

فصلنامه پژوهش‌ها و سیاست‌های اقتصادی

سال بیست و دوم، شماره ۷۰، تابستان ۱۳۹۳، صفحات ۲۶۸-۲۴۷

## آزمون آریتراژ آماری در بورس اوراق بهادار تهران

عزیز احمدزاده

دانشجوی دکترای اقتصاد دانشگاه تربیت مدرس (نویسنده مسئول)

ahmadzadeh80@yahoo.com

کاظم یاوری

دانشیار اقتصاد دانشگاه تربیت مدرس

kyavari@modares.ac.ir

علی صالح آبادی

استادیار مدیریت مالی دانشگاه امام صادق (ع)

zaker162@yahoo.com

محمد عیسیایی تفرشی

استاد حقوق خصوصی دانشگاه تربیت مدرس

tafreshi@modares.ac.ir

آریتراژ آماری یکی از روش‌های متداول کسب سود از بازار سرمایه توسط سرمایه‌گذاران حرفه‌ای است که در دهه اخیر وارد متون علمی اقتصاد مالی نیز شده است. هدف این مقاله، تشریح مفهوم و مصادیق آریتراژ آماری و آزمون قابلیت کاربرد آن در بازار سرمایه کشور است. بر این اساس، ابتدا مفهوم آریتراژ آماری ارائه می‌شود و در ادامه پس از مرور مطالعات داخلی قبل روش آزمون آریتراژ آماری و بررسی تجربی آن بر مبنای مشاهدات روزانه سهام بورس اوراق بهادار تهران طی سال‌های (۱۳۹۱-۱۳۸۰) ارائه شده است. نتایج مطالعه نشان‌دهنده آن است که تمام راهبردهای معامله‌گشتاوری آزمون شده شرایط آریتراژ آماری را تأمین نموده و همگی از مصادیق آریتراژ آماری محسوب می‌شوند، در نتیجه می‌توان نتیجه گرفت که آریتراژ آماری روشی مناسب برای کسب سود در بازار سرمایه ایران بوده و در مقابل کسب سود از این طریق دلیلی محکم بر ناکارایی بازار سرمایه ایران می‌باشد.

طبقه‌بندی JEL: G11, G14.

واژه‌های کلیدی: آریتراژ آماری، بورس اوراق بهادار تهران، راهبرد معامله، کارایی بازار.

## ۱. مقدمه

آربیتراژ آماری مدت زمان مدیدی است که توسط سرمایه‌گذاران حرفه‌ای بورس‌های دنیا مورد استفاده قرار می‌گیرد، اما به دلیل آنکه بخشی از اسرار تجاری آنان محسوب می‌شود تمایل چندانی برای افشای آن در قالب متون علمی وجود ندارد. فرصت‌های آربیتراژی زمانی وجود دارند که بازار ناکارا باشد. فرصت‌های آربیتراژ ساده<sup>۱</sup> از ناکارایی در قیمت‌های یک بازار در مقطعی از زمان ناشی شده و فرصت‌های آربیتراژ آماری از ناکارایی بازار در یک دوره زمانی به اندازه کافی طولانی (به صورت عدم تعدیل قیمت‌ها یا کند بودن سرعت تعدیل قیمت‌ها در واکنش به اطلاعات جدید بازار) ناشی می‌شوند (هال، ۱۳۸۴). بررسی وجود فرصت‌های آربیتراژ آماری در ۱۰ سال اخیر وارد مباحث مالی شده و از آن به عنوان آزمونی قابل اتکا در جهت بررسی کارایی بازارهای مالی استفاده شده است (پل، ۲۰۰۷).

در آربیتراژ معین<sup>۲</sup> سود قطعی از خرید برخی سهام و فروش برخی دیگر قابل حصول است، اما در آربیتراژ آماری قیمتگذاری نادرست<sup>۳</sup> آماری (بر مبنای ارزش انتظاری) برای یک یا چند دارایی وجود دارد که تشخیص آن توسط سرمایه‌گذار کسب سود را هنگام بازگشت به قیمتگذاری صحیح در پی خواهد داشت. به عبارت دیگر، آربیتراژ آماری نوعی راهبرد معامله در بازار سرمایه است که قیمتگذاری‌های نادرست آماری و روابط قیمتی که بر اساس انتظارات در بلندمدت صحیح هستند را حدس می‌زند و انحرافات موقتی از روابط قیمتی تعادلی بین دو سهم را به منظور کسب سود مورد استفاده قرار می‌دهد.

مزایای آربیتراژ آماری برای کسب سود و ارزیابی کارایی بازار بر مبنای این روش باعث شده است که این رویکرد به سرعت توسعه یافته و طیف وسیعی از مطالعات کارایی بازار از سال ۲۰۰۴ تاکنون را نیز تحت تأثیر قرار دهد. به عنوان مثال سو، چن و چانگ (۲۰۱۱) از این رویکرد برای بررسی وجود آربیتراژ بین بازارهای مختلف استفاده نموده و الکساکیس (۲۰۱۰) با استفاده از این روش و رویکرد همجمعی روابط بین شاخص بازارهای مختلف بین‌المللی را با یکدیگر مقایسه نموده است.

با توجه به عدم استفاده از آربیتراژ آماری به عنوان معیاری برای ارزیابی راهبردهای سرمایه‌گذاری در بورس تهران تاکنون و دلالت‌های آزمون آربیتراژ آماری برای کارایی بازار سرمایه این پژوهش با هدف معرفی آربیتراژ آماری، آزمون تجربی کارآمدی آن در بورس تهران و نیز ارزیابی کارایی بورس اوراق بهادار تهران انجام می‌گیرد. ادامه مقاله به این ترتیب سازماندهی شده است که ابتدا در بخش دوم به مروری مختصر بر مطالعات داخلی مرتبط پرداخته و پس از آن در بخش سوم مقاله روش‌شناسی

۱. آربیتراژ عبارتست از فرصت دستیابی به سود بدون ریسک از طریق ورود همزمان در دو یا چند بازار

2. Deterministic Arbitrage  
3. Mispricing

آربیتراژ آماری تشریح می‌شود. در بخش چهارم بررسی تجربی آربیتراژ آماری در بورس تهران ارائه می‌گردد. بخش پایانی مقاله نیز به جمع‌بندی اختصاص یافته است.

## ۲. پیشینه پژوهش

گرچه آزمون‌های کارایی بازار و مطالعات مرتبط با آن از زمان فاما (۱۹۷۰) تاکنون پیشینه‌ای نسبتاً پررنگ دارند و در پژوهش‌های متعددی مانند فاما (۱۹۹۱)، کاتبرتسون (۱۹۹۶)، کمپبل، لو و مکینلای (۱۹۹۷) و لیم و بروکس (۲۰۱۱) مرور شده‌اند، اما حجم آزمون‌ها و مطالعات مبتنی بر کسب سود در بازار به نسبت کمتر است. میان پژوهش‌های مبتنی بر سودآوری نیز روش‌شناسی شناسایی سود فرارمال نسبتاً متنوع بوده و هر یک از روش‌ها دارای محدودیت‌هایی برای تعمیم در استفاده هستند که یک مزیت آزمون آربیتراژ آماری عمومیت امکان استفاده از آن در شناسایی سود فرارمال است (هوگان و همکاران، ۲۰۰۴).<sup>۱</sup> آربیتراژ آماری به‌عنوان یک آزمون برای شناسایی سود فرارمال توسط هوگان و همکاران (۲۰۰۴) معرفی شد و اخیراً توسط جرو و همکاران (۲۰۱۲) بهبود یافته است که رویکردهای مذکور در بخش آتی تشریح خواهند شد.

میان مطالعات داخلی مقالات متعددی به ارزیابی کارایی بازار سرمایه پرداخته‌اند که می‌توان به صالح‌آبادی و دلیریان (۱۳۸۹) اشاره نمود که از طریق شناسایی حباب قیمتی نشان دادند که بین قیمت بنیادی و بازاری برخی سهام فاصله چشمگیری وجود دارد، بنابراین بورس اوراق بهادار کارا نیست. همچنین راسخی و خانعلی‌پور (۱۳۸۸) کارایی اطلاعاتی را با استفاده از بررسی نرمال بودن توزیع بازده سهام بر مبنای رویکرد ARMA-GARCH آزمون نموده و به این نتیجه دست یافتند که بورس تهران از کارایی اطلاعاتی برخوردار نیست. در مطالعه‌ای جدیدتر عباسیان و ذوالفقاری (۱۳۹۲) از روش فیلتر کالمن برای تحلیل کارایی ضعیف بازار به‌صورت پویا استفاده نموده‌اند. این مطالعه نیز ضمن تأیید

---

۱. آزمون آربیتراژ آماری دارای مزایایی بر سایر شیوه‌های آزمون کارایی بازار است. نخست اینکه آزمون آربیتراژ آماری مسئله فرضیه مشترک را رفع نموده و نیازی به یک مدل تعادلی بازار به‌منظور تعیین بازده‌های مازاد یا تعدیل آنها نسبت به ریسک ندارد. دیگر اینکه معمولاً در فرایند تعدیل نسبت به ریسک یک مدل خطی نسبت به عوامل (مانند فاما و فرنج، ۱۹۹۳ و کارهارت، ۱۹۹۷) در نظر گرفته می‌شود که تورش تصریح مدل مذکور می‌تواند بر نتایج آزمون اثرگذار باشد؛ حال آنکه آزمون آربیتراژ آماری می‌تواند برای هر نوع دارایی (شامل آنهایی که مانند مشتقات با استفاده از مدل‌های دارای عامل خطی قیمتگذاری نشده‌اند) نیز به کار رود. سوم آنکه یک آربیتراژ آماری مستلزم آن است که میانگین زمانی واریانس یک راهبرد کاهنده باشد که در راستای تسکین نقد اشلايفر و ویشنی (۱۹۹۷) از ریسکی بودن آربیتراژ است. حال آنکه آزمون‌های دیگر این نکته را در نظر نمی‌گیرند.

ناکارایی بازار سرمایه روندی ملایم در بهبود وضعیت کارایی ضعیف را از سال ۱۳۸۲ نتیجه‌گیری نموده است. البته مطالعات قدیمی‌تر مختلفی نیز وجود دارند که از روش‌های متفاوت دیگری مانند آزمون‌های نسبت واریانس، آزمون مطالعه وقایع یا آزمون پیش‌بینی‌پذیری قیمت‌ها استفاده نموده و به نتایجی مشابه (مبنی بر فقدان کارایی ضعیف بازار) دست یافتند که به دلیل رعایت اختصار از ذکر آنها پرهیز شده است. همچنین مطالعات مربوط به شناسایی ناهنجاری‌های بازار سرمایه (از قبیل اثر ژانویه و رفتار توده‌ای) در بازار سرمایه را نیز می‌توان به دلیل اثبات مثال‌های ناقص کارایی بازار به‌نوعی در این دسته قرار داد. در مقابل، میان مطالعات داخلی مقاله‌ای یافت نشد که به مقوله آربیتراژ آماری پرداخته باشد و به‌عنوان نزدیکترین مطالعات مقالات بسیاری به بررسی راهبردهای معامله یا سرمایه‌گذاری در بورس پرداخته یا در مورد انتخاب پورتنفوی بهینه سهام تحقیق نموده‌اند که برخی از آنها را می‌توان به شرح زیر برشمرد.

فدایی‌نژاد و صادقی (۱۳۸۵) در مطالعه‌ای ضمن معرفی دو استراتژی معکوس و مومنتوم در معاملات بورسی این دو استراتژی را از لحاظ امکان کسب بازده اضافی مقایسه نموده و به این نتیجه دست یافتند که هر یک از دو استراتژی مذکور در دوره‌ای خاص مناسب بوده و در کل استراتژی معکوس برای بلندمدت مناسب‌تر بوده است.

در مطالعه‌ای دیگر کیمیاگری و تیژری (۱۳۸۵) از شبکه‌های عصبی برای پیش‌بینی شاخص کل بورس و شاخص ۵۰ شرکت برتر استفاده نموده و بر مبنای آن به شبیه‌سازی معاملات شاخصی پرداخته‌اند. نتیجه این مطالعه آن است که معاملات مبتنی بر پیش‌بینی شبکه عصبی بازده بیشتری نسبت به خرید و نگهداری پورتنفوی بازار داشته‌اند. بر این مبنای، این مطالعه نتیجه گرفته است که بورس تهران طی دوره مورد بررسی (مهر ماه ۱۳۸۳ تا اسفند ماه ۱۳۸۵) ناکارا بوده است.

تهرانی و خجسته (۱۳۸۷) در مطالعه‌ای دیگر به بررسی اثر بهره‌وری سرمایه بر بازده راهبردهای سرمایه‌گذاری ارزشی و رشدی پرداخته‌اند.<sup>۱</sup> در نهایت، این مطالعه نتیجه می‌گیرد که بهره‌وری سرمایه اثر مثبت و معنادار بر بازده آتی سهام داشته است.

تهرانی و همکاران (۱۳۸۹) در مطالعه خود استراتژی‌های معامله مبتنی بر تحلیل تکنیکی را نسبت به استراتژی خرید و نگهداری یک سهم مورد ارزیابی قرار داده‌اند. شاخص تکنیکی مورد استفاده در مطالعه مذکور شامل میانگین متحرک ساده، میانگین متحرک موزون، میانگین متحرک نمایی، شاخص

۱. آنها شرکت‌های دارای نسبت B/M بالا را شرکت‌های ارزشی و شرکت‌های دارای نسبت B/M پایین را شرکت‌های رشدی تعریف نموده و استراتژی‌های سرمایه‌گذاری رشدی و ارزشی را به ترتیب به صورت تشکیل پورتنفوی متمرکز بر سهام رشدی و ارزشی تعریف نموده‌اند که در پایان هر سال مالی با توجه به صورت‌های مالی جدید پورتنفوها روزآمد می‌شوند.

قدرت نسبی<sup>۱</sup>، شاخص کانال کالا، استوکاستیک‌ها، شاخص ویلیامز، شاخص جریان پول و شاخص تقاضا بوده‌اند که برای ۲۰ سهم پرمعامله طی دوره (۱۳۸۴-۱۳۸۲) مورد بررسی قرار گرفتند. آنها برای آزمون وجود سود فرارمال هر استراتژی، تفاوت بازده آن استراتژی از استراتژی خرید و نگهداری را برای تمام ۲۰ سهم نمونه محاسبه نموده و آزمون صفر بودن سود مازاد مذکور (آزمون دو طرفه t) را مورد استفاده قرار داده‌اند. نتیجه حاصل این است که استراتژی‌های مذکور برای سال ۱۳۸۲ بی‌معنا و برای سال‌های ۱۳۸۳ و ۱۳۸۴ سود فرارمال معنادار به دست داده‌اند.

اسلامی‌بیدگلی و همکاران (۱۳۸۹) در مطالعه خود به بررسی میزان سودآوری استراتژی سرمایه‌گذاری مومنتوم در بورس تهران پرداخته‌اند. آنها در این مطالعه بر مقایسه بازده سبد سهام برنده و سبد سهام بازنده و نیز مقایسه بازده راهبرد مومنتوم و بازده بازار متمرکز شده‌اند. نتایج حاصل نشان‌دهنده آن است که در دوره مورد بررسی اولاً بازده سهام برنده بیش از بازده سهام بازنده بوده و ثانیاً بازده راهبرد مومنتوم بیش از بازده بازار بوده است.

فلاح شمس و عطایی (۱۳۹۲) نیز در مطالعه‌ای استراتژی شتاب را برای ۵۰ شرکت فعال در بورس تهران طی دوره (۱۳۸۴-۱۳۸۹) بر مبنای دوره‌های نگهداری ۳ و ۶ ماهه بررسی نموده و بر مبنای آزمون‌های تفاضل میانگین تحلیل واریانس یکطرفه و آزمون توکی نتیجه گرفته‌اند که استراتژی‌های مذکور برای انتخاب پورتفوی مناسب در بورس تهران مفیدند.

مطالعات مرور شده نشان‌دهنده آن است که راهبردهای مختلفی برای بررسی امکان کسب سود فرارمال در بورس تهران آزمون شده و اغلب مورد تأیید نیز قرار گرفته‌اند. شاید بتوان گفت از این منظر آربیتراژ آماری معیاری جدید برای تأیید صلاحیت بهینگی یک راهبرد معامله است. ملاحظه شد که در مطالعات مورد بررسی برای تعیین معیار بهینگی یک راهبرد معامله سودآوری آن راهبرد برای یک سهم با راهبرد خرید و نگهداری آن سهم مقایسه شده یا سودآوری یک راهبرد در بورس با سودآوری خرید و نگهداری سبد بازار طی دوره مشابه مقایسه شده و بر این مبنای خصوص سود اضافه یا مفید بودن راهبرد سرمایه‌گذاری نتیجه‌گیری شده است. در مقابل، آربیتراژ آماری معیاری قوی‌تر برای تعیین میزان سودآوری یک راهبرد ارائه می‌نماید، زیرا اولاً سود یک راهبرد را با هزینه تأمین مالی آن مقایسه نموده و ثانیاً ماهیت پویایی راهبرد را در نظر گرفته و ارزش تنزیل شده سودهای آتی را در ارزیابی لحاظ می‌کند. همچنین به میزان ریسک راهبرد توجه نموده و اطمینان از کاهنده بودن انحراف معیار سودهای آتی راهبرد یا اطمینان از غیرصفر بودن سودهای آتی را در خود جای می‌دهد، بنابراین به نظر می‌رسد

---

1. Relative Strength Index.

معیاری به مراتب قوی‌تر از شیوه‌های قبلی مورد اشاره برای ارزیابی سودآوری یک راهبرد سرمایه‌گذاری به دست می‌دهد. در ادامه، به معرفی دقیق‌تر آریترایژ آماری پرداخته می‌شود.

### ۳. روش‌شناسی پژوهش (آریترایژ آماری)

نخستین گام برای آزمون آریترایژ آماری آن است که آریترایژ آماری به صورت عملیاتی تعریف شود تا بتوان وجود یا عدم وجود آن را با استفاده از روش‌های اقتصادسنجی بررسی نمود، بنابراین ابتدا تعریف عملیاتی آریترایژ آماری از هوگان و همکاران (۲۰۰۴) تشریح شده و در ادامه نحوه آزمون وجود آریترایژ آماری تشریح می‌شود.

#### ۳-۱. تعریف عملیاتی آریترایژ آماری

فرض کنید انواع دارایی‌های قابل معامله در اقتصاد شامل سهام (یا سپد سهام)  $S_t$  و حساب بازار پول  $B_t$  با ارزش اولیه  $(B_0=1)$  باشند. در یک تعریف عملیاتی راهبرد معامله به صورت خرید و نگهداری پورتفویی از دارایی‌ها به صورت فرایندی تصادفی  $(x(t), y(t): t \geq 0)$  تعریف می‌شود که هزینه اولیه آن صفر  $(x(0)S_0 + y(0)B_0 = 0)$  و خود تأمین مالی شونده<sup>۱</sup> بوده و مشتمل بر  $x(t)$  واحد از سهام و  $y(t)$  واحد از حساب بازار پولی در زمان  $t$  می‌باشد.

فرض کنید  $V(t)$  سودهای تجمعی حاصل از معامله در زمان  $t$  باشد که از طریق راهبرد معامله  $(x(t): t \geq 0)$  کسب شده‌اند، همچنین ارزش تنزیل شده این سودهای تجمعی معامله به صورت  $v(t) = V(t) / \beta_t$  باشد که در آن  $\beta_t$  عامل تنزیل بوده و می‌تواند بر مبنای نرخ بازده دارایی بدون ریسک بیان شود. در اینصورت آریترایژ آماری را طبق هوگان و همکاران، (۲۰۰۴) و جرو و همکاران (۲۰۱۲) می‌توان به صورت زیر تعریف نمود:

آریترایژ آماری یک راهبرد معامله  $(x(t): t \geq 0)$  با هزینه اولیه صفر و خود تأمین مالی شونده است که ارزش تنزیل شده تجمعی  $v(t)$  آن دارای  $\mathcal{F}$  ویژگی‌های زیر است:

$$v(t) = 0 \quad (1)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E^P[v(t)] > 0 \quad (2)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(v(t) < 0) = 0 \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}[\Delta v(n) | \Delta v(n) < 0] = 0 \quad (4)$$

بنابراین بر اساس تعریف آربیتراژ آماری ۴ شرط را تأمین می‌کند. یک راهبرد خود تأمین مالی دارای هزینه اولیه صفر است ( $v(t) = 0$ ) که در حد دارای سودهای تنزیل شده انتظاری مثبت است احتمال زیان آن به سمت صفر همگرا می‌شود (میل می‌کند) و واریانس نمو های  $v(t)$  به ازای مقادیر منفی نمو  $v(t)$  در بی‌نهایت به صفر همگرا می‌شود. به زبان اقتصادی شرط چهارم بر این امر دلالت می‌کند که فرصت آربیتراژ آماری سود نموی<sup>۱</sup> بدون ریسک همراه با نسبت شارپ به‌طور یکنواخت فراینده طی زمان ایجاد می‌کند.<sup>۲</sup>

### ۳-۲. آزمون وجود آربیتراژ آماری

برای آزمون آربیتراژ آماری یک سری زمانی تجمعی تنزیل شده از سودهای معامله بر حسب ریال  $v(t_1), v(t_2), \dots, v(t_n)$  به دست آمده از اعمال یک راهبرد معامله مورد تحلیل و بررسی قرار می‌گیرند. تفاضل سودهای تجمعی تنزیل شده یک راهبرد معامله  $\Delta v_i = v(t_i) - v(t_{i-1})$  بر نمو های سود تجمعی تنزیل شده معامله اندازه گیری شده در نقاط زمانی با فواصل یکسان  $t_i - t_{i-1} = \Delta$  با  $t_i = i \times \Delta$  دلالت دارد. مقدار  $\Delta$  بر زمان بین نمو های یکسان دلالت دارد.<sup>۳</sup> می‌توان برای سادگی فرض نمود که سودهای معامله دارای نمو های مستقل هستند.<sup>۴</sup> بر این اساس، فرض می‌شود که سودهای معامله نموی تنزیل شده‌ای به صورت زیر داشته باشند:<sup>۵</sup>

#### 1. Incremental

۲. این تعریف شبیه فرصت آربیتراژی محدود استفاده شده برای تئوری قیمتگذاری آربیتراژ روز (۱۹۷۶) است. فرصت آربیتراژ استاندارد حالت خاصی از آربیتراژ آماری است. تفاوت بین دو مفهوم این است که آربیتراژ آماری یک شرط در محدوده بین زمانی است، حال آنکه نظریه قیمتگذاری آربیتراژ بر اساس یک محدوده بین مقطعی در زمانی خاص می‌باشد. این تفاوت مستلزم تنزیل با استفاده از حساب بازار پول و نرمالسازی زمانی در شرط چهارم است.

۳.  $t_i$  بیانگر  $i$ امین دوره‌ای است که سود تجمعی در آن اندازه گیری شده است. اگر طول دوره‌ها همگی برابر با یک باشد  $t_i$  را می‌توان همان  $i$  در نظر گرفت.

۴. هوگان و همکاران (۲۰۰۴) بعدها این فرض را آزاد نمودند، اما نتایج به دست آمده در مورد کارایی بازار را تحت تأثیر قرار نداد.

۵. با استفاده از بسط سری تیلور می‌توان نشان داد که فرمول بندی در نظر گرفته شده برای نمو ها در رابطه (۵) بسته به اندازه  $\Delta$  و  $\theta$  تصریح‌های خطی و درجه دوم (کوادراتیک) را نیز در خود دارد. به عبارت دیگر، تصریح مذکور می‌تواند دامنه وسیعی از اشکال تابعی را در خود جای داده و به این لحاظ از انعطاف پذیری لازم برخوردار بوده و نسبت به انتقادهای مربوط به تصریح فرایند تصادفی پایدار است. مهمتر آنکه همانطور که سودهای معامله در حساب بدون ریسک سرمایه گذاری شده و سبب سرمایه گذاری به نسبت کمتری در موقعیت ریسکی طی زمان می‌شوند این تصریح‌ها تغییر در ترکیب سبد آربیتراژ آماری را نشان می‌دهند.

$$\Delta v_i = \mu i^\theta + \sigma i^\lambda z_i \quad (۵)$$

که در آن،  $i = 1, 2, \dots, n$  است و  $z_i$  شامل متغیرهای تصادفی دارای توزیع مستقل و نرمال به صورت  $z_i \sim N.i.d(0,1)$  با مقدار اولیه  $z_0=0$  است. در واقع نمو سودهای معامله‌ای تجمعی تنزیل شده  $\Delta v_i$  همان سودهای معامله‌ای (غیر تجمعی) تنزیل شده در تأمین دوره  $t$  (واحدی) می‌باشند، بنابراین سودهای معامله‌ای تجمعی تنزیل شده  $v(t_i)$  را می‌توان به صورت مجموع نمو‌های آن که همان سودهای معامله‌ای غیر تجمعی است تعریف نمود:

$$v(t_n) = \sum_{i=1}^n \Delta v_i \sim dN \left( \mu \sum_{i=1}^n i^\theta, \sigma^2 \sum_{i=1}^n i^{2\lambda} \right) \quad (۶)$$

که در آن میانگین و واریانس اشاره شده در توزیع آن بر اساس رابطه (۵) مربوط به نمو‌های سودهای تجمعی به دست آمده‌اند. با توجه به فرض نرمال بودن توزیع  $v(t_i)$  می‌توان به منظور برآورد پارامترهای مهم رابطه (۵) از حداکثرسازی تابع لگاریتم درستنمایی به صورت زیر استفاده نمود:

$$\log L(\mu, \sigma^2, \lambda, \theta | \Delta v) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log(\sigma^2 i^{2\lambda}) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^{2\lambda}} (\Delta v_i - \hat{\mu} i^\theta)^2 \quad (۷)$$

حداکثرسازی تابع فوق نسبت به ۴ پارامتر مورد نیاز ۴ معادله را به دست می‌دهد که از حل همزمان آنها مقادیر پارامترهای مورد نیاز موجود در رابطه (۵) به دست می‌آید.

هوگان و همکاران (۲۰۰۴) ثابت می‌کنند یک راهبرد معامله‌ای که نمو تنزیل شده آن به صورت (۵) تصریح شده باشد زمانی که شرایط وجود آریترآژ آماری اشاره شده در روابط (۴)–(۱) را (با احتمال  $1-\alpha$  درصد) تأمین می‌کند که شرایط (۱۰)–(۸) تأمین شده باشند:

$$H1: \hat{\mu} > 0 \quad (۸)$$

$$\hat{\lambda} < \theta \quad \text{یا} \quad H2: \hat{\lambda} < 0 \quad (۹)$$

$$H3: \hat{\theta} > \max\{\hat{\lambda} - 0.5, -1\} \quad (۱۰)$$



می‌توان شکل قابل آزمون روابط فوق را به صورت زیر خلاصه نمود:

$$\begin{aligned} R_1: & \mu > 0, \\ R_2: & -\lambda > 0 \text{ or } \theta - \lambda > 0, \\ R_3: & \theta - \lambda + (1/2) > 0 \text{ and} \end{aligned} \quad (11)$$

$$R_4: \theta + 1 > 0.$$

در این حالت، جمع مقادیر  $p$  (p-values) مربوط به هر یک از فرضیه‌های صفر فوق می‌بایست کمتر از  $\alpha$  باشند، بنابراین آریترایز آماری به صورت محل تلاقی زیرفرضیه‌های<sup>۱</sup> فوق (تأمین همزمان هر ۴ شرط) تعریف می‌شود، در نتیجه (طبق قوانین دمورگان) تأمین کارایی بازار (عدم وجود آریترایز آماری) مستلزم عدم تأمین همزمان تمام زیرفرضیه‌ها خواهد بود. بر این مبنا، می‌توان [مجموعه] فرض صفر عدم وجود آریترایز آماری (برقراری کارایی بازار) را به صورت زیر نوشت:<sup>۲</sup>

$$R_1^c: \mu \leq 0 \text{ or} \quad (12)$$

$$R_2^c: -\lambda \leq 0 \text{ and } \theta - \lambda \leq 0, \text{ or} \quad (13)$$

$$R_3^c: \theta - \lambda + (1/2) \leq 0 \text{ or} \quad (14)$$

$$R_4^c: \theta + 1 \leq 0. \quad (15)$$

بنابراین در صورتی که هر یک از فروض (۱۱-۱۴) تأمین نشوند نمی‌توان فرض صفر مبنی بر کارایی بازار را رد نمود. در غیر این صورت راهبرد مورد بررسی مصداق آریترایز آماری خواهد بود. با توجه به ماهیت ترکیبی فرض صفر جرو و همکاران (۲۰۱۲) روش شناسی جدید مبتنی بر آماره Min-t را برای آزمون فرض کارایی بازار معرفی نموده‌اند که مبنای آن به این شرح است: زمانی که هر یک از زیرفرضیه‌های فرض صفر به صورت مجزا مدنظر قرار گیرند می‌توان از آماره‌های  $t$  استیودنت

### 1. Intersection of Sub-Hypotheses

۲. جرو و همکاران (۲۰۱۲) به جای آنکه فرض صفر را وجود آریترایز آماری در نظر بگیرند برای هماهنگی بیشتر با رویه متعارف فرض کارایی بازار (عدم وجود آریترایز آماری) را به عنوان فرض صفر و مبنای آزمون تعیین می‌کنند. البته آنها نشان می‌دهند که این تغییر در فرض صفر به افزایش قدرت آزمون نیز منجر می‌شود، زیرا در رویکرد قبلی با افزایش تعداد روابط از قدرت آزمون کاسته می‌شد.

$t(\hat{\theta} - \hat{\lambda} - 0.5)$ ,  $t(\hat{\theta} - \hat{\lambda})$ ,  $t(-\hat{\lambda})$ ,  $t(-\hat{\mu})$  و  $t(\hat{\theta} + 1)$  برای آزمون آنها استفاده نمود، بنابراین اگر تنها یکی از زیرفرض‌های (۱۴-۱۱) تأمین شوند (رد نشوند) راهبرد مورد بررسی آریترائز آماری نخواهد بود. بنابراین آماره Min-t با تمرکز بر زیرفرضی که نزدیکترین فاصله با پذیرش را دارد ضعیف‌ترین عنصر مجموعه را به‌عنوان معیار استنباط آماری در خصوص فرض صفر عدم وجود آریترائز آماری مدنظر قرار می‌دهد:

$$\text{Min-t} = \text{Min}\{t(\hat{\mu}), t(\hat{\theta} - \hat{\lambda} + 0.5), t(\hat{\theta} + 1), \text{Max}[t(-\hat{\lambda}), t(\hat{\theta} - \hat{\lambda})]\} \quad (16)$$

اگر آماره Min-t بزرگتر از مقدار بحرانی باشد ( $\text{Min-t} > t_c$ ) فرض صفر عدم وجود آریترائز آماری رد خواهد شد.<sup>۱</sup>

از آنجا که هر دو فرض نرمال بودن و ناخودهمبسته بودن سودهای نموی در مطالعات تجربی مورد تردید هستند، در ادامه می‌بایست معادله (۵) با کنار نهادن این دو فرض برآورد شود. برای لحاظ نمودن این امر می‌توان اجازه داد که عامل تصادفی رابطه (۵) از یک فرایند میانگین متحرک مرتبه اول MA(1) به‌صورت زیر پیروی نماید:

$$z_i = \varepsilon_i + \phi \varepsilon_{i-1} \quad \& \quad \varepsilon_i \sim \text{iid } N(0, 1) \quad (17)$$

هنگام آزمون فرض صفر عدم وجود آریترائز آماری یک پارامتر نوفه‌ای تصریح نشده نیز به مدل اضافه می‌شود (جرو و همکاران ۲۰۱۲).<sup>۲</sup>

۱. مقدار بحرانی  $t_c$  به سطح اطمینان  $\alpha$  بستگی دارد. از آنجا که محاسبه نظری توزیع آماره Min-t امکان‌پذیر نیست جرو و همکاران (۲۰۱۲) بر مبنای شبیه‌سازی مونت کارلو نسبت به محاسبه مقادیر بحرانی  $t_c$  برای دو حالت مقید ( $\theta = 0$ ) و نامقید اقدام نموده‌اند. بر این اساس، مقادیر بحرانی  $0.4754$ ،  $0.7484$  و  $1.2694$  را به ترتیب برای سطوح معناداری ۱۰، ۵ و ۱ درصد جهت استفاده در آزمون مدل مقید (CM) به‌دست آورده‌اند، همچنین با تکرار فرایند شبیه‌سازی برای مدل نامقید (UM) مقادیر بحرانی  $0.4034$ ،  $0.6004$  و  $0.9074$  را به ترتیب برای سطوح اطمینان ۱۰، ۵ و ۱ درصد به‌دست آورده‌اند.

۲. البته مایوردومو و همکاران (۲۰۱۴) نیز اخیراً برای آزمون آریترائز آماری تلاش نموده است رویکرد مذکور را با تغییر یا حذف فروض اولیه مشاهدات به نحوی توسعه دهد که برای توزیع‌های نامشخص بازده‌های نموی، فقدان واریانس همسانی و فقدان پایایی متغیرها مناسب‌تر عمل نموده و نیز قابلیت کاربرد برای ابزارهای مشتقه اعتباری را نیز داشته باشد. البته این رویکردها به قیمت پیچیدگی بیش از حد مدل‌سازی و قرار گرفتن در فضایی توپولوژیک حاصل می‌شود که در این مقاله از ورود به آن پرهیز شده است، اما می‌تواند مبنای مطالعات آتی قرار گرفته و با نتایج حاصل از این مطالعه مقایسه شود.

#### ۴. یافته‌های پژوهش

به منظور آزمون وجود آربیتراژ آماری در بورس تهران از میان راهبردهای مختلف معامله از راهبرد گشتاوری (Momentum) منتسب به جگادیش و تیمن (۱۹۹۳) به‌ازای ترکیبات مختلف از دوره‌های تشکیل و نگهداری استفاده شده است تا پس از احصای عواید آنها نسبت به آزمون آربیتراژ آماری در خصوص هر یک از آنها اقدام شود. در این راستا، ابتدا به معرفی و گردآوری داده‌ها و شیوه پردازش آنها پرداخته، سپس شیوه احصای عواید راهبردهای معامله، برآورد مدل‌ها و آزمون‌های فرض تشریح می‌شود.

#### ۴-۱. گردآوری داده‌ها

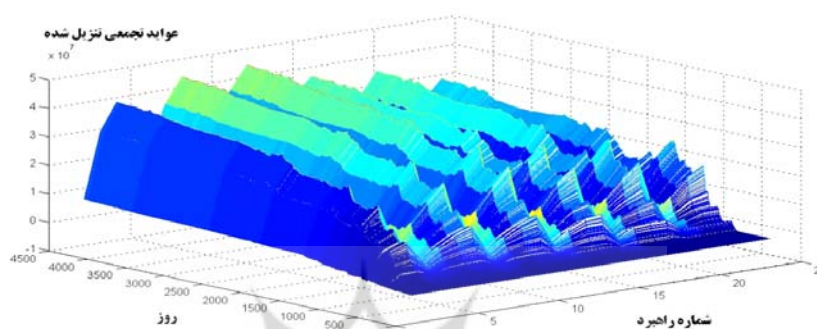
اطلاعات روزانه مربوط به سهام شرکت‌های بورسی از ابتدای سال ۱۳۸۰ تا ۱۳۹۱/۰۸/۲۳ از طریق سامانه ره‌آورد نوین دریافت و مرتب‌سازی شده است. با توجه به اینکه اطلاعات بازده سهام مربوط به هر تاریخ به صورت بازده از ابتدای سال ارائه شده بود، ابتدا بازده‌های مذکور بر مبنای قیمت پایانی سال قبل به عایدی انباشته تبدیل شد تا زمینه محاسبه بازده نگهداری سهام در دوره‌های مختلف مورد نیاز در راهبردهای معامله فراهم آید، سپس بسته به دوره‌های نگهداری مختلف بازده سهام بر مبنای قیمت پایانی روز خرید و عایدی انباشته دوره نگهداری محاسبه شده و مبنای ارزیابی‌ها قرار گرفته است.

#### ۴-۲. استخراج جریان عواید حاصل از اجرای راهبردهای معامله گشتاوری

به منظور استخراج عواید حاصل از راهبردهای مختلف سرمایه‌گذاری گشتاوری ترکیبات مختلفی از دوره‌های تشکیل و نگهداری در نظر گرفته شده و به‌ازای هر یک از ترکیبات (حدود ۲۰ ترکیب) راهبرد معامله گشتاوری اجرا شده و سود انباشته آن به صورت یک سری زمانی روزانه استخراج شد. به‌طور دقیق‌تر در این فرایند به‌ازای هر دوره تشکیل سهام حاضر در بازار از نظر میزان بازدهی طی دوره تشکیل رتبه‌بندی شده و سهام حاضر در بالاترین دهک برای خرید و سهام حاضر در پایین‌ترین دهک برای فروش انتخاب شده‌اند، سپس این سبد به مدت دوره نگهداری تصریح شده در راهبرد نگهداری شده و پس از آن معامله معکوس شده و پس از کسر هزینه‌های کارمزد خرید و فروش سهام (هر یک معادل یک درصد قیمت)، خالص عایدی نگهداری سبد (در تاریخ تسویه سبد) به حساب بانکی واریز می‌شود. در این فرایند فرض می‌شود که سرمایه‌گذار قادر به استقراض از بانک با نرخ سود تسهیلات مشخص بوده و به‌ازای موجودی روزانه نزد بانک به حساب وی سود بانکی معین تعلق می‌گیرد. پس از آن، عواید انباشته و روزانه به زمان صفر (آغاز اجرای راهبرد معامله) تنزیل شده<sup>۱</sup> و نتایج آن مبنای آزمون وجود آربیتراژ آماری در مرحله بعد قرار می‌گیرد. فرایند مذکور به صورت کدنویسی در نرم‌افزار

۱. برای سادگی، نرخ سود تسهیلات دریافتی از بانک و نرخ سود سپرده نزد بانک و نرخ تنزیل، یکسان (و معادل متوسط نرخ سود بلندمدت بانکی یعنی ۲۰ درصد) در نظر گرفته شده است.

MATLAB انجام گرفته و در نتیجه آن خالص عایدی انباشته و روزانه تنزیل شده حاصل از اجرای راهبردهای گشتاوری بر حسب ارزش ریال در زمان صفر (زمان آغاز اجرای راهبرد) محاسبه شده است (نمودار ۱).



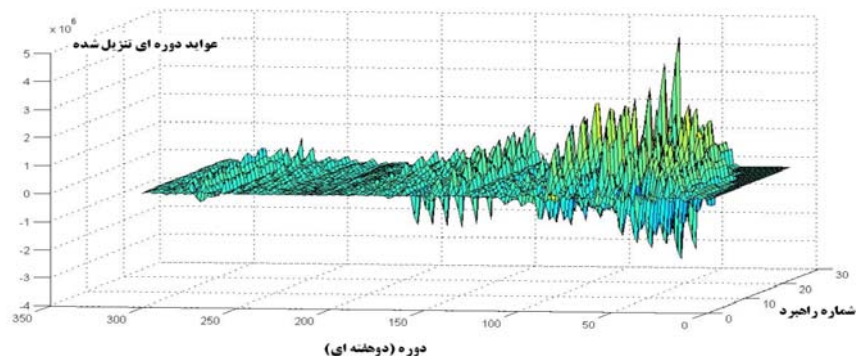
مأخذ: نتایج تحقیق.

نمودار ۱. عواید تجمعی تنزیل شده ۲۳ راهبرد مختلف طی ۴۲۰۰ روز کاری

#### ۳-۴. برآورد مدل و تحلیل نتایج

عایدی انباشته تنزیل شده حاصل از اجرای راهبردهای معامله مبنای اصلی در تشخیص وجود آربیتراژ آماری است. با این وجود، همانگونه که در بخش آزمون وجود آربیتراژ آماری تشریح شد متغیر وابسته مورد استفاده برای برآورد مدل و انجام آزمون تغییرات نمودی عایدی انباشته تنزیل شده می‌باشد، بنابراین ابتدا سری زمانی انباشته (با تواتر روزانه) عایدی بر مبنای تعداد روزهای کاری ۱۴ روزه تفاضل گیری شده و تغییرات ۱۴ روزه عایدی انباشته تنزیل شده به دست آمد (نمودار ۲).<sup>۱</sup> سپس سری زمانی به دست آمده مبنای برآورد مدل و تحلیل‌های بعدی قرار گرفت.

۱. هوگان و همکاران (۲۰۰۴) برای این آزمون از داده‌های ماهانه استفاده نموده و برای سادگی دوره یک ماهه را به عنوان دوره تعیین سود نمودی تعیین نموده‌اند، بنابراین در مطالعه ایشان تعداد مشاهدات سری زمانی عواید انباشته و سری زمانی نمودهای آن برابر است، اما در مطالعه حاضر علیرغم روزانه بودن داده‌های مورد استفاده با توجه به وجود ۲ روز تعطیلی در هر هفته، مبنای قرار دادن دوره روزانه برای محاسبه نمودها منطقی نبود و از سوی دیگر دوره ماهانه سبب کاهش بیش از حد تعداد مشاهدات می‌شود، بنابراین دوره تواتر ۱۴ روز کاری برای محاسبه نمودها در نظر گرفته شده و تعداد مشاهدات از ۴۲۵۲ (روز) به ۳۰۳ مشاهده (دو هفته ای) تغییر نمود.



مأخذ: نتایج تحقیق.

نمودار ۲. تغییرات عواید دوره‌ای تنزیل شده ۲۳ راهبرد مختلف طی ۳۰۰ دوره ۱۴ روزه

به‌ازای هر یک از راهبردهای معامله ابتدا مدل‌ها با فرض نرمال بودن پسماندها و عدم وجود خودهمبستگی آنها برای دو حالت مدل مقید (CM) و مدل نامقید (UM) برآورد شده‌اند. در صورتی که آزمون‌های تشخیصی روی مقادیر پسماند شواهدی از خودهمبستگی به‌دست داده باشد نسبت به برآورد مدل با لحاظ نمودن جزء میانگین متحرک اقدام شده است. شیوه لحاظ نمودن خودهمبستگی پسماندها بر مبنای دو الگوی میانگین متحرک مرتبه اول بودن مقادیر پسماند ( $Z_i$ ) (الگوی اول خودهمبستگی) و میانگین متحرک مرتبه اول بودن کل بخش تصادفی مدل ( $\sigma_i^2 z_i$ ) (الگوی دوم خودهمبستگی) صورت گرفت. بر این اساس، تصریح معادله (۵) برای مدل نامقید (UMC) در هر یک از حالت‌های مذکور به‌صورت زیر خواهد شد:

$$\Delta v_i = \mu i^\theta + \sigma i^{\lambda} (\varepsilon_i + \phi \varepsilon_{i-1}) \quad (17)$$

$$\Delta v_i = \mu i^\theta + \sigma i^{\lambda} z_i + \phi \sigma (i-1)^{\lambda} z_{i-1} \quad (18)$$

به طریق مشابه دو تصریح مورد اشاره در مدل مقید (CM) نیز مورد استفاده قرار گرفته‌اند که در آن  $\theta = 0$  فرض شده، بنابراین عبارت اول به عرض از مبدأ  $\mu$  کاهش یافته است.<sup>۲</sup>

۱. معادله (۱۸) برای MA(1) در پسماند (الگوی اول) بر مبنای معادلات (۱۷) و (۱۸) برای MA(1) در کل بخش تصادفی مدل بر مبنای الگوی مورد اشاره در پیوست مقاله هوگان و همکاران (۲۰۰۴) در نظر گرفته شده‌اند.  
 ۲. خروجی نرم‌افزاری مدل‌های برآورد شده و آزمون‌های همبسته‌نگار مربوط به تشخیص خودهمبستگی به‌ازای هر یک از راهبردهای معامله از طریق مکاتبه با نویسنده مسئول قابل دریافت است.

بررسی مدل‌های برآورد شده برای راهبردهای معامله نشان‌دهنده آن است که تمام مدل‌های مقید (CM) هم از لحاظ معناداری ضرایب هم از لحاظ درست‌نمایی و هم از نظر خودهمبستگی دارای وضعیت بهتری نسبت به مدل‌های نامقید (UM) هستند. در مقابل، در برآورد مدل‌های نامقید تقریباً به‌ازای تمام راهبردهای معامله برآورد حاصل شده از میانگین ( $\mu$ ) معناداری خود را از دست داده و در کل کیفیت تصریح مدل نامقید نسبت به مدل مقید بدتر می‌شود، همچنین خودهمبستگی پسماندها در مدل‌های نامقید به مراتب بیش از مدل‌های مقید بوده و دو تصریح خودهمبستگی معادلات (۱۸) و (۱۹) در پسماندها نیز در هیچ‌یک از راهبردها کمکی به رفع مسئله نمی‌کند. در نهایت، برای اغلب راهبردهای معامله درست‌نمایی مدل نامقید نسبت به مدل مقید بهبود چشمگیری نیافته و گاه بدتر نیز شده است. بر این مبناء، به‌نظر می‌رسد به‌طور کلی مدل مقید (CM) مبنای به مراتب بهتری نسبت به مدل نامقید (UM) برای آزمون آریترایژ آماری باشد،<sup>۱</sup> بنابراین مدل مقید به‌عنوان مبنای اصلی ارزیابی آریترایژ آماری مدنظر قرار می‌گیرد.<sup>۲</sup>

نظر به اینکه هر دو رویکرد HJTW(2004) و JTTW(2012) از یک تصریح مدل استفاده می‌کنند مدل برآورد شده برای آنها نیز یکسان است، بنابراین به‌ازای برآورد مدل مربوط به هر راهبرد معامله مقدار لگاریتم درست‌نمایی و مقادیر برآورد شده پارامترهای مدل مقید در جدول (۱) در کنار استفاده از

۱. در این زمینه یادآور می‌شود که هوگان و همکاران (۲۰۰۴) صراحتاً اشاره نمودند که در تمام برآوردهای صورت‌گرفته توسط آنان نیز برآوردهای به‌دست آمده  $\mu$  در مدل نامقید بی‌معنا بوده و بر مبنای آزمون نسبت درست‌نمایی مدل مقید برتر از مدل نامقید بوده و نیازی به تخمین  $\theta$  در مدل نامقید نبوده است. بر این اساس، آنان نیز در مقالات خود به گزارش نتایج حاصل از برآورد مدل‌های مقید اکتفا کرده‌اند.

۲. در خصوص مسئله خودهمبستگی به‌طور دقیق‌تر باید گفت که در اغلب مدل‌های مقید و نامقید مسئله خودهمبستگی بین پسماندها کمابیش وجود داشت. با این وجود، افزودن دو نوع تصریح پیش‌گفته برای رفع این مسئله تقریباً در هیچ‌یک از راهبردها به نتیجه بهتری منجر نشد، زیرا تصریح خودهمبستگی سبب تشدید همخطی و کاهش معناداری ضرایب اصلی شده و در بسیاری از موارد به‌دلیل منفرد شدن ماتریس واریانس کوواریانس اساساً امکان محاسبه انحراف معیار برآوردها (هرگونه استنباط آماری) از بین می‌رفت. در سایر موارد نیز علیرغم محاسبه انحراف معیار پارامترهای برآورد شده اغلب ضریب خودهمبستگی  $\phi$  معنادار نبوده و به‌دلیل عدم بهبود درست‌نمایی و هشدار نسبت به منحصر به فرد نبودن برآوردها مجدد مدل‌های بدون تصریح خودهمبستگی از نظر اعتبار برآورد در اولویت بیشتری قرار می‌گرفتند. به‌ویژه آنکه وجود خودهمبستگی صرفاً سبب افزایش انحراف معیارها و ناکارآمد بودن برآوردها می‌شود، در حالی که وجود همخطی باعث تورش‌دار شدن پارامترهای برآورد شده نیز می‌گردد. بر این اساس، در تمام راهبردهای معامله مدل‌های بدون تصریح خودهمبستگی (CM و UM) نسبت به مدل‌های دارای تصریح خودهمبستگی (CMC1، CMC2، UMC1 و UMC2) در اولویت قرار گرفتند. بر مبنای مجموع استدلال در خصوص خودهمبستگی و مدل‌های مقید و نامقید، در مجموع، مدل مقید بدون تصریح خودهمبستگی (CM) به‌عنوان مدل بهینه جهت ارزیابی تمام راهبردهای معامله مدنظر قرار گرفت.

رویکرد HJTW(2004) برای آزمون آربیتراژ آماری گزارش شده است. در ادامه، با توجه به تفاوت جزئی دو رویکرد HJTW(2004) و JTTW(2012) نتایج حاصل از برآورد مدل‌ها به ازای هر یک مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قرار گرفته است.

نتایج حاصل از ارزیابی تمام راهبردهای معامله بر مبنای روش HJTW(2004) در جدول (۱) ارائه شده است. نظر به اینکه مدل مقید مبنای آزمون قرار گرفته و  $\theta = 0$  فرض شده است هر دو گزاره H2 در معادله (۹) یکی خواهد شد. از دو گزاره R3 و R4 مربوط به H3 در معادله (۱۰) نیز گزاره اول یعنی  $0 < (1/2) + R3 - \lambda$  به  $\lambda > (1/2)$  کاهش می‌یابد و به دلیل آنکه گزاره فرض H2 به‌طور کامل آن را پوشش می‌دهد می‌توان آن را حذف نمود. گزاره دوم یعنی  $0 < R4 + \theta + 1$  نیز به‌صورت  $0 < 1$  تقلیل خواهد یافت که گزاره‌ای بدیهی بوده و نیاز به آزمون ندارد، بنابراین برای آزمون آربیتراژ آماری بر مبنای روش HJTW(2004) بررسی زیرفرضیه‌های H1 و H2 از آزمون اصلی کافی خواهد بود، بنابراین ارزش احتمال (P-value) مربوط به هر یک از آنها در ستون‌های (۸) و (۹) جدول (۱) ارائه شده و بر مبنای مجموع ارزش احتمالاً مربوط به دو زیرفرضیه استنباط در خصوص آربیتراژ آماری صورت می‌گیرد. یادآور می‌شود که در روش مذکور فرض صفر مبتنی بر وجود آربیتراژ آماری و عدم کارایی بازار بود. بر این اساس، مقادیر ارزش احتمال بیانگر احتمال رد فرض صفر وجود آربیتراژ آماری می‌باشند.<sup>۱</sup> طبق ستون دوم از سمت چپ در جدول (۱) در هیچ‌یک از راهبردهای معامله بررسی شده فرض وجود آربیتراژ آماری در سطح اطمینان ۹۸ درصد رد نمی‌شود، بنابراین در مجموع می‌توان نتیجه گرفت که تمام راهبردهای معامله مورد بررسی بر مبنای رویکرد HJTW(2004) مصداق آربیتراژ آماری می‌باشند که به معنای رد فرضیه کارایی بازار در بورس اوراق بهادار تهران است.

۱. در واقع می‌توان گفت مقادیر P-value بیانگر احتمال پذیرش فرضیه‌ای است که تساوی را در خود دارد. از آنجا که هیچکدام از زیرفرضیه‌های مورد نیاز وجود آربیتراژ آماری (روابط ۱۸-۱۶) تساوی را در خود نداشته و در زیرفرض مقابل آنها تساوی وجود دارد، لذا مقادیر P-value احتمال رد زیرفرضیه‌های آربیتراژ آماری (و احتمال پذیرش زیرفرض‌های مقابل دارای تساوی) را نشان می‌دهند.

جدول ۱. نتایج بررسی آزمون آربیتراژ آماری در هر یک از راهبردهای معاملاتی

بر مبنای مدل مقید و رویکرد HJTW(2004)

نتیجه وجود آربیتراژ آماری	ارزش احتمال (P-value)			مقادیر برآورد شده پارامترها			LogL (CM)	راهبرد	
	H1+H2	$\lambda < 0$	H2: $\mu > 0$	H1:	$\lambda$	$\sigma^2$		$\mu$	دوره نگرنداری (روز)
تأیید	۰	۰	۰	-۰/۸۱	۶/۷۵۱۲	۱۷۲۵۲	-۳۴۲۹	۳۰	۳۰
تأیید	۰	۰	۰	-۰/۸۳	۱/۳۵۱۴	۵۰۳۶۴	-۳۸۷۱	۳۰	۲۷۰
تأیید	۰	۰	۰	-۰/۹۳	۴/۹۵۱۴	۶۱۰۰۹	-۳۹۱۱	۳۰	۳۶۰
تأیید	۰/۰۰۰۵	۰	۰/۰۰۰۵	-۰/۹۷	۲/۳۵۱۴	۲۱۹۹۶	-۳۷۱۵	۶۰	۹۰
تأیید	۰/۰۰۰۱	۰	۰/۰۰۰۱	-۰/۸۴	۱/۳۵۱۴	۳۴۸۲۷	-۳۸۰۷	۶۰	۱۸۰
تأیید	۰	۰	۰	-۰/۹۴	۵/۷۵۱۴	۵۶۵۱۶	-۳۸۸۱	۶۰	۲۷۰
تأیید	۰	۰	۰	-۰/۹۳	۷/۲۵۱۴	۶۷۶۷۹	-۳۹۴۹	۶۰	۳۶۰
تأیید	۰/۰۰۶۷	۰	۰/۰۰۶۷	-۰/۸۵	۷/۱۵۱۳	۱۸۹۴۶	-۳۷۰۰	۹۰	۹۰
تأیید	۰/۰۰۰۵	۰	۰/۰۰۰۵	-۸,۰	۱/۰۵۱۴	۳۵۷۴۳	-۳۸۱۴	۹۰	۱۸۰
تأیید	۰	۰	۰	-۰/۸۹	۴/۱۵۱۴	۶۰۲۴۴	-۳۸۹۸	۹۰	۲۷۰
تأیید	۰	۰	۰	-۱/۰۸	۴/۱۵۱۵	۶۶۹۰۹	-۳۹۵۲	۹۰	۳۶۰
تأیید	۰/۰۱۳۸	۰	۰/۰۱۳۸	-۰/۹۱	۱/۵۵۱۴	۱۵۶۹۵	-۳۶۰۳	۱۸۰	۹۰
تأیید	۰/۰۰۲۳	۰	۰/۰۰۲۳	-۰/۷۹	۱/۱۵۱۴	۳۵۲۳۵	-۳۷۶۵	۱۸۰	۱۸۰
تأیید	۰/۰۰۰۴	۰	۰/۰۰۰۴	-۰/۸۸	۴/۷۵۱۴	۵۴۲۵۵	-۳۸۵۶	۱۸۰	۲۷۰
تأیید	۰/۰۰۱۵	۰	۰/۰۰۱۵	-۰/۹۴	۱/۲۵۱۵	۶۱۷۷۵	-۳۹۱۴	۱۸۰	۳۶۰
تأیید	۰/۰۰۰۴	۰	۰/۰۰۰۴	-۰/۷۷	۲/۸۵۱۳	۱۸۹۴۸	-۳۵۲۶	۲۷۰	۹۰
تأیید	۰/۰۰۳۸	۰	۰/۰۰۳۸	-۰/۸۱	۱/۴۵۱۴	۳۳۶۸۲	-۳۶۸۷	۲۷۰	۱۸۰
تأیید	۰/۰۰۰۲	۰	۰/۰۰۰۲	-۰/۸۸	۴/۶۵۱۴	۴۹۱۲۵	-۳۷۷۵	۲۷۰	۲۷۰
تأیید	۰/۰۰۲۴	۰	۰/۰۰۲۴	-۰/۹۱	۱/۰۵۱۵	۶۱۴۴۶	-۳۸۳۷	۲۷۰	۳۶۰
تأیید	۰/۰۰۰۷	۰	۰/۰۰۰۷	-۰/۷۶	۲/۶۵۱۳	۱۷۹۹۸	-۳۴۳۸	۳۶۰	۹۰
تأیید	۰/۰۰۲۲	۰	۰/۰۰۲۲	-۰/۸۱	۱/۳۵۱۴	۲۷۰۶۲	-۳۵۹۲	۳۶۰	۱۸۰
تأیید	۰/۰۰۲۹	۰	۰/۰۰۲۹	-۱/۰۸	۳/۱۵۱۵	۴۰۳۸۳	-۳۶۸۷	۳۶۰	۲۷۰
تأیید	۰/۰۰۹۲	۰	۰/۰۰۹۲	-۰/۹۳	۱/۱۵۱۵	۵۳۲۲۳	-۳۷۴۶	۳۶۰	۳۶۰

مأخذ: نتایج تحقیق.



جدول (۲) نتایج حاصل از ارزیابی تمام راهبردهای معامله بر مبنای روش Min-t مورد اشاره در JTTW(2012) را نشان می‌دهد. همانطور که پیش از این اشاره شد در این روش فرض صفر بر مبنای کارایی بازار (عدم وجود آربیتراژ آماری) تعریف شد که طبق این جابجایی در فرض صفر و فرض مقابل نسبت به رویکرد قبلی زیرفرض‌ها نیز اندکی تغییر نموده است، بنابراین در زیرفرض دوم آماره آزمون  $t(-\hat{\lambda})$  به جای  $t(\hat{\lambda})$  مورد استفاده قرار می‌گیرد. نظر به استفاده از مدل مقید و فرض  $\theta = 0$  در این روش نیز دقیقاً با استدلالی مشابه روش قبلی (HJTW(2004) از زیرفرضیه‌های روش JTTW(2012) دو زیرفرضیه روابط (۱۴) و (۱۵) منتفی شده و آماره  $t$  متناظر با آنها یعنی  $t(\hat{\theta} - \hat{\lambda} - 0.5)$  و  $t(\hat{\theta} + 1)$  در محاسبه آماره Min-t لحاظ نخواهند شد. به این ترتیب، دو گزاره رابطه (۱۳) نیز یکی شده و به  $t(-\hat{\lambda})$  تقلیل خواهند یافت، بنابراین آماره آزمون Min-t به‌ازای هر یک از راهبردهای معامله به‌صورت حداقل مقدار دو گزاره  $t(\hat{\mu})$  و  $t(-\hat{\lambda})$  محاسبه شده و در ستون مربوطه درج شده است. مقایسه آماره مذکور با مقادیر بحرانی به‌دست آمده از شبیه‌سازی مونت کارلو توسط JTTW(2012) برای مدل مقید نشان‌دهنده رد فرض صفر (مبنی بر کارایی بازار و عدم وجود آربیتراژ آماری) در سطح اطمینان ۹۹ درصد برای تمام راهبردهای معامله مورد بررسی می‌باشد، زیرا در تمام مدل‌های مورد بررسی آماره آزمون Min-t بزرگتر از مقدار بحرانی آن در سطح اطمینان ۹۹ درصد بوده است که بر رد فرض صفر دلالت دارد.

جدول ۲. نتایج بررسی آزمون آربیتراژ آماری در هر یک از راهبردهای معاملاتی

بر مبنای مدل مقید و رویکرد JTTW(2012)

نتیجه وجود آربیتراژ آماری	آماره Min- $t$	$t(-\hat{\lambda})$ (رابطه ۱۲)	$t(\hat{\mu})$ (رابطه ۱۱)	آزمون LR برای انتخاب CM نسبت به UM		دوره تشکیل (روز)	دوره نگهداری (روز)
				*	✓		
تأیید***	۶/۸۵	۲۸/۳۱	۶/۸۵	*	۱	۳۰	۳۰
تأیید***	۴/۹۸	۲۴/۱۵	۴/۹۸	✓	۰	۳۰	۲۷۰
تأیید***	۵/۱۹	۲۶/۷۷	۵/۱۹	✓	۰/۰۲	۳۰	۳۶۰
تأیید***	۳/۴۹	۳۷/۳۷	۳/۴۹	✓	۰/۰۳	۶۰	۹۰
تأیید***	۳/۸۲	۲۵/۴۵	۳/۸۲	*	۱	۶۰	۱۸۰
تأیید***	۵	۲۵/۰۲	۵	*	۰/۱۹	۶۰	۲۷۰
تأیید***	۴/۷	۲۶/۲۷	۴/۷	*	۱	۶۰	۳۶۰
تأیید***	۲/۷۱	۳۳/۲۸	۲/۷۱	✓	۰/۰۳	۹۰	۹۰
تأیید***	۳/۴۸	۲۳/۳۲	۳/۴۸	✓	۰/۰۳	۹۰	۱۸۰
تأیید***	۴/۵۷	۳/۶۸	۴/۵۷	✓	۰	۹۰	۲۷۰
تأیید***	۴/۳۶	۲۵/۹۶	۴/۳۶	✓	۰/۰۱	۹۰	۳۶۰
تأیید***	۲/۴۶	۲۶/۲۹	۲/۴۶	*	۰/۲	۱۸۰	۹۰
تأیید***	۳/۰۵	۱۹/۹۷	۳/۰۵	*	۰/۱	۱۸۰	۱۸۰
تأیید***	۳/۵۳	۲۰/۶۴	۳/۵۳	✓	۰/۰۴	۱۸۰	۲۷۰
تأیید***	۳/۱۸	۲۱/۹۳	۳/۱۸	*	۱	۱۸۰	۳۶۰
تأیید***	۲/۸۷	۲۶/۳۹	۲/۸۷	*	۱	۲۷۰	۹۰
تأیید***	۲/۸۹	۲۲/۸۴	۲/۸۹	*	۰/۱۲	۲۷۰	۱۸۰
تأیید***	۳/۰۸	۲۱/۸۷	۳/۰۸	✓	۰/۰۹	۲۷۰	۲۷۰
تأیید***	۳/۰۳	۲۲/۵۷	۳/۰۳	*	۱	۲۷۰	۳۶۰
تأیید***	۲/۷	۲۶/۶	۲/۷	*	۰/۵۴	۳۶۰	۹۰
تأیید***	۲/۲۹	۲۳/۲۳	۲/۲۹	*	۰/۲۶	۳۶۰	۱۸۰
تأیید***	۲/۹۸	۲۴/۸۶	۲/۹۸	✓	۰	۳۶۰	۲۷۰
تأیید***	۲/۶۰	۲۳/۸۵	۲/۶۰	*	۰/۱۹	۳۶۰	۳۶۰

نکته: در ستون ۵ جدول (۲) سطرها ستاره‌دار نشانگر انتخاب مدل CM و سطرها تیک‌دار نشانگر انتخاب مدل UM بر مبنای آزمون نسبت درستی هستند. ستون ۴ نیز مقادیر P-value مربوط به آزمون نسبت درستی را بر مبنای توزیع کای مربع با درجه آزادی یک نشان می‌دهد.

\* معناداری در سطح اطمینان ۹۰ درصد (مقدار بحرانی = ۰/۴۷۵۴)

\* معناداری در سطح اطمینان ۹۵ درصد (مقدار بحرانی = ۰/۷۴۸۴)

\* معناداری در سطح اطمینان ۹۹ درصد (مقدار بحرانی = ۱/۲۶۹۴)

مأخذ: نتایج تحقیق.

در مقایسه نتایج حاصل از دو رویکرد HJTW(2004) و JTTW(2012) در جداول (۱) و (۲) می توان گفت تفاوتی در خصوص استنباط های آماری صورت گرفته مبنی بر رد یا عدم رد یک راهبرد به عنوان مصداق آربیتراژ آماری مشاهده نشد. در خصوص رتبه بندی راهبردهای نزدیکتر به آربیتراژ آماری نیز تفاوتی مشاهده نشد. تفاوت اساسی آن است که در رویکرد HJTW(2004)، استنباط آماری در خصوص هر پارامتر یا زیرفرضیه بر مبنای توزیع برآوردگر آن پارامتر انجام می شود، اما در روش جدید Min-t پس از احصای آماره آزمون t مربوط به هر پارامتر یا زیرفرضیه از طریق تشکیل یک آماره آزمون تلفیقی Min-t تمام زیرفرضیه ها به صورت یکجا و بر مبنای توزیع آماره تلفیقی Min-t آزمون می شوند که دارای توزیعی متفاوت با توزیع t بوده و بسته به مدل از روش های شبیه سازی برای احصای مقادیر بحرانی آن استفاده می شود، همچنین در رویکرد جدید فرض صفر به فرض کارایی بازار تغییر یافته است که در مجموع باعث افزایش قدرت آزمون و تسهیل کاربرد آن شده است.

به منظور اطمینان بیشتر از انتخاب تصریح مناسب مدل آماره آزمون نسبت درستی برای انتخاب مدل CM و UM با استفاده از جدول توزیع کای مربع با یک درجه آزادی (تعداد قید=۱) به مقادیر P-value تبدیل و در ستون ۴ جدول (۲) ارائه شده است، همچنین نتیجه آزمون بر مبنای سطح اطمینان ۹۰ درصد در ستون ۳ نشان داده شده است، به گونه ای که مدل های CM انتخاب شده بر مبنای آزمون با علامت ستاره نشان داده شده و راهبردهایی که آزمون LR مدل نامقید UM را برای آنها پیشنهاد می دهد نیز با علامت تیک مشخص شده اند. البته علیرغم مشکلات متعدد مذکور در خصوص مدل های UM از بین ۱۰ راهبردی که آزمون LR مدل UM را نسبت به مدل CM دارای قدرت توضیح بیشتر برای آنها تشخیص داده است تنها ۴ مدل در سطح اطمینان ۹۰ درصد فرض کارایی بازار (و عدم وجود آربیتراژ آماری) را رد نمی کنند و ۶ راهبرد دیگر کارایی بازار را رد نموده و بر مصداق یافتن آربیتراژ آماری در آن راهبردها دلالت می کنند، بنابراین حتی اگر مدل های نامقید نیز در تحلیل مدنظر قرار گیرند تأثیر خاصی در استنباط آماری در خصوص وجود آربیتراژ آماری در بورس اوراق بهادار تهران ندارند و همچنان فرضیه عدم وجود آربیتراژ آماری در این بازار با ارائه مثال های نقض متعدد رد می شود.

## ۵. جمع بندی و نتیجه گیری

آربیتراژ آماری به عنوان یک روش متداول کسب سود در بازارهای مالی از چند دهه قبل مورد توجه واسطه گران و عاملین بازار سرمایه در جهان بوده و به واسطه کارآمدی آن در کسب سود فراتر مال در سال های اخیر به عنوان یک روش علمی شناسایی قابلیت کسب سود در یک بازار نیز مورد توجه قرار گرفته است. از آنجا که امکان کسب سود فراتر مال دلیلی برای ناکارایی بازار می باشد این آزمون

به‌عنوان آزمونی برای کارایی بازار نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد و با توجه به اینکه در قاعده مبادله مورد بررسی از کدامیک از اطلاعات تاریخی، جاری (ناشی از یک واقعه مالی) یا خصوصی استفاده شده باشد می‌توان بر مبنای آن در خصوص تأمین شرایط کارایی بازار در ۳ سطح ضعیف، نیمه قوی یا قوی استنباط نمود.

در این مقاله ضمن معرفی رویکرد آریترائز آماری و کاربرد آن در کسب سود شیوه آزمون وجود فرصت‌های آریترائز آماری در یک بازار مالی نیز بر مبنای مقالات هوگان و همکاران (۲۰۰۴) و جرو و همکاران (۲۰۱۲) مرور شد. البته در جستجوی مقالات داخلی مقاله‌ای در خصوص آریترائز آماری یافت نشد، اما بررسی برخی استراتژی‌های پویا در مطالعات داخلی یافت شد که می‌تواند با استفاده از الگوی آریترائز آماری مورد آزمون قرار گیرند و احتمالاً شرایط مربوط به آن را تأمین نمایند. هر چند بعید به نظر می‌رسد که در بازارهای مالی داخلی روح حاکم بر آریترائز آماری و تمایل قیمت‌ها و بازده‌ها برای برگشت به تعادل بلندمدت خود مورد توجه واسطه‌گران و معامله‌گران بازار قرار ننگرفته باشد. بر این اساس، وجود آریترائز آماری در بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از آزمون مربوطه مورد تحقیق تجربی قرار گرفت.

نتایج تجربی نشان‌دهنده آن بود که تقریباً تمام الگوهای معاملاتی مورد بررسی شرایط آریترائز آماری را بر مبنای هر دو رویکرد هوگان و همکاران (۲۰۰۴) و جرو و همکاران (۲۰۱۲) تأمین می‌کنند، به این معنا که امکان کسب سود فراتر مال با استفاده از الگوهای مختلف مبادله در بورس اوراق بهادار تهران وجود دارد که دلیلی بر ناکارایی بورس اوراق بهادار تهران نیز می‌باشد. نکته قابل تأمل آنکه الگوهای معاملاتی مورد بررسی اولاً ساده و سراسر بوده و ثانیاً مبتنی بر اطلاعات گذشته بوده‌اند؛ اما علیرغم تنزیل سودهای کسب شده به زمان صفر و احتساب انواع هزینه‌های معامله و هزینه فرصت پول (استقراض از بانک) باز هم سود فراتر مال و سود خالص مثبت با استفاده از الگوهای مربوطه حاصل می‌شود و بررسی‌های آماری و استنباط‌های مبتنی بر آن وجود آریترائز آماری را تأیید می‌کنند.

با توجه به نتایج تجربی به‌دست آمده می‌توان نتیجه گرفت روند تغییرات قیمت‌ها و تعداد و شدت انحرافات آنها از روند بلندمدت در بازار سرمایه ایران با آنچه از یک بازار کارا انتظار می‌رود فاصله بسیاری دارد و ضرورت دارد پس از بررسی علت مذکور تمهیدات لازم برای حرکت به سمت کارایی بازار مدنظر قرار گیرد. مزیت روش مورد استفاده در این مطالعه آن است که پس از اجرای اقدامات ترمیمی در جهت ارتقای کارایی بازار این الگو همچنان می‌تواند فارغ از مسائل و مشکلات سایر آزمون‌های کارایی بازار به‌عنوان مبنای قابل اتکایی برای آزمون کارایی بازار در هر ۳ سطح ضعیف، نیمه‌قوی و قوی قرار گیرد.

## منابع

- اسلامی پیدگلی، غلامرضا، نبوی جاشمی، سیدعلی، یحیی زاده فر، محمود و صدیقه ایکانی (۱۳۸۹)، "بررسی سودآوری استراتژی سرمایه گذاری مومنتوم در بورس اوراق بهادار تهران"، *مجله مطالعات کمی در مدیریت*، شماره ۱، صص ۷۶-۴۷.
- تهرانی، رضا و محمدعلی خجسته (۱۳۸۷)، "رابطه بهره‌وری سرمایه با بازده آتی سهام و تأثیر آن بر استراتژی‌های سرمایه گذاری‌های ارزشی و رشدی"، *فصلنامه علوم مدیریت ایران*، سال ۳، صص ۲۰-۱.
- تهرانی، رضا، مدرس، احمد و آرش تحریری (۱۳۸۹)، "ارزیابی استفاده از شاخص‌های تحلیل تکنیکی بر بازده سهامداران"، *مجله تحقیقات اقتصادی*، صص ۴۶-۲۳.
- راسخی، سعید و امیر خانعلی پور (۱۳۸۸)، "تحلیل تجربی نوسانات و کارایی اطلاعاتی بازار سهام (مطالعه موردی: بورس اوراق بهادار تهران)"، *فصلنامه پژوهش‌های اقتصادی ایران*، صص ۵۷-۲۹.
- صالح آبادی، علی و هادی دلیریان (۱۳۸۹)، "بررسی حباب قیمتی در بورس اوراق بهادار تهران"، *فصلنامه بورس اوراق بهادار*، صص ۷۵-۶۱.
- عباسیان، عزت‌الله و مریم ذوالفقاری (۱۳۹۲)، "تحلیل پویای کارایی سطح ضعیف در بورس اوراق بهادار تهران توسط فیلتر کالمن"، *فصلنامه پژوهش‌ها و سیاست‌های اقتصادی*، شماره ۶۵، صص ۲۵۴-۲۳۱.
- فدایی‌نژاد، اسماعیل و محسن صادقی (۱۳۸۵)، "بررسی سودمندی استراتژی‌های مومنتوم و معکوس"، *فصلنامه چشم‌انداز مدیریت بازرگانی*، شماره ۵ (۱۷ و ۱۸)، صص ۳۱-۷.
- فلاح‌شمس، میرفیض و یونس عطایی (۱۳۹۲)، "مقایسه کارایی معیارهای استراتژی شتاب (مومنتوم) در انتخاب پورتنوی مناسب"، *مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار*، شماره ۱۶، صص ۱۲۵-۱۰۹.
- کیمیای‌گری، علی محمد و مهتاب تیزری (۱۳۸۵)، "ارائه مدلی جهت آزمون و ارتقای کارایی بازار سهام"، *تحقیقات مالی*، شماره ۲۲، صص ۸۸-۶۷.
- هال، جان (۱۳۸۴)، *مبانی مهندسی مالی و مدیریت ریسک*، ترجمه سجاد سیاح و علی صالح آبادی، چاپ اول، گروه رایانه تدبیرپرداز.

Alexakis, CH. (2010), "Long-Run Relations Among Equity Indices under Different Market Conditions: Implications on the Implementation of Statistical Arbitrage Strategies", *Journal of International Financial Markets, Institutions & Money*, Vol. 20, PP. 389-403.

Campbell, J. Y., Lo, A. W. & A. C. MacKinlay (1997), "The Econometrics of Financial Markets", Princeton, NJ: Princeton University Press.

Carhart, M. (1997), "On Persistence of Mutual Fund Performance", *Journal of Finance*, Vol. 52, PP. 57-82.

Cuthbertson, K. (1996), *Quantitative Financial Economics*, John Wiley & Sons Ltd.

Fama, E. F. (1970), "Efficient Capital Markets: A Review of Theory & Empirical Work", *Journal of Finance*, Vol. 25, PP. 383-417.

Fama, E. F. (1991), "Efficient Capital Markets: II", *Journal of Finance*, Vol. 46, PP. 1575-1617.

Fama, E. F. & K. R. French (1993), "Common Risk Factors in the Returns of Stocks & Bonds", *Journal of Financial Economics*, Vol. 33, PP. 3-56.

- Hogan, S., Jarrow, R., Teo & M. Warachka** (2004), "Testing Market Efficiency Using Statistical Arbitrage with Applications to Momentum & Value Trading Strategies", *Journal of Financial Economics*, Vol. 73, PP. 525–565.
- Hsu Yu-Chia, Chen An-Pin & Iia-Haur Chang** (2011), "An Inter-Market Arbitrage Trading System Based on Extended Classifier Systems", *Expert Systems with Applications*, Vol. 34, PP. 3784-3792.
- Jarrow R., Teo M., Tse, Y. K. & M. Warachka** (2012), "An Improved Test for Statistical Arbitrage", *Journal of Financial Markets*, Vol. 15, PP. 47–80.
- Jegadeesh, N. & S. Titman** (1993), "Returns to Buying Winners & Selling Losers: Implications for Stock Market Efficiency", *Journal of Finance*, Vol. 48, PP. 65–91.
- Lim, K. P. & R. Brooks** (2011), "The Evolution of Stock Market Efficiency Over Time: A Survey of the Empirical Literature", *Journal of Economic Surveys*, Vol. 25, PP. 69–108.
- Mayordomo S, Peña J. I. & J. Romo** (2014), "Testing for Statistical Arbitrage in Credit Derivatives Markets" *Journal of Empirical Finance*, Vol. 26, PP. 59–75.
- Pole, A.** (2007), *Statistical Arbitrage: Algorithmic Trading Insights & Techniques*, Wiley, New Jersey.
- Ross, S.** (1976), "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing", *Journal of Economic Theory*, Vol. 13, PP. 341–360.
- Shleifer, A. & R. W. Vishny** (1997), "The Limits of Arbitrage", *Journal of Finance*, Vol. 52, PP. 35–55.