

توسعه مدل های کنترل موجودی (r,Q) و (R,T)

مقصود امیری* - محمد امین نایبی** - اویس زرآبادی پور***

(تاریخ دریافت: ۸۸/۷/۱۳ - تاریخ پذیرش: ۹۰/۷/۱۸)

چکیده

در این مقاله مدل های سنتی کنترل موجودی (r,Q) و (R,T) به صورت یک مدل چندکالایی با دو هدف کمینه سازی هزینه ها و سطح خطر و تحت محدودیت های بودجه در دسترس، حداقل سطح عملکرد، فضای انبار و تعداد کمبود مجاز توسعه یافته اند. تابع توزیع تقاضا نرمال بوده و تقاضا با پس افت تأمین می گردد. ابتدا مدل قطعی و سپس مدل احتمالی - فازی با پارامترهای بودجه فازی، تعداد کمبود مجاز فازی، و فضای انبار که پارامتری احتمالی - فازی با تابع توزیع نرمال است توسعه می یابد. تمام اعداد فازی و از نوع مثلثی هستند. در متدولوژی حل با استفاده از روش نافازی سازی محدودیت های فازی و روش برنامه ریزی محدودیت های احتمالی فازی، مدل به یک مسئله قطعی چندهدفه تبدیل شده و سپس از طریق روش فازی حل می گردد. در پایان یک مثال عددی جهت توصیف مدل و روش حل آمده که با نرم افزار لینگو ۸ حل شده است.

کلمات کلیدی: سیستم های سفارش (r,Q) و (R,T)، اعداد فازی، محدودیت های فازی، برنامه ریزی چندهدفه، برنامه ریزی محدودیت های احتمالی فازی.

* دانشیار گروه مدیریت صنعتی دانشگاه علامه طباطبائی

** دانشگاه آزاد اسلامی، واحد نراق، باشگاه پژوهشگران جوان و نخبگان، نراق، ایران

Amin.Nayebi@gmail.com

*** دانشگاه آزاد اسلامی، واحد قزوین، گروه مدیریت صنعتی، قزوین، ایران

- 1- Triangular
- 2- Fuzzy Chance Constrained Programming
- 3- LINGO.8
- 4- Fuzzy numbers
- 5- Fuzzy Constraints
- 6- Multi Objective Programming

مقدمه

دنیای امروز به سرعت در حال دگرگونی است و این دگرگونی در تمامی بخش‌ها از جمله سازمان‌ها نیز وجود دارد که یکی از مباحث مهم در سازمان‌های تولیدی تصمیمات مرتبط با مدیریت موجودی است که تأثیر بسزایی در فعالیت‌های سازمان دارد. در این بین مدل‌های موجودی از جایگاه ویژه‌ای در این تصمیمات برخوردارند. پس از اینکه هریس مدل EOQ را مطرح نمود تغییرات و پیچیدگی‌های زیادی موجب عدم کارایی و لزوم توسعه این مدل‌ها شده است (Manas & Maiti, 2005). پیچیدگی در مدل‌سازی یک موقعیت واقعی در حوزه کنترل موجودی به علت وجود برخی اطلاعات که قابل تشخیص و شناسایی نیستند افزایش یافته است به این مفهوم که مدل‌های سنتی به تنهایی قادر به اعمال دقت و قطعیت منطق ریاضی کلاسیک نیستند. در واقع هنگام مدل‌سازی یک موقعیت واقعی، زمانی که نادقیقی و عدم قطعیت به دلیل ساخت مدل نادیده‌انگاشته می‌شود، مدل حاصل از واقعیت دور خواهد بود (Das & et al., 2004). دو موضوع مورد مطالعه در ادبیات موجودی مدل‌های (r, Q) و (R, T) می‌باشند. این دو مدل از ابتدای تئوری موجودی در مکاتب آموزشی و کاربردی شناخته شده است و روش‌های محاسباتی متعددی در کتاب‌های درسی و مقالات پژوهشی برای تعیین پارامترهای میزان سفارش و نقطه سفارش مجدد منظور شده است (Das & et al., 2004). در مدل (r, Q) با توجه به تقاضای احتمالی، هرگاه موجودی به سطح « r » یا کمتر از آن برسد به مقدار ثابت « Q » سفارش داده می‌شود و در مدل (R, T) در هر دوره که موجودی بررسی می‌شود به اندازه فاصله آن تا میزان ثابت R سفارش داده می‌شود (Tersine, 1994). بهینه‌سازی یک سیستم موجودی دستیابی به سطحی از r و Q است که متوسط هزینه هر دوره را کمینه نماید [۳۱]. اما در دنیای واقعی تصمیم‌گیرنده علاوه بر کاهش هزینه با اهداف دیگری نیز روبروست و در این فرایند تصمیم‌گیری با محدودیت‌های مختلفی مواجه است. از طرف دیگر با ظهور مجموعه‌های فازی استفاده از این منطق در دستیابی به یک تصمیم بهینه در مدیریت موجودی بیشتر احساس می‌شود. در ادامه برخی از تحقیقات انجام شده در این زمینه به طور خلاصه آورده می‌شود. پس از ارائه مدل کلاسیک EOQ توسط هریس تحقیقات

زیادی بر روی این مدل انجام شده است که این نتایج در کتاب‌های مرجع و مقالات پژوهشی همچون (Clark, 1972; Hadely & Whitin, 1963; Naddor, 1986; Raymond, 1931), در دسترس هستند. مطالعاتی چون (Balkhi & Benkherof, 1998; Bhunia & Maiti, 1997; Goswami & Chaudhuri, 1991; Das & et al., 2004) مدل‌های موجودی را با نرخ جای‌گذاری متغیر توسعه دادند. مطالعات دیگر همانند (Cheng, 1989; Cheng, 1991) به توسعه مدل‌های موجودی در حالی که تقاضا و هزینه تولید به یکدیگر وابسته هستند پرداخته و آن را توسط برنامه‌ریزی هندسی حل نمودند. مدل‌های موجودی با محدودیت‌هایی چون فضای انبار، تعداد سفارشات و... در کتاب‌های معروفی همچون (Hadely & Whitin, 1963; Churchman & et al., 1957; Naddor, 1986; Tersine, 1994) ارائه شده است. (Ben-daya & Raouf, 1993) یک مدل موجودی چندکالایی را با تقاضای احتمالی مورد بحث قرار داده و در مطالعه و ابوالعطا و کاتب (Abou-El-At & Kotb, 1997) یک مدل موجودی قطعی با دو محدودیت توسعه یافته است. مجموعه‌های فازی برای اولین بار در سال ۱۹۶۵ بیان شد و زیمرمن این تئوری را برای حل مسائل تصمیم‌گیری به کار برد (Zimmerman, 1996). نمونه‌هایی از کاربرد مجموعه‌های فازی در کنترل موجودی در مطالعاتی نظیر (سرفراز، ۱۳۸۴؛ Sarfaraz & et al., 2006 & Yadvalli, 2005) آمده است. در سال ۲۰۰۴ مقاله‌ای با عنوان «مدل‌های کنترل موجودی احتمالی چندکالایی و احتمالی فازی با دو محدودیت» منتشر شد که دو محدودیت بودجه‌ای و فضای انبار به صورت فازی بوده و تنها یک هدف کمینه‌سازی در مورد مجموع هزینه‌ها در نظر گرفته شده بود. در این پژوهش مدل‌ها به عنوان مسائل احتمالی و غیرخطی مدل شده و برای حل روش محدودیت‌های احتمالی و تکنیک‌گرادیان به کار گرفته شده بود (Das & et al., 2004). در (Yauhua, 2005) دو رویه برای تعیین مقدار بهینه دو پارامتر r و Q در زمانی که هزینه نگهداری غیرشبه محدب بودند ارائه شده است. شکل جدیدی از خط‌مشی پس‌افت جزئی با حدود کنترلی پس‌افت دو قسمتی در

-
- 1- Replenishment
 - 2- Chance Constrained Programming
 - 3- Gradient Technique

(*Chu & et al., 1999*) ارائه شده است. در مطالعه (*Manas & Maiti, 2005*) یک مدل موجودی فازی با دو انبار تحت محدودیت‌های احتمالی ارائه و توسط روش برنامه‌ریزی آرمانی و الگوریتم ژنتیک حل شده است. یک مدل موجودی احتمالی در (*Ouyang & et al., 2003*) مورد بحث و بررسی قرار گرفته و در آن سعی شده است مفهوم مجموعه فازی مرتبط با عدم قطعیت با تقاضای پس‌افت یا فروش از دست‌رفته نشان داده شود. در (*Hariga, 1999*) یک مدل احتمالی کنترل موجودی مرور دائمی (r, Q) ارائه شده و یک روش تعاملی برای تعیین مقدار بهینه اقتصادی سفارش توسعه داده شده است. یک سیستم مرور دوره‌ای با تقاضای احتمالی و هزینه‌های متغیر در پژوهش (*Eynan & Kropp, 2006*) آورده شده که از بسط سری تیلور برای تقریب بخشی از تابع هزینه‌ها استفاده شده است. نمونه‌های دیگری از توسعه مدل‌های احتمالی کنترل موجودی در تحقیقاتی همچون (*Nielsen & Larsen, 2004*؛ *Wu, Ouyang & Chang, 2001*) آورده شده است. امروزه وجود یک محیط ترکیبی یا همراهی عدم دقت و عدم قطعیت در یک مدل موجودی پدیده‌ای واقعی است (*Das & et al., 2004*). به همین منظور در این مقاله مدل‌های کنترل موجودی (r, Q) و (R, T) با دو هدف بهینه‌سازی هزینه و سطح خطر به همراه محدودیت‌های سطح عملکرد، میزان بودجه در دسترس، تعداد کمبود و یک محدودیت احتمالی - فازی فضای انبار توسعه یافته است. هزینه‌های موجودی وابسته به مقدار است. کمبود مجاز و با پس‌افت تأمین شده و منجر به هزینه‌های کمبود می‌گردد. میزان بودجه در دسترس و تعداد کمبود مجاز فازی بوده و فضای انبار نیز یک پارامتر احتمالی با میانگین و انحراف معیار فازی است. محدودیت فضای انبار به صورت احتمالی ارضاء شده و حداقل احتمال مجاز محدودیت یک عدد فازی و تعریف شده است. تمامی پارامترهای تصادفی مستقل بوده و از توزیع نرمال پیروی می‌کنند و تمامی اعداد فازی مثلثی اند. در این مقاله مدل‌های احتمالی - فازی توسعه یافته ابتدا از طریق نافازی‌سازی به یک مدل قطعی تبدیل شده و محدودیت احتمالی - فازی فضای انبار توسط برنامه‌ریزی محدودیت‌های احتمالی فازی به یک محدودیت قطعی تبدیل یافته و مدل حاصله که یک مدل برنامه‌ریزی چندهدفه قطعی است از طریق تکنیک منطق فازی حل می‌گردد. در انتها یک مثال عددی جهت توصیف مدل و روش حل آمده است که با نرم‌افزار لینگو ۸ حل شده است.

این مقاله به صورت زیر سازماندهی می‌شود: در بخش اول نمادها و علائم بیان می‌شود در بخش دوم مدل و مفروضات آن ذکر می‌گردد، در بخش سوم به توسعه مدل پرداخته، در بخش چهارم متدلوژی حل مطرح خواهد گردید و در بخش پنجم یک مثال عددی آورده می‌شود و در بخش نهایی نتیجه‌گیری و تحقیقات آتی بیان می‌گردد.

نمادها و علائم

نمادها

n : تعداد کالاها، A : فضای در دسترس انبار، B : میزان بودجه در دسترس و \sim : نماد فازی.

متغیرهای تصمیم و پارامترها

متغیرهای تصمیم و پارامترها برای کالای i ($i=1,2,\dots,n$) به قرار زیر است:

h_i : هزینه نگهداری سالانه هر واحد از کالای i نام.	S_i : موجودی اطمینان بهینه کالای i نام.
μ_{Li} : میانگین تقاضای کالای i نام در طی مدت تحویل L .	r_i : نقطه سفارش کالای i نام.
σ_{Li} : انحراف از میانگین تقاضای کالای i نام در طی مدت تحویل L .	\bar{r}_i : متوسط کمبود کالای i نام.
\tilde{P}_A : حداقل احتمال مجاز محدودیت انبار	T_i : طول دوره کالای i نام.
D_i : متوسط تقاضای سالانه کالای i نام.	N_i : حداکثر کمبود مجاز کالای i نام.
J_i : هزینه جمع‌آوری اطلاعات کالای i نام.	a_i : فضای اشغالی توسط کالای i نام.
I_{maxi} : بیشینه موجودی کالای i نام.	\bar{I}_i : متوسط موجودی کالای i نام.
$P(D_{Li} \leq r_i)$: سطح عملکرد کالای i نام.	π_i : هزینه کمبود سالانه کالای i نام.
$P(D_{Li} > r_i)$: سطح خطر کالای i نام.	$C(r)$: تابع هزینه سیستم (r, Q) .
P_{0i} : حداقل سطح عملکرد مجاز کالای i نام.	$K(R, T)$: تابع هزینه سیستم (R, T) .
A_i : هزینه سفارش‌دهی کالای i نام.	Q_i : مقدار سفارش کالای i نام.
PC_i : هزینه خرید هر واحد کالای i نام.	

مدل و مفروضات (Tersine, 1994)

دو مدل (r, Q) و (R, T) با توابع هزینه‌ای زیر مدنظر است:

$$\text{تابع هزینه } (r, Q) = C(r) = h.ss + \pi \cdot \frac{D}{Q} \bar{b}(r) \quad (1)$$

$$\text{تابع هزینه } (R, T) = K(R, T) = \frac{1}{T} A' + \frac{1}{T} j + h\bar{I} + \frac{\pi}{T} \bar{b}(R) \quad (2)$$

و مفروضات موردنظر شامل موارد ذیل است:

۱. تقاضا تابعی نرمال با میانگین و انحراف از استاندارد مشخص می‌باشد.

$$N \sim D(\mu_L, \sigma^2) \quad (3)$$

۲. Q و r مستقل از یکدیگر هستند.

۳. تقاضای مازاد با پس‌افت تأمین می‌گردد (و منجر به هزینه‌های کمبود می‌شود)

۴. برخی روابط سیستم‌های موجودی موردنظر در جدول شماره ۱ آمده‌است.

جدول شماره ۱: روابط سیستم‌های موجودی (r, Q) و (R, T) (Tersine, 1994)

سیستم سفارش‌دهی (R, T)	سیستم سفارش‌دهی (r, Q)
در حالت نرمال $SS = K \cdot \sigma_{L+T}$	در حالت نرمال $SS = K \cdot \sigma_L$
در حالت نرمال $\bar{b}(R) = \sigma_{L+T} \cdot G_U(K)$	در حالت نرمال $\bar{b}(R) = \sigma_L \cdot G_U(K)$
$I_{\max i} = R_i - \mu_{(L+T)i}$	$I_{\max i} = r_i - \mu_{Li} + Q_i$
$\bar{I} = SS + \frac{D \cdot T}{2}$	$\bar{I} = SS + \frac{Q}{2}$

توسعه مدل

به دلیل شباهت دو سیستم و تمایز تنها در تابع هزینه ابتدا مدل (r, Q) توسعه یافته و سپس

مدل (R, T) توسعه می‌یابد.

اهداف مدل: شامل دو هدف کمینه کردن هزینه و کمینه کردن سطح خطر است در مورد مدل (r, Q) هدف هزینه همان رابطه (۱) است که در حالت تقاضای پس‌افت و به صورت چند کالایی به صورت ذیل خواهد بود:

$$Z_1 : \sum_{i=1}^n h_i SS_i + \frac{\pi_i D_i}{Q_i} \bar{b}(r_i) \quad (۴)$$

$$SS_i = r_i - \mu_{Li} \quad \text{جایی که: (۵)}$$

در مورد هدف دوم با در نظر گرفتن این مفهوم که در یک سیستم موجودی سطح خطر زمانی بیش از صفر است که تقاضای کالا فراتر از نقطه سفارش باشد، داریم:

$$\text{Min} : P(D_L > r) = P\left(\frac{D_L - \mu_L}{\sigma_L} > \frac{r - \mu_L}{\sigma_L}\right) \quad (۶)$$

محدودیت‌های مدل: مدل توسعه یافته دارای چهار محدودیت ذیل است:

۱،۲،۴ بودجه در دسترس برای ذخیره اطمینان ذخیره اطمینان تفاضل نقطه سفارش و میانگین تقاضا می‌باشد و نیز ارتباط مستقیم با نقطه سفارش دارد. این محدودیت شامل حداکثر بودجه‌ای است که جهت نگهداری ذخیره اطمینان مورد نظر است و به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\sum_{i=1}^n SS_i . PC_i \leq B \quad (۷)$$

تعداد کمبود مجاز: در این محدودیت مدیریت براساس تجارب قبلی و نیز میزان عرضه هر نوع کالا و یا قدرت تأمین، به یک مقدار مشخصی از آن کالا رسیده‌است که کمبود نباید فراتر از آن رود. این رابطه با توجه به احتمالی بودن تقاضا براساس میانگین کمبود در نظر گرفته می‌شود که به صورت روبروست.

$$\bar{b}_i \leq N_i \quad (۸)$$

فضای انبار: با توجه به اینکه فضای انبار در هر کارخانه با محدودیت روبروست، در این محدودیت این فضا با نماد A نشان داده شده و براساس میزان فضای اشغال توسط هر کالا در حالت بیشینه موجودی به شکل زیر بیان می شود:

$$\sum_{i=1}^n a_i I_{\max_i} \leq A \quad (9)$$

حداقل سطح عملکرد: سطح عملکرد یا خدمت، احتمالی است که میزان تقاضا بیشتر از نقطه سفارش نباشد و یا به عبارتی دیگر کمتر و مساوی آن باشد. برای این محدودیت یک مقدار حداقل در نظر گرفته شده است که احتمال عملکرد باید بیشتر از آن باشد و به صورت زیر است:

$$P(D_{Li} \leq r_i) \geq P_{0i} \quad (10)$$

$$(11)$$

$$\text{Min} : Z_1 : \sum_{i=1}^n h_i SS_i + \frac{\pi_i \cdot D_i}{Q_i} \bar{b}(r_i)$$

$$\text{Min} : Z_2 : P_i (D_{Li} > r_i)$$

Subject to :

$$\sum_{i=1}^n SS_i \cdot PC_i \leq B$$

$$\bar{b}_i \leq N_i$$

$$\sum_{i=1}^n a_i I_{\max_i} \leq A$$

$$P(D_{Li} \leq r_i) \geq P_{0i}, \quad r_i \geq 0$$

با توجه به اهداف و محدودیت های ذکر شده، ابتدا مدل قطعی چند کالایی (r, Q) به صورت روبرو خواهد بود. با توجه به مدل حاصل شده، نمی توان این مدل را به طور مستقیم استفاده نمود به طوری که با توجه به اینکه تابع تقاضا نرمال است می بایستی تغییراتی در این

مدل صورت پذیرد و روابطی دیگر برای تسهیل محاسبه جایگزین گردد به طوری که میزان کمبود و نیز سطح خطر فرموله گردد. بدین منظور پیمودن دو گام زیر ضروری است:

گام ۱

از آنجا که متوسط میزان کمبود حاصل ضرب انحراف معیار و انتگرال تابع چگالی نرمال در بازه $[k, +\infty)$ است: (۱۲) $\bar{b}(r) = \sigma G_u(k)$ در جایی که: (۱۳) $k = \frac{r - \mu}{\sigma}$ و انتگرال مورد نظر برابر:

$$G_u(k) = \int_k^{+\infty} (u - k) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \quad (۱۴)$$

می‌باشد. با توجه به اینکه $(u - k) = \frac{1}{\sigma}$ و در حالت نرمال $\sigma = 1$ می‌باشد، در نتیجه $u = k + 1$ و اگر $du = dk$ باشد در مورد انتگرال فوق خواهیم داشت:

$$G_u(k) = \int_k^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(k+1)^2}{2}\right) dk \quad (۱۵)$$

چون $G_u(k)$ انتگرال تابع چگالی نرمال در بازه $[k, +\infty)$ بوده و جزء توابعی است که پادمشتق‌هایشان فرمول ساده‌ای ندارند می‌توان با استفاده از قواعد تقریب میزان آنرا به صورت تابعی از k به دست آورد. به طوری که در حد بالا به جای $(+\infty)$ از یک عدد بزرگ فرضی با نام E استفاده می‌کنیم تا بتوان از روش‌های تقریب انتگرال‌های معین استفاده نمود. برای تقریب انتگرال $f(x)$ در بازه $[a, b]$ برابر: (۱۶) $\int_a^b f(x) dx$ است. با استفاده از قاعده سیمپسون (اشیگل، ۱۳۶۷؛ توماس و فینی، ۱۳۷۸) داریم:

$$S = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \quad (۱۷)$$

درجایی که: (۱۸) $h = \frac{b-a}{n}$ و n تعداد بازه هاست که می‌بایست زوج باشد و h طول هر بازه است. در معادله فوق لها مقادیر $y=f(x)$ در نقاط $[a, x_1 = a+h, x_2 = a+2h, \dots, x_{n-1} = a+(n-1)h, b]$ هستند. بنابراین تقریب انتگرال موردنظر در بازه $[k, E]$ در حالت کلی به صورت زیر خواهد بود:

(۱۹)

$$S(r) = \frac{E-k}{3n} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(k+1)^2}{2}\right) + 4\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(k+h+1)^2}{2}\right)\right) + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(k+2h+1)^2}{2}\right)\right) + \dots + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(k+(n-2)h+1)^2}{2}\right)\right) + 4\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(k+(n-1)h+1)^2}{2}\right)\right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(E+1)^2}{2}\right) \right)$$

درجایی که

$$k_i = \frac{r_i - \mu_{ii}}{\sigma_{ii}} \quad (20)$$

در نتیجه

$$GU(k) \cong S(r) \Rightarrow \bar{b}(r) = \sigma_L S(r) \quad (21)$$

با توجه به اینکه با استفاده از الگوریتم مذکور با هر جفت (E, n) انتخابی نمی‌توان به تقریب مناسب و نزدیکی برای $G_u(k)$ دست یافت؛ لذا با توجه به جدول مقادیر $G_u(k)$ [۲۸] و تولید داده‌های متعدد با استفاده از نرم‌افزار مطلب و به کارگیری نرم‌افزار آماری سس به یک رابطه درجه دوم بین E و n (با $R^2 = 0.94$) دست یافتیم که تقریب نسبتاً نزدیکی از مقدار $G_u(k)$ را حاصل می‌سازد:

$$E = 8.802453n - 0.1904682n^2 \quad (22)$$

گام ۲

در یک سیستم موجودی که تقاضا احتمالی است، سطح خطر احتمالی است که میزان تقاضا فراتر از نقطه سفارش باشد؛ بدین مفهوم که ما با کمبود مواجه هستیم به عبارت دیگر احتمال بروز کمبود در مورد هر کالا است. برای کمینه کردن سطح خطر داریم:

$$\text{Min} : P(D_L > r) = P\left(\frac{D_L - \mu_L}{\sigma_L} > \frac{r - \mu_L}{\sigma_L}\right) \quad (23)$$

با توجه به اینکه سطح خطر و سطح خدمت یک عدد احتمالی است و این دو مفهوم مکمل یکدیگرند و با یکدیگر رابطه معکوس دارند:

$$\text{سطح خدمت} = 1 - (\text{سطح خطر})$$

و چون سطح خدمت مساحت زیر منحنی نرمال بوده و رابطه مستقیم با k دارد تابع هدف به صورت زیر تبدیل می‌گردد:

$$\text{Max} : k_i = \frac{r_i - \mu_{Li}}{\sigma_{Li}} \quad (24)$$

در نتیجه مدل قطعی (r, Q) با توجه به تغییرات اشاره شده و جایگزینی روابط مذکور به صورت زیر خواهد بود.

$$\text{Min} : Z_1 = \sum_{i=1}^n h_i (r_i - \mu_{Li}) + \frac{\pi_i \cdot D_i}{Q_i} \cdot \sigma_{Li} \cdot S(r_i)$$

$$\text{Max} : Z_2 = \sum_{i=1}^n k_i = \sum_{i=1}^n \frac{r_i - \mu_{Li}}{\sigma_{Li}}$$

Subject to :

$$\sum_{i=1}^n (r_i - \mu_{Li}) \cdot PC_i \leq B \quad (25)$$

$$\sigma_{Li} \cdot S(r_i) \leq N_i$$

$$a_i (r_i - \mu_{Li} + Q_i) \leq A$$

$$\frac{r_i - \mu_{Li}}{\sigma_{Li}} \geq Z_{P0i} \quad , \quad r_i \geq 0$$

مدل احتمالی - فازی

در این بخش برای توسعه مدل در فضای فازی و احتمالی میزان بودجه در دسترس و حداکثر کمبود مجاز به صورت یک عدد فازی مثالی در نظر گرفته شده و به ترتیب با نمادهای \tilde{N}_i و \tilde{B} نشان داده می شود. فضای ائبار یک پارامتر احتمالی نرمال با میانگین فازی \tilde{m}_A و واریانس فازی $\tilde{\sigma}_A^2$ در نظر گرفته شده

$$\tilde{A} \sim N(\tilde{m}_A, \tilde{\sigma}_A^2) \quad (26)$$

و حداقل احتمال مجاز بر آن نیز یک عدد فازی با نماد \tilde{P}_A می باشد. با توجه به مفروضات بالا مدل احتمالی - فازی (r, Q) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \text{Min} : Z_1 &= \sum_{i=1}^n h_i (r_i - \mu_{Li}) + \frac{\pi_i \cdot D_i}{Q_i} \cdot \sigma_{Li} \cdot S(r_i) \\ \text{Max} : Z_2 &= \sum_{i=1}^n k_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{r_i - \mu_{Li}}{\sigma_{Li}} \right) \\ \text{St} : \\ \sum_{i=1}^n (r_i - \mu_{Li}) \cdot PC_i &\leq \tilde{B} \\ \sigma_{Li} \cdot S(r_i) &\leq \tilde{N}_i \\ \tilde{P}(a_i \cdot (r_i - \mu_{Li} + Q_i) \leq \tilde{A} \approx N(\tilde{m}_A, \tilde{\sigma}_A^2)) &\geq \tilde{P}_A \\ \frac{r_i - \mu_{Li}}{\sigma_{Li}} &\geq Z_{P0i}, \quad r_i \geq 0 \end{aligned} \quad (27)$$

با توجه به مراحل فوق که در توسعه مدل (r, Q) به کار رفت در توسعه مدل (R, T) تمامی روابط برقرار است فقط r به R ، L به $L+T$ ، $\frac{D}{Q}$ به T ، بیشینه موجودی براساس مدل مذکور و تابع هزینه تغییر خواهد یافت. با توجه به اینکه $S(R)$ تقریب متوسط کمبود در مدل مورد نظر می باشد مدل قطعی (R, T) به صورت زیر است:

$$\text{Min} : Z_1 : \sum_{i=1}^n K_i(R, T) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i} (A'_i + j_i) h_i \bar{I}_i \cdot \frac{\pi_i}{T_i} \cdot \sigma_{(L+T)i} S(R_i)$$

$$\text{Max} : Z_2 = \sum_{i=1}^n k_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{R_i - \mu_{(L+T)i}}{\sigma_{(L+T)i}} \right)$$

Subject to:

$$\sum_{i=1}^n (R_i - \mu_{(L+T)i}) \cdot PC_i \leq B \quad (28)$$

$$\sigma_{ii} S(R_i) \leq N_i$$

$$\sum_{i=1}^n a_i (R_i - \mu_{(L+T)i} + D_i T_i) \leq A$$

$$\frac{R_i - \mu_{(L+T)i}}{\sigma_{(L+T)i}} \geq Z_{P0i} \quad , \quad R_i \geq 0$$

و مدل احتمالی فازی کنترل موجودی (R, T) به شکل زیر است:

$$\text{Min} : Z_1 : \sum_{i=1}^n K_i(R, T) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i} (A'_i + j_i) h_i \bar{I}_i \cdot \frac{\pi_i}{T_i} \cdot \sigma_{(L+T)i} S(R_i)$$

$$\text{Max} : Z_2 = \sum_{i=1}^n k_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{R_i - \mu_{(L+T)i}}{\sigma_{(L+T)i}} \right)$$

Subject to:

$$\sum_{i=1}^n (R_i - \mu_{(L+T)i}) \cdot PC_i \leq \tilde{B} \quad (29)$$

$$\sigma_{ii} S(R_i) \leq \tilde{N}_i$$

$$\tilde{P}(a_i \cdot (R_i - \mu_{(L+T)i} + D_i T_i) \leq \tilde{A} \approx N(\tilde{m}_A, \tilde{\sigma}_A^2)) \geq \tilde{P}_A$$

$$\frac{R_i - \mu_{(L+T)i}}{\sigma_{(L+T)i}} \geq Z_{P0i} \quad , \quad R_i \geq 0$$

متدولوژی حل

برای حل مدل‌های احتمالی-فازی توسعه یافته ابتدا می‌بایست مدل مذکور به یک مدل قطعی مبدل گشته و سپس با استفاده از یکی از تکنیک‌های حل برنامه‌ریزی چندهدفه حل گردد که مراحل حل مدل به صورت زیر است:

گام اول: نافازی‌سازی محدودیت‌های فازی

اگر یک مدل برنامه‌ریزی به شکل زیر باشد [۱۸]:

$$\begin{aligned} \text{Max } : Z &= \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ \text{s.t. } : \sum_{i=1}^n (s_{ij}, l_{ij}, r_{ij}) x_{ij} &\leq (t_i, u_i, v_i) \\ (j \in N_n), (i \in N_m), x &\geq 0 \end{aligned} \quad (30)$$

در جایی که در عدد فازی مورد نظر از سمت چپ عدد اول عدد میانه با درجه عضویت یک ($\mu = 1$)، عدد دوم فاصله عدد اول تا کران چپ و عدد سوم فاصله عدد اول تا کران راست باشد، برای حل مدل و نافازی‌سازی محدودیت‌ها داریم:

$$\begin{aligned} \text{Max } : Z &= \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ \text{s.t. } : \sum_{i=1, j=1}^n s_{ij} x_j &\leq t_i \\ \sum_{i=1}^n (s_{ij} - l_{ij}) x_{ij} &\leq t_i - u_i \\ \sum_{i=1}^n (s_{ij} - r_{ij}) x_i &\leq t_i - v_i, x_i \geq 0 \end{aligned} \quad (31)$$

گام دوم: تبدیل محدودیت احتمالی - فازی به یک محدودیت قطعی

برنامه‌ریزی محدودیت‌های احتمالی فازی [۲۱]

یک مسئله برنامه‌ریزی محدودیت‌های احتمالی (CCP) دقیق نوعی از برنامه‌ریزی

احتمالی است که به شکل زیر است:

$$\text{Minimize } \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Subject to:

$$P\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i\right) \geq P_i \quad (32)$$

$$\sum_{j=1}^n b_{kj} x_j \geq h_k, k \neq i$$

$$i = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, k, 0 \leq P_i \leq 1, x_j \in R$$

جایی که حداقل یکی از b_i, a_{ij}, c_j ها یک متغیر تصادفی هستند. حالت خاص محدودیت انبار در این مطالعه، حالتی است که b_i ها متغیرهای تصادفی فازی هستند. فرض می‌کنیم مقادیر سمت راست محدودیت نام یک متغیر تصادفی فازی (FRV) است و به صورت \tilde{b}_i نشان داده می‌شود. یک متغیر تصادفی فازی یک تابع اندازه‌گیری از فضای احتمالی با مجموعه اعداد فازی است [۲۱]. با توجه به این حالت خاص محدودیت نام این مسئله CCP به صورت روبروست:

$$\tilde{P}\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq \tilde{b}_i\right) \geq \tilde{P}_i, a_{ij} \in R \quad (33)$$

\tilde{b}_i یک متغیر تصادفی فازی با توزیع نرمال است، که میانگین و واریانس آن‌ها اعداد

فازی \tilde{m}_{bi} و $\tilde{\sigma}_{bi}$ هستند $-\alpha$ برش دو پارامتر مذکور به قرار زیر است:

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{bi}[\alpha] &= [m_{bi^*}(\alpha), \tilde{m}_{bi^*}(\alpha)], \tilde{\sigma}_{bi}^2[\alpha] \\ &= [\sigma_{bi^*}^2(\alpha), \sigma_{bi^*}^{2*}(\alpha)], \tilde{P}_i[\alpha] = [P_{i^*}(\alpha), P_{i^*}^*(\alpha)] \end{aligned} \quad (34)$$

قضیه: اگر \tilde{b}_i یک متغیر تصادفی فازی (FRV) با توزیع نرمال باشد نامساوی مذکور برابر است با:

$$F\left(\frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - m_{bi^*}(\alpha)}{\sigma_{bi^*}(\alpha)}\right) \leq 1 - P_{i^*}^*(\alpha) \quad (35)$$

برای هر یک از $\alpha \in [0, 1]$ ، جایی که F تابع توزیع تجمعی نرمال با پارامترهای $N(0, 1)$ می‌باشد. در نتیجه CCP دقیق برای هر $\alpha \in [0, 1]$ به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ & 1 - F\left(\frac{h_i - m_{bi^*}(\alpha)}{\sigma_{bi^*}(\alpha)}\right) \geq P_{i^*}^*(\alpha) \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n b_{kj} x_j \geq h_k, k \neq i \\ & i = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, k, 0 \leq P_{i^*} \leq 1, x_j \in R \end{aligned}$$

این مسئله می‌تواند با به کارگیری روش برنامه‌ریزی احتمالی حل گردد.

گام سوم: حل مسئله برنامه‌ریزی چندهدفه قطعی

در این مرحله مدل احتمالی - فازی تبدیل به یک مسئله قطعی چندهدفه شده‌است و باید با استفاده از یکی از روش‌های حل برنامه‌ریزی چندهدفه به جواب رسید که در اینجا از روش منطق فازی استفاده می‌گردد.

روش منطق فازی برای حل یک مسئله تصمیم‌گیری چندهدفه (MODM) [۳۲]
یک مسئله تصمیم‌گیری چندهدفه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Max} : Z &= f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), i = 1, 2, \dots, k \\ \text{Subject to:} & \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq b_i, i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (37)$$

به طوری که n تعداد متغیرها، m تعداد محدودیت‌ها، k تعداد توابع هدف است. بدین جهت ابتدا مقادیر بیشینه و کمینه هر یک از اهداف تعیین شده را محاسبه کرده جدول ۲ را تشکیل می‌دهیم و سپس با تعیین درجه عضویت هر یک از اهداف میزان α که همان درجه تحقق اهداف است به دست می‌آید. سپس جدول ۲ را تشکیل می‌دهیم. در جدول ۲، U_i بهترین مقدار و L_i بدترین مقدار و Δ_i تلورانس تابع i ام می‌باشد.

$$\Delta_i = U_i - L_i \quad (38)$$

این مقادیر در مورد هر یک از توابع هدف به صورت شکل ۱ است.

$$\mu(Z_i) = \begin{cases} 0, & \text{where } : Z_i \leq L_i \\ \frac{Z_i - L_i}{U_i - L_i}, & \text{where } : L_i \leq Z_i \leq U_i \\ 1, & \text{where } : Z_i \geq U_i \end{cases} \quad (39)$$

$$\alpha = \text{Min}(\mu(Z_1), \mu(Z_2), \dots, \mu(Z_k)) \quad (40)$$

$$\alpha \leq \mu(Z_i), i = 1, 2, \dots, k \quad (41)$$

$$\Rightarrow \text{Max} : \alpha$$

$$\text{St} : \alpha \leq \mu(Z_i), i = 1, 2, \dots, k \quad (42)$$

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m$$

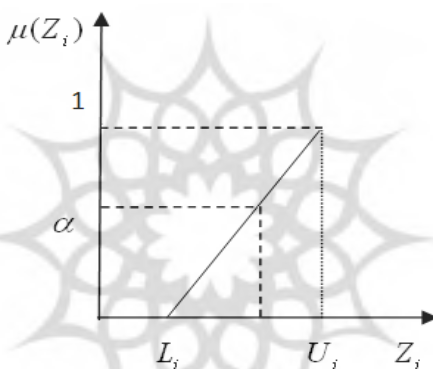
$$\Rightarrow \alpha \leq \mu(Z_i) = \alpha \leq \frac{Z_i - L_i}{U_i - L_i} \quad (43)$$

$$\Rightarrow Z_i \geq U_i - \Delta_i(1 - \alpha)$$

جدول شماره ۲: محاسبه مقادیر و متغیرهای توابع هدف

	Z_1	$Z_2 \dots\dots\dots Z_k$	X_1, X_2, \dots, X_n
$Maz : Z_1$	⋮	-----	-----
$Maz : Z_2$		-----	-----
$Maz : Z_k$		-----	-----
(L_i, U_i)	(L_1, U_1)	$(L_2, U_2) \dots (L_k, U_k)$	

پس از آن درجه عضویت تابع Z_i را به صورت زیر تعریف می کنیم:



شکل ۱: تابع عضویت (Z_i)

در این روابط α درصدی است که اهداف به حالت بهینه خود رسیده اند. در صورتی که α ها یکسان نباشند خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 &Max : \sum \alpha_i \\
 &\alpha_i \leq \mu(Z_i), i = 1, 2, \dots, k
 \end{aligned}
 \tag{۴۴}$$

در ادامه به ذکر یک مثال عددی جهت به کارگیری مدل وحل آن می پردازیم.

مثال عددی

اطلاعات زیر در مورد دو کالا در دسترس است اگر تصمیم گیرنده از روش میزان سفارش ثابت (r, Q) استفاده نماید با توجه به دو هدف کمینه‌سازی هزینه و سطح خطر میزان نقطه سفارش در مورد هر کالا چگونه است؟

$P_{01} = 0.85$	$D_1 = 24000$	$D_{L2} \sim N(435, 48^2)$	$N_1 = (110, 125, 130)$
$D_{L1} \sim N(5150, 170^2)$	$Q_1 = 4500$	$\tilde{P}_A = (0.83, 0.85, 1)$	$Q_2 = 350$
$\pi_1 = 6.2$	$PC_1 = 200$	$a_1 = 85$	$h_1 = 50$
$a_1 = 120$	$\tilde{N}_2 = (45, 50, 54)$	$D_2 = 2500$	$h_2 = 63$
$\pi_2 = 6.7$	$PC_2 = 550$	$\tilde{A} \sim N((750000, 800000, 875000), (10000, 12500, 13000)^2)$	
$\tilde{B} = (950000, 1000000, 1250000)$			

با توجه به اطلاعات مسئله مدل مذکور به صورت زیر خواهد بود:

$$\text{Min} : Z_1 = 50(r_1 - 5150) + 63(r_2 - 435) + \frac{6.2 * 24000}{4500} * 170S_{r1} + \frac{6.7 * 2500}{350} * 48S_{r2}$$

$$\text{Min} : Z_2 = -\left(\frac{r_1 - 5150}{170} + \frac{r_2 - 435}{48}\right)$$

s.t :

$$200(r_1 - 5150) + 550(r_2 - 435) \leq (950000, 1000000, 1200000)$$

$$170S_{r1} \leq (110, 125, 130)$$

$$48S_{r2} \leq (45, 50, 54)$$

$$\frac{r_1 - 5150}{170} \geq 1.04$$

$$\frac{r_2 - 435}{48} \geq 1.28$$

$$\tilde{P}\left(\left(85(r_1 - 5150) + \frac{4500}{2}\right) + \left(120(r_2 - 435) + \frac{350}{2}\right)\right) \leq \tilde{A} \approx N((750000, 800000, 875000),$$

$$(10000, 12500, 13000)^2) \geq (0.83, 0.85, 1) \quad , \quad r_i \geq 0$$

با استفاده از روش نافازی سازی مذکور و روش برنامه ریزی محدودیت های احتمالی فازی (FCPP) مدل به صورت قطعی در خواهد آمد. در مورد محدودیت احتمالی - فازی انبار داریم:

$$\tilde{\sigma}_b^2[\alpha] = [10000 + 2500\alpha, 13000 - 500\alpha]$$

$$\tilde{\sigma}_b^2 = (10000, 12500, 13000)$$

$$\tilde{P}_A[\alpha] = [0.83 + 0.02\alpha, 1 - 0.15\alpha]$$

$$h = 85r_1 + 120r_2 - 277700$$

$$\tilde{P}(h \leq \tilde{b})[\alpha] = \left[1 - F\left(\frac{h - m_{b^*}}{\sigma_{b^*}}\right), 1 - F\left(\frac{h - m^*}{\sigma_b^*}\right) \right]$$

$$1 - F\left(\frac{h - m_{b^*}}{\sigma_{b^*}}\right) \geq 1 - 0.15\alpha$$

اگر $\alpha = 0.7$ در نظر بگیریم:

$$1 - F\left(\frac{85r_1 + 120r_2 - 277700 - 750000 - 50000\alpha}{\sqrt{10000 + 2500\alpha}}\right) \geq 1 - 0.15\alpha$$

$$1 - F\left(\frac{85r_1 + 120r_2 - 277700 - 750000 - 35000}{\sqrt{10000 + 1750}}\right) \geq 0.895$$

$$\left(\frac{85r_1 + 120r_2 - 277700 - 750000 - 35000}{\sqrt{11750}}\right) \leq F^{-1}(0.895)$$

$$85r_1 + 120r_2 - 1062700 \leq 1.25\sqrt{11750}$$

$$\Rightarrow 85r_1 + 120r_2 \leq 1062835.5$$

در نهایت مدل قطعی چندهدفه به صورت زیر خواهد بود:

$$\text{Min} : Z_1 = 50(r_1 - 5150) + 63(r_2 - 435) + \frac{6.2 * 24000}{4500} * 170S_{r_1} + \frac{6.7 * 2500}{350} * 48S_{r_2}$$

$$\text{Min} : Z_2 = -\left(\frac{r_1 - 5150}{170} + \frac{r_2 - 435}{48}\right)$$

s t :

$$200(r_1 - 5150) + 550(r_2 - 435) \leq 950000$$

$$200(r_1 - 5150) + 550(r_2 - 435) \leq 1000000$$

$$200(r_1 - 5150) + 550(r_2 - 435) \leq 1200000$$

$$170S_{r_1} \leq 110$$

$$170S_{r_1} \leq 125$$

$$170S_{r_2} \leq 130$$

$$48S_{r_2} \leq 45$$

$$48S_{r_2} \leq 50$$

$$48S_{r_2} \leq 54$$

$$\frac{r_1 - 5150}{170} \geq 1.04$$

$$\frac{r_2 - 435}{48} \geq 1.28$$

$$85r_1 + 120r_2 \leq 1062835.5, \quad r_i \geq 0$$

حال یک مسئله برنامه‌ریزی چندهدفه قطعی داریم که با استفاده از منطق فازی آن راحل می‌کنیم که محاسبه بیشینه و کمینه هر یک از اهداف در جدول شماره ۳ آمده است:

جدول شماره ۳- نتایج حل مدل چندهدفه قطعی

	Z1	Z2	r1	r2
Z1	352291	6.45	5709.927	586.5172
Z2	359493.1	8	5830	627

با توجه به جدول فوق توابع عضویت اهداف مورد نظر به صورت زیر خواهد بود:

$$\mu(Z_1) = \begin{cases} 0, \text{where } : Z_1 \geq 359493.1 \\ \frac{359493.1 - Z_1}{359493.1 - 352291}, & \text{where } 352291 \leq Z_1 \leq 35943.1 \\ 1, \text{where } : Z_1 \leq 352291 \end{cases}$$

$$\mu(Z_2) = \begin{cases} 0, \text{where } : Z_2 \leq 6.45 \\ \frac{Z_2 - 6.45}{8 - 6.45}, & \text{where } 6.45 \leq Z_2 \leq 8 \\ 1, \text{where } : Z_2 \geq 8 \end{cases}$$

در نتیجه مدل نهایی به صورت زیر در خواهد آمد:

Max : α

s.t :

$$Z_1 \leq 352291 + (7202)(1 - \alpha)$$

$$Z_2 \geq 8 - (1.55)(1 - \alpha)$$

$$200(r_1 - 5150) + 550(r_2 - 435) \leq 950000$$

$$200(r_1 - 5150) + 550(r_2 - 435) \leq 1000000$$

$$200(r_1 - 5150) + 550(r_2 - 435) \leq 1200000$$

$$170S_{r_1} \leq 110$$

$$170S_{r_1} \leq 125$$

$$170S_{r_2} \leq 130$$

$$48S_{r_2} \leq 45$$

$$48S_{r_2} \leq 50$$

$$48S_{r_2} \leq 54$$

$$\frac{r_1 - 5150}{170} \geq 1.04$$

$$\frac{r_2 - 435}{48} \geq 1.28$$

$$85r_1 + 120r_2 \leq 1062835.5, \quad r_i \geq 0$$

مدل نهایی با استفاده از نرم افزار لینگو ۸ حل شد که نتیجه حل مدل فوق به قرار زیر است:

$$\alpha = 63.17\%, \quad r_1 = 5732.691, \quad r_2 = 627$$

$$Z_1 = 354934.1$$

$$Z_2 = 7.429$$

$$K_1 = \frac{5732.961 - 5150}{170} = 3.42 \Rightarrow \Phi(3.42) = 0.9997$$

$$K_2 = \frac{627 - 435}{48} = 4 \Rightarrow \Phi(4) \cong 1$$

در تفسیر جواب‌های حاصل لازم است بیان شود که میزان α برابر ۶۳/۱۷ درصد است بدان معنی که هر دو هدف کمینه‌سازی هزینه و نیز سطح خطر به اندازه ۶۳/۱۷ درصد از بهترین حالت خود تحقق یافته‌اند و نقطه سفارش بهینه در مورد کالای اول و دوم به ترتیب ۵۷۳۲/۶۹۱ و ۶۲۷ واحد است. در مورد متغیر k لازم به توضیح است که براساس عدد حاصل می‌بایستی با استفاده از جدول نرمال به میزان سطح عملکرد برسیم. به طوری که در مورد کالای اول سطح عملکرد برابر ۹۹/۹۹ یعنی سطح خطر ۱ درصد داریم و در مورد کالای دوم سطح عملکرد به سطح کامل یعنی ۱۰۰ درصد رسیده و سطح خطر برابر صفر خواهد بود.

نتیجه‌گیری و تحقیقات آتی

در این مقاله دو مدل سنتی کنترل موجودی (r, Q) و (R, T) با دو هدف کمینه‌سازی هزینه‌ها و سطح خطر و محدودیت‌های بودجه‌ای، فضای انبار، تعداد کمبود مجاز و حداقل سطح عملکرد مجاز توسعه یافت که برخی پارامترها به صورت فازی در نظر گرفته شده‌بود. محدودیت انبار در فضای احتمالی - فازی بیان گردید که با استفاده از روش بر نامه‌ریزی محدودیت‌های احتمالی فازی به یک محدودیت قطعی تبدیل یافت و در نهایت مدل چندهدفه قطعی با روش منطق فازی حل گردید. در تحقیقات آتی می‌توان مفروضات متفاوتی را به مسئله اضافه نمود، از توابع دیگری همچون نمایی و... در مورد توزیع تقاضا و فضای انبار استفاده نمود، می‌توان اهداف و محدودیت‌های دیگری را در نظر گرفت، به جای فازی مثلثی از دوزنقه‌ای استفاده نمود، پارامترهای دیگری را به صورت فازی در نظر گرفت، از روش‌های تقریب دیگری همچون دوزنقه‌ای جهت برآورد تابع $G_{ii}(k)$ استفاده نمود.

منابع

- اشپیگل، ام (۱۳۶۷). حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته. مترجمین: خلیل پاریاب، حمید کولائی، بیژن شمس. انتشارات مترجم، چاپ اول.
- توماس، جورج و فینی، راس (۱۳۷۸). حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی جلد اول. مترجمین: مهدی بهزاد، سیامک کاظمی، علی کافی. مرکز نشر دانشگاهی تهران، چاپ هشتم.
- سرفراز، امیر همایون (۱۳۸۴). توسعه مدل‌های EOQ و EPQ در محیط فازی. رساله دکتری تخصصی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات.
- Abou-El-Ata, MO & Kotb, KAM (1997). "Multi-item inventory model with varying holding cost under two restrictions : A geometric programming approach ". *production planning and control*.
- Balkhi ,Zt & Benkherof , L(1998). "A production lot size inventory model for deteriorating items and arbitrary production and demand rates ". *European journal of operation research*;92:302-9.
- Ben-daya,M & Raouf ,A(1993). "On the constrained multi-item single-period inventory problem" *International journal of general system*; 13:104-12
- Bhunja,Ak & Maiti,M (1997). "Deterministic inventory models for variable production" . *Journal of operational research society* ; 48:221-4.
- Cheng ,Tce.(1989). "An Economic Order Quantity model with demand-dependent unit cost". *European journal of operation research*;40:452-6.
- Cheng ,Tce. (1991). "An Economic Order Quantity model with demand-dependent unit production cost and imperfect production process". *IIE transactions* ; 23:23-7.
- Chu,C.W & Patuwo,B.E & Mehrez,A.Robinowitz(1999). "A dynamic two-segment partial backorder control of (r,Q) inventory system". *Computers & Operation Research*, 28, 935-953.
- Churchman ,CW & Ackoff ,RL & Arnoff EL(1957). "Introduction to operation research". New York :Wiely,603-8.
- Clark , Aj(1972). "An informal survey of multi-echelon inventory theory". *Naval research logistics quarterly* ;19:621-50.
- Das,k & Roy,T.K & Maiti,M (2004). "Multi-item stochastic and fuzzy-stochastic inventory models under two restrictions". *Computer and operation research journal*. 31: 1793-1806.

Eynan, Amit & Kropp, Dean. H. (2006). "Effective and simple EOQ-like solutions for stochastic demand periodic review systems". *European Journal of Operation Research*. Article in press.

Goswami, A & Chaudhuri, K. S. (1991). "An EOQ model for deteriorating items with shortages and a linear trend in demand". *Journal of operational research society*; 42:1105-10.

Hadely, G & Whitin, T. M. (1963). "Analysis of inventory systems". Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Hariga, M. A. (1999). "A stochastic inventory model with lead time and lot size interaction". *Production planning & control*, vol. 10, No. 5, 434-438.

Kilic, Gorge J & Yuan, Bo (2001). "Fuzzy sets and fuzzy logic theory and applications". Prentice-Hall of India. New Dehli.

Manas. Kumar & Maiti, Manoranjan (2005). "Fuzzy inventory model with two warehouses under possibility constraints". *Fuzzy Sets and systems* 157, 52-73.

Naddor, E. (1986). "Inventory systems". New York: Wiley.

Nanda, S & Panda, G & Dash, J. K. (2006). "A new solution method for fuzzy chance constrained programming problem". *Fuzzy Optim Decision Making*. 5:355-370.

Nielsen, Christina & Larsen, Christian (2004). "An analytical study of Q(s,S) policy applied to the joint replenishment problem". *European Journal of Operation Research* 163, 721-732.

Ouayang, Liang-Yuh & Chang, Hung-Chi (2001). "The variable lead time stochastic inventory model with a fuzzy backorder rate". *Journal of the operation research, Society of japan*, vol. 44, No. 1.

Ouyang, Liang-yuh & Wu, Kun-Shan & Ho, Chia-Huei (2003). "Integrated vendor-buyer cooperative models with stochastic demand in controllable lead time". *Int. J. Production Economics* 92., 255-266.

Raymond, Fe (1931). "Quality and economic in manufacture". New York McGraw-Hill Book Co.

Sarfaraz, A. H & Alizadeh Noghani, S & Sadjadi, S. J & Aryanezhad, M. B. (2006). "A multi-objective inventory model for deteriorating items with backorder and cost dependent demand". *Journal of International Engineering International*. Vol. 2, No. 1, 65-73.

Silver, Ea & Peterson, R. (1985). "Decision systems for inventory management and production planning". New York: Wiley.

Tersine,R.J (1994)."*Principles of inventory and materials management*", Prentice Hal publications.

Wu,Kun-Shan (2001)."A mixed inventory model with variable lead time and random supplier capacity".*Production planning & control*, vol.12,No.4,353-361.

Yadvalli, V.s.s & Jeeva.M & Rajalakshmi, Rajagopalan (2005)."Multi Item deterministic Fuzzy inventory Model". *Asia-Pacific Journal of Operation Reaserch*. Vol.22, No.3 ,287-295.

Yauhua, Frank Chen, (2005). "Fractional programming approach to two stochastic inventory problems ". *European journal of operation research*.

Zimmerman H.J. (1996)."*Fuzzy sets and its applications*". Kluwer.Aademic Publisher.3.th edition.

