌ی شتاب گرانی نرمال از رابطه‌ی سومیگالیانا- پزتی *(هکینن و موریز، ۱۹۶۷)* استفاده شد. تغییرات آنومالی جاذبه در منطقه‌ی مورد بررسی در نگاره (۳) نمایش داده شده است. سپس، مشاهدات آنومالی جاذبه با اعمال تصحیح هوای آزاد به داده‌های آنومالی جاذبه‌ی هوای آزاد تبدیل شدند. رابطه‌ی تصحیح هوای آزاد به صورت زیر می باشد *(صفری،۲۰۱۱)*.

$$\Delta g^{FA} = 0.3086 H_P^0 \qquad (۲۹)$$

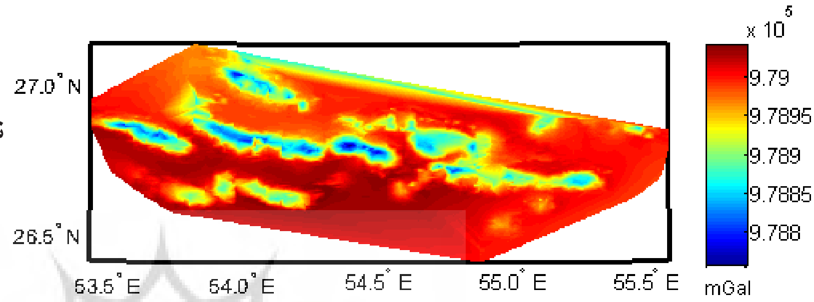
در رابطه‌ی (۲۹)، H_P^0 ارتفاع اورتومتریک نقطه P می‌باشد.

برای محلی‌سازی مشاهدات آنومالی جاذبه‌ی هوای آزاد مورد نیاز برای کاربردهای محلی، اثر جهانی میدان با استفاده از هارمونیک‌های کروی تا درجه و مرتبه ۳۶۰ از روی مشاهدات حذف شد. لازم به ذکر است که ضرایب هارمونیک‌های کروی با استفاده از مدل EGM2008 به دست آمد. بدین ترتیب، مشاهدات آنومالی جاذبه هوای آزاد باقیمانده برای مدل‌سازی محلی میدان گرانی در منطقه‌ی فارس ساحلی به دست آمد که تغییرات آن در نگاره (٤) نشان داده شده است.

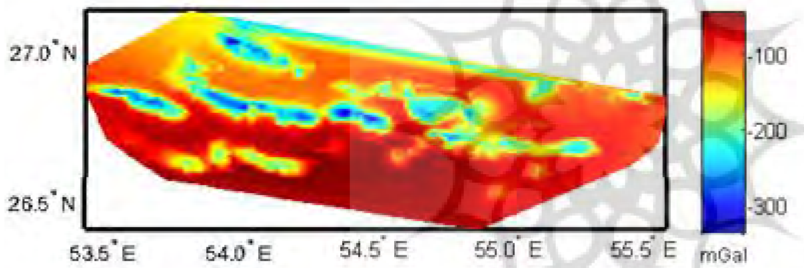
برای تعیین پارمترهای هر یک از انواع توابع پایه‌ی شعاعی، ابتدا ۱۶۹ تابع پایه در یک شبکه‌ی گرید منظم چیده شدند. سپس عمق اولیه‌ی این توابع به صورت تجربی مشخص شد. بدین ترتیب با تعیین موقعیت اولیه‌ی مراکز و عمق RBFها، ضرایب مقیاس اولیه‌ی آنها از طریق سرشکنی کمترین مربعات خطی تعیین می‌شود. پس از تعیین مقادیر اولیه‌ی مجهولات، پارامترهای توابع پایه‌ی شعاعی با تشکیل سیستم معادلات مشاهداتی براساس مشاهدات آنومالی جاذبه‌ی هوای آزاد باقیمانده با استفاده از الگوریتم لونبرگ مارکواردت طی یک پروسه‌ی تکراری بهینه‌سازی شدند. پس از برآورد مقادیر بهینه‌ی پارامترهای کرنل‌های جرم نقطه‌ای، چندقطبی شعاعی مرتبه ۲، ویولت پواسن مرتبه ۲ و کرنل پواسن آنومالی جاذبه‌ی هوای آزاد باقیمانده در نقاط مشاهداتی محاسبه شد. در نگاره (۵)، تغییرات آنومالی جاذبه‌ی هوای آزاد باقی‌مانده محاسبه شده به روش پیشنهادی برای هر ٤ نوع کرنل تابع پایه‌ی شعاعی نشان داده شده است. با تعریف باقیمانده‌های سرشکنی به صورت تفاضل بین آنومالی جاذبه‌ی هوای آزاد باقی‌مانده‌ی



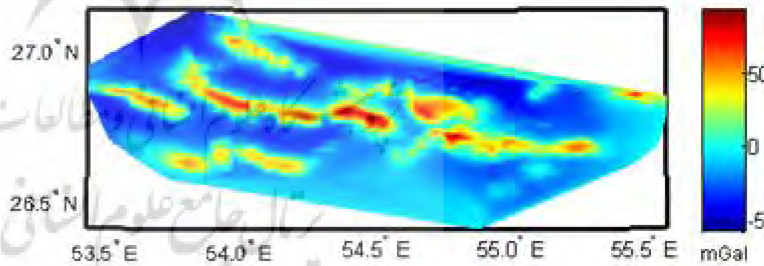
نگاره۱: تغییرات ارتفاعی منطقه‌ی مورد بررسی (متر)



نگاره ۲: تغییرات شتاب گرانی مشاهده شده در منطقه مورد بررسی (میلی‌گال)



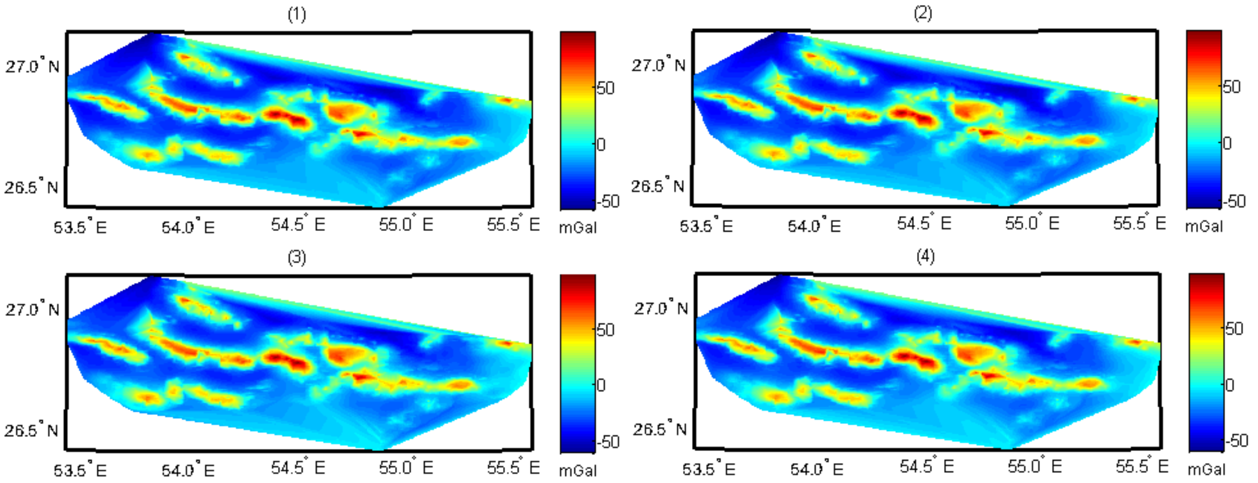
نگاره ۳: تغییرات آنومالی جاذبه در منطقه مورد بررسی (میلی‌گال)



نگاره ٤: تغییرات آنومالی جاذبه‌ی هوای آزاد باقیمانده در منطقه مورد بررسی (میلی‌گال)

مشاهده شده و مدلسازی شده با استفاده از توابع پایه‌ی شعاعی، تغییرات این باقیمانده‌ها در نگاره (٦) نشان داده شده است. در جدول (١) اطلاعات آماری مربوط به هر یک از مدل‌های محاسبه شده با استفاده از کرنل جرم نقطه‌ای، چندقطبی شعاعی مرتبه ٢، ویولت پواسن مرتبه ٢و کرنل پواسن آورده شده است. مقایسه‌ی نتایج حاصل از کرنل‌های مختلف نشان می‌دهد که دقت‌های به دست آمده برای هر کدام از کرنل‌ها به یکدیگر بسیار نزدیک می‌باشند. با توجه به اینکه برای کرنل‌های مختلف عمق‌های متفاوتی انتخاب شده، می‌توان نتیجه گرفت که با انتخاب عمق مناسب برای هر کدام از این کرنل‌ها، به دقت‌های مشابهی برای مدلسازی میدان گرانی زمین می‌رسیم.

به منظور بررسی عملکرد کرنل‌های مختلف توابع پایه‌ی شعاعی در محاسبه‌ی مدل ژئوئید، دقت ارتفاعات ژئوئید در ٤ نقطه‌ی GPS/Leveling بررسی شد. ارتفاع ژئوئید این نقاط به این ترتیب محاسبه شدند که ابتدا آنومالی پتانسیل باقیمانده با حذف اثر جهانی میدان با استفاده از مدل EGM2008 تا درجه و مرتبه‌ی ٣٦٠ محاسبه شده و



نگاره ۵: تغییرات آنومالی جاذبه‌ی هوای آزاد باقی‌مانده مدل‌سازی شده با استفاده از (۱) کرنل جرم نقطه‌ای، (۲) چند قطبی شعاعی مرتبه ۲، (۳) ویولت پواسن مرتبه ۲، و (٤) کرنل پواسن (میلی‌گال)

جدول۱: دقت مدل‌های آنومالی جاذبه‌ی هوای آزاد باقیمانده با استفاده از انواع مختلف توابع پایه‌ی شعاعی (میلی‌گال)

نوع تابع پایه‌ی شعاعی	عمق توابع پایه‌ی شعاعی (کیلومتر)	تعداد توابع پایه‌ی شعاعی	مینیمم	ماکزیمم	میانگین	انحراف معیار
کرنل جرم نقطه‌ای	۱۸/۷۵	۱٦۹	-۱۰/٥٤	۱۰/۸۳	-۱/۹٦	۱/٥٦
چندقطبی شعاعی مرتبه ۲	۱۸/۷۵	۱٦۹	-۹/٥۷	۹/۹۲	۰/۰۰۱۳	۱/٤٥
ویولت پواسن مرتبه ۲	۱۹/۱٥	۱٦۹	-۱۳/۱۰	۱۰/۸٤	۰/۰۰۲	۱/۸۹
کرنل پواسن	۱۸/۸۳	۱٦۹	-۱۰/٦۸	۹/۹،۷٦۷٦	-۰/۰۲۸	۱/٤۲

سپس آنومالی پتانسیل باقیمانده در این نقاط با استفاده از پارامترهای توابع پایه‌ی شعاعی برآورد شد. با جمع آنومالی پتانسیل جهانی محاسبه شده با استفاده از هارمونیک‌های کروی و آنومالی پتانسیل باقیمانده‌ی محاسبه شده با استفاده از توابع پایه‌ی شعاعی و استفاده از فرمول برنز در میدان نرمال سومیگلیانا-پزتی *(اردلان و گرافاند،۲۰۰۱)*، ارتفاع شبه ژئوئید در این نقاط کنترل ارتفاعی به دست آمد. سپس با اعمال تصحیح شبه ژئوئید (اختلاف بین سطوح ژئوئید و شبه ژئوئید)، ارتفاع ژئوئید در این نقاط بدست آمد. رابطه‌ی تصحیح شبه ژئوئید به صورت زیر می‌باشد *(فدرستون و کربای، ۱۹۹۸)*

$$N-\zeta \approx \frac{\Delta g^{B}}{\overline{\gamma}}H \qquad (۳۰)$$

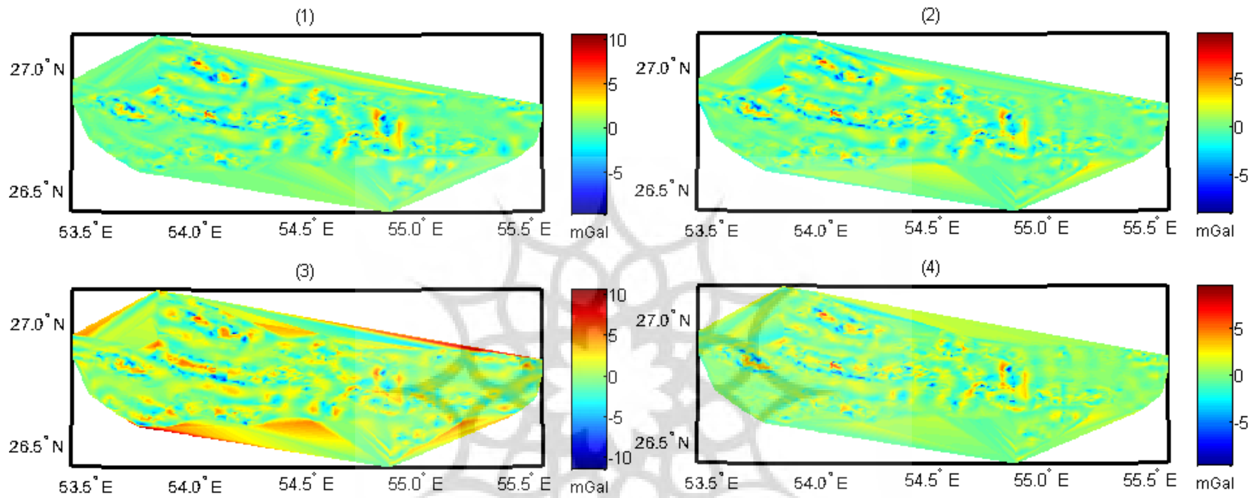
در رابطه‌ی فوق،H ارتفاع اورتومتریک، Δg^{B} آنومالی جاذبه‌ی بوگه و $\overline{\gamma}$ میدان نرمال سومیگلیانا-پزتی است. اطلاعات آماری مربوط به اختلاف ارتفاع ژئوئید به دست آمده با استفاده از انواع کرنل‌های توابع پایه‌ی شعاعی و ارتفاع ژئوئید مشاهده شده در نقاط GPS/Leveling در جدول (۲) ارائه شده است. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که دقت ژئوئید برای کرنل‌های مختلف یکسان است. در نگاره (۷) مدل ژئوئید محاسبه شده با استفاده از هر ٤ نوع کرنل تابع پایه‌ی شعاعی نشان داده شده است.

٦. بحث و نتیجه‌گیری

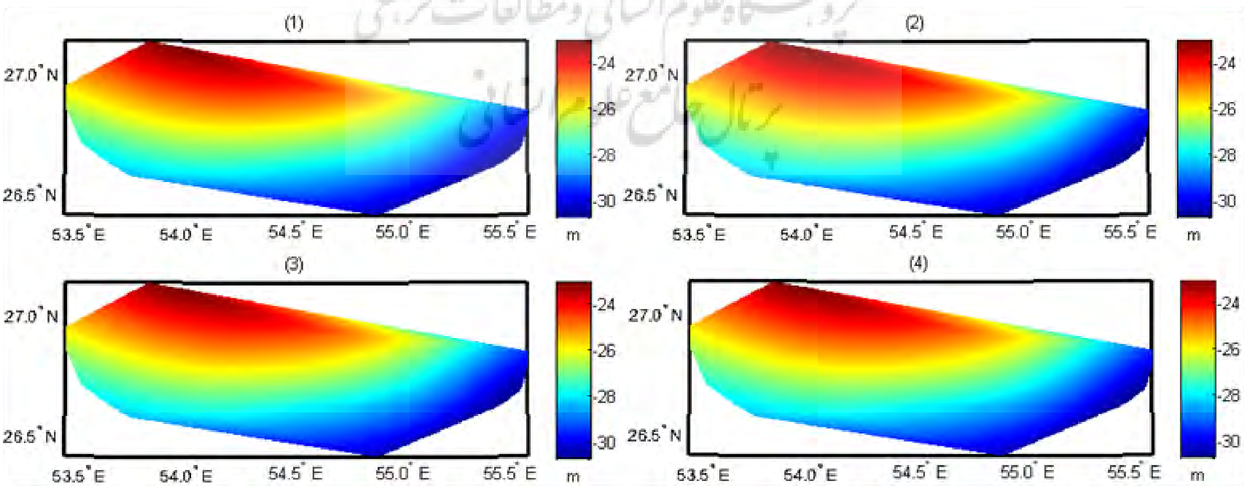
در این تحقیق عملکرد انواع مختلف توابع پایه‌ی شعاعی در مدل‌سازی محلی میدان گرانی زمین با استفاده از داده‌های شتاب گرانی در منطقه‌ی فارس ساحلی مورد

جدول۲: برآورد دقت ژئوئید در نقاط GPS/Levelling با استفاده از انواع مختلف توابع پایه‌ی شعاعی کروی (متر)

نوع تابع پایه‌ی شعاعی	عمق توابع پایه‌ی شعاعی (کیلومتر)	تعداد توابع پایه‌ی شعاعی	مینیمم	ماکزیمم	میانگین	انحراف معیار
کرنل جرم نقطه‌ای	۱۸/۷۵	۱۶۹	۰/۰۳۶۷۲	۰/۳۳۱۸٤	۰/۱٤۷۸۰۵	۰/۱۲۷٦٤۹
چندقطبی شعاعی مرتبه ۲	۱۸/۷۵	۱۶۹	۰/۰۳٦۷۳	۰/۳۳۱۸۵	۰/۱٤۷۸۱۹	۰/۱۲۷٦۵۰
ویولت پواسن مرتبه ۲	۱۹/۱۵	۱۶۹	۰/۰۳٦۷٤	۰/۳۳۱۸٦	۰/۱٤۷۸۳۲	۰/۱۲۷٦٤۹
کرنل پواسن	۱۸/۸۳	۱۶۹	۰/۰۳٦۷۳	۰/۳۳۱۸۵	۰/۱٤۷۸۱۸	۰/۱۲۷٦٤۹



نگاره ٦: تغییرات باقیمانده‌های سرشکنی محاسبه شده با استفاده از (۱) کرنل جرم نقطه‌ای، (۲) چند قطبی شعاعی مرتبه ۲، (۳) ویولت پواسن مرتبه ۲، و (٤) کرنل پواسن (میلی‌گال)



نگاره ۷: مدل ژئوئید محاسبه شده با استفاده از (۱) کرنل جرم نقطه‌ای، (۲) چند قطبی شعاعی مرتبه ۲، (۳) ویولت پواسن مرتبه ۲، و (٤) کرنل پواسن (متر)

بررسی قرار گرفت. کرنل جرم نقطه‌ای، چندقطبی شعاعی مرتبه ۲، کرنل پواسن و ویولت پواسن مرتبه ۲، انواع متداول توابع پایه‌ی شعاعی در مدلسازی میدان گرانی زمین هستند که در این تحقیق مورد بررسی قرار گرفتند.

برای هر یک از این کرنل‌های توابع پایه‌ی شعاعی، پارامترهای توابع شامل مراکز، عمق‌ها، و ضرایب مقیاس به طور همزمان به روش کمترین مربعات و با استفاده از الگوریتم غیرخطی لونبرگ مارکواردت طی یک پروسه‌ی تکراری تعیین شدند.

مقایسه عملکرد کرنل‌های مختلف توابع پایه‌ی شعاعی نشان داد که در مدل‌سازی محلی میدان‌گرانی زمین با استفاده از توابع پایه شعاعی، در صورت انتخاب عمق مناسب برای این توابع، کرنل‌های مختلف به مدل‌هایی با دقت‌های مشابه منتج می‌شوند.

نتایج به دست آمده در جدول (۲) برای نقاط کنترل GPS/Levelling نشان می‌دهد که مقادیر دقت برای این کرنل‌ها در رقم پنجم و ششم اعشار متفاوت است که این دلیلی برای صحت کار انجام شده می‌باشد.

از نکات برجسته‌ی این تحقیق می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- مقایسه‌ی عملکرد انواع مختلف توابع پایه‌ی شعاعی و تأثیر آنها بر مدل‌سازی محلی میدان گرانی زمین
- کاهش تعداد توابع پایه‌ی شعاعی مورد نیاز برای مدلسازی میدان گرانی زمین در مقایسه با تعداد مشاهدات موجود در منطقه
- حل همزمان پارامترهای مجهول توابع پایه‌ی شعاعی با استفاده از الگوریتم پایدارسازی غیرخطی لونبرگ- مارکواردت
- ارائه‌ی رابطه‌ای مناسب برای تعیین مقدار اولیه‌ی پارامتر پایدارسازی در الگوریتم لونبرگ- مارکواردت
- ارائه‌ی روشی مناسب برای به هنگام سازی پارامتر پایدارسازی در الگوریتم لونبرگ مارکواردت بر مبنای مقادیر پارامترهای مجهول مدلسازی در هر تکرار.

منابع و مآخذ

۱- صفری ع، (۱۳۹۰)، ژئودزی فیزیکی، انتشارات دانشگاه تهران.

۲- صفری ع، فروغی ا، شریفی م، (۱۳۹۲)، مدل‌سازی محلی میدان گرانی با استفاده از تابع‌های پایه شعاعی بررسی موردی: مدل‌سازی میدان گرانی در سواحل خلیج فارس، فیزیک زمین و فضا، (۳۹)۳، ۴۸-۳۳.

3. Antoni M, Keller W, Weigelt M. (2009). Recovery of residual GRACE-observations by radial base functions. VII. Hotine-Marussi Symposium on Theoretical Geodesy.

4. Araneda, A. (2004). Variation of the Levenberg Marquardt method:An attemp to improve efficiency. Massachusette Institude of technology.

5. ArdalanA.A,GrafarendE.W. (2001). Ellipsoidal geoidal undulations (ellipsoidal Bruns formula). Journal of Geodesy, 75(9-10), 544-552.

6. Barthelmes.F. (1986). Untersuchungen zur Approximation des äußeren Gravitationsfeldes der Erde durch Punktmassen mit optimierten Positionen. Veroffentlichungen des Zentralinstituts Physik, 122.

7. BarthelmesF. (1988). Local gravity field approximation by point masses with optimized positions. Geodesy and Physics of the Earth. Proc: 6th international symposium.

8. Bentel K, Schmidt M, Gerlach C. (2012). Different radial basis functions and their applicability for regional gravity field representation on the sphere. Springer.

9. Claessens S.J, Featherstone W.E, Barthelmes F. (2001). Experiences with point-mass gravity field modelling in the Perth region, Western Australia. Geomatics Research Australasia, 53-86.

10. Eicker.A,Mayer-Gürr.T,Ilk.K.H. (2004). Global gravity field solutions from GRACE SST data and regional refinements by GOCE SGG observations. Proceedings IAG international symposium gravity.Porto, Portugal: geoid and space missions.

11. Featherstone.W ,Kirby.J. (1998). Estimates of the separation between the Geoid and the Quasi-Geoid over austrolia. Geomatics Research Australasia, 79-90.

12. Gavin.H. (2011). The Levenberg-Marquardt method

estimation of a multi-resolution representation of the gravity field based on spherical harmonics and wavelets. Journal of geodynamics, 39(5), 512-526.

26. Schmidt M, Fabert O, Shum C.k, Han.S.C. (2004). Gravity field determination using multiresolution techniques. GOCE User Workshop: GOCE, The Geoid and Oceanography. Proc: ESA.

27. Schmidt M, Fengler M, Mayer-Gürr T. (2007). Regional gravity modeling in terms of spherical base functions. Journal of Geodesy, 17-38.

28. Vermeer M. (1982). The use of mass point models for describing the Finnish gravity field. Gävle. Sweden: 9th meeting of the Nordic Geodetic Commission.

29. Vermeer M. (1983). A new SEASAT altimetric geoid for the Baltic.

30. Vermeer M. (1984). Geoid studies on Finland and the Baltic.

31. Vermeer M. (1995). Mass point geopotential modelling using fast spectral techniques; historical overview, toolbox description, numerical experiment. Manuscr. Geod, 20, 362-378.

32. Wittwer TB. (2009). regional gravity field modelling with radial basis functions. TU Delft: Doctoral dissertation.

for nonlinear least squares curve-fitting problems. Duke University: Department of Civil and Environmental Engineering.

13. Heikkinen.M. (1981). Solving the shape of the earth by using digital density models. Rep. Finnish Geod, 81.

14. Heiskanen WA, Moritz M. (1967). Physical geodesy. Bulletin Géodésique, 86(1), 491-492.

15. Klees R, Wittwer T. (2007). A data-adaptive design of a spherical basis function network for gravity field modelling. Dynamic Planet, 322-328.

16. Klees R, Wittwer T. (2007). Local gravity field modelling with multi-pole wavelets. Dynamic Planet, 303-308.

17. Klees.R , Tenzer. R , Prutkin.I , Wittwer.T. (2008). A data-driven approach to local gravity field modelling using spherical radial basis functions. Journal of Geodesy, 457-471.

18. Lehmann R. (1993). The method of free-positioned point masses'geoid studies on the Gulf of Bothnia. Bulletin géodésique, 31-40.

19. Lin M, Denker H, Müller J. (2015). Regional Gravity Field Modeling by Radially Radially Optimized Point Masses: Case Studies with Synthetic Data. Springer, 1-7.

20. M.Schmidt,M.Fengler,T.Mayer-Gürr. (2007). Regional gravity modeling in terms of spherical base functions. Journal of Geodesy, 17-38.

21. Marchenko A.N , Barthelmes F, Meyer U, Schwintzer.P. (2002). Efficient regional geoid computations from airborne and surface gravimetry data: a case study. Springer Berlin Heidelberg, 223-228.

22. Marchenko A.N. (1998). Parameterization of the Earth's Gravity field, point and line singularities. Astronomical and Geodetic Society.

23. Marchenko AN, Barthelmes F, Meyer U, Schwintzer P. (2001). Regional geoid determination: an application to airborne gravity data in the Skagerrak. Geoforschungszentrum, 50.

24. Pavlis N.K, Holmes S.A, Kenyon S.C, Factor J.K. (2012). development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008). Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 118(B4).

25. Schmidt M, Fabert O, Shum C.K. (2005). On the