

پروژه منطق‌گرایی در ریاضیات: از بولتزانو تا راسل

غلامحسین مقدم حیدری*

چکیده

آموزه منطق‌گرایی عبارت است از فروکاستن مفاهیم و قضایای ریاضی به مفاهیم و قضایای منطقی. این آموزه که یکی از مکاتب مهم فلسفه ریاضی است، را نخستین بار برنارد بولتزانو صورت‌بندی کرد و سپس گوتلپ فرگه سعی کرد با ارائه نسخه جدیدی از منطق آن را ادامه دهد. در نهایت این آموزه را به صورت پروژه‌ای، برتراند راسل و آلفرد نورث وایتهد عملی کردند. در این مقاله نخست تلاش خواهیم کرد چگونگی تحول و تکوین این پروژه را از بولتزانو تا راسل بررسی کنیم. سپس با بررسی ضعف‌ها و قوت‌های آن، سعی خواهیم کرد به این پرسش پاسخ دهیم که آیا برنامه منطق‌گرایی رضایت‌بخش بود؟

کلیدواژه‌ها: منطق‌گرایی، این‌همانی، هم‌توانی، اصل متعارف بی‌نهایت، اصل متعارف انتخاب، اصل تحویل‌پذیری، نظریه انواع، نظریه انشقاق انواع، تعریف غیر اسنادی.

۱. مقدمه

گرچه کانت درباره ریاضیات آرای چندانی ندارد و نمی‌توان وی را یک فیلسوف ریاضی نامید، نظرات او در این حوزه تأثیر مهمی در نگرش ما به ماهیت ریاضیات داشته است. «مسئله کانت نشان‌دادن این بود که چگونه ریاضیات در عین این‌که معرفتی پیشینی است، هم‌چنان به طور جهان‌شمول و با قطعیتی غیر قابل‌خدشه برای تمامی تجارب ما قابل کاربرد است» (Shapiro, 2000: 77). کانت معتقد بود که امکان ریاضیات که ترکیبی پیشینی

* استادیار گروه فلسفه علم و فناوری، پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی gmheidari@gmail.com

تاریخ دریافت: ۱۳۹۱/۹/۷، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۱/۱۱/۱۱

است فقط بر حسب این نظریه که مکان و زمان شهودات پیشینی محض‌اند قابل تبیین است. برای مثال این قضیه را در نظر بگیرید: «ممکن است شکلی با سه خط مستقیم رسم کرد». این قضیه را نمی‌توان از تحلیل صرف مفاهیم خط مستقیم و عدد سه نتیجه گرفت، بلکه باید مثلث را ترسیم کرد و آن را به ذهن خود در شهود عرضه کنیم. ممکن نیست که چنین شهودی تجربی باشد، زیرا در این صورت نمی‌تواند قضیه‌ای ضروری نتیجه دهد؛ پس شهود باید پیشینی باشد. بنابراین مثلث نه شیئی فی‌نفسه است و نه صورت خیالی آن؛ شیء فی‌نفسه نیست، زیرا امور نفس‌الامری در نظر ما ظاهر نمی‌شوند و حتی اگر امکان شهود امور نفس‌الامری را تصدیق کنیم این شهود نمی‌تواند پیشینی باشد. شیء باید به ذهن ما در شهود پسینی عقلی عرضه شود، البته اگر چنین چیزی ممکن باشد.

همچنین نمی‌توان فرض کرد که مثلث صورت ذهنی یا تصور شیء فی‌نفسه است، زیرا قضایای ضروری‌ای که از ترسیم مثلث نتیجه می‌گیریم راجع به خود مثلث است؛ مثلاً می‌توانیم خواص مثلث متساوی‌الساقین را ثابت کنیم، ولی دلیلی نداریم بر این که آنچه ضرورتاً درباره‌ی تصویری صادق است درباره‌ی شیء فی‌نفسه هم صادق است. پس چگونه می‌توانیم در شهود اعیانی بسازیم که ما را قادر می‌کنند قضایای پیشینی ترکیبی را بیان کنیم؟ فقط در صورتی می‌توانیم این کار را بکنیم که در ما استعداد و قوه‌ی شهود پیشینی باشد که شرط کلی و ضروری امکان اعیان شهود خارجی است. به عبارت دیگر ریاضیات علم تحلیلی محض نیست که فقط معلوماتی درباره‌ی مضامین مفاهیم یا معانی الفاظ می‌دهد، بلکه معلومات پیشینی درباره‌ی متعلقات شهود خارجی است. اما این ممکن نیست مگر این که شهودات لازم برای ساختن ریاضیات همگی مبتنی بر شهودات پیشینی باشند که شرایط ضروری برای نفس‌امکان متعلقات شهود خارجی هستند. بنابراین «هندسه علمی است که خواص مکان را ترکیباً ولی به نحو پیشینی تعیین می‌کند» (کاپلستون، ۱۳۸۷: ۶/۸۲).

هندسه اقلیدسی مجموعه‌ای از قضایای ترکیبی پیشینی است درباره‌ی ساختار مکانی که به ادراک درمی‌آید. بنابراین اصول و قضایای این هندسه جزو حقایقی هستند که ما فقط بدان صورت جهان را ادراک می‌کنیم؛ «کانت اظهار کرد که یگانه تبیین همان است که اصول اقلیدس درباره‌ی چگونگی پردازش‌گری داده‌های حسی، داده‌هایی که فضای حقیقی را تشکیل می‌دهند، ارائه می‌دهد. فضای پردازش‌شده، فضای مطالعه‌شده در هندسه، تحت قلمرو اصول اقلیدس است، زیرا اصول اقلیدس همان اصولی هستند که فضا را تشکیل داده‌اند! ناتوانایی ما در تردید در اصول اقلیدس، انعکاسی از این حقیقت است که مغز ما

طوری ساخته شده که ما واقعاً قادر نیستیم درباره فضا به روش دیگری فکر کنیم (Trudeau, 1987: 113).

نظریه کانت درباره ریاضیات، انتقاداتی را به همراه داشت و همین انتقادات سبب بروز اندیشه‌هایی شد که به منطق‌گرایی ختم شد. از جمله مهم‌ترین منتقدان نگرش کانت می‌توان به بولتزانو و فرگه اشاره کرد.

۲. برنارد بولتزانو

برنارد بولتزانو (Bernard Bolzano) (۱۷۸۱-۱۸۴۸) ریاضی‌دان و منطق‌دان اهل پراگ بود. بولتزانو در کتاب *نظریه علم آموزه شهود محض کانت* را مورد نقد و بررسی قرار می‌دهد. کانت به دنبال مبنایی برای تشخیص صدق‌های پیشینی و تحلیلی بود. او معتقد بود که مبنای معیار صدق‌های تحلیلی «اصل عدم تناقض» است. بنابراین اگر بتوانیم نشان دهیم نقیض یک گزاره مستلزم تناقض منطقی است در این صورت گزاره مزبور تحلیلی خواهد بود، اما چنین استدلالی برای صدق‌های ترکیبی برقرار نیست. صدق‌های گزاره‌های ترکیبی پسینی از تجربه به دست می‌آید، اما صدق‌های گزاره‌های ترکیبی پیشینی فقط به کمک «شهود» قابل تحقیق است. از این رو صدق گزاره‌های ریاضی که گزاره‌های ترکیبی پیشینی هستند فقط به کمک شهود امکان‌پذیر است. واضح است که چنین معیاری از ارتباط میان صدق‌ها در یک گزاره بر نمی‌آید، بلکه نوع کاملاً متفاوتی از ارتباط است و این دقیقاً همان نکته‌ای است که بولتزانو به آن اشاره می‌کند؛ «آنچه کانت هنگام صحبت کردن از شهود که مبنای صدق است، برای نمونه در بستر یک نظریه ریاضی، در فکر دارد ناکافی و گمراه‌کننده است» (Lapointe, 2011: 16). او با این ایده که شهود می‌تواند بخشی از یک تبیین برای مبنای صدق باشد موافق نیست.

از نظر بولتزانو معرفت ریاضی حاصل مفاهیم خالص با استمداد از تعاریف است و نه شهود. صدق نظام‌های استنتاجی هم‌چون حساب و هندسه بر صدق گزاره‌های دیگری قرار گرفته‌اند که صدق آن‌ها عینی هستند یعنی از تعاریف آن‌ها به طور بدیهی نتیجه شده‌اند. از این رو بولتزانو با کانت موافق نیست که شهود می‌تواند در ریاضیات، نقشی مبنایی بازی کند. این ایده که برای توجیه صدق یک گزاره می‌توان به شناخت‌های غیر مفهومی متوسل شد با هدف عمل استنتاج ناسازگار است. ریاضیات باید بر ارتباط‌های منطقی محض در

ساختاری از اصل موضوع‌ها بنا شود که در آن گزاره‌ها به مثابه مبانی عینی با نتایج عینی خود مرتبط هستند.

مسئله اصلی بولتزانو با کانت در به‌کارگیری مفهوم مبنا هست. کانت شهود را مبنایی مورد قبول برای اثبات‌های ریاضی می‌داند؛ به طوری که صدق‌های هندسی از اصول موضوعه و به واسطه گام‌های منطقی محض در یک رویه استنتاجی اثبات نمی‌شوند. بولتزانو معتقد است که اگر نظرات کانت را بپذیریم، ریاضیات علمی استنتاجی نیست. در واقع کانت مسئول این گرایش در فلسفه آلمانی است که بنابر آن «دانشمندان از التزام به فراهم کردن اثبات‌های صلب و تعاریف دقیق در رشته‌های مرتبط‌شان آزاد هستند» (ibid: 17).

ریشه‌های نگرش بولتزانو را می‌توان در ارائه مفهومی جدید و مفید از «اصول موضوعه» و دقت منطقی جست و جو کرد که فراتر از کار ریاضی‌دانان پیشین بود. موضوعات منطقی که بولتزانو بدان‌ها توجه داشت در حوزه کارش در حساب یا روش‌شناسی علم بود. به طور کلی جذابیت نوشته‌های او را می‌توان روش مثمیری دانست که او فلسفه، ریاضیات، و منطق را با هم ترکیب می‌کرد و هر کدام را برای وضوح بقیه به کار می‌برد. بولتزانو در مقایسه با ریاضی‌دانان گذشته رویکرد صلب و سخت‌تری به اصول موضوعه داشت. پیشینیان او در این زمینه آرای ملایم‌تری داشتند؛ یعنی آن‌ها نیازی نمی‌دیدند که همه گزاره‌های ریاضی را اثبات کنند و برخی از آن‌ها را با عنوان بدیهیات معاف از اثبات می‌دیدند. آن‌ها معتقد بودند که شرط اصلی برای یک اصل موضوع «یقینی» بودن آن است یعنی حقیقتی بدیهی و بی‌واسطه که محاسبات حساب و هندسه اقلیدسی بر آن بنا شود. حال آن‌که بولتزانو در مقدمه کتاب *Preface to Considerations on Some Objects of Elementary Geometry* (۱۸۰۴) متذکر می‌شود که ملزم به پژوهش در ارائه اثبات حتی برای گزاره‌های بدیهی است تا «همه حقایق ریاضی را که در مبنایی‌ترین سطح ریاضیات قرار دارد را نیز آشکار کند». او معتقد است که چنین مفهومی از اصول موضوع به سه دلیل بهتر است: رسیدن به تمامیت، ساده‌تر کردن ارزش موضوعات، و کشف فضایی جدید (Ewald, 1999: 169).

بولتزانو میان «ارتباط عینی» میان احکام عینی که در آن حکمی نتیجه حکم دیگری است و «بازسازی ذهنی» این ارتباط جدایی‌قائل است. از نظر او بدیهیات به قلمرو ذهنیات متعلق‌اند، در حالی که شرح و تفسیرهای علمی بیش از آن‌که به آشکارسازی ارتباط میان گزاره‌ها متعلق باشند به روشن کردن ساختار منطقی صادق آن‌ها مرتبط هستند.

بنابراین اصول موضوعه همان صدق‌های منطقی هستند که صدق‌های ریاضی نیز بدان‌ها تعلق دارند. البته ما نباید آن‌ها را با صدق‌های روان‌شناختی که برای ما یقینی هستند اشتباه کنیم. بولتزانو این مفهوم غیر روان‌شناختی از ریاضیات را به کل علم گسترش داد. یعنی به قلمرویی از گزاره‌های صادق عینی که مستقل از فاعل شناسا هستند و در ساختار پیچیده‌ای به وسیله ارتباط‌های درونی عینی سامان داده شده‌اند. او این نوع گزاره‌ها را *sentence-in-itself/ Sätze-an-sich* می‌نامید؛ این نوع جملات نقشی مرکزی در نوشته‌های بولتزانو، به ویژه بیان مجموعه‌های نامتناهی در ریاضیات، داشتند.

علاقه بولتزانو به روش‌شناسی منطقی سبب شد تا او مطالعات عمیق‌تری در بنیادهای ریاضیات کند و بدین گونه به قضایای مهمی در ریاضیات دست یابد. او در کتاب *درآمدی بر برخی مسائل هندسه مقدماتی* این روش را برای مبانی هندسه به کار می‌گیرد و صریحاً رویکرد فضایی و هندسی سنتی به مبانی ریاضیات را کنار می‌گذارد و تحلیل صرف منطقی را مبنای محاسبات و زمینه‌ساز حساب قرار می‌دهد.

بولتزانو با نقد ریاضی‌دانان پیش از خود، به آن جهت که نظریه حرکت را وارد هندسه کرده‌اند، خاطر نشان می‌کند که نظریه فضا از نظر منطقی بر نظریه حرکت اجسام در فضا متقدم است و بنابراین باید بدون توسل به نظریه حرکت توسعه یابد. بنابراین باید مفهوم حرکت از تعاریف مفاهیم ریاضی هم چون حد در حساب دیفرانسیل و انتگرال حذف شود. از نظر او حساب هم از نظر منطقی بر هندسه متقدم است؛ از این رو باید مبانی ریاضیات و حتی هندسه را هم بر حساب و جبر بنا کرد. او در رساله‌ای فلسفی به پژوهش‌های تحلیلی منطقی و تعاریف صلب و دقیقی از مفاهیم ریاضی مثل پیوستار حقیقی، حد، قضیه مقدار میانی، و قضیه بولتزانو- وایرشتراس، و دیفرانسیل می‌پردازد. علاقه او به اثبات‌های دقیق و صلب سبب شد که اولین کسی باشد که سعی در اثبات برخی از قضایای ریاضی کند که قبلاً مورد توجه کسی نبودند و آن‌ها را بدیهی می‌دانستند. یکی از این قضایا این بود که یک منحنی بسته ساده صفحه را به دو بخش تقسیم می‌کند؛ این قضیه بعدها به قضیه جردن معروف شد و اسوالد ویلن آن را در ۱۹۰۵ ثابت کرد.

به این ترتیب بولتزانو را می‌توان از پیشگامان نوعی منطق‌گرایی دانست که به واقعیت خارجی گوهرهای منطقی اعتقاد دارد؛ اعتقادی که می‌توان در پایان قرن نوزدهم در نزد کسانی چون فرگه و هوسرل دوباره پی گرفت.

۳. فرگه

مایکل دامت، فیلسوف ریاضی معاصر، معتقد است:

«یگانه فیلسوف قرن نوزدهم که می‌توان از محتوای نوشته‌هایش به طور مدلی حدس زد که در فرگه تأثیر گذاشته است برنارد بولتزانو است. کسی که در همان سالی که فرگه متولد شد از دنیا رفت، اما هیچ شهادی وجود ندارد که فرگه حتی آثار بولتزانو را خوانده است یا نه» (Dummett, 1991: vii).

حق با دامت است؛ می‌توان فرگه را در ادامه‌ی راهی قرار داد که بولتزانو آن را آغاز کرد و سرانجام به آموزه‌ی منطق‌گرایی در ریاضیات ختم شد. آموزه‌ی مشترکی که در کارهای هر دوی آن‌ها هست آن است که «بولتزانو و فرگه دلایل یکسانی دارند برای این‌که فکر کنند محتوای باورها و گرایش‌های شناختی ما هم عینی و هم مجرد هستند» (Lapointe, 2011).

بولتزانو درکی از گزاره‌ها دارد که گویا آن‌ها ماهیت‌های مستقل فکری هستند. او معتقد است: «منطق‌دان باید همان حق را برای صحبت درباره‌ی خود صدق‌ها داشته باشد که هندسه‌دان از خود فضاها سخن می‌گوید بدون این‌که درباره‌ی آن‌ها به مثابه‌ی چیزی که با اشیا پر می‌شود فکر کند» (ibid: 133). چنین تصویری از منطق پایه‌ی تلاش‌های فرگه برای ساختن منطق جدید و مبانی حساب بر اساس آن است. فرگه به جای مفهوم گزاره «یکنواخت» (monotic)، که در ابتدا چیزی جز نشان‌دادن شمول محمول در موضوع $\forall x(Px \rightarrow Qx) \rightarrow Q \in P$ نبود، مفهومی منسجم‌تر و گویاتر «تحلیلی» را به کار برد. این مفهوم برابر است با کاربرد دقیق نوع خاصی از استلزام: گزاره‌هایی به عنوان اصل مورد قبول هستند که بتوان آن‌ها را صرفاً از قوانین اصولی منطق و تعاریف مربوط به آن‌ها استنتاج کرد. فرگه تلاش می‌کرد تا تحلیل و تجزیه‌ی حقایق ریاضی را از طریق اقامه‌ی اثبات برای تحلیلی بودن گزاره انجام دهد. فلیپ کیچر معتقد است:

«فرگه بخش بزرگی از کارش را به تلاش برای نشان‌دادن این موضوع کرد که اصطلاحات حساب می‌توانند فقط با به کارگیری اصطلاحات منطق تعریف شوند؛ بنابراین صدق‌های حساب، اختصارات منطقی صدق‌های منطق هستند و همه‌ی صدق‌های منطق می‌توانند از تعداد کمی از قوانین پایه‌ای صریح و روشن به کمک قواعد استنتاج که به طور دقیق فرموله شده‌اند استنتاج شوند» (Kitcher, 1979: 235).

بدین‌گونه فرگه سعی کرد نشان دهد که علم حساب، حداقل در مرتبه‌ی اول، دارای

خاصیت تحلیلی است که خود بر اصول منطق مبتنی است. مثلاً $Pi(x)$ را بتوان در نهایت به P که گزاره هم‌سان (collinear) و تحلیلی و یکی از قوانین منطق است تبدیل کرد. یعنی $Pi(x), \beta i : \sum_{i=0}^n Pi(x) \beta i \rightarrow P$. فرگه معتقد بود که اعداد اشیای منطقی هستند و هدف فلسفه ریاضی مشخص کردن آنهاست. او تعریف عدد را با خلق آن مترادف نمی‌دانست، بلکه تحدید چیزی می‌دانست که استقلال وجودی دارد. برای فرگه تعریف عدد از طریق متمایز کردن آن در یک مرحله ساختمان ریاضی کافی نیست و نیز نمی‌توان عدد را به مثابه یک اصل موضوعه تعریف کرد. باید عدد را از طریق تعریف مشخص کرد و باید تعریف قولی باشد که دلالت بر ماهیت می‌کند. در نتیجه باید وجود عدد از طریق تعریف بیان شود. تعریف فرگه از عدد و روش ساختن اعداد بسیار مشهور است؛ در زیر به طور خلاصه آن را می‌آوریم.

۱.۳ ساختن عدد^۱

فرگه معتقد است در پاسخ به این پرسش که عدد چیست، نمی‌توان خود لفظ دال بر عدد را مورد پرسش قرار داد. یعنی نباید به دنبال معنای «یک» باشیم، بلکه معنای اعداد در ضمن گزاره‌هایی که راجع به آنها می‌سازیم قابل فهم است. او در واقع واحد معنایی را جمله کاملی می‌داند که اجزای جمله در ضمن کل آن معنای خود را می‌یابند، لذا به تحلیل گزاره‌هایی می‌پردازد که راجع به اعداد هستند.

فرگه گزاره‌هایی عددی (گزاره‌های راجع به اعداد) را به حمل یک مفهوم مرتبه دوم به یک مفهوم مرتبه اول تحلیل می‌کند؛ مثلاً «تعداد سیاره‌های منظومه شمسی ۹ تا است» از مفهوم مرتبه اول «تعداد سیاره‌های منظومه شمسی» و مفهوم مرتبه دوم «۹ تا است» تشکیل شده است. از نظر فرگه، اعداد مفاهیم مرتبه دوم هستند یعنی مفاهیمی که مصادیق آنها را مفاهیم مرتبه اول تشکیل می‌دهند. به تعبیر دیگر برای فرگه عدد نه یک کلاس هم‌ارزی از همه مفاهیمی است که ویژگی مشترک آنها «دارای نه مصادیق بودن» است. تا این جا فرگه مفهوم کلی عدد را بر اساس مفهوم و مصادیق تعریف کرده است. آن چه به ظاهر باقی مانده است تعریف اعداد جزئی «صفر» و «یک» و بعد از آن تعریف «به اضافه یک» است تا بتوان قدم به قدم و با شروع از «یک»، اعداد را ساخت؛

الف) عدد صفر متعلق به مفهومی است که برای هر a مستقل از این که a چیست، مصادیق F نباشد. به تعبیر دیگر F مفهومی است که هیچ مصادیقی ندارد.

ب) عدد یک عدد مفهوم F است اگر برای هر a مستقل از این که a چیست، مصداق F نباشد، مگر این که برای هر b اگر b مصداق F بود آن‌گاه $a=b$. به تعبیر دیگر عدد یک متعلق به مفهومی است که صرفاً یک مصداق داشته باشد.

ج) عدد $n+1$ متعلق به مفهوم F است اگر شیء a مصداق F وجود داشته باشد به قسمی که n متعلق باشد به مفهوم «مصداق F بودن، اما مخالف a بودن». به نظر می‌رسد وظیفه فرگه در تعریف و ساخت اعداد به پایان رسیده باشد، اما دو مسئله حل نشده باقی مانده است:

اولاً، فرگه هر عدد را قائم به ذات می‌داند، اما چطور می‌شود یک عدد یک شیء قائم به ذات باشد، اما گزاره‌ای که راجع به آن است درباره یک مفهوم باشد؟

ثانیاً، خود فرگه نیز بر این باور است که این تعریف کلی از مفهوم عدد نمی‌تواند مسئله عدد را حل کند، زیرا ما معنای عبارت «عدد n متعلق است به مفهوم G » را همان‌قدر درمی‌یابیم که معنای عبارت «عدد $n+1$ متعلق است به مفهوم F ».

البته ما می‌توانیم با این تعاریف معنای « $1+1$ متعلق است به مفهوم F » را بیان و سپس به وسیله آن معنای « $1+1+1$ متعلق به مفهوم F است» را توضیح دهیم. در واقع مسئله فرگه این است که تعریف او از اعداد یک تعریف مانع است. البته اگر ما بدانیم که n یک عدد است آن‌گاه می‌توانیم آن را بنا به دستور لایب‌نیتس و تعاریف فرگه بسازیم، اما اگر ندانیم که n واقعاً چیست تعریف فرگه هیچ کمکی به ما نمی‌کند. تعریف فرگه فرایندی است که با پیروی از آن می‌توان به هر عددی دست یافت، اما آن‌چه نمی‌دانیم این است که فقط اعداد طبیعی به وسیله این فرایند به دست می‌آیند.

به علاوه اگرچه می‌دانیم که برای هر مفهوم F عددی مانند n وجود دارد که «عدد n متعلق به مفهوم F است»، هنوز نمی‌توانیم مطمئن باشیم که n یکتاست. تا این یکتایی را ثابت نکنیم نمی‌توانیم یکتایی کاربرد یک عدد را در معادلات گوناگون توجیه کنیم.

در پاسخ به این سؤال فرگه نخست به تدقیق این که «عدد یک شیء قائم به ذات است» می‌پردازد. او ابتدا بیان می‌کند که عدد چه چیزهایی نمی‌تواند باشد؛ عدد عرض و ویژگی یک شیء نیست و ویژگی مفاهیم نیز نیست. اگرچه وجود و یکتایی مثلاً ویژگی مفهوم «قمر زمین» است، عدد «یک» ویژگی این مفهوم نیست. از طرف دیگر اعداد اشیایی فضایی نیستند. فرگه معتقد است عینیت لزوماً هم‌بسته خصیصه فضایی داشتن و مکان‌مند بودن نیست. چنین نیست که هر عینی برای عینیت داشتنش به

فضامند بودن محتاج باشد. عدد ۴ برای هر کس در هر جامعه‌ای و با هر فرهنگی همان عدد ۴ است.

عینیت علاوه بر مستقل بودن از فضا مندی از داشتن ذهنی برای مدرک نیز مستقل است. مثلاً تصور کلمه نوشته شده «طلا» بر روی کاغذ مستلزم به ذهن آمدن عدد ۳ نیست، اما اگر به تعداد حروف تشکیل دهنده آن فکر کنیم عدد ۳ به ذهن می‌آید، ولی در تصویر ذهنی ما از واژه طلا هیچ تغییری ایجاد نمی‌کند.

فرگه در مقدمه مبانی حساب به سه اصل اشاره می‌کند که هر سه آن‌ها در تصور او از اعداد به عنوان اعیان قائم بالذات نقش دارند: نخست تمایز منطق از روان‌شناسی، دوم اصل متن، و سوم تمایز صریح میان مفهوم و شیء.

تحاشی ذهنی ما در تلقی اعداد به عنوان اشیا و نه مفاهیم به اعتقاد فرگه از تمایل ما به پرسش از معنای کلمات به تنهایی و نه در متن یک جمله برمی‌خیزد. این تمایل ما را به جست و جوی یک تصویر به ازای معنای هر کلمه هدایت می‌کند و از نگاه فرگه این همان خلط میان منطق و روان‌شناسی است. در این صورت اگر نتوانیم تصویری معادل یک کلمه را در ذهن بیابیم از پذیرش وجود شیئی در عالم خارج به مثابه مصداق آن کلمه سر باز می‌زنیم. فرگه برای این که نشان دهد اعداد، اعیان قائم بالذات هستند باید نشان دهد که اعداد در یک گزاره مانند یک اسم خاص رفتار می‌کنند. آن‌ها معمولاً در گزاره‌ها به صورت صفت ظاهر می‌شوند. مثلاً مشتری چهار قمر دارد یا مشتری دارای چهار قمر است. اما هر گزاره عددی را به این شکل نیز می‌توان نوشت: تعداد اقمار مشتری چهار است.

خصیصه اصلی یک عین برای فرگه این است که عین دارای یک این‌همانی است که می‌تواند در اوضاع و احوال متفاوت، و بارها به عنوان همان و درست همان عین، شناخته شود. لذا مهم‌ترین استدلال او بر عینیت اعداد این است که آن‌ها می‌توانند در معادلات $1+1=2$ به کار روند.

فرگه هر معادله را یک گزاره راجع به این‌همانی می‌داند. عبارتی که دو علامت دو طرف تساوی را به عنوان دو اسم برای یک عین معرفی می‌کند. علامت تساوی (=) درست همان «است» در گزاره‌های زبان عادی است وقتی که مثلاً می‌گوییم «تعداد اقمار مشتری چهار است». اما اگر اعداد اعیان قائم بالذات باشند باید معیاری داشته باشیم که بر اساس آن تصمیم بگیریم که برای هر شیء b آیا b عدد هست یا نه. این همان معیار این‌همانی برای یک عین است. لذا باید معنای گزاره زیر را مشخص کنیم:

«عدد متعلق به مفهوم F همان عدد متعلق به مفهوم G است» (Ferege, 1960: 73).

ما باید محتوای این گزاره را بدون استفاده از عبارت «عدد متعلق به مفهوم F» دوباره نویسی کنیم. این جاست که فرگه به اصل هیوم متوسل می‌شود. بنا به اصل هیوم می‌توانیم این همانی عددی را بر حسب یک تناظر یک‌به‌یک بین دو مفهوم تعریف کنیم. فرگه در این باره می‌گوید: «خیلی وقت پیش هیوم به ما یاد آوری کرد که وقتی دو عدد ترکیب می‌شوند به طوری که شخص همیشه پاسخ واحدی را به هر بخش واحدی از دیگری دارد ما آن‌ها را یک‌سان بیان می‌کنیم» (ibid).

عدد متعلق به مفهوم F همان عدد متعلق به مفهوم G است اگر و تنها اگر بین همه مصادیق F و همه مصادیق G تناظر یک‌به‌یک وجود داشته باشد. فرگه می‌خواهد مفهوم عدد را بر حسب این همانی عددی تعریف کند. به نظر خلاف شهود می‌آید که عدد را بر حسب هم‌عددبودن دو مجموعه تعریف کنیم. بیش‌تر تمایل داریم تا هم‌عددبودن را بر حسب عدد و تعریف آن بفهمیم، اما فرگه با مثالی منظورش را روشن‌تر می‌کند. می‌توان توازی دو خط را بر حسب هم‌جهت‌بودن آن‌ها تعریف کرد، اما در این صورت ما هیچ تصویری از «جهت خط a» نداریم. لذا بهتر است هم‌جهت‌بودن را بر حسب توازی دو خط تعریف کرد، زیرا هر کسی تصویری از دو خط موازی در ذهن دارد. فهم عرفی به ما می‌گوید که نخست باید تعریف یا تصویری از جهت a و جهت b داشته باشیم و سپس تعریف کلی از مفهوم این همانی و آن‌گاه با در کنار هم گذاشتن آن‌ها «این همان‌بودن جهت a و جهت b» را درک کنیم. با جابه‌جا کردن تعریف یعنی تعریف «هم‌جهت‌بودن a و b» بر حسب توازی آن دو اولین سؤال این است که آیا این تعریف جدید به‌راستی درک کلی ما از این همانی را برآورده می‌کند یا نه؟

فرگه اصل تعویض‌پذیری حافظه‌الصدق لایب‌نیتس را برای معیار این همانی می‌آورد؛ بنا به این اصل می‌توانیم مطمئن باشیم تعریفمان از این همانی جهت دو خط بر اساس توازی آن دو واقعاً اصل لایب‌نیتس را برآورده می‌کند. با این حال مسئله دیگری ذهن فرگه را مشغول می‌کند و آن این است که، این تعریف جدید از هم‌جهت‌بودن واقعاً نمی‌تواند ما را یاری کند تا بدانیم آیا انگلستان هم‌جهت با محور زمین هست یا نه؟ این تعریف یاری‌مان می‌کند که جهت a را به مثابه یک عین بفهمیم و این همان‌بودن آن را با جهت خط b دریابیم، اما نمی‌تواند بگوید که آیا انگلستان هم‌جهت با یک خط هست یا نه.

جهت خط a این همان است با q

اگر ندانیم q جهت خطی هست یا نه تعریف ما از این‌همانی دو جهت هیچ کمکی نخواهد کرد، اما اگر از پیش بدانیم q جهت یک خط است می‌توانیم گزاره فوق را تأیید یا تکذیب کنیم. ما هنوز نمی‌توانیم تعریفی از «جهت» ارائه دهیم مگر این‌که گرفتار دور شویم. برای حل این مشکلات فرگه راه حلی پیشنهاد کرد که اهمیت فلسفی زیادی دارد؛ او متوجه شد که اگر خط a موازی خط b باشد آن‌گاه مصداق مفهوم موازی خط a با مصداق مفهوم موازی خط b یکی خواهد بود و برعکس، اگر همهٔ مصادیق این دو مفهوم یکی باشند آن‌گاه خط a و خط b با هم موازی هستند. بنابراین هنگامی که فرگه جهت خط a را به مصداق مفهوم «موازی با خط a » تعریف می‌کند، جهت خط را کلاس همهٔ خطوط موازی با آن در نظر گرفته است.

حال بنا به ملاحظات فوق فرگه تعریفی از عدد به این صورت ارائه می‌کند:

عدد متعلق به مفهوم F ، مصداق مفهوم «هم‌توان با مفهوم F » است.

و دو مفهوم F و G هم‌توان هستند اگر تناظری یک‌به‌یک بین مصادیق آن‌ها برقرار باشد. از آن‌جا که فقط یک مفهوم می‌تواند هم‌توان با مفهوم دیگر باشد، مصادیق مفهوم «هم‌توان با مفهوم F » یک کلاس از مفاهیمی هستند که همگی با F هم‌توان‌اند. لذا هر عدد کلاسی از همهٔ آن مفاهیمی است که تعداد مصادیقشان برابر با همان عدد است، لذا مثلاً عدد چهار هم‌کلاس همهٔ آن مفاهیمی است که در ویژگی چهارمصادیق‌بودن مشترک هستند و هم‌مصداق یک مفهوم مرتبهٔ بالاتر (یعنی خود مفهوم چهارتابودن). لذا فرگه فقط با تعریف مفهوم تناظر یک‌به‌یک و بدون افتادن در دور منطقی می‌تواند مفهوم عدد را تعریف کند. آگاهی از تناظر یک‌به‌یک می‌تواند مقدم بر آگاهی از عدد باشد و لزومی به پیش‌فرض گرفتن مفهوم عدد برای درک مفهوم تناظر یک‌به‌یک وجود ندارد؛

اگر هر شیئی که تحت مفهوم F قرار می‌گیرد در رابطهٔ Φ با شیئی که تحت مفهوم G قرار می‌گیرد باشد و اگر به هر شیئی که تحت مفهوم G قرار می‌گیرد یک شیء که تحت مفهوم F قرار می‌گیرد با رابطهٔ Φ مربوط باشد آن‌گاه همهٔ اشیا یی که تحت مفهوم F قرار می‌گیرند با همهٔ اشیا یی که تحت مفهوم G قرار می‌گیرند با رابطهٔ Φ با هم متناظر هستند.

این البته فقط رابطهٔ تناظر است. برای یک‌به‌یک بودن یک تناظر فرگه تعریف زیر را ارائه می‌کند:

اگر d با a رابطهٔ Φ داشته باشد و d با e رابطهٔ Φ داشته باشد آن‌گاه $a=e$. اگر d با a رابطهٔ Φ داشته باشد و b با a رابطهٔ Φ داشته باشد آن‌گاه $d=b$.

لذا فرگه مفهوم تناظر یک‌به‌یک را صرفاً بر اساس اصطلاحات منطقی تعریف می‌کند و از آن طریق می‌تواند هم‌توانی دو مفهوم را بر حسب وجود یک تناظر یک‌به‌یک بین مصادیق آن دو مفهوم تعریف کند. حال همه‌چیز برای تعریف زیر آماده است:

عدد متعلق به مفهوم F مصداق مفهوم «هم‌توان با مفهوم F » است.

لذا n یک عدد است به این معناست که مفهومی مانند F وجود دارد که n عدد متعلق به مفهوم F است. پیش از این که فرگه به تعریف اعداد جزئی بپردازد، اثبات می‌کند که عدد متعلق به مفهوم F برابر با عدد متعلق به مفهوم G است اگر مفهوم F هم‌توان باشد با مفهوم G (در این جا از آوردن اثبات صرف‌نظر شده است).

تعریف کلی اعداد بر حسب کلاس‌های هم‌ارزی مفاهیم هم‌توان راه را برای تعریف اعداد جزئی باز می‌کند؛ کافی است برای هر کلاس هم‌ارزی یک مفهوم را به مثابه نماینده آن کلاس در نظر بگیریم. مثلاً عدد ۹، کلاس هم‌ارزی همه مفاهیم هم‌توان با مفهوم «سیارات منظومه شمسی» است.

اما توسل به یک مفهوم مانند «سیارات منظومه شمسی» ناقض هدف فرگه در فروکاهیدن حساب به منطق است، زیرا این که ۹ سیاره در منظومه شمسی وجود دارد هیچ ربطی به منطق ندارد. به علاوه، دشوار به نظر می‌رسد که معادل هر عدد در سلسله نامتناهی اعداد طبیعی یک مفهوم تجربی بیابیم. لذا فرگه دوباره به دستور لایب‌نیتس برای ساختن اعداد از روی صفر و یک و «مفهوم به علاوه یک» متوسل می‌شود.

عدد متعلق به مفهوم «غیر این همان با خود» است. لذا عدد صفر کلاس همه مفاهیمی است که هیچ مصداقی ندارند. البته برای اجتناب از این شبهه که ما دوباره از «هیچ» به جای صفر استفاده کرده‌ایم صورت‌بندی زیر را پیشنهاد می‌کند:

برای هر x ، x هر چه می‌خواهد باشد، چنین نیست که x با خودش این همان نباشد. البته بررسی این نکته که همه آن مفاهیمی که هیچ مصداقی ندارند هم‌ارز هستند و لذا یک کلاس هم‌ارزی تشکیل می‌دهند بنا به تعریف هم‌توانی چندان دشوار نیست.

حال اگر ۱ را عدد متعلق به مفهوم «این همان با صفر» تعریف کنیم داریم:

مفهومی وجود دارد، این همان با صفر، که دارای یک مصداق است، یعنی خود صفر، به قسمی که عدد متعلق به این مفهوم ۱ است و عدد متعلق به مفهوم «این همان با صفر و غیر این همان با صفر» صفر است.

لذا بنا به تعریف تالی، ۱ تالی صفر است. یعنی ۱ بلافاصله بعد از صفر در سری اعداد قرار می‌گیرد. بنابراین فرگه هر عدد را به صورت زیر تعریف می‌کند:

۰ عدد متعلق به مفهوم ناین همان با خود است؛

۱ عدد متعلق به مفهوم این همان با صفر است؛

۲ عدد مفهوم این همان با صفر یا ۱ است؛

۳ عدد مفهوم این همان با صفر، ۱، یا ۲ است.

برای آن‌که نشان دهیم این الگو می‌تواند کل سری بی‌پایان اعداد را تولید کند باید اثبات کنیم که بعد از هر عدد در سری اعداد طبیعی عدد دیگری می‌آید و در نتیجه سری اعداد نامتناهی است. برای این منظور فرگه به تعریف رابطه نیایی (ancestral relation) زیر می‌پردازد:

با فرض وجود رابطه Φ می‌توانیم رابطه دیگری را به صورت زیر تعریف کنیم؛

y در سری Φ به دنبال x می‌آید یا x در سری Φ پیش از y می‌آید.

مثلاً بر حسب رابطه پدربودن $\Phi =$ می‌توان نوه‌بودن یا جدبودن را تعریف کرد. فرگه

برای رسیدن به این تعریف نخست مراحل زیر را طی می‌کند:

ویژگی p را در سری Φ موروثی گوئیم هرگاه برای هر d اگر p به d متعلق باشد آن‌گاه

p به هر عضو سری که با d رابطه Φ دارد نیز تعلق داشته باشد.

y در سری Φ بعد از x می‌آید هرگاه دارای هر ویژگی Φ -موروثی باشد که x داراست.

برای این‌که از رابطه نیایی برای تولید سری اعداد استفاده کنیم باید رابطه Φ را رابطه تالی بلافصل، که پیش‌تر تعریف کرده‌ایم، در نظر بگیریم. در این مورد سری Φ ما سری اعداد طبیعی خواهد بود. لذا y در سری اعداد طبیعی بعد از x می‌آید هرگاه دارای همه آن ویژگی‌هایی باشد که به هر تالی بلافصل x متعلق‌اند و روی سری اعداد طبیعی موروثی‌اند.

حال فرگه مفهوم «عضو سری اعداد طبیعی مختوم به n » را تعریف می‌کند: a مصداق

این مفهوم است اگر $a=n$ یا n در سری اعداد طبیعی بعد از a بیاید. می‌توان نشان داد که

عدد متعلق به این مفهوم در سری اعداد طبیعی بلافاصله بعد از n قرار می‌گیرد. بنابراین

برای هر n عددی وجود دارد که بلافاصله بعد از n می‌آید، لذا سری اعداد طبیعی

نامتناهی است.

۸-۱ در نهایت فرگه « n عددی متناهی است» را این‌گونه تعریف می‌کند: n به سری اعداد

طبیعی آغاز شده از صفر تعلق دارد.

فرگه در پایان مبانی حساب پروژۀ خود را چنین جمع‌بندی می‌کند:
 «من امیدوارم توانسته باشم در کار حاضر نشان دهم که قوانین حساب احکامی تحلیلی هستند و نتیجتاً پیشینی. بنابراین حساب به طور ساده‌ای توسعه‌ای از منطق می‌شود و هر گزاره حساب قانونی از منطق ولو این که گزاره‌ای استنتاجی باشد. به کارگیری حساب در علوم فیزیکی، مرتبط کردن منطق با واقعیات مشاهده‌شده است که نتیجه آن یک قیاس است. ... بنابراین قوانین اعداد واقعاً برای چیزهای خارجی قابل استفاده نیستند، آن‌ها قوانین طبیعت نیستند ... آن‌ها قوانین قوانین طبیعت هستند» (ibid: 99).

۴. پروژۀ منطق‌گرایی در ریاضیات

رویکرد منطق‌گرایی در مبانی ریاضیات را فرگه آغاز کرد و سپس برتراند راسل (Bertrand Russell 1872-1970) و نویراث وایتهد (Alfred North Whitehead 1861-1947)، و به‌طور ویژه در کتاب *اصول ریاضیات (Principia Mathematica)*، آن را به صورت یک برنامه عملی درآوردند. از نظر راسل هدف این برنامه «نشان دادن این است که همه ریاضیات محض از فرض‌های منطقی صرف نتیجه می‌شود و فقط از مفاهیم منطقی قابل تعریف در واژگان منطقی استفاده می‌کند» (Russel, 1959: 74). منطق‌گرایان در اثبات تحلیلی بودن علم حساب، به یک‌سری تبدیل علایم احتیاج داشتند. راسل در مقدمه *اصول ریاضیات* می‌گوید: «بدون کمک نمادهای منطقی ما قادر نبودیم استدلال‌های لازم را صورت ببخشیم. توسعه نمادهای منطقی نتیجه کاری واقعی و عملی است و نه روشی ناهنجاری که فقط به سبب نوعی نمایش جدید معرفی شده است» (Russel, 1910: viii). در واقع کاری که راسل کرد ایجاد «منطقی از حساب محمولات و گزاره‌ها بود. علاوه بر آن منطقی از روابط (محمول‌های بیش از یک متغیر) نیز به وجود آورد. او فکر می‌کرد که «همه» ریاضیات، نه فقط روش‌های استدلال‌کردن، بلکه حتی اشیای ریاضی، از چنین مبادی‌ای نتیجه می‌شود» (Griffin, 2003: 51).

برنامه منطق‌گرایی در ریاضیات دارای مراحل بود؛ در مرحله اول تبدیل علایم الفاظ و در حالت ترکیبی احکام نمادین شده صرفاً منطقی بودند. مثلاً متغیرهای گزاره‌ای با نمادهای p, q, r, s, t, \dots و علامت عطف با \wedge و علامت فصل با \vee و علامت سلب با \neg نشان داده می‌شدند. ولی احکام نمادین شده شامل علایمی بودند که ظاهراً منطقی بودن آن‌ها ضروری نبود و فقط پس از اقامه براهین، منطقی بودن آن‌ها اثبات می‌شد. پس در یکی از مراحل اثبات

تبدیل علایم منطقی صرف به علایم دیگر صورت می‌گرفت. در این مرحله تعریف، و حد منطقی نقش مهمی ایفا می‌کردند و در این جا اساسی‌ترین تمایز داخلی در نظام منطقی گرایبی ریاضیات، یعنی نظریه فرگه از یک سو و نظریه راسل از سوی دیگر، خود را نشان می‌داد. نظریه فرگه درباره تعریف و حد منطقی، نظریه‌ای واقع‌گرا بود یعنی حد منطقی را قوی که دلالت بر ماهیت بکنند می‌دانست و در نتیجه قائل به ماهیت قابل اشاره برای اشیای ریاضی معرف آن‌ها بود. در حالی که نظریه راسل نظریه‌ای نام‌گرا بود یعنی تعریف را صرفاً بیانی برای ترکیب جدیدی از علایم بر مبنای ترکیبی از پیش شناخته شده می‌دانست. بنابراین از نظر او تعریف دلالت بر چیزی نمی‌کرد، بلکه در مراحل اثبات تسهیل ایجاد می‌کرد. بر مبنای چنین نظریه‌ای تعریف نوعی اختصار در بیان مطالب دانسته می‌شد. برای نمونه تعریف یک عدد خاصی (مثلاً وقتی می‌گوییم یگانه عددی که فلان خاصیت را دارد)، با یک طبقه از اعداد (مثلاً طبقه اعداد صحیح تقسیم‌پذیر بر دو) بیانی است از چیزهایی صرفاً منطقی، غیر مادی، و ذهنی. نظر راسل در این مورد پیروان زیادی ندارد و موضع حادی از منطقی‌گرایی است، اما بینش فرگه که از نظر فلسفی عمیق‌تر است طرفداران بسیاری دارد.

منطق‌گرایان در برنامه خود برای بازسازی ریاضی بر اساس منطق همواره از گزاره‌های صادق استفاده می‌کردند. به عبارت دیگر گزاره‌های همواره صادق با همان‌گویی‌های منطقی در برنامه منطق‌گرایان مقدمات مسلم بر همین بودند. چنین گزاره‌هایی از طریق بررسی توابع ارزش (truth functions) به دست می‌آیند. مثلاً تابع ارزش $T(P_1, P_2, \dots, P_n)$ منطقاً ضروری است اگر و تنها اگر ارزش آن در ازای ارزش‌های متفاوت P_1, P_2, \dots, P_n همواره صادق باشد. ارزش توابع منطقاً ضروری در برنامه منطق‌گرایی کاملاً مشهود است، زیرا طبقه توابع ارزش همواره صادق تعریف شده است و از طریق شیوه‌ای مکانیکی می‌توان آن‌ها را شناخت. اما باید به این نکته توجه کرد که در ساختن ریاضیات بر اساس منطق احتیاج به مقدمات دیگری نیز هست و در این جا است که ضعف برنامه منطق‌گرایی آشکار می‌شود. برای روشن شدن مطلب به شیوه مورد استفاده راسل در کتاب معروف اصول ریاضیات اشاره می‌کنیم.

راسل در ابتدا از مجموعه‌ای مثلاً S که علم بدان داریم آغاز می‌کند. در ابتدا شواهد چنین اقتضا می‌کنند که S را قبول کنیم ولی با مشکلات زیر مواجه می‌شویم:

- ادعاهای مربوط به شناخت S را نمی‌توان به‌سهولت قبول کرد. مثلاً آیا

$$\forall a, \forall b : a, b \in S \text{ درست است؟}$$

- مسائل حل‌ناشده در S وجود دارند. مثلاً آیا $\forall a, a \in S, \exists e : a.e = e.a$ درست است؟

- درباره وجود عناصر نمی‌توان تصمیم قاطع گرفت. مثلاً آیا $\forall a, a \in S, \exists b, b \in S \rightarrow a.b = b.a = e$ درست است؟

شیوه راسل به گونه‌ای است که در چنین مواردی S را بر مبنای مجموعه از پیش بیان شده در نظر می‌گیرد و بنا می‌کند. مثلاً S را در برابر یک گروه آبدی G بیان می‌کند.

اما اشکال عمده راسل در وجود بی‌نهایت است؛ آیا باید وجود بی‌نهایت ریاضی را بدیهی بدانیم؟ و برای آن موقعیتی شبیه اصول بدیهی منطق هم چون فصل و عطف در نظر بگیریم؟ یا این که باید وجود بی‌نهایت را به مثابه یک اصل موضوعه در ساختمان ریاضیات بپذیریم؟ راسل هر دو کار را کرد. در چاپ اول اصول ریاضیات وجود بی‌نهایت را اصلی بدیهی پذیرفت و در چاپ دوم همان کتاب وجود بی‌نهایت را به مثابه اصل موضوع در نظر گرفت. در هر دو این حالت‌ها منطق‌گرایی با اشکال روبه‌رو است، چه اگر ریاضیات تماماً متأخر بر منطق و منتج از آن باشد باید در ساختمان ریاضی در هیچ مرحله تعقل شهودی موضوع مدرک دخالتی نداشته باشد. اما چگونه می‌توان بی‌نهایت را صرفاً بر مبنای منطق شناخت؟ با تأمل در این پرسش‌ها می‌بینیم که استفاده بدون دقت و تعمق کافی از بی‌نهایت ریاضی در ساختارهای ریاضی توسط راسل و فرگه، ضعفی اساسی در فلسفه ریاضیات منطق‌گراست.

حال ببینیم که آموزه اصلی مکتب منطق‌گرایی، که منطق را نه آلت و شیوه‌ای در دست ساختار ریاضیات، بلکه مولد و اصل ساختار می‌داند و ریاضیات را قابل استخراج و استنتاج از منطق، چگونه در عمل به کار گرفته می‌شود. کارناپ معتقد است که ما می‌توانیم آموزه منطق‌گرایی را در دو بخش مورد بررسی قرار دهیم:

آموزه اول: مفاهیم ریاضیات را می‌توان از مفاهیم منطقی و به وسیله تعاریف صریح استخراج کرد؛

آموزه دوم: فضایی ریاضی را می‌توان از اصول متعارف منطقی و به وسیله قیاس منطقی ناب استخراج کرد (Carnap, 1983: 41).

۱.۴ آموزه اول

از آن‌جا که ریاضی‌دانان بر این نکته واقف بودند که علم حساب قابل تجزیه به اعداد طبیعی

است بنابراین مسئله مهم در بخش اول این بود که بتوان اعداد طبیعی را از مفاهیم منطقی استنتاج کرد. گرچه فرگه قبلاً راه حلی برای این مسئله یافته بود، راسل و وایتهد مستقل از او و با روشی دیگر به همان نتایج رسیدند. آموزه اصلی این راه حل تشخیص صحیح حالت منطقی اعداد طبیعی بود؛ نسبت‌هایی منطقی که نه به اشیا، بلکه به مفاهیم تعلق داشتند. مثلاً^۳، مجموعه تمام مفاهیمی است که فقط سه شیء تحت آن‌ها قرار می‌گیرند. حال این مطلب را می‌توان به کمک مفاهیم منطقی به شکل ذیل بیان کرد:

فرض کنید معنای $2_m(f)$ این است که لاقفل دو شیء در تحت مفهوم f واقع می‌شوند. پس می‌توانیم این مفهوم را چنین تعریف کنیم: D_f نمادی به جای تعریف است و خوانده می‌شود «بنا به تعریف یعنی آن‌که»:

$$2_m(f) = D_f (\exists x)(\exists y)[\neg(x = y) \wedge f(x) \wedge f(y)]$$

یعنی x وجود دارد و y وجود دارد به طوری که x با y این‌همان نیست و f به x تعلق دارد و f به y تعلق دارد. به همین طریق می‌توان 3_m و 4_m و 5_m و ... را نیز تعریف کرد. آن‌گاه عدد ۲ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$2(f) = D_f 2_m(f) \wedge \neg 3_m(f)$$

یعنی لاقفل دو و نه لاقفل سه شیء در تحت f اند. بدین‌گونه می‌توانیم عمل‌گرهای حساب را به‌سادگی تعریف کنیم. مثلاً جمع را با انفصال دو مفهوم دو به دو مانع‌الجمع بیان کنیم. بنابراین با این روش می‌توان تمام اعداد طبیعی را ساخت. اعداد مثبت و منفی، کسرها، و اعداد حقیقی را نیز می‌توان ساخت، اما نه با افزودن به اعداد طبیعی، بلکه با ساختن قلمرو به کلی جدید دیگری. اعداد طبیعی زیر مجموعه‌ای از کسرها را تشکیل نمی‌دهد، بلکه با برخی کسرها هم‌بسته‌اند؛ یعنی عدد طبیعی ۳ و $3/1$ برابر نیستند بلکه فقط با هم دیگر هم‌بسته‌اند. به همین شکل باید میان کسر $1/2$ و عدد حقیقی نظیر آن نیز تمایز قائل شد. از آن‌جا که ساختن اعداد حقیقی منطق‌گرایی را با مشکلاتی مواجه می‌کند از این رو در ادامه فقط به ساختن این نوع اعداد می‌پردازیم.

بدین منظور فرض می‌کنیم اعداد کسری (گویا) را ساخته‌ایم و حال می‌خواهیم اعداد حقیقی را بر مبنای این اعداد بسازیم. همان‌طور که می‌دانیم برخی از اعداد حقیقی با اعداد گویا نظیر هستند. در این میان همان‌طور که دده کیند (Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831–1916))^۲ در ۱۸۷۲ نشان داد اعداد گنگ، به مثابه رخنه‌هایی در سلسله اعداد گویا هستند. فرض کنید که اعداد گویای مثبت را به دو طبقه تقسیم کنیم: طبقه اول اعدادی که

مجدورشان کم‌تر از ۲ است (مجموعه کران پایینی) و طبقه دیگر بقیه اعداد گویا را دربر می‌گیرد (مجموعه کران بالایی). چنین تقسیمی برشی در اعداد گویا به وجود می‌آورد که با عدد حقیقی $\sqrt{2}$ نظیر است. این «برش» را «رخنه» می‌نامیم، زیرا با هیچ عدد گویایی نظیر نیست. چون هیچ کسری نیست که مجدورش ۲ باشد. پس طبقه اول دارای بزرگ‌ترین کران بالایی که به خودش متعلق باشد نیست. همچنین طبقه دوم هم دارای کوچک‌ترین کران پایینی نیست. بنابراین متناظر با هر عدد حقیقی برشی در سلسله اعداد گویا وجود دارد و هر عدد حقیقی اصم با یک رخنه متناظر است.^۳

راسل اندیشه دده کیند را ادامه داد. از آن‌جا که هر برش به طور یکتایی با مجموعه کران پایینی خود مشخص می‌شود، راسل یک عدد حقیقی را به مثابه مجموعه کران پایینی نظیرش در اعداد گویا تعریف کرد. مثلاً $\sqrt{2}$ با مجموعه‌ای از اعداد گویا که مجدورشان کم‌تر از ۲ است تعریف می‌شود و عدد حقیقی گویای $1/3$ با مجموعه کران‌های پایینی $1/3$ تعریف می‌شود.

کارناپ معتقد است که نکته مهم در این شیوه ساختن اعداد حقیقی این است که آن‌ها اصول موضوعه نیستند، بلکه ساخته شده‌اند. «منطق‌گرا وجود ساختمان‌هایی را که خواص اعداد حقیقی داشته باشند با طرح اصول متعارف یا اصول موضوعه استوار نمی‌کند، بلکه از طریق تعارف صریح، بناهای منطقی‌ای فراهم می‌کند که به علت این تعاریف دارای خواص اعداد حقیقی‌اند. از آن‌جا که هیچ تعریف خلاقیتی وجود ندارد، تعریف آفرینش نیست، بلکه فقط نام‌گذاری چیزی است که وجود آن قبلاً محرز شده است و این یکی از مشکلاتی است که مکتب منطق‌گرایی با آن مواجه است» (ibid: 44).

منطق‌گرایان به همین نحو سعی داشتند بقیه مفاهیم ریاضی مثل حد، پیوستگی، دیفرانسیل، خارج‌قسمت، انتگرال، و اعداد اصلی و ترانسفینی در نظریه مجموعه‌ها را بسازند.

۲.۴ آموزه دوم

بنابر این آموزه، قضایای ریاضیات از اصول متعارف منطقی به کمک قیاس منطقی قابل استنتاج هستند. دستگاه اصول متعارف منطقی راسل شامل چهار اصل متعارف از حساب گزاره‌ای و دو اصل از حساب تابعی است. قواعد استنتاج عبارت‌اند از قاعده جایگزینی و قاعده استلزام. از آن‌جا که هر حکم یا جمله ریاضی را می‌توان به جمله‌ای ترجمه کرد که فقط شامل محمولات اولیه منطقی باشد، پس می‌توان این آموزه را چنین نیز بیان کرد: هر

جمله قابل اثبات ریاضی قابل ترجمه به جمله‌ای است که فقط شامل نمادهای اولیه منطقی بوده و در منطق قابل اثبات باشد.

اما استنتاج قضایای ریاضی برای منطق‌گرایی مشکلات خاصی را پیش آورد:

اولاً، برای اثبات برخی قضایای حساب و نظریه مجموعه‌ها علاوه بر اصول متعارف منطقی نیازمند اصول متعارف دیگری هم چون اصل متعارف بی‌نهایت و اصل متعارف انتخاب هستند. بنابر اصل متعارف بی‌نهایت برای هر عدد طبیعی، عددی بزرگ‌تر از آن وجود دارد. حکم اصل متعارف انتخاب (axiom of choice) نیز این است. برای هر مجموعه غیر تهی S که عنصرهایش مجموعه‌های غیر تهی هستند یک تابع

$$-f: S \rightarrow \cup A; A \in \varphi$$

به نام تابع انتخاب وجود دارد به گونه‌ای که برای هر $A \in S$ داریم $f(A) \in A$ به عبارت دیگر برای هر مجموعه جدا از هم و ناتهی از مجموعه‌ها، لاقلاً یک مجموعه انتخاب وجود دارد یعنی مجموعه‌ای که با هر یک از مجموعه‌های عضو، دقیقاً در یک عضو مشترک است. هر دوی این احکام وجودی‌اند، لذا راسل حق داشت که در عرضه آن‌ها به مثابه اصول متعارف منطقی تعلق ورزد، زیرا منطق سروکارش فقط با هستی‌های ممکن است و نمی‌تواند هیچ ادعایی در مورد وجود و عدم چیزی داشته باشد. راسل راهی برای گریز از این مخمصه یافت؛ او چنین دلیل آورد که چون ریاضیات علم صوری محض است پس در مورد وجود فقط می‌تواند اظهار نظر شرطی بکند نه جازم. اگر برخی ساختارها وجود داشته باشند آن‌گاه برخی ساختارهای دیگر هم وجود دارند که وجود آن‌ها منطقیاً از وجود قبلی‌ها تبعیت می‌کنند. بدین گونه او یک حکم ریاضی مانند S را که اثباتش مقتضی اصل متعارف بی‌نهایت I یا اصل متعارف انتخاب C بود به حکمی شرطی تحویل کرد. یعنی به جای صحبت از S از $I \rightarrow S$ یا $C \rightarrow S$ صحبت می‌کنیم. در این صورت این جملات، جملاتی شرطی هستند که از اصول منطق قابل استنتاج‌اند.

ثانیاً، اشکال بزرگ‌تر بر منطق‌گرایی که شاید بتوان آن را بزرگ‌ترین اشکال نیز دانست مربوط به اصل متعارف تحویل‌پذیری (axiom of reducibility) است که راسل آن را در اصول ریاضیات مطرح کرد. برای بیان این که چرا راسل مجبور شد تا این اصل را بیاورد لازم است تا اشاره‌ای هرچند کوتاه و مجمل به نظریه انواع وی کنیم.

برای سهولت فقط توابع یک‌موضوعی را در نظر می‌گیریم. در این صورت نظریه انواع متشکل است از طبقه‌بندی زیر از اظهارات:

نام اشیا (افراد) قلمرو بحث، مثلاً a, b, c, \dots متعلق به نوع o هستند. در نوع ۱ خواص این اشیا مثلاً $f(a), g(b), h(c), \dots$ قرار دارند؛ در نوع ۲ خواص این خواص یعنی $F(f), G(g), H(h), \dots$ قرار دارند؛ در نوع ۳ خواص خواص اشیا قرار دارند؛ و قس علی هذا. قاعده اصلی نظریه انواع این است که هر محمولی متعلق به یک نوع مشخص است و به کاربرد آن فقط در نوع بعدی پایین‌تر معنی دارد. بنابراین جملاتی از قبیل $f(a)$ و $F(f)$ همواره بامعناست یعنی یا درست یا نادرست هستند. از طرفی دیگر ترکیباتی نظیر $f(g)$ و $f(F)$ نه درست‌اند و نه نادرست، بلکه بی‌معنا هستند. به خصوص عبارتی مانند $f(f)$ و $-f(f)$ بی‌معنایند؛ یعنی معنا ندارد بگوییم که یک خاصیت متعلق به خودش است یا متعلق به خودش نیست. اهمیت این قاعده در رفع تضادهاست.

نظریه‌ای که در بالا بیان شد نظریه ساده انواع است که منطقیون جدید اغلب آن را موجه و ضروری می‌دانند، اما راسل نظریه انشقاق انواع را نیز بیان کرد که مقبولیت چندانی نیافت. در این نظریه خواص هر نوع به نوبه خود تقسیم به «مرتب» (order) هایی می‌شوند. این انقسام مبتنی بر صورت تعریفی است که آن را معمول می‌کند و نه بر اشیایی که این خاصیت به آن‌ها متعلق است. در کار آوردن این نظریه سبب بروز اشکالاتی در ساختار ریاضی به ویژه اعداد حقیقی شد. بسیاری از قضایای اساسی نه تنها قابل اثبات نبودند، قابل بیان هم نبودند. برای فائق آمدن بر این مشکل راسل مجبور شد اصل جدیدی به نام اصل تحویل‌پذیری را بیان کند. بنا بر این اصل مراتب متفاوت یک نوع به نحوی قابل تحویل به مرتبه پایین‌تر از این نوع بودند. جالب این است که یگانه ملاک حقیقت این اصل متعارف آن بود که هیچ راه چاره دیگری برای گریز از این مشکل که معلول نظریه انشقاق انواع بود وجود نداشت. البته بعدها راسل تحت تأثیر انتقادات دقیق ویتگنشتاین در چاپ دوم *اصول ریاضیات* (۱۹۲۵) از این اصل اجتناب کرد، اما چون هنوز معتقد بود که بدون نظریه انشقاق انواع کاری از پیش نمی‌رود از این موقعیت قطع امید کرد. «بنابراین می‌بینیم که نه فقط برای منطق‌گرایی، بلکه برای هر کوشش دیگری جهت حل مسئله مبانی ریاضیات نشان‌دادن این مطلب که، نظریه ساده انواع برای ساختن ریاضیات بیرون از منطق کافی است، چقدر مهم است» (ibid: 46).

۳.۴ مسئله تعریف غیر اسنادی (impredicative)

برای حصول اطمینان از این‌که آیا نظریه ساده انواع کافی است یا آن‌که باید انشقاق

بیش‌تری بیابد لازم است ابتدا به این پرسش پاسخ دهیم که چرا راسل مجبور شد نظریه انشقاق انواع را مطرح کند. علت نخست این بود که وی می‌خواست از پارادوکس‌های منطقی، مانند پارادوکس مجموعه‌ها، بپرهیزد. پارادوکس‌های منطقی به پارادوکس‌هایی گفته می‌شود که اولین بار در نظریه مجموعه‌ها ظاهر شد و راسل نشان داد که در تمام منطقی نیز وجود دارند. می‌توان نشان داد که اگر نظریه انواع را پیشاپیش نپذیریم این پارادوکس‌ها در منطقی به وجود می‌آیند. ساده‌ترین پارادوکس به مفهوم غیر اسنادی مربوط است. بنا به تعریف خاصیتی را غیر اسنادی گوئیم اگر متعلق به خودش نباشد. حال آیا خاصیت غیر اسنادی، خود غیر اسنادی است؟ اگر فرض کنیم که باشد آن‌گاه چون متعلق به خودش است بنا به تعریف غیر اسنادی، خودش غیر اسنادی نیست و اگر فرض کنیم که غیر اسنادی نباشد آن‌گاه متعلق به خودش نیست و بنا به تعریف غیر اسنادی، خودش غیر اسنادی است. بنا به قانون طرد شق ثالث، یا غیر اسنادی است یا نیست، و لذا با یک تناقض مواجه‌ایم.

نمونه دیگری از این پارادوکس‌ها، پارادوکس گرلینگ درباره مفهوم ناهمگون (heterological) است؛ این پارادوکس شبیه پارادوکس فوق است با این تفاوت که تناقض منتج‌شده راجع به محمولات است نه خواص. بنا به تعریف محمولی را ناهمگون گوئیم که خاصیت به وسیله محمول تعیین شده متعلق به خود محمول نباشد. مثلاً واژه تک‌هجایی ناهمگون است، زیرا خود واژه تک‌هجایی نیست. واضح است که هر دوی این فرض‌ها که واژه ناهمگون خودش ناهمگون است و فرض مخالف آن منجر به تناقض می‌شوند. راسل و منطقدانان دیگر پارادوکس‌های بسیاری شبیه این نوع پارادوکس‌ها ساختند.

رمزی نشان داد که دو نوع متفاوت از پارادوکس‌ها وجود دارند؛

- پارادوکس‌های نوع اول به شکلی کامل در منطقی قابل بیان هستند و پارادوکس‌های منطقی نامیده می‌شوند. پارادوکس غیر اسنادی از این نوع است و با نظریه ساده انواع قابل حل هستند، زیرا اگر نظریه انواع را بپذیریم مفهوم غیر اسنادی حتی قابل تعریف نیست، زیرا عباراتی از این دست که خاصیتی متعلق به خودش نیست یعنی $\neg f(f)$ بنا به این نظریه خوش تعریف نیست و بی‌معناست.

- پارادوکس‌های نوع دوم به پارادوکس‌های معناشناختی (semantical) یا شناخت‌شناسانه (epistemological) معروف‌اند. مثال مفهوم ناهمگون از این نوع است.

نمونه دیگری از این پارادوکس‌ها که در میان ریاضی‌دانان معروف است مربوط به کوچک‌ترین عدد طبیعی است که به آلمانی با کم‌تر از صد حرف قابل تعریف نیست. این نوع پارادوکس‌ها که در زبان گفتاری پیش می‌آیند راسل را بر آن داشت تا با وضع برخی محدودیت‌ها برای منطق، هم‌چون طرح نظریه انشقاق انواع، آن‌ها را از میان بردارد و این سبب شد. با وجود این، رمزی نشان داد پارادوکس‌هایی از این دست در زبان نمادین منطق قابل ساخت نیستند و لذا لازم نیست در پروژه ساختن ریاضیات از منطق به آن‌ها اعتنا کنیم. پس نظریه انشقاق انواع و متعاقب آن اصل متعارف تحویل‌پذیری زائد است (Ramsey, 1926: 62-65).

۴.۴ مشکلات نظریه انشقاق انواع

نظریه انشقاق انواع سبب بروز مشکلات بزرگی در مورد اعداد حقیقی شد. همان‌طور که دیدیم هر عدد حقیقی به عنوان یک طبقه به مثابه یک خاصیت از کسرها تعریف می‌شود. مثلاً $\sqrt{2}$ به طبقه‌ای از همه کسرهایی تعریف می‌شود که مجذور آن‌ها کم‌تر از ۲ است، اما چون عبارت «برای همه خواص» بدون رجوع به یک مرتبه مشخص در تحت نظریه انشقاق انواع قابل قبول نیست، بنابراین «برای همه اعداد حقیقی» بدون هیچ توصیف دیگری رجوع به همه اعداد حقیقی نمی‌تواند باشد و فقط رجوع به اعداد حقیقی مربوط به مرتبه مشخصی می‌تواند باشد. به مرتبه اول، اعداد حقیقی تعلق دارند که در تعریف آن‌ها عبارتی به صورت «برای همه اعداد حقیقی» ظاهر نمی‌شوند. به مرتبه دوم آن‌هایی تعلق دارند که در تعریفشان چنین عبارتی به نمایش درمی‌آید، اما این عبارت باید به «همه اعداد حقیقی از مرتبه اول» محدود شود و غیره. پس نه تعریف مقبولی و نه جمله مقبولی می‌تواند درباره همه اعداد حقیقی، بدون قید و شرط، باشد.

در نتیجه این انشقاق تعداد کثیری از مهم‌ترین تعاریف و قضایای نظریه اعداد حقیقی از دست می‌روند. زمانی راسل دریافت که کوشش وی برای غلبه بر مسئله اصل متعارف تحویل‌پذیری خود قابل قبول نیست که دیگر چاره‌ای برای رهایی از این معضل به خاطرش خطور نکرد. در واقع بزرگ‌ترین مشکلی که پروژه منطق‌گرایی با آن روبه‌رو بود عبارت بود از این که «چگونه می‌توان منطق را توسعه داد اگر از یک طرف بخواهیم از خطر بی‌معنابودن تعریف غیر اسنادی برهیم و از طرف دیگر به طرزی اقناع‌کننده نظریه اعداد حقیقی را تجدید بنا کنیم» (ibid: 49).

۵. نتیجه‌گیری

همان‌طور که دیدیم منطق‌گرایی از تلاش برای تعمیق هرچه بیشتر مبانی ریاضیات ناشی شد. در واقع این آموزه نتیجه‌گرایی به روش اصل موضوعی در ریاضیات است. چنین رویکردی به منطق و ریاضیات واکنشی به نظریه کانت در این باره بود که ریاضیات از مقوله ترکیبی پیشینی است. بولتزانو از اولین کسانی بود که به این موضوع واکنش نشان داد. فرگه کار او را به طور منظم و صورتی‌تر دنبال کرد و در نهایت این آموزه در پروژه راسل و وایتهد به انجام خود رسید. رشته اصلی در تمامی این تلاش‌ها این است که ریاضیات شاخه‌ای از منطق است. به جای این‌که منطق ابزاری برای ریاضیات باشد، منطق پیش‌رو ریاضیات می‌شود. همه مفاهیم ریاضی باید در قالب مفاهیم منطقی تدوین شوند و همه قضایای ریاضیات باید به عنوان قضایای منطق بسط یابند. تمایز بین منطق و ریاضیات صرفاً عملی برای تسهیل کار درمی‌آید.

کتاب *اصول ریاضیات* راسل با مفاهیم اولیه و گزاره‌های اولیه آغاز می‌شود. این گزاره‌های اولیه متناظر با اصطلاحات تعریف‌نشده و اصول موضوعه یک مبحث مجرد صورتی آغاز می‌شود. این مفاهیم و گزاره‌های اولیه نباید در معرض تعبیر و تفسیر قرار گیرند، بلکه باید به مفاهیم شهودی منطق محدود شوند. آن‌ها را باید توصیف‌هایی موجه و فرض‌هایی درباره دنیای واقعی تلقی کرد یا حداقل آن‌ها را چنین پذیرفت. هدف *اصول ریاضیات* بسط مفاهیم و قضایای ریاضی از این مفاهیم و گزاره‌های اولیه است که با حساب گزاره‌ها آغاز می‌شود و از طریق نظریه انواع و رابطه‌ها به طرف تأسیس دستگاه اعداد طبیعی و از آن‌جا به سمت همه ریاضیاتی که از دستگاه اعداد طبیعی قابل استخراج است پیش می‌رود. برای اجتناب از پارادوکس‌های نظریه مجموعه‌ها نظریه انواع به کار گرفته می‌شود. در به‌کارگیری نظریه نوع‌ها از این قاعده تبعیت می‌شود که کلیه عناصر هر طبقه باید از یک نوع باشند. پیروی از این قاعده تعاریف غیر اسنادی را مستثنی می‌کند و بدین ترتیب از پارادوکس‌های نظریه مجموعه‌ها اجتناب می‌شود. به گونه‌ای که در *اصول ریاضیات* عمل شده است، سلسله مراتبی در داخل سلسله مراتب در نظر گرفته شده است که به اصطلاح نظریه انشقاقی انواع نامیده می‌شود. برای به دست آوردن تعاریف‌های غیر اسنادی مورد نیاز در تأسیس آنالیز «اصل تحویل پذیری» باید وارد بحث شود. انتقادات فراوانی به این اصل شده است که همان‌طور که دیدیم رمزی سعی کرد با واکاوی مفهوم پارادوکس، لازم‌نبودن آن را نشان دهد.

پروژه منطق‌گرایی راسل تلاشی بود برای تأسیس ریاضیات بر پایه منطق و به عبارت دیگر فروگاهی ریاضیات به منطق. اگر با آرای ویتگنشتاین در رساله منطقی-فلسفی وی هم‌رای باشیم، قضایای منطق همان‌گویی‌هایی توخالی‌اند و محتوای عینی ندارند. در این صورت تمام برنامه فروگاهی ریاضیات به منطق کاری بیهوده است، زیرا آنچه قرار است مبنای ریاضیات باشد خود توخالی و بی‌محتواست. از طرف دیگر اصول موضوعه‌سازی منطق و استنتاج بعضی از قضایای منطق از بعضی دیگر به عنوان اصل موضوع بی‌مورد است، زیرا تمام قضایای منطق در یک مرتبه‌اند و یک حرف می‌زنند؛ یعنی هیچ‌چیز نمی‌گویند. ویتگنشتاین در رساله می‌گوید که گزاره‌های منطق سلسله مراتب ندارند؛ «علامت ویژه گزاره منطقی این است که می‌توانیم صدق آن را از روی نمادهایش تشخیص دهیم. این واقعیت به خودی خود تمام فلسفه منطق را دربر می‌گیرد» (Wittgenstein, 1922: 6.1).

ویتگنشتاین از دو وجه به نقد فلسفه راسل می‌پردازد:

اولاً، به نظر راسل حقایق منطق مبتنی‌بر مجموعه‌ای از اصول بدیهی اولیه‌اند، اما ویتگنشتاین معتقد است که ما در منطق قضایای اولیه و قضایای فرعی ثانویه که از آن‌ها استنتاج شده باشند نداریم، زیرا تمام قضایای منطق دارای یک پایگاه معرفت‌شناختی هستند؛ یعنی همه آن‌ها معلوم متکررند و هیچ حرفی از عالم نمی‌زنند.

ثانیاً، برخلاف تصور راسل ما در منطق هیچ مفهوم اولیه‌ای نداریم، زیرا ادات‌های منطقی، مصداق یا مابه‌ازای عینی ندارند یعنی بازتاب هستی عینی نیستند، بلکه صرفاً نمادهایی برای عملیات منطقی‌اند.

پس ما در منطق نه مفاهیم اولیه داریم و نه قضایای اولیه. ویتگنشتاین معتقد است که گزاره‌های منطق همان‌گویی‌اند. قلمرو این آموزه هم اصول و هم قضایای دستگاه منطق را دربر می‌گیرد. بدین طریق تلاش راسل برای اصل موضوعی کردن منطق که در آن حقایق منطق از تعداد کمی اصول موضوعه استنتاج شوند بی‌مورد است.

پی‌نوشت

۱. برای توضیحات مبسوط‌تر ← Ferege, 1960: 73-80.

۲. ریاضی‌دان آلمانی که کارهایش در جبر مجرد و نظریه اعداد معروف است.

۳. برای دیدن اثبات ریاضی این قضیه ←

Rudin, Walter (1976). *Principles of Mathematical Analysis*, New York: Mac Graw-Hill, pp. 17-21.

منابع

کاپلستون، فردریک (۱۳۸۷). *تاریخ فلسفه، از ولف تا کانت*، ج ۶، ترجمه اسماعیل سعادت، منوچهر بزرگمهر، تهران: سروش.

Ewald, William (1999). *From Kant to Hilbert, A Source Book in the Foundations of Mathematics*, New York: Oxford University Press Inc.

Sandra, Lapointe (2011). *Bolzano's Theoretical Philosophy*, Basingstoke: Palgrave Macmillan.

Carnap, Rudolf (1983). 'The Logician Foundations of Mathematics', In *Philosophy of Mathematics*, Paul Benacerraf and Hilary Putnam (eds.), Cambridge: Cambridge University Press.

Shapiro, Stewart (2000). *Thinking about Mathematics*, Oxford: Oxford University Press.

Dummett, Michael (1991). *Ferege and Other Philosophers*, Oxford: Clarendon.

Kitcher, Phillip (1979). 'Frege's Epistemology', *The Philosophical Review*, Vol. 88.

Ferege, Gottlob (1960). *The Foundations of Arithmetic*, Trans. J. L. Austin, New York: Harper Torchbook.

Russell, Bertrand (1910). *Principia Mathematica*, Vol. 1, Cambridge: Cambridge University Press.

Griffin, Nicolas (2003). 'Mathematics in and Behind Russell's Logicism, and Its Reception', In *Cambridge Companion to Bertrand Russell*, Nicolas Griffin (ed.), Cambridge: Cambridge University Press.

Wittgenstein, Ludwig (1922). *Tractatus*, Trans. D. F. Pears and B. F. McGuinness, London: Routledge.

Ramsey, Frank P. (1926). *The Foundations of Mathematics and other Logical Essays*, London: Routledge and Kegan Paul.