فلسفهٔ علم، پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
سال چهارم، شمارهٔ دوم، پاییز و زمستان ۱۳۹۳: ۱–۱۸

فراروش‌شناسی حل مناقشهٔ اثبات ریاضیاتی

حسین بیات*

موسی اکرمی**

چکیده

گسترش روش‌های استدلال ریاضی، در دهه‌های اخیر، منجر به نقد اساسی تعریف کلاسیک اثبات ریاضیاتی شده است. منتقدان، معمولاً، تعریف‌های بدیلی پیشنهاد کرده‌اند؛ تعریف‌های فراوانی که دارای پیش‌فرض‌ها و پیامدهای گوناگون و گاهی حتی ناسازگاری هستند. این وضعیت، ریاضیات را در معرض نسبی‌نگری قرار داده است. از این رو، مسئلهٔ فراوانی تعریف‌های اساساً گوناگون را می‌توان یکی از مهم‌ترین مسائل معرفت‌شناسی ریاضیاتی دانست. این مقاله، تلاش می‌کند تا از یک موضع مرتبهٔ سوم یا فراروش‌شناختی به «چیستی فرامعیار انتخاب بهترین تعریف برای اثبات ریاضیاتی» پاسخ دهد و از این طریق، ما را یک گام به تعریف موجه اثبات ریاضیاتی نزدیک‌تر سازد.

نگارندگان نشان خواهند داد که فرامعیار قدرت تبیینی، در مقایسه با دو رقیب دیگر، یعنی فرامعیارهای هم‌ارزی، و اجماع قابل دفاع‌تر است.

کلیدواژه‌ها: فرانظریهٔ تعریف، نظریهٔ اثبات ریاضیاتی، قدرت تبیینی، واقعیت‌های اثبات.

۱. مقدمه

گسترش فعالیت‌های ریاضی، به‌ویژه در چند دههٔ اخیر، منجر به پیدایش انواع جدیدی از اثبات‌ها و استدلال‌های ریاضیاتی شده و هنجارهای موجود در این حوزه را به چالش

* دانشجوی دکتری فلسفهٔ علم، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات تهران (نویسندهٔ مسئول)
logicbay@yahoo.com

** دانشیار گروه فلسفهٔ علم، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات تهران musa.akrami@srbiau.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۱/۱۸، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۴/۱۴

کشیده است (Hanna, 2010: 1). این چالش‌ها مسائل گوناگونی را ایجاد کرده‌اند و یا به اهمیت آن‌ها افزوده‌اند. از جملهٔ این مسائل، ناهم‌سازی اثبات‌های غیرکلاسیک با تعریف کلاسیک اثبات ریاضیاتی است؛ به گواهی تاریخ ریاضیات، استدلال‌های باکفایتی در کار است که پذیرش آن‌ها، در کنار تعریف کلاسیک، تناقض‌آمیز و نادیده‌انگاشتن آن‌ها تبعیض‌آمیز به‌نظر می‌رسد. از جملهٔ آن‌ها، می‌توان به اثبات‌های زیر اشاره کرد:

ـ اثبات‌های تصویری: اثبات‌هایی که کارکرد اساسی خود، یعنی اقناع/ توجیه/ تبیین، را مدیون یک یا چند تصویر هستند؛

ـ اثبات‌های رایانشی: اثبات‌هایی که ویژگی وارسی‌پذیری (surveyablity) و نیز کارکرد اساسی خود را مدیون رایانه هستند؛

ـ اثبات‌های شاکله‌ای (schematic proofs): استدلال‌های موفقی که هنوز به صورت گام‌هایی از یک دستگاه اصل‌موضوعی و صوری درنیامده‌اند.

چالش‌ها و تردیدها دربارهٔ اثبات‌بودن این موارد به این پرسش اساسی منجر شده است که اساساً اثبات ریاضیاتی چیست؟ یا چه باید باشد؟ بر اساس پاسخ هیلبرت (۱۹۳۰)، یک اثبات ریاضیاتی عبارت است از دنباله‌ای از فرمول‌های درست ـ ساخت که هر کدام از آن‌ها یک اصل‌موضوع و یا حاصل به‌کارگیری قواعد استنتاج بر روی فرمول‌های قبلی است (Bundy, 2005: 2377). این پاسخ، و پاسخ‌های مشابه آن، امروزه تقریباً در تمام کتاب‌های مبانی ریاضیات و دانش‌نامه‌های ریاضیات به عنوان تعریف کلاسیک و هنجارگذار اثبات ریاضیاتی به رسمیت شناخته شده است. طبق این تعریف قاطعانه می‌توان حکم داد که نه‌تنها اثبات‌های غیرکلاسیک اثبات ریاضیاتی محسوب نمی‌شوند، بلکه حتی اثبات‌های کلاسیک نیمه‌صوری، که اغلب اثبات‌ها از این نوع‌اند، نیز از دایرهٔ اثبات‌های ریاضیاتی خارج می‌شوند؛ زیرا در هیچ‌کدام از آن‌ها دنباله‌ای، با توصیفات گفته‌شده در تعریف هیلبرت، به چشم نمی‌خورد. اما این حکم بنیادگرایانه به مذاق ریاضی‌دانان و فیلسوفان ریاضیات خوش نیامده و منجر به نقدهای فراوان، و تعریف‌های بدیل گوناگونی شده است، که ما در بخش دوم مقاله به برخی از این تعریف‌ها اشاره خواهیم داشت.

با ادامهٔ نقدها و افزایش تعریف‌های بدیل، نه‌تنها عملاً تکلیف اثبات‌های مناقشه‌آمیز روشن نشده بلکه مفهوم مبنایی اثبات ریاضیاتی و تلقی سنتی از دانش ریاضیات نیز به چالش کشیده شده است؛ زیرا، در تلقی سنتی، ریاضیات دانشی با مدعاهای یقینی است و یقینی‌بودن این مدعاها مرهون اثبات‌های ریاضیاتی است. حال اگر «اثبات ریاضیاتی» دارای

ابهام و ایهام معنایی باشد چگونه می‌توان از توجیه یقینی گزاره‌های ریاضیاتی سخن گفت؟ مهم‌تر از آن، باید پذیرفت که فراوانی تعریف‌های اساساً مختلف، اگر نگوییم منجر به نسبی‌انگاری فردی ریاضی‌دانان می‌شود، بی‌تردید به نسبی‌انگاری‌های گروهی، تاریخی، و فرهنگی در ریاضیات خواهد انجامید. بنابراین این پرسش که «درنهایت کدام تعریف از اثبات ریاضیاتی را باید به سایر تعریف‌ها ترجیح داده و معیار داوری‌ها قرار دهیم؟» به‌ویژه برای قائلان به عقلانیت و روش علمی اهمیت دارد. وظیفهٔ اصلی این مقاله پاسخ‌دادن به همین پرسش است.

به‌نظر می‌آید که برای حل مسئلهٔ فراوانی تعریف‌ها و معیارها باید یک فرامعیار عینی مناسب در دست باشد. در بخش سوم، با ارزیابی سه فرامعیار هم‌ارزی، اجماع، و قدرت تبیینی، به سود مورد واپسین استدلال خواهیم کرد. در بخش چهارم فرآیند انتخاب بهترین تعریف اثبات ریاضیاتی را با جزئیات بیش‌تری توضیح خواهیم داد تا نشان دهیم به‌کارگیری این فرامعیار، افزون بر مطلوبیت، امکان‌پذیر نیز است.

درحقیقت، استراتژی این مقاله، برای حل مناقشهٔ اثبات ریاضیاتی، تحلیل و ارزیابی مفهوم اثبات ریاضیاتی از موضع مرتبهٔ سوم است. یعنی به جای آن‌که از یک موضع مرتبهٔ دوم، یا روش‌شناختی، به اثبات‌های ریاضیاتی بنگریم، و پاسخی برای «چیستی اثبات ریاضیاتی» جست‌وجو کنیم، تلاش می‌کنیم ابتدا از یک موضع مرتبهٔ سوم، یا فراروش‌شناختی، به تعریف‌های اثبات ریاضیاتی توجه کنیم و با طرح یک «فرانظریهٔ تعریف» به «چیستیِ فرامعیارِ انتخابِ بهترین تعریف برای اثبات ریاضیاتی» پاسخ دهیم تا، از این طریق، یک گام به تعریفِ موجه اثبات ریاضیاتی نزدیک‌تر شویم.

اگر دیدگاه‌های فراریاضیاتی همان «معیارهای اثبات و تعریف و نیز مدعاهای ناظر به دامنه و ساختار ریاضیات» باشند (Kitcher, 1989: 163)، در این صورت منظور ما از «فراریاضیات» چیزی جز روش‌شناسی ریاضیات نخواهد بود. بر همین اساس، می‌توان آرای افراد دربارهٔ اثبات ریاضیاتی، تعریف ریاضیات، و ... را «نظریه‌های روش‌شناختی ریاضیات» نامید، مانند «نظریه‌های اثبات ریاضیاتی» و «نظریه‌های تعریف ریاضیات» و ... . اما اگر بخواهیم دربارهٔ خود این نظریه‌های فراریاضیاتی، یا همان روش‌شناسی‌های ریاضیات، به گفت‌وگو و داوری روش‌مند بنشینیم نیازمند یک «فرانظریهٔ فراروش‌شناختی» هستیم. همچنان که لاکاتوش، کوهن و لائودن آرای خودشان دربارهٔ روش‌شناسی علوم تجربی را در قالب این نوع نظریه‌ها ارائه می‌کنند. بنابراین منظور ما از «فرانظریهٔ تعریف»، نظریه‌ای

است که یک فرامعیار مناسب را، برای انتخاب بهترین تعریف، در اختیار ما قرار می‌دهد. به همین دلیل، تعریف‌های اثبات ریاضیاتی را با عنوان «نظریه‌های اثبات ریاضیاتی» و دیدگاه‌های مختلف دربارهٔ بهترین تعریف را با عنوان «فرانظریه‌های تعریف» یا «فرامعیارهای تعریف» ارزیابی خواهیم کرد.

۲. تعریف‌های بدیل

تاکنون تعریف‌های مختلفی دربارهٔ اثبات ریاضیاتی پیشنهاد شده‌اند. این تعریف‌ها به سه دستهٔ یگانه، دوگانه، و چندگانه قابل تقسیم هستند (هدف از ذکر این فهرست، بیش‌تر توجه‌دادن به فراوانی تعریف‌های اساساً مختلف و سردرگمیِ حاصل از این توجه است تا فهم دقیق آن‌ها):

۱. تعریف‌های یگانه: تعریف‌هایی که بر اساس آن‌ها همهٔ اثبات‌ها از یک سنخ هستند. اثبات ریاضیاتی عبارت است از:

ـ دنباله‌ای از جملات که فرآیندهای روان‌شناختی را چنان تدوین می‌کنند که منجر به تولید معرفت پیشینی دربارهٔ قضیهٔ اثبات‌شده می‌شوند (Kitcher, 1989: 37)؛

ـ استنتاج گزارهٔ P از Σ با بهره‌گیری از اصول منطق صوری، به گونه‌ای که هر تعبیر معینی از مفاهیم اولیه که Σ را به گزاره‌ای صادق تبدیل کند، P را هم صادق کند (P گزاره‌ای در نظریهٔ T، و Σ ترکیب عطفی اصول موضوعهٔ T است) (صورت‌بندی تعریف همپل؛ همپل، ۱۳۸۷: ۲۰۷)؛

ـ دنباله‌ای از اعمال شهودی که منجر به یک تجربهٔ درونی معین شود (فان آتن، ۱۳۸۷: ۵۳ و ۵۹)؛

ـ استدلالی که مخاطب را دربارهٔ یک ادعای ریاضیاتی اقناع کند (Bundy, 2005: 2377).

۲. تعریف‌های دوگانه: تعریف‌هایی که بر اساس آن‌ها دو گونه اثبات وجود دارد.

ـ دو نوع موازی اثبات ریاضیاتی در جریان است: اثبات صوری و اثبات عملی (practical)، اثبات به معنای اخیر همان کاری است که ما انجام می‌دهیم تا هم‌دیگر را دربارهٔ یک ادعای ریاضیاتی متقاعد کنیم (Hersh, 1997: 49)؛

ـ دو نوع اثبات ریاضیاتی در فعالیت‌های ریاضیاتی قابل تشخیص است: اثبات اصل‌موضوعی و اثبات فرایابانه [/ با حدس صائب/ مبتنی بر آزمون و خطا] (heuristic). هدف اولی توجیه یقینی صدق گزاره‌های ریاضیاتی است، اما دومی برای کشف راه‌حل‌های بالقوهٔ حدس‌های ریاضیاتی است (Rota,1997: 183, 190).

۳. تعریف‌های چندگانه: تعریف‌هایی که مدعی‌اند بیش از دو گونه اثبات در کار است.

ـ «اثبات‌های ریاضیاتی در اساس از سه نوع مختلف هستند»: الـف) صـوری (یعنـی اثبات در یک دستگاه صوری اصل‌موضوعی)؛ ب) پیشاصـوری (یعنـی اثبـات پـیش از آن‌که دستگاه صوری اصل موضوعی تشکیل شـود یـا توسـعه یابـد)؛ و ج) پساصـوری (یعنی اثبات فراقضایای یک دستگاه صوری در حالی کـه فرانظریـه‌ای در کـار نیسـت) (لاکاتوش، ۱۳۸۷: ۲٥٤)؛

ـ اثبات ریاضیاتی دارای سه نوع «صوری»، «واقعیِ اصل‌موضوعی»، و «واقعی تحلیلـی» است. اثبات ریاضیاتی از نوع واقعیِ اصل‌موضوعی عبارت اسـت از: اسـتنتاج قیاسـی یـک گزاره از مقدمات پایه و صادق برای توجیه صدق آن گزاره، و اثبات ریاضیاتی از نوع واقعیِ تحلیلی عبارت است از: استنتاج غیر قیاسی یک فرضیهٔ مطلوب برای کشف راه‌حل مسـئلهٔ مورد نظر (Cellucci, 2008: 7)؛

ـ اثبات ریاضیاتی دارای یک مفهوم ثابت و مستقل از بافت نیست بلکه واجد یک شاکله (schematic) و چندین زیرشاکلهٔ اصلی و فرعی است[۱]. شاکلهٔ اثبات عبـارت اسـت از هـر آن چه که شامل مؤلفه‌های تصدیق (ascertaining) و اقناع (persuasion) یک فرد یا جامعـه است (Harel and Sowder, 2003: 7). سه زیرشاکلهٔ عمده از نظر آن‌ها عبارت‌انـد از: اقنـاع بیرونی، تجربی، و قیاسی.

حال این پرسش خودنمایی می‌کند که، به هر حال، تعریف درست اثبات ریاضیاتی کدام است؟ آیا مفهوم اساسی اثبات ریاضیاتی در این جنگل تعریف‌ها گم نخواهد شد؟ بـه‌نظـر می‌رسد که برای حل مسئلهٔ فراوانی تعریف‌ها و گریز از نسبی‌نگری یا ترجیح بـلا مـرجح، باید در اندیشهٔ یک فرامعیار عینی مناسب باشیم.

۳. فرانظریهٔ تعریف: فرامعیار انتخابِ بهترین تعریف

شاید در نگاه نخست، پاسخ پرسش بالا بـدیهی باشـد: بهتـرین تعریـف اثبـات ریاضـیاتی، تعریفی است که همهٔ ویژگی‌های اساسی، یا شرایط لازم و کافی، آن را برشمرده باشـد. امـا مسئله دقیقاً همین جاست که این ویژگی‌ها یا شرایط کدامند؟ هیلبرت یک رابطـهٔ معـیّن از جملات یک دستگاه صوری سازگار را اساسی می‌داند؛ اما در نظر براوئر یک فرایند ذهنـی منجر به تجربهٔ درونی خاص اساسی است؛ و در نظر هرش آن‌چه که یک اثبـات را اثبـات می‌کند کارکرد اقناعی آن است. حتی اگر بگوییم: بهترین تعریف تعریفی اسـت کـه جـامع

افراد و مانع اغیار باشد، باز هم کار به دور خواهد کشید؛ زیرا در اغلب موارد مناقشه بر سر همین است که افراد (مصداق‌ها) کدام هستند و اغیار (نامصداق‌ها) کدام؟ اثبات رایانشی قضیهٔ چهاررنگ در نظر بسیاری، از جمله هنکین و اَپل، مصداق مفهوم اثبات ریاضیاتی است (کورانت، ۱۳۷۹: ۵۳۰)؛ اما بورباکی‌ها قطعاً با آنان موافق نخواهند بود؛ یا در نظر روتا این امر فقط یک «راستی‌آزمایی رایانشی» (computational verification) است و «به رغم درستی انکارناپذیرش به مقام اثبات نائل نشده است» و مصداق اثبات ریاضیاتی نیست (Rota, 1997: 186).

از سوی دیگر، دو فرامعیاری که به آن‌ها اشاره شد، و می‌توان آن‌ها را، به‌ترتیب، هم‌ارزی مفهومی، و هم‌ارز مصداقی نامید، به‌ترتیب، برای سنجش تعریف‌های خوشه‌ای و وضعی، محلی از اعراب ندارند؛ زیرا در تعریف‌های خوشه‌ای فرض بر آن است که اثبات‌های ریاضیاتی فاقد شباهت‌های نوعی هستند، و فقط می‌توان از شباهت‌های خانوادگی آن‌ها سخن گفت. روشن است که، در این تلقی، سخن‌گفتن از شرایط لازم و کافی، یا ویژگی‌های اساسی، بیهوده و حتی تناقض‌آمیز است. در تعریف‌های وضعی، مانند تعریف براوئر، و حتی تعریف هیلبرت، نیز سخن‌گفتن از جامعیت و مانعیت بی‌معنا است؛ زیرا آنان، برخلاف کسانی چون هرش، دغدغهٔ ارائهٔ یک تعریف پسینی و گزارشیِ درست، که مشتمل بر همهٔ اثبات‌های ریاضیاتی باشد، ندارند؛ بلکه هدف برنامهٔ پژوهشی آنان تأسیس و یا تقویت مبانی ریاضیات است، و برای تحقق این برنامهٔ خود فقط به یک تعریف وضعی و پیشینی نیاز دارند.

بنابراین هیچ‌کدام از دو فرامعیار هم‌ارزی در این‌جا معتبر و کارآمد نیستند. این فرامعیارها صرفاً در مناقشه‌های لفظی به‌کار می‌آیند. در این نوع مناقشه‌ها، اشخاص در معنای مفهومی (intension) (یعنی مجموعهٔ ویژگی‌های اساسی) و یا دست‌کم در معنای مصداقیِ (extension) (یعنی مجموعهٔ مصادیق) واژهٔ مورد مناقشه توافق دارند و اختلاف آنان فقطِ در بیان معنی (expression) (یعنی صورت‌بندی عبارت‌ها یا آشکارساختن منظور نظر) است. به عبارت دیگر، مناقشهٔ لفظی صرفاً ناشی از سوءتفاهمی است که ایهام (ambiguity) و یا ابهام (vagueness) الفاظ به بار آورده است. ایهام و ابهام نیز نتیجهٔ به‌کارگیری نادرست الفاظ است و به همین دلیل، در این مناقشه‌ها، به حق انتظار داریم تعریف‌ها از طریق صورت‌بندی صحیح عبارات، ایهام و ابهام را از معنای الفاظ بزدایند، تا نهایتاً سوءتفاهم‌ها برطرف شوند. مثال ویلیام جیمز دربارهٔ مناقشهٔ لفظی «چرخیدن» و نقش

تعریف در حل آن معروف است: فرض کنید یک شکارچی برای هدف‌گرفتن یک سنجاب دور درختی بچرخد اما سنجاب نیز با همان سرعت روی درخت بچرخد، آیا شکارچی دور سنجاب هم می‌چرخد؟ اگر معنای «چرخیدن دورِ الف» حرکت از ناحیهٔ شمال الف به سمت شرق آن و سپس رسیدن به جنوب و بعد غربِ و بعد شمال آن و دوباره تکرار آن باشد شکارچی دور سنجاب می‌چرخد؛ اما اگر، معنی آن حرکت از سمت چپ الف به سمت روبه‌رو و سپس به راست و پشت سر و بعد چپ و دوباره تکرار آن باشد، نه (Copi, 1990: 166).

از این رو، این مسئله که «آیا شکارچی دور سنجاب می‌چرخد؟» با تعریف «چرخیدن دورِ الف»، و تعیین منظور ما از این عبارت، حل می‌شود: اگر منظور از چرخیدن دور سنجَاب، پیمودن مواضع جغرافیایی آن باشد، پاسخ مثبت است و اگر منظور از چرخیدن دور سنجاب، پیمودن مواضع هندسی آن باشد، پاسخ منفی است. اما در مورد مسئلهٔ «آیا حدس چهاررنگ اثبات شده است؟» چه می‌توان گفت؟ آیا راه‌حل بالا، یعنی صرفاً ارائهٔ تعریف «اثبات ریاضیاتی» و تعیین منظورمان از آن، در این‌جا هم کارساز است؟ برخی، مانند اولسکر، تحلیلی از مناقشهٔ اثبات ریاضیاتی ارائه می‌دهند که گویا این مناقشه صرفاً یک مناقشهٔ لفظی است. اولسکر در تحلیل پرسش «اثبات ریاضیاتی چیست؟» می‌گوید: «این پرسش در موقعیت‌های متفاوت به معانی متفاوتی طرح می‌شود و پاسخ‌های متنوعی هم به آن داده می‌شود. یکی از معانی این پرسش همان عنوان این مقاله [یعنی مقالهٔ اولسکر] است: منظور ما از اثبات ریاضیاتی چیست؟» (Olsker, 2011: 33). پاسخ خود او، به این پرسش، بر تعریف دوگانهٔ هرش استوار است، یعنی، بر اساس آن، در پاسخ به پرسش «آیا حدس چهاررنگ اثبات شده است؟» نیز ظاهراً می‌توان گفت: اگر منظور ما از اثبات چیزی، اقناع خود و دیگران در باور به آن چیز باشد، پاسخ مثبت، و اگر منظور ما از اثبات چیزی، ارائهٔ یک استنتاج صوری برای آن در یک دستگاه اصل‌موضوعی باشد، پاسخ منفی است. اما این تحلیل و استدلال اولسکر به دو دلیل درست نیست، و ما نباید مناقشهٔ «اثبات» را با مناقشهٔ «چرخیدن» هم‌سنخ بگیریم. نخست این‌که، وابستگی صدقِ «شکارچی دور سنجاب می‌چرخد» به تعریف «چرخیدن دورِ چیزی» وابستگی معناشناختی است؛ اما وابستگی صدقِ «حدس چهاررنگ اثبات شده است» به تعریف «اثبات» وابستگی معرفت‌شناختی است؛ زیرا «اثبات»، برخلاف «چرخیدن»، ناظر به منابع توجیه و شناخت است و باورهای ما را ارزش‌گذاری می‌کند. از این رو، دومی، برخلاف اولی، منجر به نسبی‌نگری می‌شود. دلیل

دیگر این‌که، به‌نظر معقول نمی‌رسد که کسی پس از شنیدن تعریف دوگانهٔ «چرخیدن» به مناقشه ادامه دهد و مثلاً در معنای «چپ» و «راست» و «حرکت کردن» یا در اساسی‌بودن جایگاه آن‌ها در معنای «چرخیدن» تشکیک کند. اما تشکیک در مورد معنای «اقناع‌کردن» و «صوری‌بودن» یا تشکیک در اساسی‌بودن جایگاه آن‌ها در اثبات ریاضیاتی کاملاً معقول به‌نظر می‌رسد. شاید این تفاوت به خاطر آن است که مفهوم اثبات، افزون بر ابهام، دارای ابهام و پیچیدگی است؛ و ابهام و پیچیدگی اثبات، هنگام فروکاستن، به مفاهیم پایه‌ای‌تر اقناع یا استنتاج صوری منتقل می‌شود. به همین علت است که مناقشهٔ اثبات با ارائهٔ تعریف اثبات حل نمی‌شود بلکه قوت می‌گیرد. در عمل نیز مشاهده می‌شود که کسی مانند وبر (۲۰۰۹) به تعریف هرش تمکین نمی‌کند و اقناع جامعهٔ ریاضیات را شرط اساسی یک اثبات نمی‌داند (Weber, 2009: 27).

اما اگر مناقشهٔ اثبات ریاضیاتی، لفظی نیست پس چه نوع مناقشه‌ای است؟ به‌نظر می‌رسد با پی‌گیری و پاسخ به این پرسش یک گام به کشف فرامعیار مطلوب نزدیک‌تر خواهیم شد. برای این منظور ما، به پیروی از اروینگ کوپی، سه نوع مناقشه را از هم متمایز می‌کنیم:

ـــ مناقشهٔ آشکارا اصیل (obviously genuine dispute): مناقشه‌ای که در آن، میان اشخاص یک عدم توافق در باور و یا گرایش وجود دارد بدون آن‌که ایهامی در کار باشد. مانند مناقشه میان طرفداران دو تیم ورزشی رقیب؛

ـ مناقشهٔ صرفاً لفظی (merely verbal dispute): مناقشه‌ای که حاصل ابهام و ایهام واژگان است، بدون آن‌که اختلاف نظر اصیلی در کار باشد؛ مانند مناقشهٔ «چرخیدن»؛

ـــ مناقشهٔ ظاهراً لفظی اما واقعاً اصیل (apparently verbal but really genuine): مناقشه‌ای که حاصل ایهام واژگان است، و در عین حال در آن، میان اشخاص، یک عدم توافق در باور، و یا در گرایش ناظر به امور واقع و یا در گرایش ناظر به به‌کارگیری واژگان، در کار است (Copi, 1990: 165-68).

همان‌طور که گفتیم راه‌حل مناقشه‌های لفظی در رفع سوءتفاهم‌های ناشی از ابهام و ایهام است و تعریف‌های تصریحی، لغوی، و تدقیقی به این منظور به‌کار می‌روند. برای حل مناقشه‌های اصیل نیز باید باورها و گرایش‌های طرف‌های دعوا هم‌سو شوند، برای این کار باید در ذهن طرف‌های دعوا به گونه‌ای، مثلاً به واسطهٔ استدلال یا تجربهٔ جدید، گذرهای هیجانی و یا شناختی اتفاق بیفتند. اگرچه تعریف‌ها منجر به حل منطقی این نوع مناقشه‌ها نمی‌شوند (Copi, 1990: 166) اما از آن‌جا که هدف تعریف‌های اقناعی

(persuasive definitions) تأثیرگذاری بر گرایش‌ها و عواطف مخاطب است، به‌نظر می‌رسد این نوع تعریف‌ها بتوانند در گذرهای هیجانی و فیصله‌دادن به مناقشه‌های اصیل کارساز باشند. اما در مناقشهٔ نوع سوم، که ما اختصاراً به آن «مناقشهٔ نظری» خواهیم گفت، وضعیت کمی پیچیده‌تر است؛ این نوع مناقشه‌ها به گونه‌ای هستند که در نگاه نخست گمان می‌رود با یک تعریف مناسب پایان می‌یابند؛ اما نه‌تنها این اتفاق نمی‌افتد بلکه به واسطهٔ تعریف‌های ارائه‌شده رنگ‌وبوی جدی‌تری به خود می‌گیرند. این وضعیت نشان می‌دهد که یک عدم توافق اصیل، در باور و یا گرایش، هنوز به قوت خود باقی مانده و حتی، به واسطهٔ مداقه‌هایی که انجام شده، به قوت آن افزوده شده است. کوپی مناقشه‌ای را مثال می‌زند که بر سر ماهیت و ارزش فیلم‌های حاوی رفتارهای جنسی است. دعوا بر سر این است که آیا این نوع فیلم‌ها هرزه‌نگاری محسوب می‌شوند یا نه؟ ظاهراً اختلاف بر سر معنای «هرزه‌نگاری» است؛ به همین دلیل طرفین دعوا تعریف خود را ارائه می‌دهند. یک طرف مدعی است «هرزه‌نگاری نمایش آشکار رفتارهای جنسی است»؛ اما طرف مقابل هرزه‌نگاری را «نمایشی که صرفاً برای تحریک جنسی مخاطب انجام می‌پذیرد» تعریف می‌کند. به عقیدهٔ او اگر در فیلمی، برای آفرینش یک اثر هنری، رفتارهای جنسی به عنوان عناصر زیبایی‌شناختی به‌کار روند آن فیلم مصداق هرزه‌نگاری نیست. برخلاف مناقشهٔ «چرخیدن»، به‌نظر نمی‌رسد که مناقشهٔ «هرزه‌نگاری» نیز با ارائهٔ تعریف حل شود. در چنین وضعیتی ما با یک مناقشهٔ نظری مواجه هستیم. مناقشهٔ اثبات ریاضیاتی نیز چنین وضعیتی دارد.

شاید معقول باشد که بگوییم در این مواقع باید به آرای عمومی مراجعه کرد. درواقع پیشنهاد اصحاب جامعه‌شناسی ریاضیات برای انتخاب بهترین تعریف اثبات ریاضیاتی رجوع به اجماع جامعهٔ ریاضیات است. اگر از آن‌ها بپرسیم چگونه چنین اجماعی ممکن است؟ خواهند گفت: «فهم چگونگی رخ‌دادن چنین اجماعی مستلزم شناخت ارزش‌هایی است که ریاضی‌دانان به آن حرمت می‌نهند ... . این ارزش‌ها ممکن است متعلق به آموزه‌های خود سنت ریاضیات یا تعلقات صنفی و شغلی ریاضی‌دانان باشد یا متعلق به جامعه [ی بزرگ‌تری] باشد که جامعهٔ ریاضی در بطن آن قرار دارد، [...] و فهم این ارزش‌ها مستلزم پژوهشی جامعه‌شناختی است» (مقدم‌حیدری، ۱۳۸۷: ۱۴۵). اگر مراد از جامعهٔ ریاضی [/جامعهٔ ریاضیات] کلان‌نهادِ ریاضیاتی، شامل همهٔ افراد فعال در همهٔ قلمروها و مکاتب فلسفی ریاضیات باشد، اجماع می‌تواند فرامعیار خوبی برای انتخاب تعریف اثبات ریاضیاتی باشد؛ اما عملاً چگونه ممکن است در کلان‌نهادِ ریاضیاتی به

ارزش‌هایی مشترک و هم‌سو و، در عین حال، مؤثر در داوری دست یافت؟ یعنی مثلاً منطق‌گرایان که توجیه پسینی را در ریاضیات مطلقاً مردود می‌دانند در پرتو کدام ارزش می‌توانند با ریاضی‌دانان شبه‌تجربی بر سر مفهوم اثبات به اجماع برسند، آن هم به گونه‌ای که بر اساس آن ارزش دربارهٔ اثبات‌های مناقشه‌آمیزِ شبه‌تجربی داوری هم‌سویی داشته باشند؟ و اگر مراد از جامعهٔ ریاضیات زیرنهادهای ریاضیاتی، مانند ریاضیات شهودگرا، ریاضیات شبه‌تجربه‌گرا باشد، گرچه اجماع در چنین خُرده‌ارزش‌هایی ممکن به‌نظر می‌رسد، اما آیا پذیرش همهٔ آن‌ها مستلزم نسبی‌نگری نخواهد بود؟ بنابراین، این دو معیار، که می‌توان آن‌ها را، به‌ترتیب، اجماعِ کلان‌نهادی و زیرنهادی نامید، به‌ترتیب، مطلوبِ ناممکن و ممکنِ نامطلوب هستند.

برای یافتن فرامعیارِ مطلوب، ماهیت مناقشه‌های نظری را بیش‌تر کندوکاو می‌کنیم. این مناقشه‌ها گرچه پایان نمی‌یابند اما در عوض فهم و شناخت ما را، دربارهٔ مثلاً هرزه‌نگاری، بهبود بخشیده و باورهایمان دربارهٔ آن را موجه و یا معقول می‌سازند، و نیز ما را به پیش‌فرض‌ها و پیامدهای باورهایمان دربارهٔ آن مفهوم آگاه‌تر کرده و دامنهٔ کاربرد آن واژه را معیّن می‌کنند. این کارکردهای متفاوت و فراوان نشان می‌دهند که میان تعریف‌های ارائه‌شده در این مناقشه‌ها و تعریف‌های قبلی تفاوت‌های اساسی وجود دارد. تعریف‌های قبلی را، از آن جهت که صرفاً تعریف واژه‌ها هستند (Copi, 1990: 169) و کارکردشان ایهام‌زدایی و ابهام‌زدایی است، می‌توان تعریف‌های لفظی (verbal) نامید.

اما تعریف‌های ارائه‌شده در مناقشه‌های نظری را تعریف‌های نظری می‌نامیم (ibid: 175). این تعریف‌ها صرفاً تعریف‌گر واژه‌ها نیستند، بلکه تعریف‌گر مفاهیم و تبیین‌گر پدیده‌ها و توجیه‌گر باورهایمان نیز هستند؛ و درواقع فهم‌افزایی این تعریف‌ها به یُمن تبیین‌گری آن‌ها است. به همین علت، تعریف‌های نظری بسیار فراتر از تعریف هستند و درواقع می‌توان گفت «آن‌ها در حکم نظریه‌اند» (ibid: 176). یا، به تعبیر دقیق‌تر، هر تعریف نظری نتیجهٔ یک کل بزرگ‌تر به نام «نظریه» است. نظریه، به این معنی، عبارت است از نظامی از گزاره‌ها که (دست‌کم) دو کارکرد اساسی داشته باشد؛ اولاً، امکان تعریفِ نظریِ مفاهیم را فراهم کند، و ثانیاً تبیینِ واقعیت‌های مرتبط را، بر اساس آن تعریف، امکان‌پذیر سازد. یک نظریه شامل مفاهیم، اصول، و پیش‌فرض‌های فراوانی است؛ به طوری که می‌توان گفت مانند یک کوه یخی عظیم است، و یک تعریف نظری صرفاً بخش کوچک و آشکار آن است. با این حساب، در مناقشه‌های نظری، مانند مناقشهٔ اثبات ریاضیاتی، باید درواقع به این پرسش

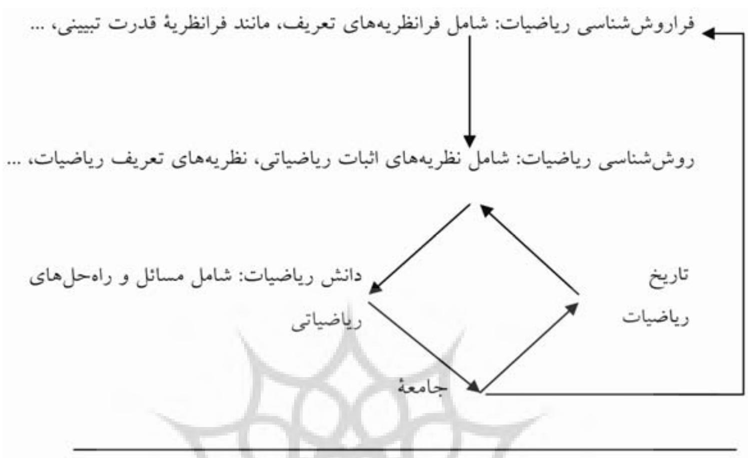
پاسخ دهیم که کدام نظریه را باید ترجیح داد؟ بر اساس تعریف بالا، یک نظریهٔ اثبات ریاضیاتی مجموعه‌ای از گزاره‌های مرتبط است که، اولاً، امکان یک تعریف نظری برای مفهوم اثبات ریاضیاتی را فراهم می‌کنند؛ و، ثانیاً، «واقعیت‌های اثبات» (the proof facts) را، بر اساس آن تعریف، تبیین می‌کند. «واقعیت‌های اثبات» داده‌هایی دربارهٔ اثبات ریاضیاتی هستند که تاریخ اثبات ریاضیاتی آن‌ها را در اختیار ما قرار داده است[۲] (ما این واقعیت‌ها را، در بخش ٤، برخواهیم شمرد). اگر یک تعریف، در تبیین واقعیت‌های اثبات، موفق‌تر از تعریف‌های دیگر عمل کند بهتر است؛ و این، یعنی قدرت تبیینی، همان فرامعیاری است که به‌خوبی می‌تواند انتخاب یک نظریه و تعریف نظریِ حاصل از آن را توجیه کند؛ و در عین حال، دارای یک سازوکار عملی، مطلوب و متداول در نظریه‌های فلسفی و حتی علمی است. نمودار ۱، ارزیابی فرامعیارها، یا همان فرانظریه‌های تعریف، را به‌اختصار نمایش می‌دهد:

فرامعیار		ممکن	مطلوب
هم‌ارزی	مفهومی	−	+
	مصداقی	−	+
اجماع	کلان نهادی	−	+
	زیر نهادی	+	−
قدرت تبیینی		+	+

نمودار ۱

فرامعیار قدرت تبیینی، برخلاف فرامعیار هم‌ارزی، از جنبهٔ اجتماعی و تاریخی اثبات‌ها غافل نیست؛ زیرا برای سنجش نظریه‌ها توسط آن باید، خواه‌ناخواه، واقعیت‌های اثبات ریاضیاتی نیز درنظر گرفته شوند. از سوی دیگر، برخلاف فرامعیار اجماع، صرفاً مبتنی بر آرای عمومی و مبهم و تلویحی ریاضی‌دان‌ها (Olsker, 2011: 46, 51) نیست؛ زیرا اولاً، دارای یک پشتوانهٔ روش‌شناختی مهم به نام «استنتاج بر اساس بهترین تبیین» است، و، ثانیاً، دارای سازوکار مشخص و فرآیند معین و آشکاری است که در بخش ٤ آن را با جزئیات بیش‌تری معرفی می‌کنیم. ما با اصحاب جامعه‌شناسی ریاضیات موافقیم که پاسخ به پرسش چیستی اثبات ریاضیاتی به وسیلهٔ جامعهٔ جهانی ریاضی‌دانان و معلمان و فیلسوفان و سایر فعالان عرصهٔ ریاضیات که مدام در حال مذاکره (negotiation) هستند داده می‌شود (Olsker, 2011: 34). با این حال معتقد نیستیم که این مذاکره باید ناروش‌مند، و نتایج آن مبهم و تلویحی بماند. به باور ما اساساً مأموریت فراروش‌شناسی ریاضیات بازسازی عقلانی

این مذاکره برای صورت‌بندی یک پاسخ تصریحیِ موجه است. فعالیت ریاضیاتی بدون فراروش‌شناسی رانندگی با چشمان بسته است. در نمودار ۲ می‌توان رابطهٔ ریاضیات، روش‌شناسی ریاضیات، فراروش‌شناسی ریاضیات و تاریخ ریاضیات را مشاهده کرد.



نمودار ۲: فراروش‌شناسی، از یک سو، و تاریخ ریاضیات، از سوی دیگر، نظریه‌های روش‌شناسی ریاضیات را تعیین و توجیه می‌کنند. روش‌شناسی ریاضیات هنجارهای ریاضیات را تعیین و توجیه می‌کند، و دانش ریاضیات نیز جامعه و تاریخ ریاضیات را محقق و معین می‌کند. مذاکرات جامعهٔ ریاضیات فراروش‌شناسی ریاضیات را جرح و تعدیل و یا تثبیت یا متحول می‌کند.

۴. فرآیند انتخاب بهترین تعریف اثبات ریاضیاتی

برای انتخاب بهترین نظریهٔ اثبات ریاضیاتی، بر اساس فرامعیار قدرت تبیینی، ابتدا باید تعریف‌های اثبات ریاضیاتی را به مثابهٔ تعریف‌های نظری اثبات ریاضیاتی، که در مناقشهٔ اثبات ریاضیاتی پیشنهاد شده‌اند، واکاوی و طبقه‌بندی کَرده و نظریهٔ متناظر با آن‌ها را صورت‌بندی کنیم؛ سپس فهرستی از داده‌های تاریخی را به عنوان واقعیت‌های اثبات تهیه کنیم تا بتوانیم قدرت تبیینی نظریه‌ها را بر اساس آن‌ها محک بزنیم.

۱.٤ نظریه‌های اثبات ریاضیاتی

چنان‌که در بخش ۲ گفتیم، سه نوع تعریف از اثبات ریاضیاتی را می‌توان و باید از هم متمایز ساخت: تعریف‌های یگانه، دوگانه، و چند گانه. بر اساس این سه نوع تعریف، اثبات

ریاضیاتی، به‌ترتیب، دارای یک معنا، دو معنا و بیش از دو معنا است. درحقیقت، این تفاوت به علت پیش‌فرض‌های متفاوتی است که، آگاهانه یا ناآگاهانه، در نظریه‌های متناظر با این تعریف‌ها وجود دارند. به عبارت دیگر، یکی از گزاره‌هایی که، به مثابهٔ یک اصل، یک نظریهٔ اثبات را تشکیل می‌دهد ناظر به متنوع بودن یا نبودن اثبات‌های ریاضیاتی است. ما نظریه‌های متناظر با این سه دسته تعریف را، به‌ترتیب، نظریه‌های یک‌نگر، دونگر و چندنگر می‌نامیم. توضیح پیش‌فرض‌ها و لوازم فلسفی مهم این نظریه‌ها مقالهٔ مستقلی می‌طلبد. در جدول زیر به گونه‌ای کوتاه، به صورت‌بندی و طبقه‌بندی این نظریه‌ها اشاره می‌کنیم.

نظریه			**اثبات ریاضیاتی عبارت است از:**	**هواداران**
یک‌نگر	ساده	صوری یا نحوشناختی	دنباله‌ای متناهی از جملات نظام صوری **S** که یا اصل موضوع‌اند یا حاصل به‌کارگیری قواعد نحوشناختی **S** روی جملات قبلی	صورت‌گرا
		معنایی یا معناشناختی	استنتاج یک گزارهٔ ریاضیاتی از گزاره‌های پایه بر اساس قواعد معناشناختی منطق	منطق‌گرا
		ذهنی یا شهودگرایانه	دنباله‌ای از اعمال شهودی که، به مثابهٔ گام‌های نگهدارندهٔ ساختمان‌پذیری، منجر به یک تجربهٔ درونی معینی شود.	شهودگرا
		اقناعی یا خطابی	فعالیتی که ریاضی‌دان انجام می‌دهد تا خود و جامعهٔ ریاضیات را دربارهٔ یک مدعای ریاضیاتی اقناع کند.	انسان‌گرا
		توجیهی یا معرفت‌شناختی	توجیه صدق یک گزارهٔ ریاضیاتی براساس گزاره‌های پایه و قواعد روش‌شناسی ریاضیات	واقع‌گرا
	پیچیده	نحوی ـ توجیهی	توجیه پیشینی صدق یک گزارهٔ ریاضیاتی به واسطهٔ دنباله‌ای از جملات	کیچر
		توجیهی ـ تبیینی	توجیه صدق یک گزاره به واسطهٔ تبیین یک متن ریاضیاتی	بالاچف
دونگر		ممتد	استدلال فرایابانه [/ با حدس صائب] منجر به کشف یک حقیقت جدید و بعد استدلال الگوریتمی منجر به توجیه پیشینی یک گزاره می‌شود.	لاکاتوش
		موازی	استنتاج نحوشناختی معتبر یک جمله در نظام **S** و یا فعالیت منجر به اقناع جامعهٔ ریاضیات دربارهٔ یک مدعای ریاضیاتی	هرش
چندنگر		واگرا	استنتاج نحوشناختی معتبر یک جمله در نظام **S** یا استدلال فرایابانه منجرشونده به کشف یا استنتاج منجرشونده به توجیه	سلوچی
		هم‌گرا	فعالیت منجرشونده به اقناع درونی خود و اقناع بیرونی جامعهٔ ریاضیات در نهادهای مختلف ریاضیات	هارل

نمودار ۳

۲.٤ واقعیت‌های اثبات ریاضیاتی

از آن‌جا که قرار است قدرت تبیینی نظریه‌های اثبات بر اساس واقعیت‌های اثبات سنجیده شوند، رعایت حداکثر بی‌طرفی در تهیهٔ فهرست آن‌ها بسیار حائز اهمیت است. چنان‌که از ظاهر و روند این مقاله نیز پیدا است، رهیافت مورد علاقهٔ ما در آشکارسازی و صورت‌بندی پیش‌فرض‌ها و لوازم نظریه‌ها و تنظیم گام‌های استدلال، تحلیل منطقی ـ زبانی است، اما به‌نظر می‌رسد که در این مرحله، که باید توصیف واقع‌گرایانه‌ای از اثبات‌های ریاضیاتی ارائه دهیم، روش پدیدارشناختی بهترین گزینه است. خوشبختانه روتا تقریر مناسبی از قواعد پدیدارشناختی هوسرل را برای توصیف واقع‌گرایانه از اثبات ریاضیاتی در اختیار ما قرار داده است:

الف) یک توصیف واقع‌گرایانه باید ناظر به ویژگی‌های مغفول و گشوده (open) باشد (یعنی ما را متوجه ویژگی‌هایی کند که به آن‌ها اشاره نشده است و از پیش تعیین نشده‌اند)؛ زیرا ریاضی‌دانان دربارهٔ آن‌چه انجام می‌دهند لب به سخن نمی‌گشایند و معمولاً برای توضیح مشغلهٔ هر روزه‌شان رغبت نشان نمی‌دهند.

ب) پدیده‌های حاشیه‌ای (fringe phenomena)، که معمولاً در سایه نگه داشته می‌شوند، باید به متن آورده شوند و اهمیت یابند. همواره گفت‌وگوی کاریِ ریاضی‌دانان مشتمل بر واژگانی است هم‌چون فهم، عمق، انواع اثبات، درجهٔ وضوح، و بسیاری دیگر؛ بنابراین یک بحث دقیق از نقش این واژگان باید بخشی از فلسفهٔ اثبات ریاضیاتی باشد.

ج) واقع‌گرایی پدیدارشناختی اقتضا دارد که، بدون هیچ ابایی و عذر و بهانه‌ای، هیچ‌یک از ویژگی‌های ریاضیات با برچسب‌هایی هم‌چون روان‌شناختی بودن، اجتماعی‌بودن یا ذهنی‌بودن کنار گذاشته نشود.

د) همهٔ پیش‌فرض‌های هنجارین باید دور ریخته شوند. در بسیاری از توصیفاتی که از اثبات ریاضیاتی عرضه شده‌اند باورهای گوینده در مورد ماهیت اثبات کتمان شده‌اند. ممکن است چنین رهیافتی منجر به کشفیات نامطلوبی شود؛ مثلاً یک توصیف ممکن است به این نتیجه بینجامد که عملاً هیچ ویژگی مشترکی در همهٔ اثبات‌های ریاضیاتی وجود ندارد، یا این‌که تناقض‌ها دوشادوش حقایق، بخشی از واقعیت ریاضیات‌اند (Rota, 1997: 184).

ما فهرست زیر را با کاربست این قواعد بر روی تاریخ اثبات ریاضیاتی تهیه کرده‌ایم، که، البته، امکان جرح و تعدیل در آن منتفی نیست.

۱. برای قضیه‌های ریاضیاتی، اثبات‌های متعددی ارائه می‌شود و ریاضی‌دانان معمولاً به یک اثبات بسنده نمی‌کنند؛
۲. اثبات‌های ریاضیاتی خطاپذیر هستند و خطای آن‌ها ممکن است سال‌ها پنهان و تصحیح‌ناشده باقی بماند؛
۳. اثبات‌های ریاضیاتی با وجود عینی و همگانی بودن، واجد یک جنبهٔ ذهنی و شخصی نیز هستند. یعنی اگر ذهنی در کار نباشد و تصدیقی صورت نگیرد اثبات محقق نشده است؛
٤. اثبات‌های ریاضیاتی تاریخ‌مند هستند. یعنی در یک زمینهٔ تاریخی قابل طرح و فهم هستند؛
۵. اثبات‌های ریاضیاتی یک هویت اجتماعی دوسویه نیز دارند: یعنی از یک سو باید روش‌ها و ارزش‌های اثبات به جامعه آموزش داده شوند، و از سوی دیگر باید از عهدهٔ اقناع جامعهٔ ریاضیات برآمده و به تصویب آن برسند؛
٦. بسیاری از اثبات‌ها، صوری محض نیستند و در آن‌ها زبان طبیعی، تصویر و دلایل شهودی به‌کار می‌روند؛
۷. الگوی دقت برای اثبات‌های ریاضیاتی در قلمروهای متفاوت ریاضیات متفاوت است؛
۸. در دیدگاه عرفی ریاضی‌دانان و دانشمندان، اثبات‌های ریاضیاتی با اثبات‌های تجربی تفاوت اساسی دارند. اثبات‌ها برای تضمین صدق ضروری و توجیه یقینی باورهای ریاضیاتی ما اجتناب‌ناپذیرند؛
۹. برخی اثبات‌ها در یک قلمرو از ریاضیات، مانند آنالیز کلاسیک، حاوی قضایایی است که در یک قلمرو دیگر، مانند منطق ریاضیاتی، که مفهوم اثبات در آن متفاوت است، به اثبات رسیده است (اثبات‌های مرزی)؛
۱۰.در همهٔ اثبات‌های ریاضیاتی فرآیند منطقی استدلال (یعنی گذر شناختی از مقدمات به نتیجه) وجود دارد و اقناع لزوماً و صرفاً از طریق استدلال انجام می‌شود؛
۱۱.اثبات‌های ریاضیاتی، دست‌کم در نظریهٔ برهان‌ها، آنالیز کلاسیک، آنالیز شهودگرا، نظریهٔ اعداد و هندسه، دارای تفاوت نوعی و شباهت جنسی هستند؛ یعنی گرچه کاملاً از یک نوع نیستند اما از یک جنس‌اند (شباهت جنسی قوی‌تر از شباهت خانوادگی و ضعیف‌تر از شباهت نوعی، یا ذاتی، است. شباهت نوعی بر شرایط لازم و کافی استوار است اما شباهت جنسی فقط بر شرایط لازم استوار است).
۱۲.اثبات‌های ریاضیاتی را می‌توان به صفاتی هم‌چون عمیق، قوی، زیبا، بصیرت‌بار، و روشن‌گر متصف کرد.

حال همهٔ ابزار لازم برای سنجش نقادانهٔ تعریف‌های اثبات ریاضیاتی فراهم است: (۱) نظریه‌های اثبات ریاضیاتی، شامل سه نوع نظریهٔ عمدهٔ یک‌نگر، دونگر و چندنگر؛ (۲) واقعیت‌های اثبات ریاضیاتی، شامل دوازده واقعیت تاریخی؛ (۳) فرانظریهٔ تعریف (یا فرامعیار انتخابِ بهترین تعریف): قدرت تبیینی. با این حال این سنجش مجال دیگری می‌طلبد و در حوصلهٔ این مقاله نیست.

۵. نتیجه‌گیری

ریاضی‌دانان، آگاهانه یا ناآگاهانه، تابع نظریه‌های فراریاضیاتی معینی هستند. این نظریه‌ها ماهیت، کارکرد، و ارزش فعالیت‌های ریاضیاتی آن‌ها را تعیین می‌کنند. یکی از این فعالیت‌ها، و بلکه مهم‌ترین آن‌ها، ثابت‌کردن حدس‌های ریاضیاتی است. از این رو، هر ریاضی‌دانی، خواسته یا ناخواسته، معتقد به نظریه‌ای دربارهٔ اثبات ریاضیاتی است. نظریهٔ کلاسیک اثبات ریاضیاتی، یعنی نظریه‌ای که در کلاس‌های درس، دانش‌نامه‌ها، کتاب‌های مبانی و کنفرانس‌های ریاضیات به عنوان نظریهٔ استاندارد به رسمیت شناخته شده است، نظریهٔ صوری یا نحوشناختی اثبات ریاضیاتی است.

از همان اولین سال‌های طرح این نظریه، توسط هیلبرت (۱۹۳۰)، نقدهای مهمی بر آن وارد شده بود، اما با گسترش روش‌های جدید استدلال و اثبات ریاضیاتی، در دهه‌های اخیر، این نقدها جدی‌تری و اساسی‌تر شده‌اند. در پی این نقدها، منتقدان، معمولاً تعریف‌های دیگری را به عنوان بدیل پیشنهاد کرده‌اند که از جملهٔ آن‌ها می‌توان به سه نوع عمدهٔ یک‌نگر، دونگر و چندنگر اشاره کرد. اما فراوانی این تعریف‌های اساساً مختلف، دانش ریاضیات را در معرض نسبی‌نگری قرار داده است. راه‌حل مورد نظر این مقاله توجه به فراروش‌شناسی ریاضیات و تلاش برای ارائهٔ یک فرانظریهٔ مناسب برای تعریف است. این فرانظریه قرار است یک فرامعیار قوی برای انتخاب بهترین تعریف از اثبات ریاضیاتی را در اختیار ریاضی‌دانان قرار دهد. ما با تحلیل ماهیت مناقشهٔ اثبات ریاضیاتی به این نتیجه رسیدیم که این مناقشه از نوع نظری است و برای این نوع مناقشه‌ها فرامعیار قدرت تبیینی بهترین فرامعیار محسوب می‌شود.

پس از اثبات مطلوبیت فرامعیار قدرت تبیینی در بخش ۳، امکان‌پذیری آن را عملاً در بخش ٤ نشان دادیم. در بخش مذکور ضمن صورت‌بندی و طبقه‌بندی مهم‌ترین نظریه‌های اثبات ریاضیاتی واقعیت‌های اثبات ریاضیاتی را برای سنجش آن نظریه‌ها برشمردیم.

درنهایت می‌توان نتیجه گرفت که اولاً بـدون فرانظریـه‌هـای فـراروش‌شـناختی چرخـهٔ عقلانیِ دانش ریاضیات ـ جامعه و تاریخ ریاضیات ـ فراریاضیات کامل نمی‌شود (نمودار ۲)، و ثانیاً فرانظریهٔ قدرت تبیینی بهترین فرانظریهٔ تعریف اثبات ریاضیاتی است (نمودار ۱).

پی‌نوشت

۱. نباید «اثبات‌های شاکله‌ای» را با «تعریف‌های شاکله‌ای از اثبات» خلط کرد.

۲. تعبیر «واقعیت های اثبات» از لایکن الهام گرفته شده است. او در توضیح نظریه‌های معنـا از ایـن عبارت استفاده می‌کند و می‌گوید: «یک نظریـهٔ معنـا، هماننـد هـر نظریـهٔ دیگـری، بایـد واجـد مجموعه‌ای اختصاصی از داده‌ها باشد ... من برای اشـاره بـه کـل ایـن داده‌هـا از همـان عنـوان «واقعیت‌های معنا» (the meaning facts) استفاده خواهم کرد» ــــ Lycan, 2008: 65.

منابع

فان آتن، مارک (۱۳۸۷). فلسفهٔ براوئر، ترجمهٔ محمد اردشیر، تهران: هرمس.

کورانت، ریچارد، هربرت رابینز (۱۳۷۹). ریاضیات چیست؟، ترجمهٔ سیامک کاظمی، تهران: نی.

لاکاتوش، ایمره (۱۳۸۷). «اثبات ریاضیاتی چیست؟»، در دیدگاه‌ها و برهان‌ها، ترجمه و تألیف شاپور اعتمـاد، تهران: مرکز.

مقدم‌حیدری، غلامحسین (۱۳۸۷). جامعه‌شناسی ریاضی، تهران: سمت.

همپل، کارل (۱۳۸۷). «ماهیت راستی ریاضی»، در دیدگاه‌ها و برهان‌ها، ترجمه و تألیف شاپور اعتماد، تهـران: مرکز.

Bundy, A., et. al (2005). 'What is a Proof?', Philosophical Transactions of the Royal Society, No 363. Available on: http://rsta.royalsocietypublishing.org/content/363/1835/2377.full

Cellucci, Carlo (2008). 'Why Proof? What is a Proof?' In G. Corsi and R. Lupacchini (eds.), Deduction, Computation, Experiment. Exploring the Effectiveness of Proof, Berlin: Springer-Verlag.

Copi, Irving M., and Carl Cohn (1990). Introduction to Logic, Macmillan Publishing Company.

Detlefsen, M. (2009). 'Proof: Its Nature and Significanc', in Gold, B (ed.) Proof and Other Dilemmas, Cambridge University Press.

Gold, B., and Others (eds.) (2008). Proof and Other Dilemmas, Mathematics and Philosophy,The Mathematical Association of America.

Hanna, G., and Others (eds.) (2010). Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives, New York: Springer.

Harel, G., and L. Sowder (2003). 'Towards a Comprehensive Perspective to Learning and Teaching of Mathematical Proof' in Lester, F. (ed.), Comprehencive Perspective to Proof, Second Handbook of Research on Mathematics Theaching and Learning, National Council of Teachers of Mathematics.

Hersh, R. (1997). What Is Mathematics, Really? New York: Oxford University Press.

Kitcher, Philip (1984). The Nature Of Mathematical Knowledge, Oxford University Press.

Lycan,William G. (2008). Philosophy of Language, a Contemporary Introduction, Routledg.

Olsker, T. C. (2011). 'What Do We Mean by Mathematical Proof?' Journal of Humanistic Mathematics Vol. 1, No. 1.

Rota, G. C. (1997). The Phenomenology of Mathematical Proof, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Weber, K. (2009). 'Proving Is Not Convincing', Presented at Twelfth Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education, Raleigh, NC.