فصلنامه بورس اوراق بهادار شمارهٔ ۳۰ تابستان ۹۴ سال هشتم ــ تاریخ دریافت: ۹۳/۱۱/۱۲ ــ تاریخ پذیرش: ۹۴/۰۵/۳۰ ــ ص ۱۴۷- ۱۶۸

مدل‌سازی شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از معادلات دیفرانسیل تصادفی

عبدالساده نیسی[۱] / مسلم پیمانی[۲]

چکیده

در پژوهش پیش‌روی به انتخاب معادله دیفرانسیل تصادفی مناسب جهت مدل‌سازی رفتار شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران پرداخته شده است. برای این منظور پس از ارائه توضیحات لازم در مورد ضرورت استفاده از مدل‌های تصادفی و در نتیجه اصول جدید تحت عنوان حسابان تصادفی، به معرفی مهم‌ترین معادلات تصادفی کاربردی در علوم مالی (شامل حرکت براونی هندسی، مدل با جمله پرش، گارچ غیرخطی، مدل واریانس گاما، واسیچک و هستون) پرداخته شده است. سپس با رویکردی کاربردی و بر اساس توان هر مدل جهت تخمین ارزش در معرض خطر و پیش‌بینی شاخص کل به‌وسیله شبیه‌سازی مونت‌کارلو، مدل مناسب انتخاب شده است.

نتایج تکنیک‌های پس‌آزمون در مورد ارزش در معرض خطر و معیارهای نیکویی برازش در خصوص قدرت پیش‌بینی، حاکی از برتری مدل با جمله پرش در محاسبه ارزش در معرض خطر و گارچ غیرخطی در پیش‌بینی شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران می‌باشد.

واژگان کلیدی: معادلات دیفرانسیل تصادفی، ارزش در معرض خطر، شبیه‌سازی مونت‌کارلو، تلاطم تصادفی، پرش.

طبقه‌بندی موضوعی:G10, G17, C22, C53, E37

۱. استادیار گروه ریاضی، آمار و کامپیوتر دانشگاه علامه طباطبائی

۲. دانشجوی دکتری مدیریت مالی گروه حسابداری و مالی دانشگاه علامه طباطبائی

۱- مقدمه

علوم مالی نیز مانند بسیاری دیگر از شاخه‌های علم، در پی توضیح و تبیین روابط بین متغیرها بوده و در این راستا استفاده از مدل‌های کمی و اصول ریاضی ضروری است. یکی از ابزارهای قدرتمند مورد کاربرد ریاضی‌دانان برای توضیح روابط بین متغیرها، معادلات دیفرانسیل است که جایگاه حائز اهمیتی در دیگر علوم مانند فیزیک و علوم مهندسی به دست آورده است. معادله دیفرانسیل، معادله ریاضی بین یک تابع مجهول از یک یا چند متغیر مستقل و مشتق‌های مرتبه‌های مختلف آن نسبت به متغیرهای مستقل است.

با این حال بسیاری از متغیرهای مورد بررسی در علوم مالی مانند قیمت سهام و اوراق مشتقه، نرخ بهره، نرخ ارز و احتمال نکول دارای ماهیتی تصادفی‌اند. به عبارت دیگر، تصادفی بودن جزء جدا نشدنی ماهیت و رفتار متغیرهای مالی محسوب شده و تحلیلگران حوزه مالی نیز به ناچار، به سمت بررسی متغیرهای مالی در فضای عدم اطمینان و ریسک سوق داده می‌شوند. بنابراین استفاده از مدل‌های تصادفی در تحلیل رفتار متغیرهای مالی اجتناب‌ناپذیر بوده و به دنبال آن، معادلات دیفرانسیل عادی و غیرتصادفی در مالی کاربرد چندانی نداشته و نیاز به بخش جدیدی از ریاضیات تحت عنوان معادلات دیفرانسیل تصادفی است. این شاخه از دانش را می‌توان ترکیبی از حسابان[1] (حساب دیفرانسیل و انتگرال عادی) و احتمالات (شامل احتمال، تئوری اندازه[2] و فرآیندهای تصادفی) دانست. معادلات دیفرانسیل تصادفی به دلیل پشتوانه بسیار غنی ریاضی آن و انعطاف‌پذیری روابط مورد استفاده در آن، کاربرد گسترده‌ای در حل مسائل گوناگون مالی مانند مدل‌سازی رفتار قیمت دارایی‌ها، ایجاد و مدیریت سبد اوراق بهادار، قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله از طریق تشکیل پرتفوی بدون آربیتراژ شامل دارایی پایه، ورقه اختیار و دارایی بدون ریسک و اندازه‌گیری ریسک یافته است.

با این وجود، بر خلاف به‌کارگیری روز افزون معادلات دیفرانسیل تصادفی در علوم مالی، در کشور ما تاکنون توجه چندانی به آن نشده و تحقیقات انگشت‌شماری در این زمینه صورت گرفته است. این تحقیقات نیز از یک‌سو واقعیات بازار سرمایه ایران را در نظر نداشته و جنبه نظری یافته‌اند و یا از سوی دیگر، تنها با مدلی ساده به کار خود پایان داده و از ورود به عمق مدل‌های با پیچیدگی بیشتر سرباز زده‌اند. در این نوشتار سعی می‌گردد هر دو نقیصه برطرف گردد. به عبارت روشن‌تر در این پژوهش، در پی یافتن معادله دیفرانسیل تصادفی مناسب جهت تشریح رفتار شاخص کل بورس

1. Calculus
2. Measure Theory

اوراق بهادار تهران خواهیم بود. انتخاب مدل تصادفی مناسب نیز بر اساس کاربرد عملی مدل‌ها (محاسبه ارزش در معرض خطر و پیش‌بینی بر اساس روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو) بوده و صرفاً بر خواص نظری مدل‌ها تکیه نمی‌شود. همچنین با آزمون عملکرد مدل‌های تصادفی مختلف (شامل مدل‌های ساده، مدل‌های با تلاطم تصادفی، مدل‌های با خاصیت بازگشت به میانگین و مدل‌های با جمله پرش) سعی خواهد شد به مدل‌های تصادفی ساده بسنده نشده و مروری کامل بر پرکاربردترین معادلات دیفرانسیل‌های تصادفی در علوم مالی انجام گیرد.

بدین‌منظور در بخش بعد به تشریح مبانی مدل‌های تصادفی می‌پردازیم. در این بخش با ارائه توضیحات لازم در مورد حرکت براونی به عنوان جزء اصلی زاینده رفتار تصادفی در مدل‌ها، مدل براونی هندسی معرفی شده و علت نیاز به اصول جدید حسابان تصادفی تشریح می‌گردد. سپس با بیان نواقص مدل براونی هندسی، سایر مدل‌های کاربردی در علوم مالی توضیح داده می‌شود. در ادامه با توضیح کاربردهای اصلی معادلات دیفرانسیل تصادفی در مالی، به ارزیابی توانایی هر مدل در محاسبه ارزش در معرض خطر و پیش‌بینی شاخص کل پرداخته شده و مدل مناسب انتخاب می‌شود.

۲- نیاز به مدل‌های مبتنی بر احتمال به دلیل ماهیت تصادفی متغیرهای مالی

فعالین بازارهای سرمایه و نظریه‌پردازان علوم مالی، همگی در فضای عدم اطمینان به سر برده و با متغیرهایی سر و کار دارند که ماهیتاً پیش‌بینی آنها به طور دقیق ممکن نیست. احتمال، زبان رسمی ریاضیات برای بیان موقعیت‌هایی است که با عدم اطمینان مواجه هستیم.

در فضای احتمالات، یک کمیت تصادفی را به وسیله متغیر تصادفی مدل‌سازی می‌کنند (Oksendal, 2003). یک متغیر تصادفی ($X(\omega)$)، یک تابع حقیقی مقدار[1] است که بر روی مجموعه‌ای از برآمدهای یک آزمایش تصادفی تعریف می‌شود. در صورت اندیس‌گذاری یک متغیر تصادفی ($X_t(\omega)$)، به یک فرآیند تصادفی دست پیدا می‌کنیم. حال اگر این متغیر اندیس‌گذار زمان باشد، فرآیند تصادفی ایجاد شده سری زمانی نام می‌گیرد (Mikosch, 2004). به بیان دقیق‌تر، یک فرآیند تصادفی، مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی $\{X_t(\omega),\ t \in \tau\}$ است که بر یک فضای احتمال تعریف و به وسیله یک پارامتر t اندیس‌گذاری می‌گردد که این پارامتر t در مجموعه τ تغییر می‌کند. اگر مجموعه τ یک مجموعه گسسته باشد، فرآیند تصادفی حاصل یک فرآیند تصادفی

1. Real Valued Function

گسسته و اگر τ پیوسته باشد، فرآیند تصادفی، یک فرآیند تصادفی پیوسته نام می‌گیرد (Allen, 2007).

برخی از فرآیندهای تصادفی خاص با توجه به کاربرد فراوان آنها ، بیش از دیگر فرآیندها مورد توجه قرار دارند. معروف‌ترین این فرآیندها، حرکت براونی است که در اکثر مدل‌های مالی به عنوان جزء اصلی زاینده رفتارهای تصادفی متغیرهای مالی مورد استفاده قرار می‌گیرد. حرکت براونی، حد پیوسته گام تصادفی[۱] است. فرآیند تصادفی $B=\left(B_t,t\in[0,\infty)\right)$ حرکت براونی نام دارد اگر از صفر شروع شده، دارای نموهای مستقل و مانا[۲] و توزیع نرمال بوده و پیوسته- مسیر[۳] باشد. حرکت براونی، یک فرآیند تصادفی با خواصی متعدد و جذاب همچون مارکوف بودن[۴]، نرمال (گاوسی)[۵] و مارتینگلی بودن است که موجب کاربردپذیری بالای این فرآیند در علوم مختلف شده است (Mikosch, 2004). ذکر این نکته ضروری است که خواص مورد اشاره این امکان را به ما می‌دهد که به سادگی حرکت براونی را به وسیله نرم‌افزارهای برنامه‌نویسی رایانه‌ای شبیه‌سازی نماییم.

حرکت براونی، نامی است که به حرکت نامنظم گرده معلق گیاهان در آب داده شده است. رابرت براون (گیاه‌شناس اسکاتلندی)، برای اولین بار در سال ۱۸۲۸ با مشاهده این حرکت، متوجه اهمیت آن در مطالعه ذرات میکروسکوپی شد. در سال ۱۹۰۶، فیزیکدان مشهور، آلبرت اینشتین، موفق به کشف علت حرکت ذرات معلق شد. وی علت این امر را بمباران دانه‌های ریز معلق توسط ملکول‌ها دانست. در سال ۱۹۱۸، ریاضی‌دانی دیگر به نام وینر الگوی ریاضی این حرکت را به طور کامل بررسی نمود. وی در سال ۱۹۲۳ موفق به ساخت فرآیندی شد که امروزه از آن تحت عنوان فرآیند وینر یاد می‌شود (زنگنه و جهانی‌پور، ۱۳۸۳).

باشیلیر از اولین کسانی بود که حرکت براونی را در علوم مالی و اقتصادی به‌کار گرفت (Bachelier, 1900). وی فرض کرد که قیمت سهام از حرکت براونی بدون جمله رانش پیروی می‌کند (حرکت براونی حسابی) که نتیجه آن توزیع نرمال قیمت سهام (و نه بازده آن) و عدم در نظر گرفتن ارزش زمانی پول بود. پس از وی نیز دانشمندانی چون کوریزنگا همین رویه را در پیش گرفته و مدل‌های خود را بر همین اساس بنیان نهادند (Kruizenga, 1956). اگرچه ایده باشیلیر در خصوص

1. Random Walk
2. Independent and stationary Increments
3. Continuous Path
4. Markov
5. Normal (Gaussian)

حرکت براونی قیمت سهام بسیار نوآورانه و با ارزش بوده و هست، با این وجود، چون در مدل وی قیمت سهام می‌توانست منفی شود، مدل وی دارای یک نقص بود.

این نقص توسط کندال، رابرتز، آزبورن و ساموئلسون و البته بعدها توسط مرتون مد نظر قرار گرفته شد (Kendall, 1953، Roberts, 1959، Osborn, 1964&1959، Samuelson, 1965، Merton, 1973). این دانشمندان، فرض نمودند که به جای قیمت سهام، بازده از حرکت براونی پیروی می‌کند. بدین ترتیب قیمت سهام از توزیع لگاریتم – نرمال پیروی خواهد کرد (و نه توزیع نرمال). مدل به دست آمده از این طریق حرکت براونی هندسی نام گرفت:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \qquad (۱)$$

در این رابطه منظور از dS_t، تغییرات آنی قیمت، t بیانگر زمان، dB_t، نشان‌دهنده نموهای حرکت براونی استاندارد بوده و پارامترهای μ و σ به ترتیب جمله رانش[1] و تلاطم[2] نام دارد. بر اساس این مدل، با تغییر پارامتر رانش، شاهد تغییر روند کلی حرکت متغیر تصادفی بوده و پارامتر تلاطم، بر میزان تغییرات متغیر تحت بررسی اثرگذار است.

اسپرنکل با در نظر داشتن مفهوم ریسک‌گریزی در مالی و اضافه کردن جمله رانش به مدل حرکت براونی معمولی و فرض توزیع لگاریتم – نرمال برای قیمت سهام، روشی جدید برای قیمت‌گذاری اختیار خرید اروپایی ارائه داد که در آن مشکل منفی شدن قیمت اختیار معاملات نیز رفع شده بود (Sprenkle, 1961 & 1964). بونز با در نظر گرفتن ارزش زمانی پول، مدل اسپرنکل را بهبود بخشید (وی چنین عنوان داشت که ارزش فعلی اختیار خرید، ارزش تنزیل شده حاصل از مدل اسپرنکل با نرخ تنزیلی برابر با نرخ بازده مورد انتظار سهم است) (Boness, 1964). ساموئلسون اصلاحات جدی راجع به تحقیقات انجام شده در خصوص قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله تا آن زمان انجام داد. ایده اصلی اصلاحات وی، سطح متفاوت ریسک در اوراق اختیار معامله و سهم و در نتیجه تفاوت در نرخ تنزیل ارزش این دو بود (بر خلاف مدل بونز). ساموئلسون و مرتون نیز مدل عمومی تعادلی خود را بر اساس تابع مطلوبیت برای یک سرمایه‌گذار فرضی ارائه نمودند.

علی‌رغم تحقیقات نام برده شده، شهرت اصلی حرکت براونی هندسی به دلیل تحقیقات بلک و شولز است. این دو محقق در سال ۱۹۷۳ با فرض رفتار دارایی پایه بر اساس حرکت براونی هندسی مدل معروف قیمت‌گذاری اختیارات معامله خود را ارائه نمودند. آنها از دو رویکرد متفاوت برای

1. Drift
2. Volatility

قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله اروپایی استفاده نموده و مدلی تعادلی عمومی و مبتنی بر متغیرهای قابل مشاهده و محاسبه ارائه کردند که به این دلیل در عمل نیز کاربرد فراوانی یافت. بلک و شولز بر اساس تحقیقات سورپ و دیگران در سال ۱۹۶۷ (که نسبت تعداد سهم مورد نیاز به اوراق اختیار معامله برای پوشش کامل ریسک را به دست می‌داد) و این ایده که می‌توان با ترکیب خاصی از سهم و اوراق اختیار معامله سبدی بدون ریسک ساخت، مدلی تحلیلی برای قیمت‌گذاری اوراق مشتقه ارائه دادند (Thorp, et al., 1967). نکته جالب توجه مدل بلک و شولز، عدم وابستگی قیمت اوراق اختیار معامله به بازده مورد انتظار سهم و یا ترجیحات سرمایه‌گذاران نسبت به ریسک است. به عبارت دیگر در این مدل فرض می‌شود که سرمایه‌گذاران دارای نظرات متفاوت و یا مشابه نسبت به بازده سهم می‌باشند. برخی دیگر از محققین، به ارائه اصلاحاتی در مدل بلک - شولز پرداختند. برای نمونه، گالای، در نرخ تنزیل اوراق اختیار معامله تغییراتی ایجاد کرد (Galai, 1987). برخی دیگر از محققین نیز با استفاده از رویکردی متفاوت به قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله پرداختند مانند درخت دو جمله‌ای و شبیه‌سازی مونت‌کارلو توسط بویل، شارپ و کاکس و دیگران یا قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله بامانع[1] با روش‌های عددی مانند دولینسکی و دیگران (Boyle, 1977، Sharp, 1978، Cox, et al., 1979، Dolinsky, et al., 2000).

با توجه به توضیحات ارائه شده تاکنون، در این قسمت می‌توان علت نیاز به اصول جدید حسابان تصادفی و معادلات دیفرانسیل تصادفی در مورد مدل‌های مبتنی بر احتمال را تشریح نمود. برای این منظور فرض کنید حرکت براونی هندسی را به شکل کلی زیر تعمیم دهیم:

$$dS_t = \mu(S_t, t)S_t dt + \sigma(S_t, t)S_t dB_t \quad (۲$$

که در آن پارامترهای ثابت μ و σ با توابعی تصادفی جایگزین شده‌اند. با بازنویسی این معادله به شکل انتگرالی خواهیم داشت:

$$S_T = S_0 + \int_0^T \mu(S_t, t)S_t dt + \int_0^T \sigma(S_t, t)S_t dB_t \quad (۳$$

همان‌طور که مشاهده می‌گردد، در معادله فوق در انتگرال اول جمله تصادفی وجود نداشته و می‌توان آن را با تکنیک‌های حسابان معمولی حل کرد ولی انتگرال دوم بر حسب دیفرانسیل یک متغیر تصادفی مشتق‌ناپذیر و با تغییرات نامحدود بوده (حرکت براونی) و استفاده از اصول رایج حسابان

1. Barrier

معمولی (مانند مشتق، دیفرانسیل، قاعده زنجیره‌ای و انتگرال ریمان - اشتلیس) در حل و تحلیل این معادله دیفرانسیل کاربرد ندارد و نیاز به تعریف تکنیک‌های جدیدی (همچون انتگرال ایتو به جای انتگرال ریمان، لم ایتو به جای قاعده زنجیره‌ای و معادلات دیفرانسیل تصادفی به جای معادلات دیفرانسیل معمولی) در حوزه حسابان تصادفی خواهد بود (Focardi, et al., 2004).

۳- مدل‌های تصادفی جایگزین جهت رفع نواقص مدل براونی هندسی

اگرچه مدل حرکت براونی هندسی مشکل منفی شدن قیمت سهم در حرکت براونی را مرتفع نمود ولی خود حرکت براونی هندسی نیز دارای نواقصی است زیرا در این مدل ضرائب μ و σ ثابت در نظر گرفته شده و تابعی از زمان و قیمت سهم نیست. این امر مورد انتقاد اندیشمندان مالی قرار گرفته است (Schoutnes, 2004). از بین این انتقادات می‌توان به مواردی چون وجود شواهد تجربی دال بر عدم توزیع نرمال و وجود دنباله‌های پهن در توزیع بازدهی، وجود تلاطم تصادفی و خوشه‌ای (مثل پژوهش‌های مندلبرت و تیلور) و گسستگی و بازگشت به میانگین در فرآیند قیمت (از قبیل تحقیقات اسکات، فرنچ و دیگران و شیخ) اشاره داشت (Mandelbort, 1963، Fama, 1963 & 1965، Kon, 1984، Taylor, 1994، Scott, 1987، French, et al., 1987 ، Sheikh, 1993). این مشکلات را می‌توان با استفاده از گروه مدل‌های دیگری چون مدل‌های با تلاطم تصادفی و مدل‌های با جمله پرش مرتفع نمود.

مدل گارچ غیرخطی

مدل گارچ غیرخطی (NGARCH) شکل تکامل یافته مدل GARCH محسوب شده و در سال **۱۹۹۳** توسط انگل و دیگران معرفی شد (Engle, et al., 1993). این مدل علاوه بر داشتن خاصیت تلاطم خوشه‌ای و در نتیجه قابلیت توضیح خاصیت پهن‌دنبالگی، توانایی مدل‌سازی واکنش نامتقارن تلاطم به اخبار خوب و بد را نیز دارد. مدل NGARCH به صورت زیر تصریح می‌گردد:

$$\begin{aligned}
&\frac{\Delta S_{t_i}}{S_{t_i}} = \mu \Delta t_i + \sigma_{t_i} \Delta W_{t_i} \\
&\sigma_{t_i}^2 = \omega + \alpha \sigma_{t_{i-1}}^2 + \beta(\varepsilon_{t_{i-1}} - \gamma \sigma_{t_{i-1}})^2 \\
&\varepsilon_{t_i}^2 = (\sigma_{t_i} \Delta W_{t_i})^2
\end{aligned} \tag{۴}$$

که پارامترهای جدید این مدل (ω,α,β) مثبت و در محدودیت مانایی $\alpha+\beta(1+\gamma^2)<1$ زیر صدق می‌کنند و در مقایسه با GARCH(1,1) دارای یک پارامتر اضافه γ است. اگر γ مساوی صفر باشد، آن‌گاه مدل به مدل متقارن GARCH(1,1) تبدیل می‌شود که در آن مقدار مثبت و منفی $\varepsilon_{t_{i-1}}$ تاثیر یکسانی بر واریانس شرطی دارند. مقدار مثبت این پارامتر از اثر اخبار خوب ($\varepsilon_{t_{i-1}}>0$) کاسته و بر اثر اخبار بد ($\varepsilon_{t_{i-1}}<0$) می‌افزاید.

مدل با جمله پرش مرتون

همانطور که عنوان شد یکی از انتقادات وارده به حرکت براونی هندسی در نظر نداشتن گسستگی‌های موجود در فرآیند قیمت است. اضافه نمودن یک جمله پرش به مدل می‌تواند علاوه بر رفع این نقیصه، تا حد زیادی به تفسیر پدیده کشیدگی بیش از نرمال[1] کمک کند. مرتون از اولین کسانی بود که به قیمت‌گذاری اوراق مشتقه بر اساس یک معادله دیفرانسیل تصادفی با جمله پرش پرداخت. مدل وی ترکیبی از مدل براونی هندسی و یک جمله پرش به صورت زیر بود:

$$dS_t=\mu S_t dt+\sigma S_t dW_t+S_t dJ_t \tag{۵}$$

که در آن J_t یک فرآیند پرش تک متغیره است:

$$dJ_t=(Y_{N_t}-1)dN_t \tag{۶}$$

و $(N_t)_{T\geq 0}$ دارای توزیع پواسون با شدت λ است. Y_j نیز نشان‌دهنده اندازه $j-$امین پرش است. مدل مرتون بر این فرض استوار است که Y_j دارای توزیع $i.i.d$ و لگاریتم – نرمال است. به عبارتی:

$$Y_j \sim \exp(N(\mu_Y,\sigma_Y^2)) \tag{۷}$$

مدل واریانس – گاما

مدل واریانس گاما نیز روشی دیگر برای مدل‌سازی پدیده توزیع‌های با دنباله پهن است. اولین بار فرم ساده این مدل در سال ۱۹۹۰ توسط مادان و دیگران ارائه شد (Madan, et al., 1990). سپس مادان و دیگران در مقاله‌ای دیگر به بررسی نحوه قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله بر اساس این فرآیند پرداختند (Madan, et al., 1991). همچنین مجدداً مادان و دیگران مدل قیمت‌گذاری خود را تکمیل

---

1. Leptokurtosis

کرده و رابطه‌ای صریح برای آن استخراج نمودند (Madan, et al., 1998). در این روش، از فرآیندی که در آن حرکت براونی (با جمله رانش $\bar{\mu}$ و تلاطم $\bar{\sigma}$) در طی زمان با یک جایگزین مستقل فزاینده با افزایش‌های مستقل و مانا تغییر می‌کند، استفاده می‌شود. به عبارتی به جای وابسته کردن مدل به تلاطم قبلی (مانند مدل GARCH) یا اضافه کردن منبع جدیدی از تصادفی بودن (مثل جمله پرش)، زمان فرآیند را به وسیله یک فرآیند جدید تصادفی می‌کنند. این امر به مثابه تصادفی در نظر گرفتن زمان در بازارهای مالی است (مثلاً انجام معاملات در زمان‌های تصادفی). شکل کلی این مدل برای بازده لگاریتمی به صورت زیر است:

$$d\log S_t = \bar{\mu}dt + \bar{\theta}dg_t + \bar{\sigma}dW(g_t), S(0) = S_0 \qquad (8$$

که $\bar{\mu}$، $\bar{\theta}$ و $\bar{\sigma}$ اعداد حقیقی ثابت و $\bar{\sigma} \geq 0$ است. تفاوت اصلی این مدل با حرکت براونی هندسی در جمله g_t نهفته است. در حقیقت g_t همان مفهوم زمان در بازارهای مالی را دارد. این زمان یک فرآیند تصادفی مثبت فزاینده با تغییرات مانای $g_u - g_t$ که $u \geq t \geq 0$ محسوب می‌شود. فرض اساسی این مدل، $E(g_u - g_t) = u - t$ است، بدین معنی که زمان واقعی بازار و زمان تقویمی به طور میانگین بایکدیگر برابرند.

مدل واسیچک

مدل واسیچک از دسته کلی‌تری از مدل‌ها تحت عنوان مدل‌های بازگشت به میانگین[1] است. این مجموعه از مدل‌ها، دارای خاصیتی است که در آن فرآیند به سمت مقداری ثابت و یا متغیر در زمان بازگشته و حول آن مقدار دارای تلاطم محدود است. مدل واسیچک که نام خود را از نام اقتصادانی با همین عنوان در سال ۱۹۷۷ قرض گرفته است، از اولین مدل‌هایی بود که برای تشریح رفتار نرخ بهره کوتاه‌مدت ارائه شده و بعدها برای دیگر متغیرهای اقتصادی و مالی نیز به کار گرفته شد (Vasicek, 1977). در این مدل فرض می‌گردد که نرخ بهره کوتاه مدت از یک فرآیند اورنشتین – اولنبک با ضرائب ثابت به شکل زیر پیروی می‌کند:

$$dS_t = \alpha(\theta - S_t)dt + \sigma dW_t \qquad (9$$

1. Mean Reversion

که در آن α، θ و σ مثبت و dW_t یک فرآیند وینر استاندارد است. همان‌طور که عنوان شد، این مدل دارای خاصیتی تحت عنوان بازگشت به میانگین است که در ضریب S_t نهفته است.

لازم به ذکر است که پس از واسیچک، محققین دیگری به توسعه مدل وی برای مقاصد خاص خود پرداختند. برای نمونه لمبرتون و دیگران با استفاده از توزیع احتمالات مدل، به قیمت‌گذاری اوراق قرضه پرداختند (Lamberton, et al., 1995). دافی و دیگران با استفاده از معادلات دیفرانسیل با ضرائب جزئی، خواص این مدل را بیشتر تشریح کردند (Duffie, et al., 1996). الیوت و دیگران نیز، روشی جدید برای حل این معادله (استفاده از معادلات دیفرانسیل) ارائه نمودند (Elliott, et al., 2001). پس از آن نیز برخی از محققین این مدل را در حالات خطی و غیرخطی ارائه نموده و آن را با استفاده از روش غربالگری کالمن بر روی اسناد خزانه امریکا آزمون کرده‌اند (Chen, et al., 2003).

مدل هستون

از دیگر مدل‌هایی که در آن تلاطم نیز خود یک فرآیند تصادفی است، مدل هستون می‌باشد (Heston, 1993). فرض نمایید دارایی تحت بررسی بر اساس رابطه زیر رفتار می‌نماید:

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW_t^{(1)} \\ d\sigma_t^2 &= -\gamma(\sigma_t^2 - \theta)dt + k\,\sigma dW_t^{(2)} \end{aligned} \qquad (۱۰$$

که در آن t نشان‌دهنده اندیس زمان، μ جمله رانش، $dW_t^{(i)}$ فرآیند وینر استاندارد[۱] و σ_t تلاطم تصادفی در طی زمان است. همچنین γ نشان‌دهندهٔ سرعت بازگشت به میانگین، θ مقدار واریانس در بلند مدت و k بیانگر تلاطم واریانس است.

این مدل از جنبه‌های مختلفی مورد بررسی قرار گرفته است. برای نمونه برخی از محققین توجه خود را به خواص ریاضی آن معطوف کرده (Broadie, et al., 2006، Lord, Koekkoek, et al., 2010، Glasserman, et al., 2008) و برخی دیگر من جمله خود هستون به بررسی عملکرد آن در قیمت‌گذاری اوراق مشتقه پرداختند. دیگر محققین نیز سعی نمودند که با در نظر گرفتن خواص دارایی‌های مالی خاص به تکمیل مدل هستون بپردازند (مثلاً فورد و دیگران در سال ۲۰۱۰ مدل هستون را به شکلی که حالات آن وابسته به زمان تغییر می‌نمود، تعمیم داده و روشی برای تخمین پارامترهای

---

۱. اگرچه در حالت کلی این دو فرایند وینر می‌تواند دارای همبستگی باشد ولی در این پژوهش این دو فرآیند مستقل فرض شده است (این موضوع بر نتایج تخمین دیگر پارامترها موثر نیست (دراگسلو و یاکوونکو، ۲۰۰۲)).

آن ارائه کردند (Forde, et al., 2010) و یا بولر مدل تک‌عاملی هستون را به شکل چند عاملی درآورد (Buehler, 2006) و جاکویر و دیگران نیز جمله پرش را به مدل با نوسانات تصادفی افزودند (Jacquier, et al., 2011)).

٤-کاربردهای معادلات دیفرانسیل تصادفی در علوم مالی

اگرچه کاربرد اصلی معادلات دیفرانسیل تصادفی، قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله است با این وجود با توجه به اجرایی نشدن معاملات اوراق اختیار معامله در بازار سرمایه ایران، به تشریح کاربردهای دیگر این معادلات یعنی تخمین ارزش در معرض ریسک به روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو و پیش‌بینی می‌پردازیم.

ارزش در معرض خطر یکی از معیارهایی اندازه‌گیری ریسک بازار است. به طور ساده می‌توان گفت، ارزش در معرض خطر یک دارایی، حداکثر زیانی است که آن دارایی در طول دورهٔ نگهداری متحمل می‌شود. طول این دوره نگهداری، کوتاه مدت و معمولاً از یک روز تا چند هفته است. بنابراین ارزش در معرض خطر مربوط به سبد یک سرمایه‌گذار، حداکثر میزان پولی است که احتمالاً در این مدت زمان کوتاه از دست می‌دهد. ارزش در معرض خطر همواره با سطح اطمینانی که عموماً در دامنه ۹۵ تا ۹۹.۹ درصد قرار دارد بیان می‌شود. بنابراین بهتر است بگوییم که ارزش در معرض خطر واقعاً با حداکثر زیانی که ممکن است متحمل شویم، برابر نیست، اما بدترین نتیجه سبد را که در هر چند روز یکبار اتفاق می‌افتد به ما نشان می‌دهد. صرف نظر از جذابیت مفهومی آن، کمیته بازل نیز در شهرت این معیار خطر بی‌اثر نبود. بر اساس مقررات این کمیته، دورهٔ نگهداری برابر ۱۰ روز معاملاتی ثابت در نظر گرفته می‌شود. همچنین محاسبات مربوط به این معیار باید براساس داده‌های بازده روزانه انجام شود زیرا سرمایه‌گذاران ترکیب سبد خود را به صورت روزانه تغییر می‌دهند. به‌علاوه سطح اطمینان معادل ۹۹ درصد برای محاسبه ارزش در معرض خطر در نظر گرفته شده است تا با این امر که در هر صد روز یکبار یا در یک سال دو تا سه بار زیانی بیش از مقدار ارزش در معرض خطر روی دهد، مطابق گردد. بر این اساس، در این پژوهش نیز به محاسبه ارزش در معرض خطر ۱۰ روزه و سطح اطمینان ۹۹ درصد می‌پردازیم.

جهت محاسبه ارزش در معرض خطر ، روش‌های گوناگونی وجود دارد. دسته اول این روش‌ها که تحت عنوان روش‌های پارامتریک شناخته می‌شوند، مبتنی بر مفروضاتی در خصوص توزیع داده‌های تحت بررسی است. برای مثال اکثر این مدل‌ها فرض می‌کنند توزیع به صورت نرمال است.

دسته دوم با استفاده از داده‌های تاریخی واقعی به محاسبه ارزش در معرض خطر می‌پردازند. آخرین دسته از روش‌های تخمین ارزش در معرض خطر، روش‌های مبتنی بر شبیه‌سازی مونت‌کارلو است که با در دست داشتن رابطه‌ای که رفتار فرآیند مورد نظر را تشریح می‌کند، به شبیه‌سازی تعداد زیادی مسیر نمونه از آن پرداخته و بر اساس نتایج این شبیه‌سازی به تخمین ارزش در معرض خطر می‌پردازد (Goorbergh,et al., 1999). معادلات دیفرانسیل تصادفی به عنوان رابطه مبنای انجام فرآیند شبیه‌سازی در محاسبه ارزش در معرض خطر به این روش مورد استفاده قرار می‌گیرند. ذکر این نکته ضروری است که از دید نظری، روش مونت کارلو نسبت به دیگر روش‌ها دارای این مزیت است که با مفروضات محدودکننده‌ای چون توزیع خاص برای بازدهی (فرض روش‌های پارامتریک) و یا تکرار عینی گذشته در آینده (فرض روش تاریخی) همراه نیست. این مزیت تنها در ورطه نظری مصداق نداشته و در عمل نیز شواهدی بسیاری دال بر این مدعا است (مانند تحقیقات (Duffie, et al., 1997، Jorion, 2000 & 2001)، زمانی (۱۳۹۲)).

نتایج عملکرد ارزش در معرض خطر محاسبه شده با روش‌ها و پارامترهای مختلف با استفاده از فنون پس‌آزمون انجام می‌گیرد. پس‌آزمون عبارت است از رویکردی آماری و سیستماتیک جهت مقایسه مقادیر واقعی و پیش‌بینی شده توسط ارزش در معرض خطر (Niepolla, 2009). برای نمونه در صورت محاسبه ارزش در معرض خطر روزانه با فاصله اطمینان ۹۹ درصد انتظار می‌رود که به طور میانگین از هر ۱۰۰ روز تنها در یک روز با خطا مواجه گردیم (پوشش غیرشرطی). همچنین ضروری است مدل برتر خطاهایی ناهمبسته تولید کند (پوشش شرطی) (Jorion, 2001). از بین معیارهای پوشش غیرشرطی آزمون کوپیک که تحت عنوان آزمون نسبت خطاها[1] نیز شناخته می‌شود رواج بیشتری نسبت به معیارهای دیگر دارد (Kupiec, 1995). این روش علی‌رغم سادگی، با این مسئله روبروست که تنها نسبت خطاها را درنظر گرفته و استقلال آنها را بررسی نمی‌کند. جهت رفع این مشکل نیز روش‌های متعددی ارائه شده که ساده‌ترین آنها روش زمان تا اولین خطا[2] است که در عمل چندان کارآیی ندارد. برخلاف این روش معیار دیگری که تحت عنوان روش کریستوفرسون شناخته می‌شود کاربرد فراوانی دارد ولی با این اشکال مواجه است که تنها وابستگی خطاها را با یک وقفه در نظر می‌گیرد (Christofferson, 2003). هاس جهت حل این مسئله با تکمیل مدل کوپیک روشی جدید تحت عنوان آزمون ترکیبی کوپیک ارائه نمود (Hass, 2001).

1. Proportion of failures (POF)
2. Time until first failure (TUFF)

معادلات دیفرانسیل تصادفی علاوه بر موارد قبلی ذکر شده، دارای قابلیت استفاده برای پیش‌بینی قیمت یک ورقه بهادار نیز می‌باشند. روش کار در پیش‌بینی با معادلات دیفرانسیل تصادفی تا حد زیادی شبیه محاسبه ارزش در معرض خطر با استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو است بدین صورت که بر اساس یک معادله دیفرانسیل تصادفی خاص، تعداد زیادی مسیر نمونه به طول دلخواه شبیه‌سازی شده و بر اساس نتایج آن، مقدار مورد انتظار قیمت ورقه بهادار استخراج می‌گردد (Corina, et al., 2005). اگرچه این بخش از کاربرد معادلات دیفرانسیل تصادفی در تحقیقات گذشته چندان مورد توجه قرار نگرفته است ولی در همین تحقیقات اندک نیز بر قابلیت معادلات دیفرانسیل تصادفی در پیش‌بینی قیمت اوراق بهادار تاکید شده است. خالوزاده و صدیق (۱۳۸۴) با استفاده از معادلات دیفرانسیل تصادفی به پیش‌بینی قیمت سهام یک شرکت (شهد ایران) و مقایسه آن با مدل رگرسیونی ARIMA پرداخته و نتیجه‌گیری نمودند که پیش‌بینی بر اساس مدل‌های تصادفی، عملکرد بهتری نسبت به مدل‌های خطی به خصوص در پیش‌بینی بلندمدت دارد. کاربرد پیش‌بینی معادلات دیفرانسیل تصادفی، به قیمت اوراق بهادار محدود نشده و در خصوص پیش‌بینی دیگر خصایص این اوراق نیز به کار می‌رود. برای نمونه از این معادلات در جهت پیش‌بینی تلاطم آتی اوراق بهادار استفاده زیادی شده است. آدرینو و دیگران با استفاده از معادلات دیفرانسیل تصادفی با جمله پرش و اثرات بازگشت به میانگین سعی در مدل‌سازی و پیش‌بینی تلاطم نمودند (Adrino, et al., 2011). آنها دریافتند که معادلات دیفرانسیل تصادفی در پیش‌بینی تلاطم در کوتاه مدت و میان مدت بسیار قابل اتکا است.

۵- تحلیل داده‌ها

در این بخش معادله دیفرانسیل تصادفی مناسب با رویکرد عملی و بر اساس توانایی هر مدل در تخمین ارزش در معرض خطر شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران به روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو (بر مبنای معیارهای پس‌آزمون) و قدرت پیش‌بینی این شاخص (بر اساس معیارهای نیکویی برازش) انتخاب می‌گردد. دوره زمانی مورد نظر از تاریخ ۱۳۸۷/۰۵/۰۳ (اولین تاریخ انتشار شاخص بازده نقدی و قیمت) تا انتهای سال ۱۳۹۱ می‌باشد. لازم به ذکر است که با توجه به تغییر نحوه محاسبه این شاخص در آذرماه سال ۱۳۸۷، قبل از این تاریخ مقادیر شاخص بازده نقدی و قیمت استفاده شده و پس از آن مقادیر شاخص کل مورد استفاده قرار گرفته است (پس از خنثی نمودن اثر تغییر مقدار پایه شاخص). بدین ترتیب تعداد داده‌های مورد استفاده در این پژوهش، ۳۲۰۶ داده خواهد بود. برای انتخاب مدل مناسب، ضروری است پارامترهای هر مدل را تخمین زد. تخمین پارامترهای هر مدل بر اساس ۳۰۰۰

داده اول و انتقال پنجره تخمین به سمت جلو به اندازه یک داده و انجام مجدد تخمین انجام شده است (انجام عملیات تخمین پارامترهای هر مدل به تعداد ۲۰۶ مرتبه). تخمین پارامتر برای هر مدل نیز به روش خاص خود صورت می‌گیرد (روش تخمین حداکثر راست‌نمایی برای مدل‌های حرکت براونی هندسی، گارچ غیرخطی، مدل با جمله پرش و واریانس گاما، روش حداقل مربعات معمولی برای مدل واسیچک و مدل مبتنی بر توزیع برای مدل هستون). سپس بر اساس هر گروه پارامترهای تخمینی هر مدل، شبیه‌سازی ۱۰ دوره‌ای شاخص کل به تعداد هزار مرتبه انجام شده و مقدار ارزش در معرض خطر سطح خطای یک درصد و میانگین نتایج نهایی هر مسیر محاسبه می‌گردد. سپس بر مبنای معیارهای پس‌آزمون و نیکویی برازش مدل‌های تصادفی مورد مقایسه قرار خواهند گرفت.

لازم به ذکر است که قبل از انجام فرآیند فوق، تحلیل اولیه داده‌ها صورت گرفت (شامل ترسیم نمودار هیستوگرام و نمودار Q-Q، آزمون‌های آماری توزیع تجربی داده‌ها، آزمون گلدفلد-کوانت، آزمون لیانگ-باکس، آزمون نسبت واریانس‌ها و دیکی فولر) که نتایج آنها دال بر نرمال نبودن و وجود دنباله‌های پهن در توزیع بازدهی شاخص کل و همچنین ثابت نبودن واریانس و وجود تلاطم خوشه‌ای در بازدهی و وجود خاصیت بازگشت به میانگین در سری بازده شاخص کل بود که این نتایج احتمال انتخاب مدل‌های دارای قدرت توضیح این خواص را افزایش می‌دهد.

تخمین پارامترها

در جدول زیر میانگین پارامترهای هر مدل در ۲۰۶ مرتبه تخمین متوالی ارائه شده است:

جدول (۱): میانگین پارامترهای تخمینی هر مدل

نام مدل	میانگین پارامترهای هر مدل				
حرکت براونی هندسی	μ	σ			
	۰.۰۰۱۲۵	۰.۰۰۵۸۸			
مدل با جمله پرش	μ^*	σ	λ	μ_Y	σ_Y
	۰.۰۰۱۲۵	۰.۰۰۲۹۹	۰.۳۲۱۸۶	۰.۰۰۱۵۴	۰.۰۰۸۲۵
گارچ غیرخطی	μ	ω	α	β	γ
	۰.۰۰۰۹۷۱	۶.۵۲E-۰۶	۰.۴۲۰۶۸۷	۰.۴۸۳۸۳۱	-۰.۰۲۸۷۸
واریانس گاما	μ	ν	σ	θ	
	۰.۰۰۰۲۳	۱.۲۹۲۸۳۴	۰.۰۰۵۳۶۳	۰.۰۰۱۰۲۲	
واسیچک	α	θ	σ		
	-۸.۳۷E-۱۶	۰.۰۰۱۲۶۶	۴.۹۵E-۱۸		
هستون	μ	γ	θ	k	
	۰.۰۰۱۲۵۳	۰.۰۳۵۴۷۹	۰.۰۲۰۵۰۷	۰.۰۴۳۹۸	

در خصوص نتایج پارامترهای تخمینی جدول فوق ذکر چند نکته ضروری است. بر اساس نتایج تخمین پارامترهای مدل حرکت براونی هندسی، مقدار پارامتر μ به طور میانگین برابر ۰/۱۲۵ درصد می‌باشد. به عبارت دیگر مقدار جمله رانش برابر ۰/۱۲۵ بوده و میانگین بازدهی شاخص کل طی این دوره برابر این مقدار است. آنچه در خصوص پارامترهای تخمینی مدل با جمله پرش حائز اهمیت است، مقدار میانگین پارامتر λ است (۰/۳۲). بر اساس این مقدار تخمینی می‌توان چنین عنوان داشت که در هر ۳/۱ روز ($1/\lambda$)، یک مرتبه شاخص کل با پرش همراه بوده و مقدار این پرش به طور متوسط برابر ۰/۱۵۴ درصد (μ_Y) است. در مدل گارچ نیز همان‌طور که مشاهده می‌گردد، محدودیت مثبت بودن پارامترهای ω، α و β صادق بوده و محدودیت $\alpha+\beta*(1+\gamma^2)=0.904<1$ نیز حاکی از مانا بودن فرآیند است. همچنین مقدار پارامتر γ در این مدل غیر صفر و منفی بوده که حاکی از عدم تقارن فرآیند است. به عبارت دیگر اخبار خوب و بد تاثیر یکسانی بر واریانس شرطی بازدهی نداشته و به دلیل منفی بودن، می‌توان گفت که تاثیر اخبار خوب بیش از اخبار بد است (بر اساس روند این پارامتر تخمینی این عدم تقارن رفته رفته در بازار رو به افزایش است). در مدل واریانس گاما شرط مثبت بودن پارامتر σ برقرار است. در مدل واسیچک نیز مقدار پارامتر θ نشان‌دهنده میانگین بلندمدت است. مقدار پارامتر γ در مدل هستون بیانگر سرعت بازگشت به میانگین فرآیند واریانس است که معکوس آن برابر ۲۸ می‌باشد به عبارتی مدت زمان بازگشت واریانس به میانگین خود برابر ۲۸ روز معاملاتی خواهد بود. لازم به ذکر است که این مقدار در تحقیقات مشابه، برابر ۲۲ روز بوده است (Dragulescu, et al., 2002).

ارزیابی مدل‌ها در تخمین ارزش در معرض خطر

در این بخش بر مبنای معیارهای پس آزمون معرفی شده، ارزش در معرض خطر محاسبه شده مدل‌های مختلف برای بازدهی شاخص مقایسه می‌گردد. بدین منظور در جدول زیر اطلاعات مربوط به معیارهای پس‌آزمون ارائه شده است:

جدول (۲): نتایج معیارهای پس‌آزمون ارزش در معرض خطر حاصل از شبیه‌سازی بازدهی شاخص

معیار			نسبت خطاها	زمان تا اولین خطا	کریستوفرسون	کوپیک ترکیبی
نام مدل	حرکت براونی هندسی	مقدار	۵.۴۳۰۴۸۴	۰.۰۲۱۸۷۶	۵.۸۱۱۵۰۱	۱۷.۴۲۸۶۲
		Prob	۰.۰۱۹۷۸۸	۰.۸۸۲۴۱۷	۰.۰۵۴۷۰۸	۰.۰۱۴۸۳۲
	مدل با جمله پرش	مقدار	۱.۶۴۸۳۲۲	۰.۰۰۷۷۲	۱.۸۱۵۸۷۳	۱۰.۴۶۹۷۶
		Prob	۰.۱۹۹۱۸۷	۰.۹۲۹۹۸۷	۰.۴۰۳۳۵۶	۰.۰۶۲۹۶۸
	گارچ غیرخطی	مقدار	۳.۹۳۹۷۳۲	۰.۵۸۸۷۴۹	۳.۹۳۹۷۳۲	۴.۵۲۸۴۸۱
		Prob	۰.۰۴۷۱۵۸	۰.۴۴۲۹۰۳	۰.۱۳۹۴۷۶	۰.۰۳۳۳۳۵
	واریانس گاما	مقدار	۷.۸۷۳۵۷۷	۰.۰۲۱۸۷۶	۸.۳۹۴۹۷۴	۲۴.۷۸۲۶۸
		Prob	۰.۰۰۵۰۱۶	۰.۸۸۲۴۱۷	۰.۰۱۵۰۳۳	۰.۰۰۱۶۹۲
	واسیچک	مقدار	۳.۹۳۹۷۳۲	۰.۵۸۸۷۴۹	۳.۹۳۹۷۳۲	۴.۵۲۸۴۸۱
		Prob	۰.۰۴۷۱۵۸	۰.۴۴۲۹۰۳	۰.۱۳۹۴۷۶	۰.۰۳۳۳۳۵
	هستون	مقدار	۳.۹۳۹۷۳۲	۰.۵۸۸۷۴۹	۳.۹۳۹۷۳۲	۴.۵۲۸۴۸۱
		Prob	۰.۰۴۷۱۵۸	۰.۴۴۲۹۰۳	۰.۱۳۹۴۷۶	۰.۰۳۳۳۳۵

لازم به ذکر است که معیارهای فوق دارای توزیع کای‌دو و با فرض صفر قابل قبول بودن مدل می‌باشند. بر اساس جدول فوق در سطح خطای ۵ درصد، مدل حرکت براونی هندسی، صرفاً بر اساس معیار زمان تا اولین خطا و کریستوفرسون (با مقدار Prob بسیار پایین) مورد تأیید قرار می‌گیرد. بر مبنای تمامی معیارها، مدل با جمله پرش از مابقی مدل‌ها بهتر ارزیابی می‌شود. دو معیار کریستوفرسون و زمان تا اولین خطا نیز مدل گارچ غیرخطی، واسیچک و هستون را تأیید می‌کند. همچنین مدل واریانس-گاما در کل عملکرد ضعیف‌تری نسبت به سایر مدل‌ها از خود نشان داده است. همچنین بر اساس معیار زمان تا اولین خطا تمامی مدل‌ها مورد تأیید قرار می‌گیرند. لذا با توجه به این چهار معیار، بهترین معادله دیفرانسیل تصادفی انتخابی، مدل با جمله پرش خواهد بود.

مقایسه توان پیش‌بینی مدل‌ها

در این بخش توان پیش‌بینی مدل‌ها، مقایسه می‌شود. همچنین برای تحلیل بهتر، آنها را با مدل رایج ARMA نیز مقایسه می‌نماییم. برای این کار مدل ARMA(1,3) بر مبنای مقایسه معیار شوارتز مدل‌های ARMA با وقفه‌های مختلف جملات AR و MA انتخاب شده است. جهت مقایسه قدرت

پیش‌بینی هر یک از مدل‌ها، از ضریب تعیین رگرسیون بین مقادیر واقعی بازدهی و مقادیر پیش‌بینی استفاده می‌گردد. همچنین با به کارگیری آزمون والد، فرض صفر برابری ضریب رگرسیون با ۱ نیز مورد سنجش قرار گرفته است[1]:

جدول (۳): نتایج رگرسیون بین مقادیر واقعی بازده و مقادیر پیش‌بینی شده

نام	مقدار ضریب	Prob ضریب	ضریب تعیین	Prob آزمون والد
حرکت براونی هندسی	۱.۳۴۱۰۲	۰.۰۰۸۲	۰.۰۰۷۱۵۵	۰.۴۹۷۸
مدل با جمله پرش	۱.۴۲۱۹۴	۰.۰۰۵۵	۰.۰۰۰۳۰۷	۰.۴۰۶
گارچ غیرخطی	۱.۳۹۰۰۷	۰.۰۳۲۸	۰.۰۲۵۴۵۴	۰.۵۴۷۱
واریانس گاما	۱.۳۷۶۶۷	۰.۰۰۶۱	۰.۰۰۱۱۵۲	۰.۴۴۸۷
واسیچک	۱.۳۲E+۱۲	۰.۰۱۳۸	۰.۰۰۳۰۱۴	۰.۰۱۳۸
هستون	۱.۳۲۵۰۳	۰.۰۱۲۱	۰.۰۰۷۴۲۳	۰.۵۳۴۹
ARMA	۰.۸۲۶۱۵	۰.۰۰۸۲	۰.۰۰۳۷۴۶	۰.۵۷۵

همان‌گونه که در ستون مقدار ضرایب مشاهده می‌شود، مقدار این پارامتر برای مدل‌های تصادفی بیش از یک است. در حالی که در مدل ARMA، مقدار پارامتر کمتر از یک است. همچنین تمامی این پارامترها تفاوت معنی‌داری با صفر دارند. علاوه بر این بر اساس نتایج آزمون والد، به جز مدل واسیچک، در مابقی مدل‌ها ضریب تخمینی تفاوت معنی‌داری با یک نداشته و لذا می‌توان گفت که مدل‌های مزبور، مقدار بازدهی شاخص را به صورت نااریب پیش‌بینی می‌کنند. بر مبنای مقادیر ضریب تعیین، مدل گارچ غیرخطی بهترین برازش را داشته و پیش‌بینی‌کننده بهتری نسبت به سایر مدل‌ها از جمله مدل ARMA محسوب می‌شود. پس از مدل گارچ غیرخطی، مدل هستون و سپس مدل براونی هندسی به ترتیب رتبه‌های بعدی را به خود اختصاص می‌دهند.

۱.لازم به ذکر است که در رگرسیون‌های تخمینی اگرچه ضریب عرض از مبدا تفاوت معنی‌داری با صفر نداشت ولی برای جلوگیری از مشکلات حاصل از حذف این ضریب مانند منفی شدن ضریب تعیین از حذف آن پرهیز شده است.

٦- خلاصه و نتیجه‌گیری

در این پژوهش به مدل‌سازی شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران به وسیله معادلات دیفرانسیل تصادفی پرداخته شد. بدین‌منظور پس از تشریح ضرورت استفاده از مدل‌های مبتنی بر احتمال و در نتیجه ناکارایی مدل‌های عادی و غیرتصادفی، ضرورت استفاده از اصول حسابان تصادفی به جای حسابان معمولی در مورد مدل‌های تصادفی تشریح شد. سپس پرکاربردترین معادلات تصادفی در علوم مالی شامل حرکت براونی هندسی، مدل با جمله پرش، گارچ غیرخطی، مدل واریانس-گاما، واسیچک و هستون معرفی گردید.

پس از آن به منظور انتخاب مناسب‌ترین معادله تصادفی، رویکردی کاربردی پیش گرفته شده و بر مبنای دو مورد از کاربردهای اصلی معادلات دیفرانسیل تصادفی یعنی محاسبه ارزش در معرض خطر و پیش‌بینی، فرآیند انتخاب صورت پذیرفت. برای این کار با استفاده از داده‌های مربوط به شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران پارامترهای هر مدل تخمین زده شد. بر اساس این پارامترها شبیه‌سازی‌های مونت کارلو صورت گرفته و ارزش در معرض خطر و مقدار پیش‌بینی استخراج و به ترتیب با استفاده از تکنیک‌های پس‌آزمون و نیکویی برازش مدل مناسب انتخاب شد. لازم به ذکر است که در بخش ارزیابی عملکرد هر مدل در پیش‌بینی، مدل ARMA نیز با مدل‌های تصادفی ذکر شده مقایسه گردید.

بر اساس نتایج به دست آمده، مدل با جمله پرش مدل مناسب برای تخمین ارزش در معرض خطر بوده و مدل گارچ غیرخطی مدل برتر در پیش‌بینی محسوب می‌شود. به عبارت دیگر مدل با جمله پرش که در تخمین ارزش در معرض خطر به عنوان قوی‌ترین مدل شناخته شد، در پیش‌بینی مقادیر میانگین عملکرد ضعیفی از خود نشان داد. این موضوع را می‌توان بدین دلیل دانست که در محاسبه ارزش در معرض خطر، دنباله‌های توزیع مد نظر بوده ولی در پیش‌بینی مقدار میانگین که یک معیار مرکزی محسوب می‌شود، مورد نظر است. به بیان بهتر، مدل با جمله پرش به دلیل دارا بودن جمله پرش در توضیح رفتار حدی متغیر تصادفی شاخص در دنباله‌ها قوی‌تر است ولی در پیش‌بینی رفتار مرکزی مدل گارچ غیرخطی قدرت بیشتری در این بخش از توزیع از خود نشان می‌دهد.

در انتها پیشنهاد می‌گردد محققین علاقه‌مند بعدی در این حوزه، به بررسی دیگر معادلات دیفرانسیل تصادفی و با رویکردهای متفاوت مانند تغییر داده‌های مورد تحلیل (از قبیل شاخص صنایع، قیمت سهام منفرد و نرخ ارز) و یا تغییر افق پیش‌بینی بپردازند. همچنین می‌توان دیگر کاربردهای این معادلات مانند تشکیل سبد دارایی‌های بهینه را در بازار سرمایه ایران آزمود.

منابع و مأخذ

۱.خالوزاده، حمید. خاکی صدیق، علی. (۱۳۸۴). مدل‌سازی و پیش‌بینی قیمت سهام با استفاده از معادلات دیفرانسیل تصادفی، مجله تحقیقات اقتصادی، شماره ۶۹.

۲.زمانی، شیوا، اسلامی بیدگلی، سعید، کاظمی، معین (۱۳۹۲)، محاسبه ارزش در معرض ریسک شاخص بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از نظریه ارزش فرین، فصلنامه بورس اوراق بهادار، شماره ۲۱.

۳.ظهوری زنگنه، بیژن. جهانی‌پور، روح‌اله. (۱۳۸۳). نوربرت وینر ریاضی‌دانی برای تمامی فصول، فرهنگ و اندیشه ریاضی، شماره ۳۳.

4. Allen, E. (2007). Modeling with Ito Stochastic Differential Equations. Springer.
5. Audrino, Francesco and Hu, Yujia, (2011), Volatility Forecasting: Downside Risk, Jumps and Leverage Effect, Discussion Paper no. 2011-38.
6. Black, F.; Scholes, M. (1973), The pricing of options and corporate liabilities, Journal of Political Economy, 81 (May - June), 637 – 659.
7. Boness, A. J. (1964), Elements of a theory of stock-option value, The Journal of Political Economy, 72, 163 – 175.
8. Boyle, P. P. (1977), Options: A Monte Carlo Approach, Journal of Financial Economics, 4, 323 – 338.
9. Broadie, M. and Kaya, O. (2006), Exact simulation of stochastic volatility and other affine diffusion processes. Operations Research, 54 (2): 217-231.
10. Broto, Carmen and Ruiz, Esther. (2004), Estimation Methods for Stochastic Volatility Models: A Survey, Journal of Economic Surveys, vol. 18, n. 5, p. 613-649.
11. Buehler, H. (2006), Volatility Markets: Consistent Modelling, Hedging and Practical Implementation. PhD Dissertation, Technische Universit¨at Berlin.
12. Chen, Ren-Raw , Scott, Louis, (2003) Multi-Factor Cox-Ingersoll-Ross Models of the Term Structure: Estimates and Tests from a Kalman Filter Model, The Journal of Real Estate Finance and Economics, September, Volume 27, Issue 2, pp 143-172.
13. Christofferssen, P. & Pelletier, P. (2004), Backtesting Value-at-Risk: A Duration- Based Approach. Journal of Empirical Finance, 2, 84-108.
14. Corina Cipu, Elena and Panzar, Laura, (2005), Stochastic modelling and prognosis of an underlying asset pricing, Journal for Economic Forecasting, vol. 2, issue 3, pages 22-36
15. Cox, J. C.; Ross, S. A.; Rubinstein, M. (1979), Option Pricing: A simplified approach, Journal of Financial Economics 7 (3), 229-263.
16. Craine, Roger, Lochstoer, Lars A. and Syrtve, Knut (2000), Estimation of a Stochastic-Volatility Jump-Diffusion, Model, conference of Risk in Emerging Financial Markets: Prediction, Pricing, and Policy Implications.

17. Dolinsky, Yan and Kifer, Yuri (2000), Binomial Approximation for Barrier Options, Institute of Mathematics.
18. Dragulescu, Adrian & Yakovenko (2002), Victor. Probability distribution of returns in the Heston model with stochastic volatility. Quantitative Finance. Volume 2.
19. Duffie D., Pan J. (1997). An Overview of Value-at-Risk, The Journal of Derivatives, Spring 1997, pp. 7-49.
20. Duffie, D. & Kan, R. (1996). A yield-factor model of interest rates, Math. Finance. 6(4): 379–406.
21. Elliott R J and van der Hoek J. (2001). Fractional Brownian motion and inancial modelling,Trends Math. 140–51
22. Elliott, R. J. & Platen, E. (2001). Hidden Markov chain filtering for generalised Bessel processes, Stochastics in Finite and Infinite Dimensions, Birkh¨auser, pp. 123–143.
23. Engle, Robert F. and Ng, Victor K. (1993), Measuring and Testing the Impact Of News on Volatility. Journal of Finance, 48, pp. 1749- 1801.
24. Fama, E.F. (1963), Mandelbrot and the Stable Paretian Distribution. Journal of Business, 36, pp. 420-429.
25. Fama, E.F. (1965), The Behavior of Stock Market Prices. Journal of Business, 38, pp. 34-105.
26. Focardi, Sergio M., & Fabozzi, Frank J. (2004), The Mathematics of Financial Modeling and Investment Management. John Wiley & Sons, Inc.
27. Forde, M. Jacquier, A. and Mijatovic, A. (2010), Asymptotic formulae for implied volatility in the Heston model. Proceedings of the Royal Society A, 466 (2124): 3593-3620.
28. French, K., G.W. Schwert, and R.F. Stambaugh. (1987), Expected stock returns and volatility, Journal of Financial Economics, 19, 3-29.
29. Galai, D. (1987), On the Boness and Black-Scholes models for valuation of call options, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 13 (March), 15 – 27.
30. Glasserman, P. and Kim, K. (200۸), Gamma Expansion of the Heston Stochastic Volatility Model. Forthcoming in Finance & Stochastics.
31. Goorbergh, Rob van den, Vlaar, Peter. (1999), Value-at-Risk Analysis of Stock Returns Historical Simulation, Variance Techniques or Tail Index Estimation?, Dept. of Economics Tilburg UniversityEconometric Research and Special Studies Dept.
32. Haas, M. (2001), New Methods in Backtesting, Financial Engineering, Research Center Caesar, Bonn.
33. Heston, S. L. (1993). A closed form solution for options with stochastic volatility with applications to bonds and currency options. Review of Financial Studies 6, 327–343.
34. Jacquier, A. Keller-Ressel, M. and Mijatovic, A. (2011), Large deviations in affine stochastic volatility models: the asymptotic implied volatility. In preparation.

35. Javaheri, Alireza (2005), Inside volatility arbitrage : the secrets of skewness, John Wiley & Sons.
36. Jorion P. (2000). Value-at-Risk, McGraw Hill.
37. Jorion, P. (2001), Value at Risk, The New Benchmark for Managing Financial Risk, 2nd Edition, McGraw-Hill, United States.
38. Kendall, M. S. (1953), The analysis of economic time series - Part I: Prices, Journal of the Royal Statistical Society, Series A 66, 11-25.
39. Kon, S. (1984), Models of Stock Returns-A Comparison, Journal of Finance, 39 pp. 147-165.
40. Kruizenga, R. J. (1956) Put and call options: A theoretical and market analysis, Ph.D. Thesis, Cambridge, MA: MIT.
41. Kupiec, P. (1995), Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Management Models, Journal of Derivatives 3:73-84.
42. Lamberton and Lapeyre. (1995), Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance. Chapman & Hall, London.
43. Lord, R. Koekkoek and van Dijk, D. (2010), A comparison of biased simulation schemes for stochastic volatility models. Quantitative Finance, 10 (2): 177-194.
44. Madan, D. B. and E. Seneta (1990). The variance gamma (v.g.) model for share market returns. Journal of Business 63, 511–524.
45. Madan, Dilip B. and Frank Milne (1991) Option pricing with VG martingale components, Mathematical Finance 1(4), 39–55.
46. Madan, Dilip B. Smith, Robert H. Carr, Peter P. Chang, Eric C. (1998), The Variance Gamma Process and Option Pricing, European Finance Review 2: 79–105.
47. Mandelbrot, B.B. (1963), The Variation of Certain Speculative Prices. Journal of Business, 36 pp. 394-416.
48. Merton, R. C. (1973), The theory of rational option pricing, The Bell Journal of Economics and Management Science, 4 (Spring), 141 – 183.
49. Merton, R. C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. Journal of Financial Economics 3, 125–144.
50. Mikosch, Thomas. (2004). Elementary stochastic calculus with finance in view. World Scientific Publishing Co.
51. Niepolla, O. (2009). Back testing Value at Risk Models. Helsinki School of Economics.
52. Oksendal, Bernt. (۲۰۰۳), Stochastic Differential Equations, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
53. Osborne, M. F. M. (1959), Brownian motion in the stock market, Operations Research, 7, 145 – 173.
54. Osborne, M. F. M. (1964), Brownian motion in the stock market, in The random character of stock market prices, P. H. Cootner (Editor). Pages 100 – 128. Cambridge, MA: MIT Press.
55. Roberts, H. V. (1959), Stock market patterns and financial analysis: Methodological suggestions, Journal of Finance 14, 1-10.

56. Samuelson, P. (1965), Rational theory of warrant pricing, Industrial Management Review, 6 (Spring), 13– 32.
57. Schoutens, Wim. (2003). Levy Processes in Finance: Pricing Financial Derivatives. JohnWiley & Sons Ltd.
58. Scott, Louis O. (1987), Option pricing when the variance changes randomly : theory, estimation, and an application, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 22 (1987), pp. 419-438.
59. Sharpe, W. F. (1978), Investments. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
60. Sheikh, A.M. (1993), The Behavior of Volatility Expectations and Their Effects on Expected Returns. Journal of Business, 66, pp. 93-116.
61. Sprenkle, C. M. (1961), Warrant prices as indicators of expectations and preferences, Yale Economic Essays 1, 178 – 231.
62. Taylor, S.J. (1994), Modeling Stochastic Volatility: A Review and Comparative Study. Mathematical Finance, 4, pp. 183- 204.
63. Thorp, E. O.; Kassouf, S. T. (1967), Beat the market. New York, NY: Random House.
64. Vasicek, O. A. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. Journal of Financial Economics 5, 177–188.