Journal of Higher Education Curriculum Studies Vol.6, No.12, 35-70

دوفصلنامه مطالعات برنامه درسی آموزش عالی
سال ۶، شماره ۱۲، پاییز و زمستان ۱۳۹۴، ۷۰- ۳۵

نقش استدلال‌های ترکیبیاتی در آموزش ریاضی دانشگاهی

The Role of Combinatorial Reasoning in University Mathematics

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۴/۲/۱۱، **تاریخ ارزیابی**: ۱۳۹۴/۳/۱۳، **تاریخ پذیرش مقاله**: ۱۳۹۴/۵/۱۵

دکتر مانی رضائی[1]

Dr.Mani Rezaei

چکیده: در حل مسایل ترکیبیات در ریاضی، تنوع روش‌های ترکیبیاتی برای اثبات قضیه‌ها و استفاده از ابزارهای مختلف برای ارائه راه حل‌های گوناگون، موجب می‌شود که مسیر استدلال‌های ترکیبیاتی به راه‌های ابتکاری شباهت بیشتری داشته باشند تا به یک رَوِیه عمومی، مانند آنچه که در مباحثی مانند جبر یا آنالیز به چشم می‌خورد. این ویژگی موجب می‌شود که بسیاری از یادگیرندگان، با هدف به‌دست آوردن رویه‌های کلی، برای رده‌بندی مسئله‌های ترکیبیاتی تلاش کنند. مشاهدات تجربی نشان می‌دهد که معمولاً آنان در مسیر این تلاش، ابتدا مسئله‌های ترکیبیاتی را دسته‌بندی می‌کنند و سپس، یک فرمول برای هر حالت به‌خاطر می‌سپارند. مشکل زمانی آشکار می‌شود که تعداد حالت‌ها بیش از حدی است که یادگیرنده بتواند از آن‌ها، به‌عنوان رویه‌ای کارآمد استفاده کند. مطالعه حاضر، در ادامه پژوهشی در خصوص یادگیری مباحث ترکیبیات است که با هدف شناسایی چگونگی توسعه تفکر ترکیبیاتی انجام شده است. در این مقاله، استفاده از استدلال‌های ترکیبیاتی در آموزش، به‌عنوان آخرین گام شناخته شده در تفکر ترکیبیاتی، مورد مطالعه قرار گرفته است.

کلمات کلیدی: اثبات ریاضی، استدلال ترکیبیاتی، تفکر ترکیبیاتی، حل مسئله، روش تدریس ریاضی دانشگاهی.

Abstract: For proving and solving combinatorial theorems and problems, variety of creative methods are needed, as opposed to more classic fields such as algebra and analysis that their proving and solution methods are more routine. This charachteristic of combinatorics problems push many learners to find general methods by classifying its problems. Empirical evidence shows that at first, many students classify combinatorial problems and then, memorize one formula for each class. However, the difficulty becomes evident, when the number of classes become so big that a learner, is not able to use them as an efficient procedure. This study is a follow up to previous research on students conception of combinatorial concepts. In this paper, the use of combinatorial reasoning in teaching as last step in the combinatorial thinking, is investigated.

Keywords: mathematical proof, combinatorial reasoning, combinatorial thinking, problem solving, teaching method in university

۱. استادیار دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شهید بهشتی، mani_rezaie@yahoo.com

مقدمه

از چند دهه پیش، شاهد ورود مباحث ترکیبیاتی به‌صورت درس‌های مستقل دانشگاهی در برنامه درسی دانشگاه هستیم که با توسعه کامپیوتر و نقش مباحث ترکیبیاتی در علوم کامپیوتر، توسعه واحدهای درسی گسسته و ترکیبیاتی در مجموعه دروس دانشگاهی، ضرورت و اهمیت بیشتری یافت. در همین راستا، مباحث ترکیبیاتی با شیب ملایمی وارد برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای هم شد و به‌طور ضمنی، در درس‌های ریاضی دوره راهنمایی (متوسطه اول) و درس "ریاضیات جدید" رشته فیزیک- ریاضی، حضور یافت. بالاخره، با تغییر نظام آموزش متوسطه در سال ۱۳۷۱، این مباحث به‌طور رسمی و به‌صورت مستقل و در درس "ریاضیات گسسته" دوره پیش‌دانشگاهی، وارد برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ایدر ایرانشد. از سوی دیگر، بیشتر مسایل ترکیبیاتی با پیش‌نیازی اندک، قابل طرح هستند و به‌همین دلیل، این مباحث در مسایل مسابقه‌ای و المپیادها، جای خود را بیشتر باز کرده‌اند. هم‌چنین، پژوهش (رضائی، ۱۳۹۰) نشان داده است که ماهیت اکثر مسایل ترکیبیاتی، به‌گونه‌ای است که دانش‌آموزان، در سطوح مختلفی از دانش ریاضی، امکانِ اقدام به حل یا حداقل «حمله به آن مسئله» را دارند و همین امکان، مسایل ترکیبیاتی را جذاب می‌کند و باعث می‌شود تا گروه‌های بیشتری از دانش‌آموزان، با این مسایلِ «پیکارجو» و «مبارزطلب»، درگیر شوند.

البته، در حالی که «امکان» بالقوه اقدام به حل مسایل ترکیبیاتی برای بسیاری از دانش‌آموزان وجود دارد، اما میزان آشنایی با مباحث متنوع ترکیبیاتی، تجربه حل انواع مسایل نمونه، یافتن ارتباط‌های مفهومی بین مباحث مختلف ترکیبیاتی و مانند آن، هر یک می‌توانند نقش عمده‌ای بر عملکرد دانش‌آموزان داشته باشند و توانایی حل مسایل متنوع ترکیبیاتی را به‌صورت قابل توجهی افزایش دهند.

با استناد به ادبیات پژوهشی این حوزه، مهم‌ترین دلایل ورود مباحث ترکیبیاتی به دوره متوسطه را می‌توان موارد زیر برشمرد:

- بررسی‌های روان‌شناسانه به‌ویژه روان‌شناسی شناختی و کارهای فیشباین (۱۹۹۷) در زمینه شهود، موجب آن شد تا سن آموزش مباحث ترکیبیاتی، پایین‌تر بیاید.
- کاربرد وسیع مباحث ترکیبیاتی در علوم کامپیوتر، و آشنایی اندک دانش‌آموزان با این مباحث پس از پایان دوره متوسطه، مشکلاتی برای یادگیری دانشجویان به‌همراه داشت. بنابراین، ضرورت ورود مباحث ترکیبیاتی به دوره متوسطه مورد توجه قرار گرفت.

- پیش‌نیاز اندک برای طرح مسایل چالش‌برانگیز ترکیبیاتی، موجب شد تا این مسایل برای بسیاری بخصوص برای دانش‌آموزان علاقه‌مند به ریاضی‌ورزی، جذاب باشد، زیرا بدون ضرورتِ گذر از مسیر طولانی و کلاسیک ریاضی (تعریف، مثال، قضیه)، می‌توانند با مسایل متنوعی روبه‌رو شوند.
- به‌دلیل پیش‌نیاز اندک،عمدتاً در مسابقه‌های ریاضی، از مباحث ترکیبیاتی به‌عنوان «استعدادسنج» یا «علاقه‌سنج» استفاده می‌شود و همین موضوع، عامل دیگری برای ورود این مباحث به برنامه درسی دوره متوسطه شد تا دانش‌آموزان بیشتری را در برگیرد. این آشنایی در مدرسه، باعث شد تا در دانشگاه نیز علاقه‌مندان بیشتری به مسابقه‌های ریاضی جذب شوند.

این ویژگی در تنوع، موجب شده است تا بسیاری از یادگیرندگان با هدف به‌دست آوردن چنین رویه‌های عمومی، به‌دنبال روش‌هایی برای دسته‌بندی مسئله‌های ترکیبیاتی باشند، جستجویی که در بیشتر موارد، با تلاش برای شناسایی موقعیت‌های ظاهری مسایل همراه است. بررسی شواهد نشان از آن دارد که در مسیر این تلاش، بیشتر دانش‌آموزان مسئله‌های ترکیبیاتی را به حالت‌های مختلف دسته‌بندی می‌کنند و سپس با حفظ کردن یک فرمول برای هر حالت، سعی در ساده کردن آن دارند. اما مصاحبه با دانش‌آموزانِ راه‌یافته به دانشگاه، حاکی از آن است که بخش عمده‌ای از این تلاش برای ساده‌سازی، بر دوش معلمان قرار گرفته است و دانش‌آموزان بیشتر به‌عنوان مصرف‌کننده این محصول، از این رده‌بندی استفاده می‌کنند. ارزیابی چرایی و چگونگی این‌که به چه دلایلی این کار توسط دانش‌آموزان انجام نمی‌شود، نیازمند پژوهش‌های متنوعی برای بررسی این موضوع از زاویه‌های گوناگون است.

با این تصویر کلی، پژوهشگر بر آن شد تا فعالیت یادگیرندگان را در حین حل مسئله‌های ترکیبیاتی، مورد مطالعه قرار دهد و استدلال‌های ترکیبیاتی ارائه شده توسط آنان را با عمق بیشتری تجزیه و تحلیل نماید. همچنین با هدف دقت بیشتر، بر مباحثی تمرکز شد که نتایج آن قابل اندازه‌گیری باشد و بدین منظور، مسایل شمارشی (به‌عنوان نوعی از مسایل ترکیبیاتی) انتخاب شدند.

پیشینه پژوهش

برای بررسی پیشینه، پژوهش‌های انجام شده در رابطه با تفکر ترکیبیاتی و استدلال‌های ترکیبیاتی مورد توجه قرار گرفت (رضائی، ۱۳۹۰). این بررسی شامل موضوع‌های مرتبط با تفکر ترکیبیاتی است و مسیر کلی این بررسی، با تفکر ریاضی شروع شده،پس از سطح‌بندی تفکر

هندسی، با اشاره به تفکر جبری ادامه یافته و بعد، به چیستی «تفکر ترکیبیاتی» پرداخته می‌شود. اما به‌دلیل نقش اساسی که نظریه ژان پیاژه در ورود مباحث ترکیبیاتی به آموزش عمومی و آموزش عالی داشته است، پیش از همه، به‌صورت اجمالی نظریه پیاژه در مورد رشد و تعریف‌های مقدماتی آن و مرحله‌های متوالی رشد معرفی می‌شود.

ارتباط نظریه پیاژه با تفکر ترکیبیاتی

از نظر پیاژه، کودک حتی اگر نوزاد باشد، موجودی فعال و در تکاپو برای برقراری ارتباط با محیط است. برای مثال، کنجکاوی کودک به او مجال نمی‌دهد صبر کند تا رویدادهای محیطی اتفاق بیافتند، بلکه کودک خود به کندوکاو آن‌ها می‌پردازد و سطوح فزاینده تحریک و برانگیختی را جست‌وجو می‌کند. وقتی که رویداد محیطی بروز می‌کند، کودک به‌گونه‌ای فعل‌پذیر به‌ثبت آن نمی‌پردازد، به‌عکس، آن رویداد را تفسیر می‌کند، و این تفسیر، بر رفتار کودک اثر می‌گذارد. آدمی به‌گونه‌ای غیرفعال به‌ثبت «نسخه‌ای صِرف» از واقعیت نمی‌پردازد، بلکه «رویدادها را تفسیر می‌کند، ساختار می‌بخشد و به همسان‌سازی[1] آن‌ها با طرحواره‌های در اختیار خود می‌پردازد» و به آن‌ها معنی می‌بخشد.

تحقیقات اولیه پیاژه درباره تفکر گسترده است و موضوع دو کتاب وی «تصور کودک از جهان» و «تصور کودک از علیّت فیزیکی» در این باره است. پیاژه دو اصل عمده سازگاری[2] و سازماندهی[3] را در رشد عقلانی مطرح می‌کند، بدین معنا که رشد عقلانی در مسیر سازگاری، به‌طور فزاینده در جریان است و در این فرایند، ذهن ما در پاسخ به تقاضاهای محیط، به‌طور فزاینده‌ای با کارآمدی بیشتر عمل می‌کند و دو فرایند «همسان‌سازی» و «همسازی[4]» به‌عنوان فرایندی دوـسویه[5]، دو جنبه مکمل از فرایند کلی سازگاری هستند.

دومین اصل کلی، یعنی سازماندهی، ناظر بر ماهیت ساختارهای ذهنی است که در سازگاری شرکت دارند. از نظر پیاژه، ذهن به شیوه‌هایی که بسیار پیچیده و وحدت‌یافته هستند،

---

[1] Assimilation
[2] Adaptation
[3] Organization
[4] Accommodation
[5] Two-pronged

ساختاربندی یا سازماندهی می‌شود و ساده‌ترین سطح «طرحواره[۱]» است که عبارت است از بازنمایی ذهنی یک عمل (فیزیکی یا ذهنی) که می‌تواند در مورد یک شیئی انجام شود.

از نظر پیاژه، اگر چه تغییرات در یک مرحله مشخص معمولاً کمّی[۲] و خطی است، اما تفاوت میان مراحل مختلف کیفی[۳]، است؛ وتأکید می‌کند که همه کودکان، *باید* از مرحله‌های رشد ذهنی، به‌ترتیب بگذرند، با وجودی که سرعت این عبور برای همه، یکسان نیست.

پیاژه، تفکر دوره نوجوانی را به‌صورت عمومی نیز مورد بحث قرار داده است. وی تفکر دوره نوجوانی را در چارچوب چندین ویژگی کلی مورد مطالعه قرار داد. نخست این که نوجوان، «واقعیت» را نسبت به «محتمل بودن» در مرحله دوم قرار می‌دهد، یعنی برای نوجوان (در مقابل کودک)، محتمل بودن بر واقعیت اولویت دارد. در رویارویی با یک مسئله علمی، او با مشاهده نتایج تجربی، کار خود را شروع نمی‌کند، بلکه به امکانات ذاتیِ موقعیت می‌اندیشد. او در نظر خویش، مجسم می‌کند که خیلی چیزها ممکن است رخ دهد و تعبیرهای بسیاری از داده‌های حاصل ممکن است به‌عمل آید و هم‌چنین آن‌چه رخ داده است، ممکن است یکی از چندین حالات متفاوتی باشد که در شرایط دیگر رخ می‌دهند. نوجوان به «گزاره‌ها[۴]» توجه دارد نه به «اشیا[۵]». تنها پس از تجزیه و تحلیل فرضیه مورد نظر است که نوجوان، به کسب آن‌گونه داده‌های تجربی می‌پردازد که ممکن است در جهت تأیید یا رد فرضیه او باشند.

دومین ویژگی متمایزعملیات صوری درنظریه پیاژه، خصلت «ترکیبی[۶]» آن است. در رویارویی با عامل‌های گوناگونی که ممکن است در نتیجه یک آزمایش مؤثر باشند، کودک در این مرحله از رشد، معمولاً هر یک از عامل‌ها را تک‌تک می‌آزماید، اما از تأثیر احتمالی ترکیب عامل‌ها با یکدیگر غافل می‌ماند. در مقابل، در رویارویی با مسئله‌ای مانند کشف ترکیبی از پنج ماده شیمیایی بی‌رنگ که مایع زرد رنگ تولید کند، نوجوان به شیوه جامع عمل می‌کند. او یک رنگ را با دو رنگ، یک رنگ را با سه رنگ، و سپس یک رنگ را با چهار رنگ، و ... ترکیب می‌کند تا سرانجام به همه ترکیب‌های ممکن دست یابد. این خود راه دیگری از تسلط دید احتمالی نسبت به واقعیت است. اگر نوجوان هم‌چون کودک، دوره عملیات عینی همه حالت‌های ممکن را در نظر

[۱] Scheme
[۲] Quantitative
[۳] Qualitative
[۴] Propositions
[۵] Objects
[۶] Combinatorial

نمی‌گرفت، در این صورت عملیات او محدود به یک مجموعه آزمایش‌های مجزا از یکدیگر می‌بود. در این مرحله، تفکر نوجوان به یک وضعیت پیشرفته از تعادل[1] می‌رسد این امر گذشته از تلویحات دیگر، این معنی را نیز دارد که ساختارهای شناختی نوجوان به چنان مرحله‌ای از پیشرفت رسیده‌اند که می‌توانند به‌گونه‌ای مؤثر در مسئله‌های متنوع، بسیار به‌کار می‌روند. این ساختارها به‌قدر کافی ثبات یافته‌اند و آمادگی لازم را در هضم و جذب با وضعیت‌های متنوع جدید دارند. بنابراین، می‌توان گفت که نوجوان دیگر نیاز به همساز کردن ساختارهای ذهنی خود با مسئله‌های جدید را ندارد. به اعتقاد پیاژه، در پایان نوجوانی، شیوه‌های تفکر نوجوان، یعنی ساختارهای شناختی[2] او، تقریباً به‌طور کامل شکل گرفته‌اند. در حالی که این ساختارها، دائم در مسئله‌های جدید به‌کار گرفته می‌شوند و به درک دانستن مباحث ضروری و مهم می‌انجامند.

فرایند تفکر ریاضی

تال[3] (۱۹۹۴) در مقاله‌ای با عنوان «درک فرایند تفکر ریاضیات پیشرفته»، برای توسعه تفکر ریاضی دو اصل‌موضوع[4] بیان می‌کند و به‌دنبال آن، به روال متون ریاضی، قضیه‌ای را مطرح و اثبات می‌کند:

اصل‌موضوع I. همه ریاضی‌دانان در سن صفر متولد می‌شوند.

اصل‌موضوع II. هر ریاضی‌دان M ساله، برای رسیدن به بلوغ ریاضی، باید سنین صفر، ۱، ۲، ...، $M^{\circ} 1$ سالگی را پشت سر گذاشته باشد.

قضیه. رشد شناختی برای ریاضی‌دان شدن ضروری است.

اثبات. چون هیچ کودکی در بدو تولد، سازنده قضیه ریاضی مهمی نبوده است، این موارد در بین سنین صفر تا M رخ داده که تفکر ریاضی را ممکن کرده است.

وی اضافه می‌کند که شاید این اثبات تفننی، کاریکاتوری به سبک ریاضی باشد، اما به یقین شکافی در ریاضی می‌اندازد. زیرا عدم‌وجود مثال نقض شناخته شده، به‌وضوح چیزی را ثابت نمی‌کند، اما اگر *ریاضی‌وار* درباره چگونگی تفکر انسان بیاندیشیم، لازم است در بحث‌مان به ناکامی در ریاضی نیز بپردازیم. برای مثال، این ناکامی زمانی رخ داد که در دهه شصت میلادی، با

---

[1] Equilibrium

[2] Cognitive structure

[3] David Tall

[4] Axiom

رویکرد نظریه مجموعه‌ها، ریاضیات جدید وارد مدرسه شد، و انتظار داشتیم فرایند درک آن نیز به‌همراهش وارد مدرسه شود.

از نظر تال (۱۹۹۴) واضح است که اگر بخواهیم توسعه تفکر ریاضی درک شود، باید طبیعتِ *رشدِ شناختی*[1] را جدی بگیریم و بدین منظور، وی سه اصل[2] شناختی را برای توسعه تفکر ریاضی در یادگیرندگان مطرح می‌کند.

اصل شناختی I. برای بقا، طبق نظریه داروینی، هر موجودی باید با تمرکز بر مفاهیم و روش‌هایی که *کار می‌کنند*[3] و کنار گذاشتن مراحل میانی که دیگر ارزشی ندارند، کارآمدیِ ساختارِ شناختی خود را به بیشترین مقدارِ ممکن برساند.

اصل شناختی II.مغز، به‌صورت جزیی و محدود می‌تواند بر موضوع‌های مختلف متمرکز شود، اما فضای زیادی برای ذخیره اطلاعات دارد و از این رو، رشد شناختی نیازمند توسعه دو مورد زیر است:

الف) سازوکاری[4] برای فشرده‌سازی ایده‌ها که متناسب با تمرکز باشد.

ب) سازوکاری برای ایجاد ارتباط بین اطلاعات ذخیره شده مطلوب و مرتب کردن این اطلاعات در دنباله‌ای که مناسب تمرکز روی ایده‌ها باشد.

اصل شناختی III.برای هر کسی، یک عامل نیرومند در یادگیری مفهومی، عبور از میان ساخت‌وسازهای ریاضی و *بازتاب*[5] بر دانش ساخته شده بر اثر تعامل بین دانش موجود خویش با آن ساخت و سازهاست.

تال معتقد است ریاضی‌دانان باید به دانش‌آموزان و دانشجویان نشان دهند که دانش آن‌ها از تجربیات و آموزش «تفکر ریاضی‌وار» به‌دست آمده است. از نظر وی، روش‌های متعدد ذخیره‌سازی دانش ریاضی شامل موارد زیر است:

(۱) نمایش دیداری اطلاعات

(۲) به‌کارگیری نمادها برای نمایش فشرده اطلاعات،

(۳) تجزیه یکفرایند طولانی به اجزای کوتاه‌تری که فرد بر آن‌ها تسلط دارد.

---

[1] Cognitive development

[2] Principle

[3] Work

[4] Mechanism

[5] Reflection

تال یک فرایند ریاضی را نمادسازی[۱] می‌داند که بعداً، به یک مفهوم ریاضی می‌انجامد و آن‌ها نیز به نوبه خود، به شیئی ذهنی تبدیل می‌شوند. تال در بسط دو پدیده فرایند[۲] و مفهوم[۳]، دو تعریف شناختی زیر را ارایه می‌کند:

تعریف شناختی. *فرهوم*[۴]، ملغمه‌ای[۵] از *فرایند* و *مفهوم* است که با یک نماد نمایش داده می‌شود.

تعریف شناختی فرهوم، متشکل از مجموعه‌ای از فرایندهای مقدماتی است که درباره یک موضوع هستند. به عقیده تال و وینر (۱۹۸۱)، دانش‌آموزان و دانشجویان به‌جای توسعه ساختارهای شناختی خود از یک مفهوم، گاهی با تصور مفهوم فریب می‌خورند. آن‌ها با تمایز قایل شدن بین نوع تفکر فرد از یک مفهوم و تعریف رسمی آن، در واقع بین ریاضیات به‌عنوان یک فعالیت ذهنی و ریاضیات به‌عنوان یک دستگاه صوری، تمایز قایل شدند و یک مدل مفهومی برای آن، ارایه کردند. آن‌ها نشان دادند که مغز انسان تنها یک واحد منطقی نیست و شیوه پیچیده کارکرد آن در بیشتر موارد، با منطق ریاضی تفاوت دارد و بدین سبب، منطق صرف برای یادگیری ریاضی، کافی نیست. به این دلیل در مدل خود، از اصطلاح «تصور مفهوم[۶]» برای توصیف ساختار شناختی کلی‌ای که با یک مفهوم ارتباط دارد، استفاده کرده‌اند که تمام تصویرهای ذهنی و ویژگی‌ها و فرایندهای مرتبط با آن مفهوم را در برمی‌گیرد. به گفته آنان، تصور مفهوم به مرور زمان و در جریان مواجهه با انواع تجربیات شکل می‌گیرد و تحت تأثیر محرک‌های جدید تغییر می‌کند و رشد می‌یابد و رشد و گسترش تصور مفهوم، لزومی ندارد که به‌طور منسجم و یک‌باره رخ دهد. در حالی که دریافت‌های حسی متفاوت، مسیرهای عصبی خاصی را برانگیخته و در عین حال، از برانگیخته شدن سایر مسیرها ممانعت به‌عمل می‌آورد. بدین ترتیب محرک‌های متفاوت می‌توانند به فعال شدن بخش‌های متفاوتی از تصور مفهوم منجر شوند. از سوی دیگر، تعریف رسمی یک مفهوم، مطلب دیگری است که تال و وینر آن را «تعریف مفهوم[۷]» می‌نامند.

---

[۱] Symbolized

[۲] Process

[۳] Concept

[۴] Procept (<u>pro</u>cess+con<u>cept</u>، معادل این واژه در زبان فارسی، به انتخاب مجله رشد آموزش ریاضی (۱۳۷۵)، فرهوم گذاشته شد که ترکیبی است از <u>فر</u>ایند- مف<u>هوم</u>، به همان شکلی که تال، واژه خود را ساخته است.

[۵] Amalgam

[۶] Concept Image

[۷] Concept definition

نظریه تفکر هندسیِ فن‌هیلی و فن‌هیلی

اواخر دهه ۱۹۵۰، دینا فن‌هیلی-گلدوف[۱] و همسرش پی‌یر فن‌هیلی[۲]، با بررسی رفتار دانش‌آموزان و رشد فکری هندسی آنان، توانایی‌های هندسی دانش‌آموزان را رده‌بندی کردند و مدلی عمومی برای تفکر هندسی معرفی کردند (فن‌هیلی، ۱۹۵۹). این زوج آموزشگر هلندی، این رده‌بندی را تا سال ۱۹۸۴، در رساله‌های دکتری خود کامل کردند، اما در فاصله کوتاهی پس از اتمام کار، دینا فوت کرد و پی‌یر، اصلاح و بهبود این نظریه را انجام داد. در همین سال‌ها، با ترجمه کارهای فن‌هیلی به انگلیسی، توجه جهانی به کارهای این زوج آموزشگر ریاضی بیشتر شد.

فن‌هیلی‌ها، پنج سطح را برای توصیف تفکر هندسی معرفی کردند که در یادگیری هندسه، توسط دانش‌آموزان قابل مشاهده و از طریق برنامه‌ریزی درسی قابل توسعه هستند. سطوح تفکر هندسی فن‌هیلی، در مورد میزان دانش هندسی فرد چیزی نمی‌گوید، بلکه گویای آن است که تفکر هندسیِ وی، سلسله‌مراتبی است و طی فرایند یادگیری و پیشرفت، از سطوح متمایزی عبور می‌کند که وابسته به سن نیست، بلکه به تجربه فرد بستگی دارد. کرولی[۳] (۱۹۸۷)، سطوح تفکر هندسی فن‌هیلی را چنین بیان کرده است:

سطح صفر- [سطح پایه[۴]] تشخیص[۵] (دیداری) اجسام هندسی؛

سطح ۱- تجزیه و تحلیل[۶] و تشخیص دیداری و کشف روابط بین آن‌ها؛

(این دو سطح، عمدتاً مربوط به دوره‌های ابتدایی و راهنمایی هستند)

سطح ۲- ارایه استنتاج غیررسمی[۷] با استفاده از استدلال استقرایی؛

سطح ۳- ارایه استنتاج رسمی[۸]، [استدلال استنتاجی] برای اثبات حدسیه‌ها؛

سطح ۴- دقت[۹]، تعمیم و تجرید مفاهیم هندسی و ورود به هندسه مجرد (معمولاً این سطح متعلق به دانشگاه است.).

---

[۱] Dina van Hiele-Geldof

[۲] Pierre van Hiele

[۳] Mary L. Crowley

[۴] روش‌های متفاوتی برای شماره‌گذاری معرفی می‌شود. فن‌هیلی، شروع را با سطح پایه یا صفر و پایان را سطح۴ نامید.

[۵] Visualization

[۶] Analysis

[۷] Informal deduction

[۸] Formal deduction

[۹] Rigor

در این سطح‌بندی، دانش‌آموزان در جریان توسعه شناختی خود، از تشخیص محض تا نوشتن یک اثبات رسمی دقیق را طی می‌کنند. این مدل نظری توضیح می‌دهد که چرا دانش‌آموزان در یادگیری هندسه، به‌طور عام و در نوشتن اثبات به‌طور خاص، با مشکل مواجه می‌شوند.

این سطوح نمی‌گویند که یک شخص، چه مقدار دانش هندسی دارد، بلکه توصیف می‌کند که وی، چگونه و در مورد چه نوعی از ایده‌های هندسی، فکر می‌کند.

نظریه‌ای که فن‌هیلی و فن‌هیلی با اتکا به این سطوح تفکر تبیین کردند، یکی از محبوب‌ترین نظریه‌های یادگیری در آموزش هندسه مدرسه‌ای است. طبق این نظریه، دانش‌آموز بدون کسب مهارت در یک سطح، نمی‌تواند به سطوح بالاتر برود. نظریه سطوح تفکر فن‌هیلی و فن‌هیلی همانند نظریه پیاژه، شامل مراحلی گسسته هستند که برای پیشرفت یک شخص، یک زمان مشخص را در نظر می‌گیرد. در این دو نظریه، برای هر فرد تعیین می‌کند که در کدام سطح است و تنها می‌تواند در یکی از سطوح باشد و چون این سطوح سلسله‌مراتبی هستند، مراحل بالاتر اغلب با عبور از مراحل ابتدایی ساخته می‌شود. با وجود این که فن‌هیلی و فن‌هیلی بر گسسته بودن سطوح تأکید می‌کند، اما نتایج تحقیقات بیشتر، پژوهشگران را به این سمت سوق داده است که حرکت از یک سطح به سطح بعد را یک فرایند پیوسته در نظر بگیرند، زیرا یادگیری و گذر از یک سطح تفکر توسط یادگیرندگان، تدریجی است.

این نقد بر نظریه مرحله‌ای-تحولی پیاژه نیز وارد است. اما برخلاف نظریه پیاژه که یک نظریه عمومی رشد است و دامنه وسیعی از موضوعات را پوشش می‌دهد، نظریه فن‌هیلی و فن‌هیلی، تنها بر تفکر هندسی تأکید دارد. با این وجود، نتایج حاصل از تحقیقات بیشتر، بعضی از محققان را به این سمت سوق داد که در نظریه فن‌هیلی و فن‌هیلی، حرکت از یک سطح به سطح بعدی را به‌عنوان یک فرایند پیوسته در نظر بگیرند، زیرا رسیدن به سطوح تفکر، تدریجی است و دانش‌آموزان مختلف می‌توانند در زمینه‌های مختلف هندسه، در سطوح مختلفی قرار گیرند.

تفکر جبری

برخی از آموزشگران ریاضی معتقدند که گذر از حساب به جبر و توانایی کار با نمادها، در آغاز دوره متوسطه اول (دانش‌آموزان ۱۱ تا ۱۵ سال) شروع می‌شود (بدنارز[1] و همکاران، ۱۹۹۶).

[1]N. Bednarz

کریگلر[۱](۲۰۰۷)، تفکر جبری را با دو مؤلفه اصلی «توسعه ابزارهای تفکر ریاضی» و «مطالعه ایده‌های بنیادی جبر»، تبیین کرده است. از نظر وی، ابزارهای تفکر ریاضی همان روش‌هایی است که برای نمایش مسیر تفکر ریاضی با استفاده از جبر، به‌کار می‌رود. این روش‌ها در سه زمینه ۱) **فعالیت‌های حل مسئله،** کاربست رهیافت‌های حل مسئله، جست‌وجو رویکردهای چندگانه یا پاسخ‌های گوناگون؛ ۲) **بازنمایی فعالیت‌ها،** نمایش بصری رابطه‌ها، نمایش نمادها، نمایش عددی یا حرفی، برگردان نمایش‌های مختلف، تفسیر داده‌ها در قالب نمایش آن‌ها؛ ۳) **بیان کمّی استدلال‌ها،** تحلیل مسئله‌ها به کمک بسط و نمایش ماهیت کمی آن‌ها، استدلال‌های استنتاجی و استقرایی، مطرح شده است.

ایده‌های بنیادی جبر، در محدوده توسعه ابزارهای تفکر ریاضی مطرح می‌شود. سه موضوع قابل مطالعه که در روند آموزش مورد توجه قرار دارد عبارتند از: ۱) **جبر به‌عنوان تعمیم حساب** (مک‌گروگر[۲] و استیسی[۳]، ۱۹۹۷) که دربرگیرنده مفاهیم پایه‌ای راهبردهای محاسباتی، نسبت و تناسب و تخمین است؛ ۲) **جبر به‌عنوان زبان ریاضیات،** که شامل معنی متغیرها و عبارت‌های متغیر، تعبیر پاسخ‌ها، درک و استفاده از ویژگی‌های دستگاه اعداد، خواندن، نوشتن و کار با اعداد و نمادها با استفاده از قراردادهای جبری و استفاده از نمادهای هم‌ارز برای بازنمایی فرمول‌ها، عبارت‌ها، معادله‌ها و نامعادله‌ها است و بالاخره ۳) **جبر به‌عنوان ابزاری برای تابع‌ها و مدل‌سازی ریاضی**است که شامل ارایه الگوها و رویه‌های تعمیم‌یافته و پویا از دنیای واقعی، بازنمایی ایده‌های ریاضی با استفاده از معادله‌ها، جدول‌ها، نمودارها یا حرف‌ها و کار با الگوهای ورودی‌خروجی می‌باشد.

بدین ترتیب، می‌توان ادعا کرد که بیشتر فعالیت‌های ریاضی، به‌نوعی با تفکر جبری ارتباط دارند. به اعتقاد چاربونه[۴](۱۹۹۶)، به سختی می‌توان تعریفی برای تفکر جبری ارایه کرد که به‌عنوان تعمیمی از حوزه اعداد نباشد. به باور وی، بررسی روش‌های جبری مربوط به مباحث هندسه، نشان می‌دهد که بیشتر آن‌ها، ریشه در استدلال‌های هندسی دارند تا تعمیم‌های حساب. در حالی که ژاکوبسون (۲۰۰۳) بیان می‌کند که در استدلال‌های جبری، مباحث هندسی تنها مجموعه‌ای از «نمادهای بهینه» هستند

[۱] Shelley Kriegler
[۲] M. MacGregor
[۳] Kay Stacey
[۴] L. Charbonneau

تفکر ترکیبیاتی

در امتداد مطالعه تفکر ریاضی، تفکر ترکیبیاتی به عنوان یکی از اشکال آن که ارتباط تنگاتنگی با سایر اشکال تفکر ریاضی از جمله تفکر هندسی و تفکر جبری مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این بررسی، یافته‌های پژوهشی در رابطه با راهبردهای ترکیبیاتی کودکان، رده‌بندی راهبردهای دانش‌آموزی در حل مسایل ترکیبیاتی و تأثیر مدل ترکیبیاتی مجازی در استنتاج ترکیبیاتیِ دانش‌آموزان، شناسایی شده‌اند. سپس، چارچوب نظریِ ارایه شده توسط گودینو و باتانرو (۲۰۰۷) برای مطالعه فرایند تفکر ریاضی با رویکرد تفکر ترکیبیاتی، معرفی می‌شود. در پایان، نقش طرحواره‌ها و شهود در استنتاج ترکیبیاتی پرداخته و اهمیت تفکر بازگشتی و سهمی که در پرورش تفکر ترکیبیاتی و توسعه خلاقیت دارد، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

راهبردهای ترکیبیاتی کودکان

انگلیش[1] (۱۹۹۱)،چگونگی رویاروییِ کودکان بین ۴ سال و ۶ ماه تا ۹ سال و ۱۰ ماه را با مسایل دشوار ترکیبیاتی، مطالعه نمود. وی با مرور کارهای پیاژه، این ادعا را که موقعیت‌های انتزاعی، برای کودکان بزرگتر از ۱۲ سال قابل طرح است، به‌چالش کشید و مسایل ترکیبیاتی دشوارتری را که مبنای آن‌ها استدلال است، برای این گروه سنی، مطرح نمود.

انگلیش مسئله «محاسبه تعداد حالت‌های ممکن برای جور کردن یک دست بلوز و شلوار (به رنگ‌های مختلف داده شده)» را به شکل عروسک‌های مقوایی همراه با بلوز و شلوارهای مقوایی رنگی برای کودکان مطرح کرد. وی با بررسی پاسخ کودکان و راهبردهای آن‌ها، عملکرد کودکان را در شش رده زیر، دسته‌بندی کرد:

راهبرد الف) انتخاب تصادفی، بدون بررسی حالت‌ها؛

راهبرد ب) انتخاب تصادفی، با بررسی حالت‌ها و رد حالت‌های نامطلوب؛

راهبرد پ) یافتن یک الگو و رد حالت‌های نامطلوب، اما بدون تداوم؛

راهبرد ت) استفاده از یک الگوی دوری[2]برای انتخاب موارد و رد حالت‌های نامطلوب؛

راهبرد ث) ثابت گرفتن یکی (مانند بلوز) و تغییر بقیه، بدون استفاده از الگویی خاص؛

راهبرد ج) به‌کار گرفتن الگویی خاص بدون نیاز به رد حالت‌های نامطلوب.

---

[1] Lyn D. English
[2] Cyclic pattern

انگلیش (۱۹۹۱)، رابطه بین راهبردهای مورد استفاده و سن کودکان را مورد مطالعه قرار داده و نتیجه گرفت که هر چه کودک خردسال‌تر باشد، از راهبردهای ساده‌تری (الف تا پ) استفاده می‌کند و در سنین بالاتر، راهبردهای (ث) و (ج) بیشتر مورد استفاده است. وی هم‌چنین، تغییر این راهبردها را نیز طی انجام تکلیف توسط کودکان بررسی کرد و به این جمع‌بندی رسیدکه تفاوت قابل توجه‌ای در راهبردهای انتخابی توسط کودکانِ بین ۴ تا ۶ ساله با کودکان ۷ تا ۹ ساله وجود دارد. او با تجزیه و تحلیلمشاهدات خود و بر اساس یافته‌های پیاژه و اینهلدر (۱۹۷۵، ص.۱۶۳)، این راهبردها را در سه مرحله کلی‌تر، «ترکیبیات تجربی[۱]»، «جستجو برای یافتن یک نظام[۲]»و «کشف نظام[۳]»، دسته‌بندی کرد. این یافته‌ها نشان می‌دهد که اگر کودکان در موقعیتی آشنا قرار گیرند، تفکر ترکیبیاتیِ انتزاعیِ موردِ نظر پیاژه، زودتر شکل می‌گیرد. انگلیش (۱۹۹۱)برای انجام این تحقیق، تعدادی عروسک‌های مقوایی در اختیار آزمودنی‌ها قرار داد و سعی کرد که شرایطی فراهم کند تا کودکان، نیازی به بررسی ذهنی حالت‌ها نداشته باشند و با اشیای ملموس کار کنند، تا امکان بررسی عملکرد آن‌ها، فراهم شود.

در تکمیل این، انگلیش به پژوهش درباره درک کودکان از مفاهیم ریاضی در سنین پایین‌تر، بخصوص مباحث ترکیبیاتی و مسئله‌های مرتبط با آن، ادامه داد و راهبردهای حل مسئله‌های ترکیبیاتی دو و سه مرحله‌ای کودکان را مورد بررسی عمیق‌تر قرار داد و نتایج آن‌ها را به‌ترتیب، منتشر نمود (انگلیش، ۱۹۹۲؛ ۱۹۹۸؛ ۱۹۹۹a؛ ۱۹۹۹b)

رده‌بندی راهبردهای حل مسایل ترکیبیاتی از طریق مطالعه بدفهمی‌ها

یانکووا[۴] و یانکوف[۵] (۲۰۰۶)، با تمرکز بر ماهیت اشتباهات دانش‌آموزان در مسئله‌های ترکیبیاتی،به تحقیق در مورد جنبه‌هایی از «تفکر ترکیبیاتی» دانش‌آموزان هنگام رویارویی با مسئله‌های به‌ظاهر متنوع ترکیبیاتی، اما با ماهیت یکسان، پرداختندتا از آن طریق، بدفهمی‌های آن‌ها را شناسایی کنند.

آنان برای پی بردن به نوع تفکر ترکیبیاتیِ دانش‌آموزان،تلاش نمودند که دریابند برای حل مسائل مرتبط با این حوزه، دانش‌آموزان«چه راهبردهایی را انتخاب می‌کنند» و «چرا آن راهبرد خاص را

[۱] Empirical combinations
[۲] Search for a system
[۳] Discovery of a system
[۴] Martina Janackova
[۵] Jaroslav Janacek

انتخاب کردند»، اما در این کار، موفقیت چندانی به‌دست نیاوردند و به پاسخ‌های قانع‌کننده‌ای نرسیدند. با این وجود، این دو توصیه کرده‌اند که در پژوهش‌های آینده، لازم است که روشی برای کدگذاری صورت مسئله‌ها، و مقایسه راهبردهای انتخاب شده بر اساس شکل مسئله، مورد توجه قرار گیرد.

تأثیر مدل ترکیبیاتی مجازی در استنتاج ترکیبیاتی دانش‌آموزان

باتانرو[۱]، ناوارو[۲]، و گودینو[۳] (۱۹۹۷) به بررسی عملکرد دانش‌آموزان دبیرستان در رویارویی با مسایل ترکیبیاتی پرداخته‌اند. آن‌ها معتقدند مسایل ترکیبیاتی در سه مدل متفاوت دسته‌بندی می‌شود: انتخاب؛ افراز و توزیع و دامنه مباحث ترکیبیات را محدود به این سه موضوع می‌دانند. با این حال، مدعی‌اند که از آن‌جا که حل مسایل ترکیبیاتی فرایندی ساده نیست، بنابر این بین راه‌حل‌های نادرست ممکن از دید معلم و شاگرد تفاوت اساسی وجود دارد. سپس با بررسی و رده‌بندی پاسخ‌های ارایه شده، اشتباه‌های مشترک در این مدل‌ها را معرفی می‌کنند.

علاوه بر این، باتانرو، ناوارو، و گودینو در فصلی از کتابی اینترنتی (گال و گارفیلد، ۱۹۹۷)، موضوع ارزشیابی استنتاج ترکیبیاتی را مورد توجه قرار داده‌اند. در آغاز، «ترکیبیات چیست و چه نقشی در تدریس و یادگیری احتمالات دارد؟» بررسی شده است. در این‌جا، قلمروی ترکیبیات بسیار فراتر از حل مسایل جایگشت، ترکیب و ترتیب و به‌عنوان «ریاضیات شمارش» و مجموعه‌ای از عملگرها، مدل‌ها و فرایندها معرفی می‌شود. سپس با بررسی چند مثال، در قالب همان مثال‌ها، به دشواری‌های ارزشیابی حل مسایل ترکیبیاتی اشاره می‌شود. آن‌ها با برشمردن اشتباه‌های رایج از قبیل شمارش غیرنظام‌مند[۴]، استفاده نادرست از نمودار درختی، ترتیب نادرست، تکرارهای نادرست، رده‌بندی مغشوش، بدفهمی در نوع افراز خواسته شده، و مانند آن، موضوع ارزشیابی استنتاج ترکیبیاتی را بررسی می‌کند. با این حال، پاسخ مقاله به این موضوع، به ارایه رهنمودهایی خاص برای ارزشیابی محدود است.

---

[۱] Carmen Batanero

[۲] Virginia Navarro-Pelayo

[۳] Juan D. Godino

[۴] Non-systematic enumeration

ارایه چارچوب نظری برای فرایند تفکر ریاضی

گودینو، باتانرو، و راوو[1] در مقاله «تحلیل مبتنی بر نشانه[2] بر مسایل ترکیبیاتی و فرایند حل توسط دانشجویان دانشگاه» (۲۰۰۵)، با بررسی این فرایند، یک چارچوب نظری ارایه کرده‌اند. هم‌چنین، گودینو، باتانرو، و فونت[3] در مقاله‌ای با عنوان «رویکرد مبتنی بر نشانه به تحقیقات آموزش ریاضی» (۲۰۰۷)، پس از مرور چارچوب نظری (پیش‌گفته) به تشریح موقعیت مسئله‌های ترکیبیاتی در این چارچوب و نقش آن در آموزش و تعلیم و تربیت پرداخته‌اند. مدلی که در این چارچوب ارایه شده است، شامل سه حلقه تو در تو است که حلقه مرکزی آن شامل تمرین‌ها و استدلال است و در تعامل با حلقه میانی است که تعاریف، مباحثه‌ها، رویه‌ها، گزاره‌ها، موقعیت‌ها و زبان است و حلقه بیرونی که دو حلقه داخلی را احاطه کرده است شامل عوامل عمومی درونی و بیرونی (در مقابل هم) است مانند محتوا در مقابل شکل ظاهری، شکل سازمانی در مقابل فرد و مانند آن. ارایه‌دهندگان این مدل، آن را از جنبه‌های معرفت‌شناسی مورد بحث قرار دادند و معتقدند که در تعامل بین معلم و شاگرد مورد توجه قرار دارد و به‌عنوان چارچوبی برای پژوهش‌های آموزشی (به‌طور عام) و ابزاری نظری برای بررسی مفاهیم مختلف ریاضی فراتر از ترکیبیات به‌کار رود (گودینو و باتانرو، ۱۹۹۸) و (گودینو، ویلهلم[4] و بن‌کومو[5]، ۲۰۰۵).

طرحواره‌ها و شهود در استنتاج ترکیبیاتی

فیشباین[6] و گراسمن[7] (۱۹۹۷) رابطه بین شهود[8] و طرحواره[9] را با تأکید بر استدلال ترکیبیاتی بررسی کردند. این دو در مقاله خود با اشاره به دو مثال مشهور زیر، بین حدس تصادفی و حدس شهودی تمایز قایل شده‌اند.

مثال نخست: دو جعبه داریم که یکی حاوی یک مهره سفید و دو مهره سیاه است و دومی حاوی دو مهره سفید و چهار مهره سیاه است. می‌خواهیم بدانیم که شانس کشیدن

---

[1] Rafael Rao
[2] Onto-semiotic
[3] Vicenc Font
[4] M. R. Wilhelmi
[5] D. Bencomo
[6] Efraim Fischbein
[7] Aline Grossman
[8] Intuition
[9] Schemata

مهره سفید در کدام بیشتر است؟ معمولاً کودکان شش ساله جعبه دوم را انتخاب می‌کند در حالی که کودکان یازده ساله شانس دو جعبه را (به‌درستی) برابر می‌داند.

مثال دوم (بر مبنای آزمایش پیاژه و زمینسکا[1]) که برای کودکی چهار ساله انجام می‌شود چنین است: دو ظرف هم‌شکل و هم حجم $A1$ و $A2$ حاوی یک مقدار مساوی شن است. از کودک می‌خواهیم یکی از دو ظرف را که شن بیشتری دارد انتخاب کند و سپس محتوای ظرفی را که انتخاب نکرده است، در ظرف B می‌ریزیم که باریک‌تر و بلندتر است. معمولاً پس از این انتقال، کودک ظرف B را انتخاب می‌کند.

فیشباین و گراسمن (۱۹۹۷) با تأکید بر این‌که برای طرحواره تعریف‌های متعددی شده است، بیان می‌کنند که از نظر آنان طرحواره بیشتر به‌معنی برنامه‌ای به‌کار می‌رود که به تفسیر و برنامه‌ریزی اطلاعات کمک می‌کند. در این‌جا، واژه برنامه به‌معنی دنباله‌ای از گام‌های انعطاف‌پذیرِ مرتبط و سازگارپذیر حول موضوع داده شده است. در این مقاله، طرحواره با توجه به فرایندهای تجربی، پایدار و انعطاف‌پذیر خوانده می‌شود. در ادامه، فیشباین و گراسمن با تأکید مجدد بر آن‌که طرحواره‌ها یک برنامه ماشینی نیست، در بسیاری از موقعیت‌ها، آن را ساختاری مبتنی بر منطق می‌داند که این موقعیت یک سامانه ترکیبیاتی خوانده می‌شود: اصول ترکیبیاتی و رویه‌های ترکیبیاتی ماهیت منطقی دارند، یعنی اگر یادگیرنده از یک رویه برای حل یک مسئله ترکیبیاتی استفاده می‌کند، یک دلیل منطقی در ذهن دارد. در ادامه مقاله، به شهود ترکیبیاتی اشاره می‌کند و تأکید دارد تاکنون (۱۹۹۷) شهود ترکیبیاتی به‌طور خاص بررسی نشده است. هر چند پیش از آن، توانایی‌های ترکیبی کودکان متأثر از سن و آموزش توسط فیشباین و همکارانش مورد بررسی قرار گرفته بود و به این نتیجه رسیده بودند که این توانایی‌ها، هم متأثر از سن و هم تحت تأثیر آموزش هستند. (فیشباین، پامپو[2] و مینزت[3]، ۱۹۷۰).

اهمیت ترکیبیات در تفکر

یافته‌های پژوهش‌ها نشان می‌دهد که تفکر ترکیبیاتی، باعث پرورش تفکر بازگشتی و توسعه خلاقیت ریاضی در دانش‌آموزان نیز می‌شود که به‌دلیل اهمیت، به آن‌ها می‌پردازیم. برای نمونه، آبراموویچ[4] و پای‌پر[1](۱۹۹۶) به بررسی پرورش تفکر بازگشتی در ترکیبیات از طریق استفاده از

[1] Szeminska
[2] E. Pampu
[3] I. Minzat
[4] Sergei Abramovich

دست‌ورزی و محاسبات کامپیوتری پرداخته‌اند. آن‌ها در مقاله خود روش‌های بازگشتی دانش‌آموزان برای شمارش حالت‌های ممکن در مسئله‌هایی مانند «چند راه متفاوت برای مرتب کردن سه قرص رنگی وجود دارد؟»، و استفاده از روش‌های ترکیبیاتی شمارش، را مطالعه کرده‌اند. هم‌چنین به تجسم ریاضی که می‌تواند در توسعه نمایش هندسی برای استقرای ریاضی استفاده شود، اشاره می‌شود. در این مقاله، با ارایه مثال‌های متعدد، ادعا شده است که ایجاد ارتباط بین هندسه، نظریه اعداد، و ترکیبیات می‌تواند راهی برای تجربیات ریاضی دانش‌آموزان باشد.

در نگاهی دیگر، معنی تفکر ترکیبیاتی در مقاله سیناپووا[۲] (۲۰۰۴) با عنوان «حل مسئله خلاق» به‌گونه‌ای متفاوت از بقیه مقاله‌ها بیان شده است. وی دسته‌های متنوعی از مسایل را مطرح می‌کند که به اعتقاد وی، در توسعه تفکر ترکیبیاتی دانش‌آموزان نقش دارند. این مسایل بیش از آن‌که به‌معنی مباحث ترکیبیاتی ریاضی باشد به‌معنای تلفیق هستند. برای مثال، در مسایل کلامی، مانند «چگونه کلمه‌ای به کلمه دیگری (با همان تعداد حرف) با تغییر یک حرف در هر گام تبدیل می‌شود، به‌طوری که کلمه‌های میانی بامعنی باشند، وی به‌دنبال بررسی راهکارهای مخاطبان خود است. در نمونه‌ای دیگر، ساخت کلمه با حرف‌های کلمه‌ای داده شده، مانند یافتن ۱۰۰ کلمه با حروف کلمه «constellation» مورد توجه قرار گرفته است. هم‌چنین از نگارش داستان‌هایی که مؤلفه‌های اساسی آن قوه تخیل کودکان را تحریک می‌کند، نام می‌برد. سیناپووا از بازی «فکر بکر» با ارقام، به‌عنوان فعالیتی مفرح برای تمام دانش‌آموزان یاد می‌کند. نوع نگاهی که به «تفکر ترکیبیاتی» در این مقاله به آن اشاره شده، و شکل‌های دیگری که به مفاهیم دیگری مانند ترکیب‌ها، جایگشت‌ها و مانند آن، در چند مقاله دیگر نیز مطرح شده است که بیش از آن‌که «تفکر» مورد توجه باشد، کار با این مفاهیم در آن مورد توجه است (پاپیک[3] و مولیگان[4]، ۲۰۰۷)، (کاووسیان، ۲۰۰۵)، (آگوال[5]، ۲۰۰۵)، (مک‌دونالد[6]، ۱۹۸۹).

وجه‌های دیگری از تفکر ریاضی در منابع مختلف مورد بحث است. سیرپینسکا[7](۱۹۹۲) به اهمیت نمادها برای معرفی تابع و درک یادگیرندگان بر اساس نمادها پرداخته است. وی در

---

[۱]Anne Pieper

[۲]Lydia Sinapova

[3]Marina Papic

[4]Joanne Mulligan

[5]Ola Agevall

[6]Janet L. McDonald

[7]Ana Sierpinska

مقاله‌ای دیگر تفکر مرتبط با جبرخطی را مطالعه کرده است (سیرپینسکا، ۲۰۰۰). هم‌چنین تفکر جبری دانش‌آموزان ۱۳ ساله، در درک مفاهیم تابع و معادله (فارماکی[1] و همکاران،۲۰۰۴) با مطالعه موردی دانش‌آموزان از طریق مصاحبه، بررسی شده است. کلمنتس[2] و ساراما[3] (۲۰۰۰) درک کودکان از شکل‌های هندسی را مورد مطالعه قرار داده‌اند.

ماهیت تفکر ترکیبیاتی

اهمیت درس‌های ترکیبیاتی در مسیر آموزش موجب شده تا با توجه بیشتری به مفاهیم آن پرداخته شود. اما تنوع رویکردهای حل مسئله یادگیرندگان در رویارویی با مسئله‌های ترکیبیاتی، یکی از موضوع‌های مورد توجه در پژوهش‌های آموزشی است که با عنوان «تفکر ترکیبیاتی» از آن‌ها یاد شده است. در این پژوهش‌ها، از تفکر ترکیبیاتی با تعبیرهای متنوعی استفاده شده است که دو رویکرد اصلی مشاهده می‌شود. نخست، با تمرکز بر سن آزمودنی‌ها، توانایی‌های حل مسئله و توانایی‌های استدلالی گروه‌های سنی خاصی مورد توجه قرار گرفته و مطالعه روی آن‌ها انجام شده است. دررویکرد دوم، به نوع مسئله‌ها توجه دارد. در این رویکرد، درجه سختی و سهولت مسئله و رده‌بندی مباحث ترکیبیات ارزیابی و بررسی شده است.

در آثار پیاژه، از کار با مفاهیم «ترکیب» و «تبدیل» به‌معنی «تفکر ترکیبیاتی» نام برده شد. بیشتر پژوهش‌های پیاژه و همکارانش، در مورد گروه‌های سنی زیر ۱۶ سال است و بر مسایل ابتدایی ترکیبیات متمرکز است. بسیاری از پژوهشگران بعدی، با تعمیم این دو وجه، یکی از دو رویکرد بالا در پیش گرفته‌اند. در عین حال، «تفکر ترکیبیاتی» به معانی مختلف دیگری نیز به‌کار رفته است که از آن جمله می‌توان به تلفیق مباحث، یا ترکیب بین شاخه‌های مختلف ریاضی یا ریاضیات با دیگر علوم اشاره کرد.

در مقاله حاضر، مفهوم تفکر ترکیبیاتی، به‌عنوان نوعی از تفکر ریاضی به‌معنای عام آن مورد بررسی قرار گرفت. مطالعه ادبیات موضوع و جست‌وجو پیرامون چیستی تفکر ترکیبیاتی نشان داد که در این خصوص، تاکنون بررسی‌های کافی انجام نشده است. به‌طور مشخص، بیشتر پژوهش‌های انجام شده را می‌توان از دو جنبه بررسی کرد: ۱)پژوهش در محدوده گروه سنی خاص یا افراد خاص بوده یعنی متعلق به رویکرد نخست‌اند؛ ۲) پژوهش را می‌توان مطالعاتی در سطح مفاهیم مقدماتی ترکیبیات برشمرد که مبین باقی ماندن آن در رویکرد دوم است. نتایج

[1]Vasiliki Farmaki
[2]D.H. Clements
[3]J. Sarama

مطالعه رضائی و گویا (۲۰۰۹) نشان می‌دهد به‌دلیل عدم‌نیاز به مفاهیم پیچیده به‌عنوان پیش‌نیاز جهت طرح مباحث پیشرفته ترکیبیاتی، بردن آن‌ها به میان گروه‌های سنی پایین‌تر، شدنی است.

مجموعه‌ای از ویژگی‌ها مانند درک مفاهیم مجرد ریاضی، تشخیص و رده‌بندی، کار با نمادها، دقت، تمرکز، توانایی‌های محاسبه‌ای، توانایی‌های استدلالی، استفاده از رهیافت‌ها در حل مسئله، رویکردهای حل مسئله‌ای، و مانند آن "تفکر ریاضی" را شکل می‌دهند، و انواع تفکر (ریاضی) مانند تفکر هندسی، تفکر جبری، یا تفکر ترکیبیاتی به کمک این ویژگی‌ها شناخته می‌شوند که ممکن است در حالی که آن‌ها در یک یا چند ویژگی با هم اشتراک داشته باشند، در عین حال، دارای ویژگی خاص خود نیز باشند. برای مثال، توانایی رده‌بندی حالت‌ها در شمارش را می‌توان از جمله ویژگی‌های تفکر ترکیبیاتی در نظر گرفت.

با چنین تعبیری از تفکر ریاضی، می‌توان فهرستی از مجموعه ویژگی‌هایی تهیه کرد که در فعالیت ریاضی‌دانان مشاهده می‌شود یا آن‌ها در جریان آموزش برای ریاضی‌ورزی مورد توجه است. این ویژگی‌ها بدون آن که در دسته‌های افراز شده‌ای قرار گیرد، می‌تواند (با تکرار) دسته‌بندی شود و برای معرفی انواع تفکر ریاضی، مانند تفکر هندسی، تفکر جبری، تفکر ترکیبیاتی، یا تفکر آنالیزی به‌کار گرفته شوند. بدین ترتیب، در توصیفی که برای تفکر هندسی توسط فن‌هیلی ـ فن‌هیلی، ارایه شده است، سطح‌های تفکر هندسی، معنای خود را در ویژگی‌های مورد نظر پیدا می‌کنند. با وجود آن که هنوز چنین فهرستی در اختیار نداریم و رده‌بندی انواع تفکر (ریاضی) با برشمردن ویژگی‌های هر یک انجام نشده است، اما می‌توان ویژگی‌های مرتبط با انواع تفکر را مورد مطالعه و بررسی قرار داد و در نتیجه، تصویر بهتری از تفکر ریاضی به‌دست آورد.

رضائی و گویا (۲۰۰۹) با هدف شناخت ویژگی‌های تفکر ترکیبیاتی، فهرستی از این ویژگی‌ها را با بررسی و مقوله‌بندی داده‌ها به‌دست آوردند. یافته‌های آنان نشان داد که یادگیرندگان، برای حل مسئله‌های شمارشی (به‌عنوان بخشی از مسایل ترکیبیاتی) با چالش‌های زیر روبه‌رو هستند:

۱. درک مسئله و یافتن برخی از حالت‌های مطلوب مسئله،
۲. تشخیص حالت‌های نامطلوب و رده‌بندی حالت‌های مطلوب،
۳. پیدا کردن «تمام» حالت‌های ممکن برای شمارش،
۴. به‌دست آوردن روشی که تمام حالت‌های ممکن را تولید کند،
۵. استفاده از راهبردهای متنوع برای شمارش حالت‌ها،
۶. ایجاد ارتباط بین مسئله پیش‌رو با مسئله‌های ترکیبیاتی دیگر،

۷. استفاده از استدلال‌های ترکیبیاتی (به‌ویژه برای شمارش حالت‌ها).

با استفاده از این مقوله‌بندی، پنج سطح زیر به‌عنوان سطوح شناختی تفکر ترکیبیاتی شناسایی شد که با وجود متمایز بودن، این سطوح، سلسله‌مراتبی نیستند:
سطح ۱) پیدا کردن و بررسی حالت‌های ممکن؛
سطح ۲) اطمینان از این‌که «تمام حالت‌ها» به‌دست آمده است؛
سطح ۳) پیدا کردن روشی برای تولیدِ تمامِ حالت‌ها؛
سطح ۴) تبدیل مسئله به مسایل دیگر ترکیبیاتی؛
سطح ۵) درک استدلال‌های ترکیبیاتی.

بررسی‌های تجربی نشان می‌دهد، در سطح پنجم تفاوت‌های زیادی بین یادگیرندگان تازه‌کار و خبره وجود ندارد و درک استدلال‌های ترکیبیاتی در میان هر دو گروه (تازه‌کار و خبره) از تنوع مشابه برخوردار است. بدین معنی که از یک سو، در هر دو گروه، کسانی هستند که درک خوبی از استدلال‌های ترکیبیاتی دارند و از سوی دیگر، کسانی که دشواری‌هایی در درک استدلال‌های ترکیبیاتی دارند، هم در میان افراد تازه‌کار و هم افراد خبره به چشم می‌خورند.

دامنه پژوهش و طراحی اولیه آن

پژوهشگر در مسیر رویارویی یادگیرندگان با مسئله‌های ترکیبیاتی، و با مشاهده تنوعِ توانایی‌های محاسباتی و استدلالی آنان، بر این باور بود که بررسی ماهیت این توانایی‌ها در تمام مراحل تحصیلی اعم از دانشگاه، دبیرستان و حتی دبستان، می‌تواند مورد توجه قرار گیرد. در نتیجه، می‌توان برای شناخت ماهیت تفکر ترکیبیاتی یادگیرندگان، همتمام مباحث ترکیبیاتی و هم دوره‌های تحصیلی مختلف را برای بررسیچگونگی درگیر شدن یادگیرنده‌ها در مواجهه با مسئله‌ها و استدلال‌های ترکیبیاتی،مورد توجه قرار داد (رضائی و گویا، ۲۰۰۹). همچنین، دریافت‌های تجربی پژوهشگر حاکی از آن بود که در این بررسی‌ها، عوامل گوناگونی مانند «میزان آشنایی یادگیرنده با مباحث ترکیبیاتی»، «تجربه حل انواع مسئله‌های نمونه ترکیبیاتی» و «یافتن ارتباط‌های مفهومی بین مباحث مختلف ترکیبیاتی»، بر چگونگی درگیرشدن یادگیرنده‌ها با مسئله‌های ترکیبیاتی، تأثیرگذار هستند و شناخت ماهیت آن‌ها برای «درک استدلال‌های ترکیبیاتی»، ضروری است. این در حالی است که پژوهشگر اعتقاد دارد که چنین مطالعه‌هایی، نیازمند «شرایط عادی» هستند و بدین سبب، قرارگاه پژوهش برای هر یک از این مطالعه‌ها، لازم است مورد توجه قرار گیرد. هم‌چنین، برای انجام یک پژوهش طولی، اهمیت یکسان‌سازی و فراهم کردن شرایطی از قبیل دانش اولیه یادگیرنده، تجربه فردی وی در رویارویی با مسئله‌های

ترکیبیاتی، مباحث ریاضی که در جریان یادگیری با آن روبه‌رو شده، تدریسی که تجربه کرده، ارزشیابی‌ها و مانند آن، موجب می‌شود که هر یک از این شرایط، بر چگونگی درگیر شدن یادگیرنده با مسئله‌های ترکیبیاتی و درک وی از استدلال‌های ترکیبیاتی، مؤثر باشد.

محدودیت در انتخاب شرکت‌کنندگان پژوهش و موضوع آن

برای طراحی پژوهشی در حوزه یادگیری مفاهیم ترکیبیاتی، پژوهشگر به پشتوانه تجربیِ فراوانی که در تدریس ترکیبیات در دوره‌های مختلف مدرسه‌ای و دانشگاهی داشت، ابتدا بر آن بود تا به انجام یک «پژوهش طولی» از دبستان تا دانشگاه، و در مورد «تمام» استدلال‌های ترکیبیاتی اقدام کند. با این حال، به‌دلیل محدودیت‌های اجرایی از جمله زمان و بودجه، و منحصر شدنِ تدریس پژوهشگر در دانشگاه، روش پژوهش طولی با جرح و تعدیل، به مطالعه موردی تغییر یافت. همچنین، از حوزه ترکیبیات، «شمارش» به عنوان یکی از مباحث مهم ترکیبیاتی، و استدلال‌های ترکیبیاتی مرتبط با این موضوع، انتخاب شد. تجزیه و تحلیل تجربه‌های تدریسی، مطالعات نظری و آشنایی با تجارب یادگیری دانشجویان نیز، پژوهشگر را به این جمع‌بندی رساند که به‌سبب ویژگی‌های زیر، مبحث «شمارش» زمینه مناسبی جهت شناخت عمیق‌ترِ چگونگیِ «درک استدلال‌های ترکیبیاتیِ» دانشجویان، توسط فراهم می‌کند:

۱) تنوع مسئله‌های شمارشی آنقدر زیاد است که می‌توان از اولین پایه‌های تحصیلی (مدرسه) تا بالاترین مراحل تحصیلات تکمیلی، انواع مسئله‌های شمارشی را مطرح کرد؛

۲) تا به حال، چندین پژوهشدر رابطه بادرک استدلال‌های ترکیبیاتیِ دانش‌آموزان خردسال و سال‌های نخست دوره ابتداییباتأکید بر مسئله‌های شمارشی انجام شده است؛

۳) تجربه‌های تدریسی پژوهشگر مؤید این است که دانش‌آموزان و دانشجویان در رویارویی با مسئله‌های شمارشی، از استراتژی‌های متنوعی استفاده می‌کنند؛

۴) تجربه‌های تدریسی پژوهشگر نشان داده که در مواجهه با مسئله‌های ترکیبیاتی، استدلال‌های دانشجویان، شباهت‌های قابل‌توجهی با استدلال‌های دانش‌آموزان دارد و این شباهت،دست پژوهشگر را برای تصمیم‌گیری راجع به شرکت‌کنندگان در پژوهش، باز گذاشت (رضائی،۱۳۹۰).

بنابر ویژگی آخر، درک استدلال‌های ترکیبیاتیِ دانش‌آموزان به‌طور روشمند، نظام‌وار، فراگیر و گسترده‌ای، متأثر از دانشگاه است، زیرا ورود رسمی این درس به برنامه درسی مدرسه‌ای، به‌نسبت جدید است و معلمانی که آن را تدریس می‌کنند، تقریباً همگی از فارغ‌التحصیلان

دانشگاهی در رشته ریاضی هستند که ابتدا این درس را به‌طور نظام‌وار، در دانشگاه یاد گرفته و سپس به‌عنوان معلم، به کلاس درس مدرسه برگشته‌اند تا تفکر ترکیبیاتی را از طریق برنامه درسی رسمی، در دانش‌آموزان توسعه دهند. این روند به‌طور آشکار، بر خلاف درس‌هایی مانند هندسه اقلیدسی است که عمدتاً، شروع آشنایی معلمان با آن، در مدرسه است و مباحث هندسه اقلیدسی،توسعه چندانی در دانشگاه پیدا نمی‌کنند. بنابراین، شرکت‌کنندگان در پژوهش، به دانشجویان دانشگاه محدود شدند. دلایل ریزتر این انتخاب، به‌شرح زیر است:

۱) در مدرسه، جنبه‌های خاصی از ترکیبیات مورد توجه است که به محدود شدن دامنه مسئله‌ها و استدلال‌ها می‌انجامد. در حالی که دامنه مباحث ترکیبیاتی در دانشگاه وسیع‌تر است و دانشجویان، کمتر با مسئله‌های از قبل معلوم، مواجه می‌شوند؛

۲) دانشجویان علاوه بر مباحث ترکیبیاتی، با انواع روش‌های استدلالی دیگر نیز آشنا می‌شوند و ابزارهای جبری و هندسی بیشتری را می‌شناسند و در نتیجه، با محدودیت‌های کمتری برای استفاده از این روش‌ها روبه‌رو هستند؛

۳) به‌دلیل کمتر شدن تنش‌های آزمون و ارزشیابی در دانشگاه (نسبت به مدرسه)، دانشجویان آمادگی بیشتری برای رویارویی با مسئله‌های متنوع و فراتر از برنامه درسی را دارند؛

۴) طبق تجربه‌های آموزشی، هم در میان دانش‌آموزان و هم دانشجویان، می‌توان انواع توانایی‌های ادراکی و استدلالی را مشاهده کرد. اما به سبب وجود عوامل مداخله‌کننده از قبیل ارتباط عاطفی و ایجاد انگیزه، انجام مطالعه در بین دانشجویان، امکان‌پذیرتر باشد و تعمیم آن به دانش‌آموزان، به‌ویژه دانش‌آموزان متوسطه دوم،آسان‌تر است.

روش‌شناسی پژوهش

با هدف شناخت عمیق‌تر ماهیت «درک استدلال‌های ترکیبیاتی» دانشجویان، یک تحقیق کیفی طراحی شد و برای نوع مطالعه، مناسب تشخیص داده شد.پژوهشگر قبل از ورود به حوزه آموزش ریاضی نیز، بارها به‌عنوان مدرس، در چند دانشگاه در تهران، درس‌های ترکیبیاتیِ متعددی ارائه کرده بود؛ درس‌هایی که اکثر دانشجویان، آن‌ها را در سال‌های دوم یا سوم دوره کارشناسی خود می‌گذرانند. اما پس از ورود به حوزه جدید، پژوهشگر با نگاهی دوباره به فرایند یاددهی- یادگیری درس‌های ترکیبیاتی، شروع به بررسی در مورد امکان انجام پژوهش درباره چگونگی درک دانشجویان از آن مباحث نمود. وی، پس از مرور تجربه‌های تدریس خود و استفاده از یافته‌های پژوهشی مرتبط با این حوزه، نخست تحقیقی برای رساله دکتری خود طراحی نمود و در دو کلاسی که خود تدریس آن‌ها را به عهده داشت، آن پژوهش را انجام داد. پس از آن، در ادامه و

تعمیم کار رساله خود، روش و دانشجویان را تغییر داد و روش تحقیق را منحصر به مطالعه موردیِ[1] کلاس درس خود نمود. در این مطالعه، از بین موضوعات مختلف ترکیبیاتی، «شمارش» انتخاب شد و تدریس به گونه‌ای طراحی گردید که دانشجویان، امکان رویارویی با مسئله‌های متنوع شمارشی را پیدا کنند و پژوهشگر، فرصت بررسی استدلال آن‌ها را برای حل این مسئله‌ها، داشته باشد. در این مطالعه، با استفاده از ابزارهای مختلف، تا جایی که مقدور بود، تمام کلاس درس به عنوان یک مورد، از زاویه‌های گوناگون مطالعه شد.

مطالعه مقدماتی

در طراحی این پژوهش، ابتدا برای بررسی چگونگی استفاده دانشجویان از استدلال‌های فراگرفته در دوره دانش‌آموزی خود، چند مسئله مقدماتی ترکیبیاتی در مورد شمارش حالت‌های ممکن برای شرایط خاص تهیه شد. مسایل انتخاب شده، علی‌رغم پیچیدگی‌های ظاهری، همگی با مفاهیم مدرسه‌ای قابل حل بوده و متناسب با توانایی علمی دانشجویان بودند. پژوهشگر ضمن مطرح کردن این مسئله‌ها، دانشجویان را با دو نوع پرسش روبه‌رو کرد. در صورتی که مسئله حاوی فرمولی برای محاسبه حالت‌های ممکن بود،این سؤال چنین پرسیده شد: "آیا می‌دانید این فرمول چگونه به‌دست آمده است؟" و در صورتی که سؤال برای حالت‌های خاص یامقدار عددی (و نه حالت کلی) مطرح شده بود، سؤال چنین بود: "در حالت کلی آیا راه حل عمومی (فرمول) برای این شرایط می‌شناسید؟" سپس در ادامه، از مصاحبه شونده پرسیده می‌شد که تا چه حدی به درستی فرمول پیش‌روی خود اطمینان دارد و آیا می‌تواند دلیلی برای درستی آن دلیل ارائه کند؟این فرایند به‌صورت پرسش‌نامه‌ای طراحی شد، اما از آن به‌صورت شفاهی نیز استفاده شد. در مجموع، ۸۹ پرسش‌نامه بینِدانشجویان دوره کارشناسی ریاضی، در یک دانشکده، توزیع شد و در نهایت، ۸۵ پرسش‌نامه تکمیل شد. پس از جمع‌آوری داده‌های این مطالعه مقدماتی، با بررسی و دسته‌بندی این داده‌ها، نتایج زیر از استخراج شد:

- تقریباً همه (به غیر از دو نفر) به درستی فرمولی که حتی خودشان ارائه می‌کردند، اطمینان نداشتند.
- تنها یک نفر، دلیل درستی فرمول‌ها را می‌دانست و ۸۴ نفر دیگر، دلیل برای درستی فرمول پیش روی خود یا چگونگی به دست آوردن فرمول در دست نداشتند.

---

[1] Case Study

- بجز پنج نفر، ۸۰ نفر بقیه مدعی بودند، در زمان یادگیری این فرمول‌ها (در دوره دبیرستان)، به‌دنبال چگونگی به‌دست آوردن آن‌ها نبودند یا ضرورتی برای دانستن راه به‌دست آوردن فرمول‌ها نمی‌دیدند.
- در مجموع، به غیر از سه نفر، ۸۲ نفر از پاسخ‌دهندگان معتقد بودند، استدلال‌های ارائه شده در دوره دبیرستان حتی مورد تأکید معلمان نیز نبودند و آن را دلیلی بر بی‌توجهی خودشان به دلایل تبیین فرمول‌ها می‌دانستند.

تأثیر این باورها در عملکرد دانشجویان و نتیجه کارشان قابل مشاهده بود. برای مثال، کمتر کسی به‌دنبال چرایی درستی راه‌حل‌های ترکیبیاتی بود و پیروی (بی‌چون و چرا) از راه‌ها پیشنهادی، موجب می‌شد تا در بیشتر موارد اطمینانی به جواب به‌دست آمده نداشته باشند و با اولین پرسش در مورد علت درستی جواب، به جواب حاصل شک می‌کردند و آن را رها می‌کردند.

هم‌چنین، در حالت‌هایی که با تعمیم مسئله، دیگر فرمول‌های مقدماتی کمکی به حل مسئله نمی‌کرد، قادر نبودند راه حل خود را به شرایط جدید تعمیم دهند. با بررسی این موارد و تحلیل داده‌ها، برنامه‌ریزی برای انجام پژوهش اصلی انجام شد.

شرکت‌کنندگان در پژوهش:

پس از بررسی داده‌ها مطالعه مقدماتی، و با هدف بررسی درک دانشجویان از استدلال‌های ترکیبیاتی، برنامه‌ریزی برای جمع‌آوری داده‌های بیشتر از دو کلاس درس انجام شد. در این دو کلاس در مجموع ۵۵ دانشجو شرکت داشتند. داده‌ها با بازتاب بر تدریس و بحث‌های کلاس جمع‌آوری شد. هم‌چنین از میان دانشجویان، با ۵ نفر مصاحبه شد. مصاحبه‌ها به‌صورت نیمه‌ساختاریافته و برای بررسی روش‌های متنوع استفاده از استدلال‌های ترکیبیاتی در حل مسایل انجام شد.

ابزار جمع‌آوری داده‌ها

برای جمع‌آوری داده‌ها، از دو کلاس درس مورد نظر در این مطالعه، از ابزارهای زیر، استفاده شد که هر یک معرفی شده‌اند. به اختصار شرایط حاکم بر محیط آموزشی نیز معرفی شده است:

ـ **مسایل انتخاب شده برای تمام کلاس:** این مسایل به‌گونه‌ای انتخاب شدند که برای بیشتر دانشجویان با توانایی‌های مختلف، امکان ورود به جریان حل مسئله ممکن باشد و آن‌ها بتوانند با ابزارهای ریاضی محدودتر و روش‌های کمتر پیچیده، به جواب برسند.روش کار بدین صورت بود

که ابتدا، هر یک از دانشجویان به‌طور انفرادی، با مسئله مطرح شده درگیر می‌شدند، و هر وقت هم که ایده‌ای داشتند، می‌توانستند آن را برای همه کلاس، بیان کنند تاسایر دانشجویان، فرصت داشته باشند که نظرات خود را ابراز کنند و با بازتاب بر نظرات یکدیگر، بحث‌ها را تا مرحله اقناع یا رودررویی با یک چالش، پیش ببرند. در این زمان، مدرس/ پژوهشگر، نقش هدایت‌کننده بحث‌ها را داشت و معمولاً از ابراز نظر صریح خودداری می‌نمود، مگر زمانی که یک راهنمایی مناسب، به قوام بحث‌ها کمک می‌کرد. جهت‌گیری بحث‌های کلاسی به گونه‌ای بود تا زمینه را برای تعمیم مسئله یا موضوع را به حالت‌های کلی‌تر، فراهم کند و این روند تا ارائه استدلال برای درستی یک حکم (اثبات‌های ترکیبیاتی)، ادامه می‌یافت و به این شکل، دانشجویانبرای ورود به مباحث بعدی، آماده می‌شدند.

ـ **تمرین‌های تحویلی دانشجویان:**روند کلاس‌ها به گونه‌ای بود که دانشجویان می‌دانستند اگر تمرینی تحویل دهند، در همان جلسه یا جلسه بعدی باید برای حل همان تمرین‌ها یا مشابه آن پای تخته بیاید. بدین علت،در بیشتر موارد، حل تمرین‌ها به‌صورت فردی انجام می‌شد تا با رونویسی از یکدیگر (امری که در بیشتر کلاس‌های درس شایع است). در انتخاب بعضی از این تمرین‌ها، نمونه‌هایی گنجانده شد که نیازمند ارائه استدلال بودند و از آن‌ها به عنوان داده‌های این پژوهش استفاده شد.

ـ **مصاحبه:** انتخاب دانشجویان برای مصاحبه، به‌صورت هدفمند و از بین کسانی بود که در جریان کلاس، در بحث‌ها مشارکت بیشتری داشتند. در این انتخاب، هم به آن‌هایی توجه شد که ایده‌های بدیع و مناسب ارائه می‌کردند، و هم این افراد از میان کسانی انتخاب شدند که در درک استدلال‌های ارائه شده با مشکلاتی روبه‌رو بودند و در بحث حول این دسته مسایل،با چالش‌های متعددی روبه‌رو بودند. به عبارت دیگر،معیار اصلی برای انتخاب، دانشجو فعال بود.

مشاهده و یادداشت‌های میدانی:

پژوهشگر در جریان این پژوهش، بعد از هر جلسه کلاس درس، مشاهدات خود را ثبت و بحث‌های کلاس را یادداشت کرد. بخش کوتاهی از یادداشت‌ها، به‌صورت روایت از کلاس درس بود که وضعیت عمومی آن را توصیف می‌کرد و بخش اصلی این یادداشت‌ها، به روند کلی بحث و نکات برجسته در گفت و شنودهای بین دانشجویان و نمونه‌هایی از استدلال‌های آنان اختصاص داشت. جمع‌آوری تمرین‌های محول شده، در ابتدای جلسه انجام می‌شد تا در طول کلاس کسی مشغول تکمیل آن‌ها نباشد. با انتخاب چند تمرین خاص (مثلاً تمرین اول) در زمان دریافت برگه‌های تمرین، پاسخ تمرین مورد نظر، در بعضی از برگه‌ها مرور می‌شد و یکی از

دانشجویان،برای حل همان تمرین یا تمرین‌های مشابه به پای تخته دعوت می‌شد. در بعضی از موارد، این کار پس از تصحیح برگه‌ها و بررسی راه حل‌های ارائه شده و در ابتدای جلسه انجام می‌شد. پژوهشگر با استناد به همین برگه‌ها و نقد راه حل دانشجویان، به بحث در مورد این تمرین‌ها دامن می‌زد و بیشتر دانشجویان در دفاع از مسیر خود یا برای رد استدلال دیگران به بحث وارد می‌شدند. با هدف جمع‌بندی یادداشت‌های میدانی پژوهشگر، در پایان چند جلسه، چکیده‌ای از همین یادداشت‌ها تهیه کرده و نتیجه‌گیری‌های کلی خود را به‌صورت فرضیه اولیه ثبت کرد. هر یک از این فرضیه‌ها، در مصاحبه با دانشجویان منتخب، مطرح و بررسی شد و در صورت تأیید، جمع‌بندی این نتایج و فرضیه‌ها، به عنوان بخشی از پژوهش و با هدف یافتن شواهد بیشتر، مورد توجه قرار گرفته است.

انواع مسایل در زمینه‌های مختلف ترکیبیاتی در کلاس مطرح شد. اما با تمرکز بر مسایل شمارشی، و نقش استدلال در این دسته از مسایل مورد توجه بیشتری قرار گرفت. برای اطمینان از پیگیری دانشجویان نسبت به همه راه حل‌های ممکن، اقداماتی صورت گرفت. از آن جمله طرح مسئله‌هایی بود که دانشجویان به بازنگری در بعضی از باورهای خود می‌اندیشیدند. مسئله زیر، یک نمونه از مسایلی بود که پیش از ورود به یکی از مباحث اصلی درس و با هدف تعیین توانایی‌های محاسبه و نمادگذاری برای تبدیل عبارت‌های حرفی به عبارت‌های ریاضی در کلاس مطرح شد:

فرض کنید جمله nـام دنباله‌ای برابر با یک عدد اعشاری با n رقم باشد به طوری که ارقام سمت راست آن برابر با ارقام nـامین جمله دنباله فیبوناتچی باشد. تعیین کنید، حاصل‌جمع جملات این دنباله عددی، مقداری گویا یا گنگ است؟ پنج جمله نخست دنباله، به ترتیب چنین‌اند: 0.1، 0.01، 0.002، 0.0003، 0.00005.

یکی از راه‌ها برای حل این مسئله، آن است که ضابطه جمله nـام را با عبارت ریاضی نوشته و با استفاده از تعریف دنباله فیبوناتچی و روش‌های مقدماتی جمع جملات سری، این مجموع را محاسبه کرد. در عمل، بسیاری از دانشجویان با وجود آن‌که سری $\sum_{i=1}^{n} F_n/10^n$را به دست آوردند، اما کار را ادامه ندادند.حدس آنان مبنی بر گنگ بودن این حاصل‌جمع، موجب شده بودتا برای ادامه محاسبه اقدامی نکنند. چند مسئله از این دست، موجب شد تا دانشجویان نسبت به فعالیت‌های کلاس و ارائه راه حل‌ها و استدلال‌ها خودشانبازنگری کنند و مشارکت بیشتری در کلاس داشته باشند. پیش از این بیشتر دانشجویان از ارائه نظر یا راه حلی که به تمامی نتیجه آن روشن نشده بود، خودداری می‌کردند، اما طرح و بحث در مورد این مسایل موجب شد تاجسارت

دانشجویان برای ورود به مسیرهای پیش روی خودشان بیشتر شود و مشارکت بیشتری در بحث‌های کلاس داشته باشند.

رویارویی دانشجویان با مسایلی که در ابتدابه ظاهر هیچ ایده‌ای برای شروع نداشتند اهمیت پرداختن به مسیرهای ممکن پیش رو را بیشتر می‌کرد. در مسئله زیر دانشجویان نه تنها ایده‌ای برای حل آن نداشتن، بلکه نمی‌توانستند مسئله‌ای مرتبط با آن بیابند. هم‌چنین بررسی حالت‌های ساده‌تر و شمارش حالت‌های آن نیز در ابتدا نتوانست به آنان، ایده‌ای برای حل مسئله بدهد:

به چند طریق می‌توان عدد ۱۰۰ را به‌صورت مجموع چند عدد طبیعی نزولی نوشت؟

برای مثال $100 = 1 + 2 + 2 + 2 + 3 + 90$ یکی از حالت‌ها است.

پس از بحث در مورد حالت‌های ممکن برای مقادیر کمتر (دانشجویان ابتدا عدد ۴ و سپس ۱۰ را بررسی کردند) و با وجود پیدا کردن روشی نظام‌مند[1] برای تولید حالت‌های مختلف، تعیین تعداد حالت‌ها ساده نبود. اما مطرح شدن چند مسئله به ظاهر مشابه و مرتبط با آن، توسط دانشجویان، و بررسی این مسایل و استدلالی که منجر به تعیین جواب نهایی در هر یک از آن‌ها می‌شد، در نهایت،باعث شد ایده‌هایی برای حل (مسئله اصلی) به دست آید. استدلال نهفته در این مسئله و مسایل مرتبط با آن، در ابتدا برای بیشتر دانشجویان مبهم و پنهان بود، اما بحث در کلاس، به آشکار شدن این استدلال و چگونگی محاسبه همه حالت‌ها انجامید و نقش روش نظام‌مندی که دانشجویان معرفی کردند، در این محاسبه برای بسیاری روشن شد. دانشجویان با تجزیه و تحلیل چگونگی تولید حالت‌های متمایز، در عمل توانستند استدلالی که برای حل مسئله کارآمد است را بیابند.

حل مسئله و نقش استدلال‌های ترکیبیاتی

هر یادگیرنده می‌تواند به‌عنوان یک مسئله حل‌کن «تازه‌کار» یا «خبره» شناخته شود. تعیین میزان خبرگی افراد به عوامل مختلفی از جمله تجربه‌های پیشین، آشنایی با استراتژی‌های مختلف و نحوه استفاده از آن‌ها، توانایی در ارائه استدلال‌های متناسب با موضوع و مانند آن بستگی دارد. برای استفاده از استدلال دو جنبه مختلف وجود دارد:نخست آن که ارائه استدلال با هدف ایجاد ارتباط بین مسئله‌های مشابه و نشان دادن مسیری است که معادل بودن چنین

---

[1]Systematic

مسایلی را ثابت می‌کند. دوم، ارائه استدلال در جریان حل بسیاری از مسئله‌ها، به ویژه مسایل شمارشی، ضروری است.

این بررسی نشان داد کهیکی از راهبردهایی کهبیشتر یادگیرندگان تازه‌کار، در حین رویارویی با مسئله‌های ترکیبیاتی به کار می‌برند، جستجو برای یافتن مسئله‌ای مرتبط (و در بیشتر موارد یافتن مسئله مشابه) بودکه با استفاده از آن، الگویی برای مسئله پیش روی خود بیابند. این موضوع در مصاحبه با دانشجویان و مقایسه‌ای که آنان بین مفاهیم ترکیبیاتی با مباحث دیگر ریاضی مانند حسابان، نیز بیان شد و مورد توجه آنان بود. بیشتر مصاحبه شوندگان معتقد بودند،با دیدن چند مسئله حل شده در مباحثی مانند حسابان، آنان می‌توانند ضمن به‌دست آوردن شناختی نسبی از مفاهیم مرتبط با این نوع مسئله‌ها،امکان رده‌بندی آن‌ها را پیدا می‌کنند و الگویی برای حل این مسئله‌ها به‌دست می‌آورند. از این مسئله‌ها به‌عنوان «مسئله نوعی[1]» نام می‌بریم. در عمل، این دسته از دانشجویان، در رویارویی با مسئله‌های ترکیبیاتی به‌دنبال مسئله‌هاینوعی بودند تا با دیدن (یا به خاطر آوردن) راه حل و استدلال آن‌ها، و ایجاد ارتباط بین مفاهیم مختلف، بتوانند الگویی برایحل آن بیابند. با این حال، آنان اذعان داشتند، بین مسئله‌های ترکیبیاتی و مسئله‌های حوزه‌های دیگر ریاضی، تفاوت زیادی وجود دارد. این تفاوت از یک سو، به تعداد رده‌های شناسایی شده توسط دانشجویان مرتبط است. زیاد بودن این تعداد مشکلی است که در رده‌بندی مسئله‌های نوعی ترکیبیاتی با آن روبه‌رو می‌شدند. از سوی دیگر، دانشجویان در تشخیص مسئله و تطابق آن با مسئله‌های نوعی مورد نظرشان با مشکل روبه‌رو بودند. فائق آمدن بر این مشکلات به درک عمیق‌تری از استدلال ترکیبیاتی و کاربرد آن در مسایل نیاز دارد.

درک استدلال برای استفاده در حل مسئله

مشکل دانشجویان در استفاده از فرمول‌ها، به‌ویژه در مباحث ترکیبیاتی، زمانی بیشتر آشکار شد که مصاحبه‌شوندگان با مسئله‌ای روبه‌رو می‌شدند که در آن تعداد حالت‌های مختلف، بیش از حدی بود که آن‌هابتوانند از فرمول‌های خود به‌عنوان رویه‌های کارآمد استفاده کنند. برای نمونه، دانشجویان در جریان تعیین تعداد حالت‌های نوشتن عدد ۱۰۰ به‌صورت مجموع چند عدد طبیعی نزولی، فرمول‌های متعددی را که در اختیار داشتند، فارغ از آن‌که با این مسئله مرتبط است یا نه، به‌کار می‌بردند. وقتی از دانشجویان در مورد ارتباط بین هر یک از فرمول‌های پیشنهادی با مسئله اصلی سؤال می‌شد، پاسخی نداشتند و از فرمول‌ها به عنوان «تنها گزینه»

[1] Typical example

پیش رو یاد می‌کردند. نتایج مصاحبه‌ها نشان داد که این مشکل به مباحث ترکیبیاتی محدود نمی‌شود و بسیاری از آنان در زمان کنکور خود با وضعیت مشابهی روبه‌رو بودند. عدم‌کارایی روش‌های استفاده از فرمول‌های متعددارائه شده برای حل مسایل مختلف، با ارائه نکته‌های متعدد همراه بود و بیشتر دانشجویان با اتکا به حافظه خود مجبور به حفظ کردن این نکات بودند. اما در عمل از تعداد کمی استفاده می‌کردند و به خاطر سپردن همه نکات در بیشتر موارد برایشان میسر نبود.

بررسی اجمالی کتاب‌های کمک آموزشی رایج نشان می‌دهد، در بیشتر این کتاب‌ها، پس از تعریف یک مفهوم یا ارائه یک قضیه (که در اغلب موارد بدون استدلال آمده است) حالت‌های مختلف کاربرد آن، در قالب چند نکته بیان می‌شود و با مرور تمرین‌های مکرر، از دانش‌آموزان انتظار دارند تا با دیدن تمرین مشابه، آن را حل کنند. در برخی موارد، در آزمون‌های طبقه‌بندی شده که شرکت‌کنندگان می‌دانند موضوع آزمون و مبحث مرتبط به آن چیست، این انتظار تا حدی برآورده می‌شود. اما در آزمون‌های عمومی‌تر (جامع)،به‌دلیل عدم توانایی در شناسایی موضوع مرتبط با مسئله، نمی‌توانند از فرمول‌هایی که در اختیار دارند استفاده کنند و نتیجه مورد انتظارشان به‌دست نمی‌آید. بررسی مصاحبه‌های این پژوهش نشان داد، بسیاری از دانشجویان، در سال‌های اول تحصیلی خود، مطابق عادت‌های آموزشی خود، به‌دنبال چنین بسته‌های یادگیری هستند و این در حالی است که در بیشتر موارد، استدلال‌هایی که به این رده‌بندی‌ها می‌انجامد، مورد توجه آن‌ها قرار نمی‌گیرد.

از آن جا که بیشتر مباحث «شمارشی» بر این اصل متکی است که «شمارش اعضای یک مجموعه، با دو روش، یک تساوی ترکیبیاتی را نتیجه می‌دهد».چگونگی کاربست این اصل، علاوه بر آن‌که پایه بسیاری از استدلال‌های شمارشی را تشکیل می‌دهد، هم‌چنین به یادگیرندگان کمک می‌کند تا دلیل درست بودن فرمول‌ها و شرایطی که از آن فرمول می‌توانند استفاده کنند را درک کنند. مصاحبه با دانشجویان حاکی از آن بود که بیشتر آنان در دوره تحصیل مدرسه، فرصتی برای چنین تجربه‌ای نداشته‌اند. به‌علاوه، بسیاری از آنان در دوره دانشجویی خود، علی‌رغم آن‌که به ضرورت یادگیری فرمول‌ها از طریق پیگیری استدلال‌های آن‌ها واقف بودند، اما بر این باورند که فرصت کافی برای قرار گرفتن در این مسیر ندارند. این فرصتی است که بسیاری از آنان هرگز به‌دست نیاوردند.

در بعضی از کتاب‌های آموزشی،نمونه‌های متعدد و متنوعی از رده‌بندی مسئله‌های ترکیبیاتی مشاهده می‌شود. یکی از عمده‌ترین هدف‌های این‌گونه رده‌بندی‌ها، ارائه راه حل‌ها و فرمول‌هایی

برای انواع مسئله‌ها است. چگونگی درگیر شدن یادگیرندگان با این رده‌بندی‌ها و درک استدلال‌های ترکیبیاتی برای به‌دست آوردن فرمول کلی، تفاوت بین روش‌های آموزشی را آشکار می‌کند.برای مثال، انتخاب «r شیٔ از n شیٔ» عنوانی کلی برای دسته‌ای از مسئله‌های شمارشی است که با توجه به داشتن یا نداشتن ترتیب در انتخاب شیٔ، و داشتن یا نداشتن تکرار برای یک نوع شیٔ، به چهار حالت مختلف می‌انجامد. خلاصه این حالت‌ها در جدول زیر آمده است (اندرسن، ۲۰۰۰):

انتخاب r از n	با ترتیب	بدون ترتیب
بدون تکرار	$\frac{n!}{(n-r)!}$	$\binom{n}{r}$
با تکرار	n^r	$\binom{n+r-1}{r}$

جدول (۱)

در مسیر رسیدن به فرمول‌های این جدول، ابتدا چند مسئله نمونه حل شده استکه درفرایند حل هر مسئله استدلالی متکی بر اصل ضرب ارائه شده است که با تعمیم آن‌ها به یکی از این فرمول‌ها منجر شده است. در نهایت، کتاب در یک جمع‌بندی فشرده، حالت‌های مختلف را در این جدولارائه کرده است. درک هر یک از استدلال‌های ارائه شده، برای بیشتر دانشجویان دشوار نیست، اما برای آن دسته از دانشجویان که بدون درک استدلال‌ها، سعی در به خاطر سپردن فرمول‌های این جدولداشتند، نمی‌توانستند در جای درست از آن استفاده کنند و فرمول‌ها ناکارآمد بود. داده‌های پژوهش حاضر نشان داد، آن دسته از دانشجویان که بدون توجه به این استدلال‌ها، به‌دنبال«حفظ» کردنفرمول‌ها بودند، در عمل نمی‌توانستند در جای مناسب از آن‌ها استفاده کنند. مصاحبه با دانشجویان نشان داد، کسانی که با استدلال‌های مربوط به هر یک از این حالت‌ها آشنا بودند، موفقیت بیشتری برای حل مسئله‌ها داشتند. در مقابل بسیاری از کسانی که مسیر آموزشی کتاب [اندرسن] را دنبال نکردند و تنها سعی در حفظ کردن فرمول‌های جدول را داشتند، بجز در مسایلی که مستقیم به «ترتیب» یا «تکرار» اشیا اشاره کرده بود،در تشخیص مسئله و استفاده از محفوظات خود ناتوان بودند. با عوض شدن «صورت ظاهری» مسئله ارائه شده، این دسته از دانشجویان در استفاده از فرمول‌ها با مشکلات متعددی روبه‌رو بودند.

در مواردی که دانشجویان استدلال‌های ارائه شده برای فرمول را درک کردند، نه تنها موفق می‌شدند در موقعیت‌های مناسب آن را به کار ببرند، بلکه در درک روابط و تعمیم‌های بعدی

مسیر هموارتری را طی کردند. برای نمونه، اتحاد مقدماتی زیر به‌عنوان تعمیمی از رابطه ساده $1 + 2 = 3$ارائه شده‌است (برالدی، ۲۰۰۴):

$$n^2 + (n^2 + 1) + \cdots + (n^2 + n) = (n^2 + n + 1) + (n^2 + n + 2) + \cdots + ((n + 1)^2 - 1)$$

که به‌ازای $n = 2$، این رابطه به‌صورت $4 + 5 + 6 = 7 + 8$ است. استدلال درستی این رابطه در حالت کلی، علاوه بر آن‌که می‌تواند با استفاده از استدلال‌های جبری بیان شود، می‌توان با استدلال ترکیبیاتی متکی بر شهود هندسی به درک «چرایی» درستی این تعمیم منجر شود. بیشتر دانشجویانی که کاربست استدلال ترکیبیاتی را برای اثبات درستی این مسئله دیدند، در رویارویی با سؤال‌های مشابه در جریان مصاحبه توانستند با به‌کارگیری استدلال‌های مشابه این دسته از مسئله‌ها(که الزاماً مسئله‌ها مشابه نبودند) را پاسخ دهند. در تعمیم رابطه بالا، با استفاده از حاصل‌جمع اعداد متوالی 1تا nمی‌توان فرمول‌هایی برای مجموع توان‌های دوم و سوم اعداد طبیعی متوالی به‌دست آورد. داده‌های پژوهش نشان داد که این دانشجویان، علاوه بر درک استدلال ترکیبیاتی مرتبط با این مفهوم، موفق شدند ارتباط‌های بیشتری بین استدلال‌های جبری و استدلال‌های ترکیبیاتی برقرار کنند. به اذعان مصاحبه‌شوندگان و تأکید آنان، زمان اختصاص یافته برای این مشاهده، که همراه با بحث و بررسی استدلال‌های ترکیبیاتی مرتبطبا آن بود، بسیار کمتر از زمانی بود که آنان برای انجام تمرین‌های مکرر و با هدف «تسلط» بر مسئله‌های متنوع صرف می‌کردند.

جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در مطالعات پیشین، توانایی تبدیل مسئله به مسایل دیگر ترکیبیاتی، به عنوان سطح چهارم تفکر ترکیبیاتی شناسایی شده است (رضائی؛ ۱۳۹۰). این توانایی محدود به مباحث ترکیبیاتی نیست و در بسیاری از مباحث ریاضی، شباهت صورت ظاهری مسایل یا تشابه بین روابط بین معلومات و مجهولات در این دسته از مسایل، به افراد این توانایی را می‌دهد تا یک مسئله را به مسئله دیگر تبدیل کنند. اما در حالت کلی، چنین شباهت‌هایی ضروری نیست و ممکن است دو مسئله، علی‌رغم تفاوت‌های ظاهری، با توجه به روابط بین معلومات و مجهولات آن‌ها، قابل تبدیل به یکدیگر باشند. برای درک این ارتباط، آشنایی با استدلال‌هایی که ارتباط بین این مسایل را آشکار می‌کند، ضروری است. ماهیت اصلی این استدلال‌ها، شباهت بسیاری به استدلال‌هایی دارد که در جریان به‌دست آوردن فرمول‌ها ارائه می‌شود و چرایی درستی فرمول‌ها را نشان می‌دهد. از سوی دیگر، تنوع زیادی در مفاهیم و مباحث ترکیبیاتی وجود دارد که موجب می‌شود به خاطر

سپردن فرمول‌ها دشوارتر از دیگر مباحث ریاضی باشد. به همین علت،برای ایجاد ارتباط بین مسایل ترکیبیاتی، آشنایی با استدلال‌های ترکیبیاتینقش مهم‌تر و برجسته‌ای پیدا می‌کند. به‌علاوه، نقش استدلال‌های ترکیبیاتی در درک قواعد محاسباتی و چگونگی به‌کارگیری فرمول‌ها در موقعیت مختلف برای حل مسئله (به‌ویژه در دوره تحصیلی دانشگاهی) قابل توجه است.

داده‌هایبه‌دست آمده از مصاحبه با دانشجویان،بر ناکارآمدی استفاده حافظه‌مدار از فرمول‌های ترکیبیاتی تأکید دارد. گروهی از دانشجویان، در ادامه مسیری که در دوره دانش‌آموزی خود طی کرده‌اند، به‌دنبال چگونگی به‌دست آمدن فرمول‌ها نبودند. این گروه از دانشجویان در فراگیری فرمول‌های پیچیده‌تر و کاربست آن‌ها در مسایل جدید ناموفق بودند. مصاحبه‌شوندگان معتقد بودند تا زمانی که ناکارآمدی حفظ کردن فرمول‌ها برای دانشجویان روشن نشود، تلاشی برای فراگرفتن استدلال‌های مرتبط نمی‌کنند. شواهد متعددی از کلاس درس،این موضوع را تأیید کردند.

درک استدلال ترکیبیاتی که به‌عنوان آخرین سطح شناختی تفکر ترکیبیاتی معرفی شده است (رضائی، ۱۳۹۰)، دارای ویژگی‌های متعددی است که در حل مسئله از طریق «ایجاد ارتباط بین مسئله پیش‌رو با مسئله‌های ترکیبیاتی دیگر» و در نهایت «استفاده از استدلال‌های ترکیبیاتی» در فرایند حل مسئله نقش قابل توجهی دارد. رویارویی دانشجویان با مسایل مختلف، نشان‌دهنده آن است که استفاده از استدلال‌های ترکیبیاتی در فرایند حل مسئله به نوع مسئله و سطح دشواری آن بستگی دارد. این سطح دشواری، به نوع آموزش بستگی دارد. بدیهی است چنان‌چه «مسئله‌های مشابه» برای دانشجویان معرفی شده باشد، مسئله می‌تواند بسیار ساده‌تر باشد. بنابر این دشواری یک مسئله، علاوه بر عواملی مانند استفاده آن از دانش موضوعی، روابط آشکار و پنهان میان معلوم و مجهول مسئله، و ... به مسیر آموزش نیز وابسته است.

علاوه بر نقش درک استدلال‌های ترکیبیاتی در حل مسئله، ارائه استدلال‌های ترکیبیاتی برای ایجاد ارتباط بین مباحث مختلف برای اثبات قضیه‌ها و تولید محتوای جدید، می‌تواند از جمله جنبه‌هایدیگر در این سطح از تفکر ترکیبیاتی باشد. بررسی این جنبه، نیازمند کنکاش در چگونگی ریاضی‌ورزی کسانی است که در زمینه مباحث ترکیبیات مطالعه و تحقیق می‌کنند. ریاضی‌دانان و مسئله حل‌کن‌های خبره از جمله کسانی هستند که نوع کارشان و عملکرد آنان در این زمینه می‌توانند علاوه بر آن که به چنین جنبه‌هایی بپردازد، هم‌چنین زمینه را برای ارائه راهکارهای آموزشی و معرفی روش‌های تدریس هموار سازد.

منابع

رضائی، مانی (۱۳۹۰).*ماهیت تفکر ترکیبیاتی*. رساله منتشر نشده دکتری ریاضی ـ گرایش آموزش ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی.

Abramovich, S., Pieper, A. (1996).Fostering recursive thinking in combinatorics through the use of manipulatives and computing technology The Mathematics Educator.Vol.7, No.1, pp.4-12.

Agevall, O. (2005). Thinking about configurations: Max Weber and modern social science. Ethics and Politics, Vol.2. Available on the Internet: http://www.units.it/etica/2005_2/AGEVALL

Anderson, I. (2000).A first course in discrete mathematics.Springer-Verlag, London.

Batanero, C., Godino, J.D., Navarro-Pelayo, V. (1997).Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils.Educational Studies in Mathematics.Vol.32, No.2, pp.181-199.

Batanero, C., Godino, J.D., Navarro-Pelayo, V. (1997).Combinatorial reasoning and its assessment. The Chapter 18, In: Gal, I. and Garfield, J.B. (Eds.). The Assessment Challenge in Statistics Education.IOS Press, pp.239-252. From: http://www.stat.auckland.ac.nz/\~iase/publications/assessbkref.

Bednarz, N., Kieran, C., Lee, L. (Eds.) (1996). Approaches to algebra. Dortrecht: Kluwer Academic Press.

Brualdi, R.A. (2001).Introductory combinatorics.4th ed. Pearson Prentice Hall, Boston.

CadwalladerOlsker, T. (2011).What do we mean by mathematical proof?Journal of Humanistic Mathematics, Vol.1, No.1, pp. 33-60.

Charbonneau, L. (1996). From Euclid to Descartes: Algebra and its relation to geometry.In N. Bednarz et.al. (Eds.), Approaches to algebra. pp.15-37. Dortrecht: Kluwer, Academic Press.

Clements, D.H., Sarama, J. (2000). Young children's ideas about geometric shapes.Teaching Children Mathematics, No.6, pp.482-487.

Crowley, M.L. (1987). The van Hiele model of the development of geometric thought. In Learning and teaching geometry, K-12, M.M. Lindquist (Ed.), National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA. pp.1-16.

English, L.D. (1991). Young children's combinatoric strategies. Educational Studies in Mathematics, Vol.22, No.5 (Oct.), pp.451-474.

English, L.D. (1992). Children's use of domain-specific knowledge and domain-general strategies in novel problem solving.British journal of educational psychology, vol.62, no.2, pp.203-216.

English, L.D. (1993). Children's strategies in solving two- and three-dimensional combinatorial problems.Journal for Research in Mathematics Education, vol.24, no.3, pp.255-273.

English, L.D. (1998). Children's problem posing within formal and informal contexts.Journal for Research in Mathematics Education, vol.29, no.1, pp.83-106.

English, L.D. (1999a). Assessing for structural understanding in children's combinatorial problem solving. Focus on Learning Problems in Mathematics, vol.21, no.4, pp.63-82.

English, L.D. (1999b). Reasoning by analogy: A fundamental processing children's mathematical learning. In Stiff, L. V., Curcio F. R., Developing mathematical reasoning, K-12. National Council of Teachers of Mathematics.pp.22-36.

Farmaki V., Klaoudatos N., Verikios P. (2004). From functions to equations: Introduction of algebraic thinking to 13 year-old students. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematical Education (PME28), 2004. Vol.4, pp.393-400

Fischbein, E., Grossman, A. (1997). Schemata and intuitions in combinatorial reasoning. Educational Studies in Mathematics, Vol.34, No.1 (Oct.), pp.27-47.

Fischbein, E., Pampu, J., Minzat, I. (1970), Effect of age and instruction on combinatory ability in children, British Journal of Educational Psychology, vol.40, pp.261-270.

Godino, J.D., Batanero, C., Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education.The International Journal on Mathematics Education.Vol.39, No.1-2, pp.127-135.

Godino, J. D., Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. In A. Sierpinska and J. Kilpatrick (Eds.), Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity (pp.177-195). Dordrecht: Kluwer.

Godino, J.D., Batanero, C., Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. Educational Studies in Mathematics.Vol.60, No.1, pp.3-36.

Godino, J. D., Wilhelmi, M. R., Bencomo, D. (2005). Suitability criteria of a mathematical instruction process.A teaching experience of the function notion.Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, Vol.4, No.2, pp.1-26.

Jakobsson- Åhl, T. (2003).Developing a framework for analyzing algebraic thinking. From: www.ermeunito.it/CERME3/tableofcontents_cerme3.html

Janv ckvv, M., Janv ke, J. (2006).A classification of strategies employed by high school students in isomorphic combinatorial problems.The Montana Mathematics Enthusiast, Vol.3, No.2, pp.128-145.

Kavousian, S. (2005).The development of combinatorial thinking.In Proceedings of the Joint meeting of the 27th International Conference for Psychology of Mathematics Education - North American Chapter. Roanoke, Virginia.

Kriegler, S. (2007). Just what is algebraic thinking? Available on the Internet www.mathandteaching.org/mathlinks/downloads/articles-01-kriegler.pdf

MacGregor, M., Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11-15. Educational Studies in Mathematics, Vol.33, pp.1-19.

McDonald, J.L. (1989). Cognitive development and the structuring of geometric content.Journal for Research in Mathematics Education, Vol.20, No.1, pp.76-94.

Papic, M., Mulligan J. (2007). The growth of early mathematical patterning: An intervention study. In Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. J. Watson and K. Beswick (Eds), Vol.2, pp.591-600.

Piaget, J., Inhelder, B. (1975). The origin of the idea of chance in children. W.W. Norton & Company, New York.

Rezaie M., Gooya Z. (2009).What do I mean by combinatorial thinking.Procedia˚ Social and Behavioral Sciences, Elsevier. Vol. 11, pp. 122-126.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function.In G. Harel and E. Dubinsky (Eds.), The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy: Notes 25}, .MAA pp.25-58. Washington, DC: Math. Assoc. of America.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra.In J.-L.Dorier (ed.), On the Teaching of Linear Algebra, Kluwer Academic Publishers., pp.209-246.

Sinapova, L. (2004). Creative problem solving.Midwest Instruction and Computing Symposium (MICS), Morris. From: http://www.micsymposium.org/mics_2004/Sinapova.pdf

Tall, D. (1994).Understanding the processes of advance mathematical thinking.An invited ICMI lecture at International Congress of Mathematicians, Zurich.

Tall, D., Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, Vol.12, No.2, pp.151-169.

Van Hiele, P.M. (1959). Development and learning process. Acta Padogogica Ultrajectina Groningen, J.B. Wolters. pp.1-31.