

محاسبه میزان ناسازگاری ساختار سلسله مراتبی و ماتریس‌های مقایسات زوجی در فرایند تحلیل سلسله مراتبی فازی

محمد حسین آرمان
جمشید صالحی صدقیانی
سارا مزدهی
علی نظری

چکیده

هرگاه عمل تصمیم‌گیری با چند گزینه و چند معیار روبرو باشد، می‌توان از روش فرایند تحلیل سلسله مراتبی (AHP) استفاده کرد. این روش دارای یک ساختار سلسله مراتبی است و اساس آن بر مقایسه زوجی معیارها و مقایسه زوجی گزینه‌ها (نسبت به هر معیار) نهفته است. برای محاسبه میزان ناسازگاری ماتریس مقایسات زوجی و محاسبه میزان ناسازگاری ساختار سلسله مراتبی، دو الگوریتم مجزا ارائه گردیده است. در این مقاله، این الگوریتم‌ها برای محاسبه مقدارهای ناسازگاری در فرایند تحلیل سلسله مراتبی فازی توسعه داده شده و وزن گزینه‌ها نیز از بسط فازی روش‌های تقریبی به دست آمده است. برای روشن شدن این روش یک مثال عددی نیز آورده شده است.

واژگان کلیدی: فرایند تحلیل سلسله مراتبی فازی، میزان ناسازگاری فازی، رتبه‌بندی فازی.

موسسه آموزش عالی غیرانتفاعی هشت بهشت (نویسنده مسئول) hosein.arman@yahoo.com

استاد گروه مدیریت صنعتی دانشگاه علامه طباطبایی

* دانشجوی دکتری مدیریت تولید و عملیات دانشگاه علامه طباطبایی

کارشناس ارشد مدیریت صنعتی دانشگاه علامه طباطبایی

تاریخ پذیرش: ۱۳۸۹/۴/۱۱

تاریخ دریافت: ۱۳۸۸/۸/۳

مقدمه

آذر در کتاب خود، فرایند تحلیل سلسله مراتبی را یکی از معروفترین فنون تصمیم‌گیری چند شاخصه معرفی می‌کند که توسط ساعتی در دهه ۱۹۷۰ ابداع گردیده است. اساس این روش را در مقایسات زوجی (به صورت میزان نهایی جانشینی) نهفته می‌داند. ماتریس‌های مقایسات زوجی ممکن است سازگار و یا ناسازگار باشند. ماتریس سازگار به این صورت تعریف می‌گردد که: اگر Π معیار به شرح C_1, C_2, \dots, C_n داشته باشیم و ماتریس مقایسه زوجی آنها به صورت A باشد (a_{ij} نشان‌دهنده ترجیح عنصر C_i بر C_j است)، چنانچه در این ماتریس داشته باشیم $a_{ij} \ a_{ik} \ a_{kj}$ آنگاه می‌گوییم ماتریس A سازگار است. کنترل سازگاری تصمیم از مزایای روش فرایند تحلیل سلسله مراتبی است. به عبارت دیگر در این روش همواره می‌توان میزان ناسازگاری تصمیم را محاسبه نمود و نسبت به خوب و بد بودن و یا قابل قبول و مردود بودن آن قضاوت کرد. در حالت کلی می‌توان گفت که میزان ناسازگاری قابل قبول یک ماتریس یا سیستم بستگی به تصمیم‌گیرنده دارد، اما ساعتی عدد ۰,۱ را به عنوان حد قابل قبول ارائه می‌نماید و معتقد است چنانچه میزان ناسازگاری بیشتر از ۰,۱ باشد بهتر است در قضاوتها تجدید نظر گردد. برای محاسبه میزان ناسازگاری یک ماتریس و میزان ناسازگاری یک سلسله مراتبی، می‌توان از الگوریتم‌هایی که برای این منظور ارائه شده‌اند استفاده کرد [۱].

قدسی‌پور بیان می‌کند که در فرایند تحلیل سلسله مراتبی، محاسبه وزن در دو قسمت جداگانه مورد بحث قرار می‌گیرد: وزن نسبی و وزن مطلق (نهایی). وزن نسبی از ماتریس مقایسه زوجی به دست می‌آید، در حالیکه وزن مطلق، رتبه نهایی هر گزینه است که از تلفیق وزن‌های نسبی محاسبه می‌گردد. اگر ماتریس مقایسه زوجی سازگار باشد، محاسبه وزن ساده بوده و از نرمال کردن عناصر هر ستون به دست می‌آید. اما در حالتی که ماتریس ناسازگار باشد، محاسبه وزن ساده نبوده و برای به دست آوردن آن، چهار روش عمده مطرح می‌کند که عبارتند از روش حداقل مربعات، روش حداقل مربعات لگاریتمی، روش بردار ویژه، و روش‌های تقریبی. روش‌های تقریبی بدین علت پیشنهاد شده‌اند که سه روش اول دارای محاسبات بسیار است. این روش‌ها عمدتاً تقریبی از روش بردار ویژه هستند که با دقت‌های مختلف، محاسبات را تسهیل

می‌نمایند. عمده این روش‌ها عبارتند از: روش مجموع سطری، روش مجموع ستونی، روش میانگین حسابی و روش میانگین هندسی. هر چند مقادیر وزن‌ها در این روش‌های تقریبی متفاوت است، اما نحوه اولویت‌ها تفاوتی نمی‌کند. بعد از به دست آوردن وزن نسبی عناصر تمام ماتریس‌های مقایسات زوجی، وزن نهایی گزینه‌ها محاسبه می‌شوند. وزن نهایی هر گزینه در یک فرایند سلسله مراتبی، از مجموع حاصل ضرب اهمیت معیارها در وزن گزینه‌ها به دست می‌آید [۳].

اصغرپور به نقل از ساعتی بیان می‌کند که هر چند روش فرایند تحلیل سلسله مراتبی، روشی براساس تحلیل مغز انسان برای مسائل پیچیده و فازی است، اما در این روش مستقیماً از اعداد فازی استفاده نمی‌شود، بلکه فازی بودن بطور غیر مستقیم از ترجیحات گزینه‌ها نسبت به هم، با یک ساختار رده‌ای استفاده می‌شود [۲]. بنابراین برای به کارگیری فرایند تحلیل سلسله مراتبی به صورت فازی، روش‌هایی پیشنهاد شده است. در این مقاله نیز ابتدا روش "میانگین حسابی" که از روش‌های تقریبی محاسبه اوزان نسبی است، برای استفاده از اعداد فازی بسط داده شده و سپس الگوریتم‌هایی نیز برای محاسبه میزان ناسازگاری ماتریس و سلسله مراتبی فازی ارائه شده است.

مرور پیشینه تحقیق

تئوری مجموعه فازی

عسگری زاده برای بیان متغیرهای زبانی و مفاهیم تقریبی به صورت کمی «تئوری مجموعه فازی» را مطرح نمود. این تئوری بیان می‌کند که اگر X مجموعه مرجع باشد، آنگاه مجموعه فازی \tilde{A} در X به صورت مجموعه دو عضوی $\{(x, \mu_{\tilde{A}}(x) | x \in X\}$ بیان می‌شود که $\mu_{\tilde{A}}(x)$ بیانگر درجه عضویت x در مجموعه فازی \tilde{A} و عددی بین صفر تا یک است. به عبارت دیگر x جزو مجموعه فازی \tilde{A} با یک درجه عضویت است. برای تعمیم مفاهیم ریاضی قطعی به مجموعه‌های فازی از اصل گسترش استفاده می‌شود. این اصل از مفاهیم اساسی تئوری مجموعه‌های فازی است و در تعمیم عملگرهای جبری و تعریف این عملگرها برای اعداد فازی بسیار مفید است. از آنجا که ریاضیات اعداد فازی مبتنی بر ریاضیات بازه‌ها است، می‌توان برخی از عملگرهای ریاضی (جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، معکوس و ضرب اسکالر) بر دو بازه مثبت A و B

را به صورت زیر نشان داد [۴]:

$$a, b, c, d \in R, A = [a, b], B = [c, d]$$

$$[a, b] \cap [c, d] = [a, \min\{b, c\}, \max\{a, d\}, b]$$

$$[a, b] \cup [c, d] = [a, \min\{a, c\}, \max\{b, d\}, b]$$

$$[a, b] \cdot [c, d] = [ac, bd]$$

$$[a, b] \div [c, d] = \left[\frac{a}{d}, \frac{b}{c}\right]$$

$$[a, b]^{-1} = \left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right]$$

$$k[a, b] = [ka, kb]$$

فرمولهای فوق بر دامنه مثبت اعداد حقیقی تعریف شده‌اند. حال اگر این فرمولها بر دامنه مثبت و منفی اعداد حقیقی تعریف شوند، فرم کلی آنها تغییر خواهد کرد. مثلاً حاصل ضرب و تقسیم دو بازه فوق بر دامنه مثبت و منفی اعداد حقیقی، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$[a, b] \cdot [c, d] = [\min\{ac, ad, bc, bd\}, \max\{ac, ad, bc, bd\}]$$

$$[a, b] \div [c, d] = \left[\min\left\{\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right\}, \max\left\{\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right\}\right]$$

در ادامه به توضیح و معرفی برخی اعداد فازی پرداخته می‌شود. به طور کلی یک عدد فازی، تعمیمی است از یک عدد معمولی که دارای این خواص باشد: محدب باشد، نرمال باشد و قطعه به قطعه پیوسته باشد. دو عدد متعارف فازی عبارتند از: عدد فازی مثلثی و عدد فازی ذوزنقه‌ای. عدد فازی (a, b, c) را یک عدد فازی مثلثی گویند به طوری که تابع عضویت آن در بازه $[a, b]$ اکیداً صعودی و برابر با $\mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{x-a}{b-a}$ و در بازه $[b, c]$ اکیداً نزولی و برابر با $\mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{c-x}{c-b}$ باشد. b بُعد میانی و a و c به ترتیب پای چپ و پای راست عدد فازی مثلثی می‌باشند. همچنین عدد فازی (a, b, c, d) را یک عدد فازی ذوزنقه‌ای گویند به طوری که تابع عضویت آن در بازه $[a, b]$ اکیداً صعودی و برابر با $\mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{x-a}{b-a}$ ، در بازه $[b, c]$ واحد و یکسان، و در بازه $[c, d]$ اکیداً نزولی و برابر با $\mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{d-x}{d-c}$ باشد. b و c دو بُعد میانی و a و d به ترتیب پای چپ و پای راست عدد فازی ذوزنقه‌ای می‌باشند.

انجام اعمال ریاضی بر اعداد فازی مثلثی یا ذوزنقه‌ای همچون انجام اعمال ریاضی بر بازه‌ها است. به عنوان نمونه حاصل تقسیم عدد فازی ذوزنقه‌ای (a_i, b_i, c_i, d_i) بر \tilde{A}_i بر عدد فازی ذوزنقه‌ای (a_j, b_j, c_j, d_j) ، \tilde{A}_j ، برابر است با $\frac{a_i}{d_j}, \frac{b_i}{c_j}, \frac{c_i}{b_j}, \frac{d_i}{a_j}$ و یا معکوس عدد فازی \tilde{A}_i به صورت عدد فازی $(\frac{1}{d_i}, \frac{1}{c_i}, \frac{1}{b_i}, \frac{1}{a_i})$ به دست می‌آید. همچنین، توجه به این نکته ضروری است که حاصل جمع و تفریق بین اعداد فازی مثلثی (یا ذوزنقه‌ای)، خود یک عدد فازی مثلثی (یا ذوزنقه‌ای) است، در صورتیکه حاصل ضرب و تقسیم بین این اعداد هر چند عددی فازی است، اما لزوماً مثلثی (یا ذوزنقه‌ای) نیست.

فرایند تحلیل سلسله مراتبی فازی

برای به کارگیری فرایند تحلیل سلسله مراتبی به صورت فازی، روش‌های متعددی پیشنهاد شده است. از اولین تلاش‌ها برای فازی کردن (AHP) می‌توان به روش ارائه شده توسط دو محقق هلندی به نام‌های لارهوون و پدریک اشاره کرد که بر اساس روش حداقل مجذورات لگاریتمی بنا شده بود [۱۹]. اما تعداد محاسبات و پیچیدگی مراحل این روش باعث شده است که چندان مورد استفاده قرار نگیرد. بنابراین روش‌های ساده‌تری برای به کارگیری AHP به صورت فازی توسعه یافت که از آن جمله می‌توان به روش باکلی اشاره کرد. در این روش از اعداد فازی ذوزنقه‌ای استفاده می‌گردد و برای محاسبه اوزان نیز از میانگین هندسی استفاده می‌شود [۵]. استم و دیگران، چگونگی توسعه تکنیک هوش مصنوعی را برای تعیین یا تقریب رتبه‌بندی ترجیحات در AHP بررسی کردند. آنها نتیجه گرفتند که فرموله بندی شبکه‌های عصبی پیش رو، ابزار قدرتمندی برای تحلیل مسائل تصمیم‌گیری چند معیاره با گزینه‌های گسسته و قضاوت‌های ترجیحی مبهم یا نامعین هستند [۲۴]. چانگ روش جدیدی را برای به کارگیری AHP به صورت فازی با عنوان روش تحلیل توسعه‌ای ارائه کرد که اعداد مورد استفاده در این روش، اعداد فازی مثلثی بودند [۱۰]. چینگ سو الگوریتم جدیدی را برای ارزیابی سیستم‌های تاکتیکی پرتاب موشکی، به وسیله فرایند تحلیل سلسله مراتبی فازی و بر مبنای درجه بندی کردن ارزش توابع عضویت پیشنهاد کرد [۱۳]. وک و دیگران با افزودن ریاضیات منطق فازی به روش کلاسیک AHP، روشی را برای ارزیابی گزینه‌های متفاوت سیکل تولیدی ارائه کردند. در این روش،

ارزیابی هر سیکل تولیدی به صورت یک مجموعه فازی به دست می آید. سپس این ارزیابی های فازی با شکل دهی مرکز ثقل هر مجموعه فازی، غیر فازی شده و در نهایت سیکل های متناوب تولیدی با توجه به هدف اصلی مسئله، به ترتیب رتبه بندی می شوند [۲۶]. کارامان و دیگران از یک روش عینی و ذهنی فازی، برای به دست آوردن اوزان گزینه ها از AHP و انجام یک ارزیابی موزون فازی استفاده کردند [۱۶]. دنگ رویکردی فازی را برای حل مسائل تحلیلی چند شاخصه کمی به صورت یک روش ساده ارائه کرد [۱۵]. همچنین لی و دیگران نیز ایده های پایه ای AHP را مرور کرده و بر مبنای این ایده ها مفهوم بازه مقایسه ای را معرفی کردند. سپس بر اساس بهینه سازی احتمالی، یک روش شناسی را برای دستیابی به سازگاری کلی و وفق سازی با طبیعت فازی فرایند مقایسه، پیشنهاد کردند [۲۰]. چنگ روش جدیدی را برای ارزیابی سیستم های جنگ افزاری، با روش فرایند تحلیل سلسله مراتبی و بر اساس وزن متغیرهای زبانی پیشنهاد کردند [۱۲]. ژو و دیگران مبحثی را بر روش تحلیلی توسعه یافته و کاربردهای AHP فازی ارائه کردند [۲۷].

شان و دیگران برای انتخاب فناوری، الگوریتمی ارائه کردند که هر دو مزایای ملموس و غیر ملموس محیط فازی را به صورت کمی تبدیل می کرد و بر این اساس یک کاربرد از تئوری مجموعه های فازی را در تحلیل ساختار سلسله مراتبی و ارزیابی های اقتصادی توضیح دادند. آنها با یکپارچه سازی سلسله مراتب، وزن هر گزینه فناوری را که شاخص مناسب فازی نامیده می شد، کسب کرده و با رتبه بندی این شاخص های مناسب فازی، رتبه و ترجیحات تکنولوژی های مختلف را به دست آوردند. از دیدگاه ارزیابی اقتصادی، یک تحلیل جریان نقدی فازی به کار رفته است [۸]. شان و دیگران همچنین رویکرد یکپارچه ای را برای طراحی اتوماتیک سیستم های تولیدی انعطاف پذیر ارائه کردند که در آن از تکنیک های تصمیم گیری چند معیاره و شبیه سازی استفاده می شد. فرایند طراحی شامل ساختار و آزمون گزینه های مختلف طراحی با استفاده از روش های شبیه سازی بود. از انتخاب مناسب ترین طراحی (بر اساس فرایند تحلیل سلسله مراتبی) برای تحلیل خروجی مدل های شبیه سازی سیستم تولید انعطاف پذیر استفاده شد. همچنین ابزارهای هوشمندی (از قبیل سیستم های خبره، سیستم های فازی و شبکه های عصبی) برای پشتیبانی از فرایند طراحی سیستم تولید

انعطاف پذیر توسعه یافتند و تکنیک فعال x برای یکپارچه سازی واقعی فرایند طراحی اتوماتیک سیستم تولیدی انعطاف پذیر و فرایند پشتیبانی هوشمند از تصمیم به کار گرفته شد [۹].

لیونگ و کائو تعریف فازی پایداری را با لحاظ کردن یک انحراف تولرانسی پیشنهاد کردند. ضرورتاً، نسبت‌های فازی بین اهمیت‌های وابسته، و انحراف تولرانسی مجاز، به عنوان محدودیت‌هایی بر مقادیر عضویت مقایسات نسبی فرموله می‌شوند. اوزان فازی نسبی و نهایی از طریق اصل گسترش تعیین می‌شوند. گزینه‌ها بر اساس اوزان نهایی و با به کارگیری روش رتبه‌بندی حداکثر - حداقل، رتبه‌بندی می‌شوند [۲۱]. کوئو و دیگران یک سیستم پشتیبانی از تصمیم را برای جایابی یک انبار جدید توسعه دادند که اولین بخش از این سیستم پیشنهادی، توسعه ساختار سلسله مراتبی برای فرایند تحلیل فازی است [۱۸]. سبسی [۶] و سبسی و کارامان [۷] نیز رضایت مشتریان از شرکت‌های خدماتی خوار و باری در ترکیه را با استفاده از فرایند تحلیل سلسله مراتبی فازی اندازه گیری کردند. همچنین کارامان و دیگران نیز روشی را برای انتخاب تأمین کننده بر پایه AHP فازی ارائه کرده‌اند [۱۷]. وانگ و دیگران نیز با مروری بر روش لگاریتم حداقل مجذورات در فرایند تحلیلی سلسله مراتبی، به عدم صحت این روش در نرمال سازی اوزان فازی اشاره می‌کنند [۲۵]. چانگ و دیگران همچنین رویکردی در قالب AHP، برای پایین آوردن عدم قطعیت و عدم صحت روش‌های محاسبه در فاز پیش انتقال و زمانی که قضاوت‌های خبرگان به صورت اعداد فازی سه گانه ارائه می‌شوند، پیشنهاد داده‌اند [۱۱]. دادورین برای اندازه گیری سیستم‌های ایمنی در محیط کار و با توجه به نیاز به رویکرد کل نگر برای این اندازه گیری، از رویکرد AHP که بطور هم‌زمان ارزیابی چند معیاره را ممکن می‌سازد، استفاده کرده است [۱۴]. مامت و دانیل نیز از تجزیه انفرادی وزن‌ها و رویکرد دوگانه در AHP فازی برای به دست آوردن زمان متوسط لازم برای رتبه‌بندی کاندیداها در گروه‌های بزرگ بهره جسته‌اند [۲۳]. لیو نیز با نگاهی مشابه یک ماتریس دو طرفه سازگار برای زمانی که داده‌ها اعداد مطلق هستند، پیشنهاد کرده است که در فرایند تصمیم‌گیری احتمال رسیدن به جواب‌های گمراه کننده را کاهش می‌دهد [۲۲].

محاسبه میزان ناسازگاری ساختار سلسله مراتبی و ماتریس‌های مقایسات زوجی در فرایند تحلیل سلسله مراتبی فازی

در این بخش به ارائه روشی برای محاسبه وزن نسبی و نهایی گزینه‌ها در سلسله مراتب فازی پرداخته می‌شود. سپس الگوریتمهای موجود برای محاسبه میزان ناسازگاری ماتریس‌های مقایسات زوجی و همچنین الگوریتم محاسبه میزان ناسازگاری ساختار سلسله مراتبی برای به کارگیری در شرایط فازی بسط داده می‌شوند. این بخش مراحل زیر را در بر می‌گیرد:

- محاسبه وزن نسبی عناصر جداول مقایسات زوجی با روش میانگین حسابی فازی؛
- محاسبه وزن نهایی گزینه‌ها؛
- رتبه‌بندی گزینه‌ها؛
- الگوریتم محاسبه میزان ناسازگاری ماتریس‌های مقایسات زوجی فازی؛
- الگوریتم محاسبه میزان ناسازگاری یک سلسله مراتبی فازی.

محاسبه وزن نسبی عناصر جداول مقایسات زوجی با روش میانگین حسابی فازی

محاسبه وزن در AHP در دو قسمت جداگانه مورد بحث قرار می‌گیرد: وزن نسبی و وزن مطلق (نهایی). وزن نسبی از ماتریس مقایسه زوجی به دست می‌آید، در حالی که وزن مطلق، رتبه نهایی هر گزینه است که از تلفیق وزن‌های نسبی محاسبه می‌گردد. یکی از راه‌های محاسبه وزن نسبی در ماتریس‌های ناسازگار، استفاده از روش‌های تقریبی است. از جمله این روش‌ها می‌توان به روش میانگین حسابی اشاره کرد. هدف این بخش، بسط و توسعه این روش برای محاسبه وزن نسبی عناصر فازی ماتریس‌های مقایسات زوجی است. مراحل به کارگیری این روش برای استفاده از اعداد فازی مثلثی یا ذوزنقه‌ای به صورت زیر است:

- ۱- داده‌های ماتریس مقایسه زوجی را به صورت اعداد فازی مثلثی (یا ذوزنقه‌ای) به دست آورید،
- ۲- داده‌های فازی هر ستون را به صورت نرمال در آورید،
- ۳- میانگین سطری داده‌های نرمال شده را محاسبه کنید تا وزن نسبی عناصر به صورت

فازی به دست آید.

همان طور که در فوق اشاره گردید بعد از تشکیل ماتریس مقایسات زوجی به صورت اعداد فازی مثلثی یا دوزنقه‌ای، باید داده‌های این ماتریس نرمال شوند. برای نرمال کردن اعداد فازی، از بسط روش قطعی آن استفاده می‌شود. در حالت قطعی، یک عدد نرمال شده از تقسیم آن عدد بر مجموع کل اعداد (n عدد) به دست می‌آید. به عبارت دیگر، برای نرمال کردن اعداد قطعی از فرمول زیر استفاده می‌شود:

$$n_i = \frac{a_i}{\sum_{i=1}^n a_i}, i = 1, 2, \dots, n$$

که در آن n_i نرمال شده عدد a_i است. حال اگر این فرمول برای نرمال کردن اعداد فازی تعمیم داده شود، فرم کلی آن به صورت زیر تغییر می‌یابد:

$$\tilde{N}_i = \frac{\tilde{A}_i}{\sum_{i=1}^n \tilde{A}_i}, i = 1, 2, \dots, n$$

که در آن عدد فازی نرمال شده \tilde{N}_i از تقسیم عدد فازی \tilde{A}_i بر مجموع کل اعداد فازی حاصل می‌شود. اما با توجه به اینکه عدد \tilde{N}_i یک عدد فازی است، لازم است ابعاد آن مشخص گردد که این امر به نوع عدد فازی \tilde{A}_i بستگی دارد. مثلاً اگر n عدد فازی مثلثی به صورت $\tilde{A}_i = (a_i, b_i, c_i), i = 1, 2, \dots, n$ مفروض باشند، آنگاه عدد فازی نرمال شده \tilde{N}_i از حاصل تقسیم زیر به دست می‌آید:

$$\tilde{N}_i = \frac{(a_i, b_i, c_i)}{\left(\sum_{i=1}^n a_i, \sum_{i=1}^n b_i, \sum_{i=1}^n c_i \right)}$$

اما مخرج این کسر از جمع n عدد فازی مثلثی حاصل شده و خود نیز یک عدد فازی مثلثی است. بنابراین با استفاده از رابطه ریاضی تقسیم بین اعداد فازی مثلثی، می‌توان نتیجه گرفت که عدد فازی نرمال شده \tilde{N}_i برابر است با:

$$\tilde{N}_i = \left(\frac{c_i}{\sum_{i=1}^n c_i}, \frac{b_i}{\sum_{i=1}^n b_i}, \frac{a_i}{\sum_{i=1}^n a_i} \right)$$

به همین صورت، اگر Π عدد فازی ذوزنقه‌ای به صورت $\tilde{A}_i (a_i, b_i, c_i, d_i), i=1,2,\dots,n$ مفروض باشند، آنگاه عدد فازی نرمال شده \tilde{N}_i ، از تقسیم عدد فازی ذوزنقه‌ای \tilde{A}_i بر مجموع کل اعداد فازی ذوزنقه‌ای (که خود یک عدد فازی ذوزنقه‌ای است) و به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\tilde{N}_i = \frac{(a_i, b_i, c_i, d_i)}{\left(\begin{matrix} a_i & b_i & c_i & d_i \\ i & i & i & i \end{matrix} \right)}$$

در اینجا نیز با استفاده از رابطه ریاضی تقسیم بین اعداد فازی ذوزنقه‌ای، می‌توان نتیجه گرفت که عدد فازی نرمال شده \tilde{N}_i برابر است با:

$$\tilde{N}_i = \left(\frac{d_i}{i}, \frac{c_i}{i}, \frac{b_i}{i}, \frac{a_i}{i} \right)$$

باید توجه داشت که اولاً از نرمال کردن چند عدد فازی مثلثی (یا ذوزنقه‌ای) اعدادی فازی به دست می‌آیند، ولی لزوماً این اعداد، عدد فازی مثلثی (یا ذوزنقه‌ای) نیستند و فقط بیان کننده تقریبی از یک عدد فازی مثلثی (یا ذوزنقه‌ای) نرمال شده هستند. و ثانیاً بر خلاف روش نرمال سازی اعداد قطعی، از جمع اعداد فازی نرمال شده، عدد قطعی "یک" به دست نمی‌آید، اما می‌توان اظهار داشت که از جمع این اعداد، عدد فازی "تقریباً یک" حاصل می‌شود.

محاسبه وزن نهایی گزینه‌ها

ساختار مثال مورد استفاده در این مقاله، یک ساختار رده‌ای سه سطحی است که اولین سطح از آن شامل هدف تصمیم‌گیری، و سطوح دوم و سوم آن به ترتیب شامل معیارها (شاخص‌ها) و گزینه‌های مفروض از مسئله است. وزن نهایی هر گزینه از حاصل ضرب وزن نسبی معیارها در وزن نسبی گزینه‌ها (نسبت به هر معیار) به دست می‌آید.

رتبه‌بندی گزینه‌ها

رتبه‌بندی گزینه‌ها با توجه به اوزان نهایی آنها صورت می‌پذیرد و از آنجا که این

اوزان به صورت اعداد فازی می‌باشند، به اعتقاد اصغرپور باید برای رتبه‌بندی آنها و انتخاب بهترین گزینه، از روش‌های رتبه‌بندی فازی استفاده شود. در این مقاله برای رتبه‌بندی اعداد فازی از روش بالدوین^۱ استفاده شده است، این روش از جمله روش‌های رتبه‌بندی با به‌کارگیری درجه بهینگی محسوب می‌شود که در آن برای رتبه‌بندی گزینه‌های فازی، از یک رابطه دو بُعدی فازی پیشنهاد شده است. در این روش ابتدا درجه ارجحیت گزینه فازی \tilde{A}_i در مقایسه با سایر گزینه‌ها به دست می‌آید که آن را z_{ij} می‌نامند. سپس با محاسبه حداقل z_{ij} ها، نمره ارجحیت گزینه فازی \tilde{A}_i که به صورت $\mu_s(i)$ نشان داده می‌شود، به دست می‌آید. در آخر نیز با توجه به این نمرات، گزینه‌های فازی رتبه‌بندی می‌شوند [۲].

درجه ارجحیت عدد فازی مثلثی $\tilde{A}_i = (a_i, b_i, c_i)$ بر عدد فازی مثلثی $\tilde{A}_j = (a_j, b_j, c_j)$ ، از فرمول زیر محاسبه می‌شود (فرمول اصلی با تغییراتی در نحوه نوشتن به صورت زیر تبدیل شده است):

$$z_{ij} = \frac{c_i - a_j}{1 + (c_i - b_i) + (b_j - a_j)}$$

و با انجام تعدیلاتی بر روی فرمول فوق، درجه ارجحیت عدد فازی ذوزنقه‌ای $\tilde{A}_i = (a_i, b_i, c_i, d_i)$ بر عدد فازی ذوزنقه‌ای $\tilde{A}_j = (a_j, b_j, c_j, d_j)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$z_{ij} = \frac{d_i - a_j}{1 + (d_i - c_i) + (b_j - a_j)}$$

الگوریتم محاسبه میزان ناسازگاری ماتریس‌های مقایسات زوجی فازی

در بخش‌های قبل روشی برای محاسبه وزن نسبی گزینه‌های یک ماتریس مقایسه زوجی، با استفاده از روش "میانگین حسابی فازی" ارائه گردید. اما آیا ماتریس مقایسات زوجی به دست آمده از فرد خبره، دارای سازگاری قابل قبولی است؟ حالت کاملاً سازگار در ماتریس فازی با توجه به ماهیت داده‌های این ماتریس از مفهوم چندانی برخوردار نیست. با این وجود در این ماتریس‌ها نیز می‌توان یک حالت "تقریباً سازگار" را جستجو کرد تا از بروز قضاوت‌های سهل‌انگارانه ممانعت گردد. مثلاً

فرض کنید گزینه C_1 به گزینه C_2 و همچنین گزینه C_2 به گزینه C_3 "تقریباً ۲ برابر" ارجح باشند. حال اگر گزینه C_1 به گزینه C_3 "تقریباً ۹ برابر" ارجحیت داده شود، این ماتریس را می توان ناسازگار و در صورتیکه این ترجیح "تقریباً ۴ برابر" باشد، می توان ماتریس را "تقریباً سازگار" و قضاوت های فرد خبره را معتبر دانست. در ادامه الگوریتم محاسبه میزان ناسازگاری ماتریس مقایسه زوجی [۲، ص ۷۴] برای استفاده از اعداد فازی بسط داده می شود. مراحل این الگوریتم به صورت زیر است:

داده های ماتریس فازی مقایسات زوجی \tilde{A} را به فرم اعداد مثلثی (یا دوزنقه ای) تشکیل دهید،

وزن نسبی گزینه های این ماتریس را به دست آورید (مثلاً از روش میانگین حسابی فازی) و آن را بردار وزن فازی \tilde{W}_i بنامید،

اندازه تقریبی بزرگترین مقدار ویژه فازی ماتریس \tilde{A} ($\tilde{\lambda}_{\max}$) را به صورت زیر تخمین بزنید:

با ضرب بردار \tilde{W}_i در ماتریس \tilde{A} تخمین مناسبی از $\tilde{\lambda}_{\max(i)} \tilde{W}_i$ به دست آورید، از تقسیم $\tilde{\lambda}_{\max(i)} \tilde{W}_i$ بر \tilde{W}_i مربوطه، تخمین هایی از $\tilde{\lambda}_{\max(i)}$ را محاسبه نمایید، متوسط $\tilde{\lambda}_{\max(i)}$ های به دست آمده را پیدا کرده و آن را $\tilde{\lambda}_{\max}$ بنامید.

مقدار شاخص ناسازگاری فازی $I.I.$ را از رابطه زیر محاسبه نمایید: (n بُعد ماتریس است)

$$I.I. = \frac{\tilde{\lambda}_{\max} n}{n - 1}$$

میزان ناسازگاری فازی $I.R.$ ماتریس \tilde{A} را از فرمول زیر به دست آورید:

$$I.R. = \frac{I.I.}{I.I.R.}$$

که در این فرمول $I.I.R.$ شاخص ناسازگاری ماتریس تصادفی^۲ است. این شاخص برای ماتریس هایی که اعداد آنها کاملاً تصادفی اختیار شده باشند محاسبه شده که مقادیر آن برای ماتریس های n بُعدی مطابق جدول ۱ است.

1- Fuzzy Inconsistency Index
2- Fuzzy Inconsistency Ratio
3- Inconsistency Index of Random Matrix

جدول ۱. مقدار شاخص‌های ناسازگاری تصادفی برای ماتریس‌هایی با ابعاد مختلف

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
I.I.R.	۰	۰	۰,۵۸	۰,۹	۱,۱۲	۱,۲۴	۱,۳۲	۱,۴۱	۱,۴۵	۱,۴۵

به عبارت دیگر در هر ماتریس، حاصل تقسیم شاخص ناسازگاری بر شاخص ماتریس تصادفی هم بُعدش، معیار مناسبی برای قضاوت در مورد ناسازگاری ماتریس است که آن را میزان ناسازگاری می‌نامند. چنانچه این عدد کوچکتر یا مساوی ۰,۱ باشد ماتریس از سازگاری تقریبی برخوردار است، در غیر این صورت باید در قضاوتها تجدید نظر شود. البته باید توجه داشت که شاخص ناسازگاری ماتریس تصادفی برای ماتریس‌های قطعی n بُعدی به دست آمده که در این الگوریتم برای محاسبه میزان ناسازگاری ماتریس‌های فازی تعمیم داده شده است.

الگوریتم محاسبه میزان ناسازگاری یک سلسله مراتبی فازی

در این بخش، الگوریتم محاسبه میزان ناسازگاری سلسله مراتبی با تعریف قدسی پور، برای استفاده از اعداد فازی و به صورت زیر بسط داده می‌شود [۲]:

- شاخص ناسازگاری فازی هر جدول یعنی $I.I.(i)$ را در وزن عنصر مربوطه اش (یعنی عنصری که جدول در مقایسه با آن ساخته شده است) ضرب نموده و حاصل جمع آنها را به دست آورید. این حاصل جمع را $\overline{I.I.}$ بنامید،

- شاخص ناسازگاری تصادفی هر جدول یعنی $I.I.R.(i)$ را در وزن عنصر مربوطه اش ضرب کرده و مجموعشان را $\overline{I.I.R.}$ بنامید،

- میزان ناسازگاری سلسله مراتب فازی یعنی $I.R.(H)$ را از حاصل تقسیم $\frac{\overline{I.I.}}{\overline{I.I.R.}}$ به دست آورید.

تشریح یک مثال برای تبیین رویکردهای ارائه شده

در این قسمت به منظور تبیین رویکردهای ارائه شده از یک مثال به نقل از اصغرپور استفاده شده است [۲]. در این مثال درجه زیان بخشی سه نوع حکومت جمهوری، سلطنتی و مذهبی (A_1, A_2, A_3) در مقابل سه شاخص (صداقت، پارتی بازی و فساد) با

استفاده از اصول رده‌ای AHP توسط یک متخصص به صورت اعداد فازی دوزنقه‌ای و به صورت جداول مقایسات زوجی ۲، ۳، ۴ و ۵ امتیاز دهی شده است.

جدول ۲. ماتریس مقایسات زوجی معیارها نسبت به هم از نظر تصمیم‌گیرنده

معیارها	صداقت (C _۱)	پارتی بازی (C _۲)	فساد (C _۳)
صداقت (C _۱)	(۱ او او ۱)	(۱/۷ او ۱/۶ او ۱/۶ او ۲)	(۱/۳ او ۱/۲ او ۱/۲ او ۱)
پارتی بازی (C _۲)	(۵ او ۶ او ۷)	(۱ او او ۱)	(۳ او ۳ او ۳)
فساد (C _۳)	(۱ او ۲ او ۳)	(۱/۳ او ۱/۳ او ۱/۳ او ۱/۳)	(۱ او او ۱)

جدول ۳. ماتریس مقایسات زوجی گزینه‌ها نسبت به معیار صداقت از نظر تصمیم‌گیرنده

صداقت (C _۱)	گزینه A _۱	گزینه A _۲	گزینه A _۳
گزینه A _۱	(۱ او او ۱)	(۱/۴ او ۱/۳ او ۱/۳ او ۱/۲)	(۱/۲ او ۱/۲ او ۱/۲ او ۱/۲)
گزینه A _۲	(۲ او ۳ او ۴)	(۱ او او ۱)	(۱ او او ۲)
گزینه A _۳	(۲ او ۲ او ۲)	(۱/۲ او ۱/۲ او ۱/۲ او ۱)	(۱ او او ۱)

جدول ۴. ماتریس مقایسات زوجی گزینه‌ها نسبت به معیار پارتی بازی از نظر تصمیم‌گیرنده

پارتی بازی (C _۲)	گزینه A _۱	گزینه A _۲	گزینه A _۳
گزینه A _۱	(۱ او او ۱)	(۶ او ۶ او ۷)	(۲ او ۲ او ۴)
گزینه A _۲	(۱/۷ او ۱/۶ او ۱/۶ او ۱/۶)	(۱ او او ۱)	(۱/۲ او ۱/۲ او ۱/۲ او ۱)
گزینه A _۳	(۱/۴ او ۱/۴ او ۱/۲ او ۱/۲)	(۱ او او ۲)	(۱ او او ۱)

جدول ۵. ماتریس مقایسات زوجی گزینه‌ها نسبت به معیار فساد از نظر تصمیم‌گیرنده

فساد (C _۳)	گزینه A _۱	گزینه A _۲	گزینه A _۳
گزینه A _۱	(۱ او او ۱)	(۱ او ۲ او ۳)	(۷ او ۸ او ۸)
گزینه A _۲	(۱/۳ او ۱/۲ او ۱/۲ او ۱)	(۱ او او ۱)	(۳ او ۳ او ۴)
گزینه A _۳	(۱/۸ او ۱/۸ او ۱/۸ او ۱/۷)	(۱/۴ او ۱/۴ او ۱/۳ او ۱/۳)	(۱ او او ۱)

ملاحظه می‌شود که خاصیت عکس‌پذیری در تمام ماتریس‌ها حفظ شده است. همچنین برای انجام محاسبات، تمام داده‌های این ماتریس‌ها (حتی اعداد قطعی) به فرم اعداد فازی دوزنقه‌ای نوشته شده‌اند. هدف انتخاب بهترین شیوه حکومت و تعیین میزان

سازگاری جداول مقایسات زوجی و ساختار سلسله مراتبی داده شده است. برای این منظور مراحل زیر صورت پذیرفته است:

محاسبه وزن نسبی عناصر جداول مقایسات زوجی با روش میانگین حسابی فازی

هدف این قسمت محاسبه وزن نسبی عناصر هر یک از جداول مقایسات زوجی است. برای این منظور از روش میانگین حسابی فازی استفاده شده است. برای مثال به جدول ۲ توجه شود. برای محاسبه وزن نسبی عناصر این جدول، ابتدا جمع ستونی آن محاسبه می‌شود. از آنجا که داده‌های این ماتریس به صورت اعداد فازی دوزنقه‌ای هستند، بنابراین از جمع ستونی آنها نیز اعداد فازی دوزنقه‌ای به دست می‌آید. حال با استفاده از روابط بیان شده، داده‌های این جدول نرمال می‌شوند که نتایج آن در جدول ۶ داده شده است.

جدول ۶. ماتریس نرمال شده حاصل از جدول ۲

معیارها	ستون نرمال شده اول	ستون نرمال شده دوم	ستون نرمال شده سوم
صداقت (C _۱)	(۰,۰۹۱ و ۰,۱۱ و ۰,۱۱ و ۰,۱۴۳)	(۰,۰۹۳ و ۰,۱۱ و ۰,۱۱ و ۰,۱۳۵)	(۰,۰۶۷ و ۰,۱۱ و ۰,۱۱ و ۰,۲۳۱)
پارتنری بازی (C _۲)	(۰,۴۵۴ و ۰,۶۶۷ و ۰,۶۶۷ و ۱)	(۰,۶۵۲ و ۰,۶۶۷ و ۰,۶۶۷ و ۰,۶۸)	(۰,۶ و ۰,۶۶۷ و ۰,۶۶۷ و ۰,۶۹۲)
فساد (C _۳)	(۰,۰۹۱ و ۰,۲۲۲ و ۰,۲۲۲ و ۰,۴۲۸)	(۰,۲۱۷ و ۰,۲۲ و ۰,۲۲۲ و ۰,۲۲۶)	(۰,۲ و ۰,۲۲۲ و ۰,۲۲۲ و ۰,۲۳۱)
جمع	(۰,۶۳۶ و ۱ و ۱ و ۰,۵۷۱)	(۰,۹۶۳ و ۱ و ۱ و ۰,۳۹)	(۰,۸۶۷ و ۱ و ۱ و ۰,۵۳۴)

با توجه به داده‌های این جدول می‌توان اظهار داشت که از جمع اعداد فازی نرمال شده در هر ستون، عدد فازی "تقریباً یک" به دست آمده است. حال با میانگین‌گیری سطری از اعداد نرمال شده جدول فوق، وزن نسبی معیارها به دست می‌آید که نتایج آن در جدول ۷ آمده است.

جدول ۷. وزن نسبی معیارها (عناصر جدول ۲)

وزن نسبی معیار صداقت (C _۱)	وزن نسبی معیار پارتنری بازی (C _۲)	وزن نسبی معیار فساد (C _۳)
(۰,۰۸۴ و ۰,۱۱ و ۰,۱۱ و ۰,۱۷)	(۰,۵۶۹ و ۰,۶۶۷ و ۰,۶۶۷ و ۰,۷۹)	(۰,۱۷ و ۰,۲۲۲ و ۰,۲۲۲ و ۰,۲۹۵)

با استفاده از روش بیان شده، می‌توان وزن نسبی عناصر سایر جداول مقایسات زوجی را نیز محاسبه کرد که نتایج آن به‌طور خلاصه در جدول ۸ آمده است.

جدول ۸. وزن نسبی عناصر جداول ۲، ۳ و ۴

گزینه‌ها	وزن نسبی گزینه‌ها در رابطه با معیار C _۱ (جدول ۲)	وزن نسبی گزینه‌ها در رابطه با معیار C _۲ (جدول ۳)	وزن نسبی گزینه‌ها در رابطه با معیار C _۳ (جدول ۴)
گزینه A _۱	(۰,۱۲۹ و ۰,۱۵۱ و ۰,۱۸۳ و ۰,۲۲۹)	(۰,۵۱۱ و ۰,۵۳۳ و ۰,۸۶۶ و ۰,۹۱۲)	(۰,۴۱۲ و ۰,۶۱ و ۰,۶۳۲ و ۰,۹۱۵)
گزینه A _۲	(۰,۳۲۴ و ۰,۴۰۵ و ۰,۶۱۵ و ۰,۷۲۴)	(۰,۰۹ و ۰,۰۹۸ و ۰,۱۷۶ و ۰,۱۷۷)	(۰,۲۰۶ و ۰,۲۸ و ۰,۳۱۶ و ۰,۵)
گزینه A _۳	(۰,۲۵۷ و ۰,۲۷۷ و ۰,۴۲۶ و ۰,۴۵۷)	(۰,۱۳۹ و ۰,۱۴۳ و ۰,۲۹۶ و ۰,۳)	(۰,۰۶۳ و ۰,۰۷۶ و ۰,۰۸۸ و ۰,۱۱۲)

محاسبه وزن نهایی گزینه‌ها

همان‌طور که قبلاً نیز بیان گردید، وزن نهایی هر گزینه از حاصل ضرب وزن نسبی معیارها (جدول ۷) در وزن نسبی گزینه‌ها نسبت به هر معیار (جدول ۸) به‌دست می‌آید. وزن نهایی محاسبه شده برای گزینه‌ها در جدول ۹ نشان داده شده است.

جدول ۹. وزن نهایی گزینه‌ها

وزن نهایی گزینه A _۱	وزن نهایی گزینه A _۲	وزن نهایی گزینه A _۳
(۰,۳۷۱ و ۰,۵۰۸ و ۰,۷۳۸ و ۰,۰۳)	(۰,۰۹ و ۰,۰۹۸ و ۰,۱۷۲ و ۰,۱۷۳)	(۰,۰۶۳ و ۰,۰۷۶ و ۰,۰۸۸ و ۰,۱۱۱)

به دلیل آنکه اوزان نسبی محاسبه شده در بخش قبل به‌صورت فازی هستند، وزن نهایی گزینه‌ها نیز که از حاصل ضرب اوزان نسبی به‌دست آمده، به‌صورت فازی می‌باشند.

رتبه‌بندی گزینه‌ها

رتبه‌بندی گزینه‌ها با توجه به اوزان نهایی آنها صورت می‌پذیرد و به دلیل آنکه این اوزان به‌صورت اعداد فازی هستند، برای رتبه‌بندی آنها و انتخاب بهترین گزینه از روش بالدوین استفاده شده است. درجهٔ ارجحیت گزینه‌ها با استفاده از روش بالدوین در جدول ۱۰ آمده است.

جدول ۱۰. درجه ارجحیت گزینه‌ها با روش بالدوین

گزینه‌ها	گزینه A _۱	گزینه A _۲	گزینه A _۳
نمرهٔ ارجحیت گزینه‌ها	۰,۶۷۸	۰,۰۲۹	-۰,۰۲
رتبهٔ گزینه‌ها	۱	۲	۳

همان طور که ملاحظه می گردد ترجیحات گزینه‌ها به صورت رابطه $A_1 > A_2 > A_3$ است. یعنی با توجه به مقایسات زوجی صورت گرفته توسط این متخصص، حکومت جمهوری نسبت به دو حکومت سلطنتی و مذهبی در مقایسه با معیارهای صداقت، پارتی بازی و فساد، زیان بخش ترین نوع حکومت شناخته شده است.

محاسبه میزان ناسازگاری ماتریس‌های مقایسات زوجی فازی

در این بخش به محاسبه میزان ناسازگاری جداول مقایسات زوجی با استفاده از الگوریتم ارائه شده در این مقاله پرداخته می‌شود. برای نمونه می‌خواهیم میزان ناسازگاری جدول ۲ را محاسبه کنیم. مراحل الگوریتم ارائه شده برای این جدول به صورت زیر است:

۱- تمام داده‌های این جدول به فرم اعداد فازی نشان داده شود (نتیجه این مرحله در جدول ۲ آمده است)

۲- وزن نسبی گزینه‌های این ماتریس (\tilde{W}_i) را از روش میانگین حسابی فازی به دست آمده است (نتیجه این مرحله در جدول ۷ داده شده است)

۳- از حاصل ضرب بردار \tilde{W}_i در داده‌های جدول ۲ تخمین مناسبی از $\tilde{\lambda}_{\max(i)} \tilde{W}_i$ به دست آمده و سپس از تقسیم $\tilde{\lambda}_{\max(i)} \tilde{W}_i$ بر \tilde{W}_i مربوطه، تخمینهایی از $\tilde{\lambda}_{\max(i)}$ به صورت زیر محاسبه شده است:

$$\tilde{\lambda}_{\max(1)} = (2,65 \text{ و } 3 \text{ و } 3,67)$$

$$\tilde{\lambda}_{\max(2)} = (2,63 \text{ و } 3 \text{ و } 3,62)$$

$$\tilde{\lambda}_{\max(3)} = (2,61 \text{ و } 3 \text{ و } 3,62)$$

در نهایت با میانگین گیری از مقادیر $\tilde{\lambda}_{\max(i)}$ ها، مقدار $\tilde{\lambda}_{\max}$ به صورت زیر به دست آمده است:

$$\tilde{\lambda}_{\max} = (2,63 \text{ و } 3 \text{ و } 3,64)$$

۴- مقدار شاخص ناسازگاری فازی این جدول به صورت زیر محاسبه شده است (n بعد ماتریس و برابر با ۳ است):

$$I.I. = \frac{\tilde{\lambda}_{\max} n}{n-1} \quad (-0,18 \text{ و } 0 \text{ و } 0,32)$$

۵- در گام آخر نیز میزان ناسازگاری جدول ۲ به صورت زیر به دست آمده است (با

توجه به اینکه این جدول یک ماتریس ۳ بُعدی است، بنابراین مقدار I.I.R. متناسب با این جدول برابر است با ۰,۵۸):

$$I.\tilde{R}. \frac{I.I.}{I.I.R.} = (0,55 \text{ و } 0 \text{ و } 0,32)$$

به همین صورت می توان میزان ناسازگاری سایر جداول مقایسات زوجی را نیز محاسبه کرد که نتایج حاصل از آن در جدول ۱۱ نشان داده شده است.

جدول ۱۱. میزان ناسازگاری جداول مقایسات زوجی مثال داده شده

میزان ناسازگاری جدول ۱	(۰,۵۵ و ۰ و ۰,۳۲)
میزان ناسازگاری جدول ۲	(۰,۴۹ و ۰,۲۵ و ۰,۱۶ و ۰,۳۳)
میزان ناسازگاری جدول ۳	(۰,۵۵ و ۰,۳۲ و ۰,۳۶)
میزان ناسازگاری جدول ۴	(۰,۵۷ و ۰,۰۹ و ۰,۰۷ و ۰,۳۵)

مقدارهای ناسازگاری فوق دارای شکل شناخته شده‌ای از اعداد فازی نیستند، اما با توجه به اینکه این مقادیر از انجام محاسبات بر روی اعداد فازی ذوزنقه‌ای به دست آمده‌اند، می توان آنها را تقریب مناسبی از یک عدد فازی ذوزنقه‌ای دانست. پس از به دست آوردن میزان ناسازگاری جداول مقایسات زوجی، باید آنها را با عدد ۰,۱ مقایسه کرد تا به سازگار یا ناسازگار بودن این جداول پی برد. در اینجا نیز برای مقایسه میزان ناسازگاری هر جدول با عدد ۰,۱ از روش بالدوین استفاده شده است. اما به دلیل اینکه از روش بالدوین برای مقایسه اعداد فازی استفاده می شود، و می توان مقدارهای ناسازگاری فازی به دست آمده را تقریبی از اعداد فازی ذوزنقه‌ای دانست، می توان عدد ۰,۱ را به صورت (۰,۱ و ۰,۱ و ۰,۱ و ۰,۱) نوشته و سپس به مقایسه میزان ناسازگاری جداول مقایسات زوجی با این عدد پرداخت. با این توضیحات می توان به صورت تقریبی تعیین کرد که یک جدول مقایسات زوجی فازی، سازگار یا ناسازگار است. برای نمونه سازگار یا ناسازگار بودن جداول مقایسات زوجی مثال داده شده، بررسی و نتایج آن در جدول ۱۲ آمده است. در این جدول $z_{i,(0.1)}$ بیان گر درجه ارجحیت میزان ناسازگاری جدول i در مقایسه با عدد ۰,۱ و $z_{(0.1),i}$ نیز بیان گر درجه ارجحیت عدد ۰,۱ در مقایسه با میزان ناسازگاری جدول i است. همچنین $I.R.(i)$ نیز

بیان گر میزان ناسازگاری فازی جدول أم است. برای هر جدول مقایسات زوجی، اگر مقدار $z_{i,(0.1)}$ از مقدار $z_{(0.1),i}$ کمتر باشد، در این صورت میزان ناسازگاری این جدول کمتر از ۰٫۱ بوده و دارای سازگاری تقریبی است. در غیر این صورت جدول مذکور از سازگاری تقریبی برخوردار نیست.

جدول ۱۲. تعیین سازگار یا ناسازگار بودن جداول مقایسات زوجی مثال ارائه شده

نتیجه	$z_{(0.1),i}$	$z_{i,(0.1)}$	جداول مقایسات زوجی
$I.R.(1) < 0.1$	۰٫۳۲	۰٫۲۹	جدول ۱
$I.R.(2) < 0.1$	۰٫۳۷	۰٫۳۱	جدول ۲
$I.R.(3) < 0.1$	۰٫۴۴	۰٫۴۳	جدول ۳
$I.R.(4) < 0.1$	۰٫۳۵	۰٫۳۲	جدول ۴

همان طور که ملاحظه می گردد تمام جداول مقایسات زوجی داده شده در مثال، از سازگاری تقریبی برخوردار هستند. از مقایسه میزان ناسازگاری این جداول با استفاده از روش بالدوین، می توان به رتبه بندی آنها و یافتن سازگارترین جدول پرداخت. بدین صورت که هرچه نمره ارجحیت یک جدول در مقایسه با سایر جداول کمتر باشد، این جدول از سازگاری تقریبی بیشتری برخوردار است. نتایج حاصل از انجام این مراحل در جدول ۱۳ آمده است.

جدول ۱۳. رتبه بندی جداول مقایسات زوجی مثال از لحاظ سازگاری با استفاده از روش بالدوین

رتبه	$\mu_s(i)$	$z_{i,4}$	$z_{i,3}$	$z_{i,2}$	$z_{i,1}$
۱	۰٫۴۹۱	۰٫۴۹۱	۰٫۵۷۱	۰٫۵۱۲	----
۳	۰٫۵۱۷	۰٫۵۵۱	۰٫۶۶۱	----	۰٫۵۱۷
۴	۰٫۶۳۶	۰٫۶۷۸	----	۰٫۷۲۴	۰٫۶۳۶
۲	۰٫۴۹۶	----	۰٫۶۱۳	۰٫۵۴۸	۰٫۴۹۶

در جدول فوق $\mu_s(i)$ عبارت است از نمره ارجحیت جدول أم و برابر است با حداقل درجات ارجحیت جدول أم بر سایر جداول. همان طور که ملاحظه می گردد در بین

جداول فوق، جدول ۱ از سازگاری تقریبی بیشتر و جدول ۴ از سازگاری تقریبی کمتری برخوردار هستند.

الگوریتم محاسبه میزان ناسازگاری یک سلسله مراتبی فازی

در این بخش میزان ناسازگاری سلسله مراتبی فازی برای مثال داده شده، با استفاده از الگوریتم ارائه شده در بخش ۳-۵ محاسبه گردیده است. اگر مراحل این الگوریتم برای سلسله مراتب مثال مذکور به کار برده شود، آن گاه مقادیر $\overline{I.I.}$ و $\overline{I.I.R.}$ به صورت زیر به دست می آیند:

$$\overline{I.I.} = (0,718 \text{ و } 0,221 \text{ و } 0,143 \text{ و } -0,354)$$

$$\overline{I.I.R.} = (1,308 \text{ و } 1,16 \text{ و } 1,16 \text{ و } 1,057)$$

حال از تقسیم $\overline{I.I.}$ بر $\overline{I.I.R.}$ میزان ناسازگاری سلسله مراتبی فازی به دست می آید. اما با توجه به منفی بودن دو بُعد عدد فازی $\overline{I.I.}$ ، باید از کل حالات تقسیم ابعاد $\overline{I.I.}$ بر ابعاد $\overline{I.I.R.}$ ، کمترین و بیشترین عدد را به عنوان پای چپ و پای راست $\tilde{I.R.}(H)$ در نظر گرفت. همچنین از تقسیم دو بُعد میانی $\overline{I.I.}$ بر دو بُعد میانی $\overline{I.I.R.}$ (حالت ۴) و به دست آوردن کمترین و بیشترین عدد ممکنه، دو بُعد میانی $\tilde{I.R.}(H)$ به دست می آید. با توجه به مطالب گفته شده میزان ناسازگاری سلسله مراتبی مفروض به صورت زیر به دست می آید:

$$\tilde{I.R.}(H) = (0,68 \text{ و } 0,191 \text{ و } 0,123 \text{ و } -0,335)$$

در اینجا نیز برای بررسی سازگار یا ناسازگار بودن این سلسله مراتبی فازی از روش بالدوین استفاده می شود. برای این منظور میزان ناسازگاری این سلسله مراتبی با عدد $(0,1)$ مقایسه شده که درجه ارجحیت میزان ناسازگاری سلسله مراتبی و همچنین درجه ارجحیت عدد $0,1$ به ترتیب برابر شده اند با: $z_{H,(0.1)} = 0,39$ و $0,36$ = $z_{(0.1),H}$. به دلیل آنکه درجه ارجحیت میزان ناسازگاری سلسله مراتبی از درجه ارجحیت عدد $0,1$ بزرگتر شده است، می توان چنین نتیجه گرفت که ساختار سلسله مراتبی مثال مذکور، از سازگاری قابل قبولی برخوردار نیست. برای سازگار کردن این سلسله مراتبی، می توان از فرد خیره خواست تا در قضاوت های خود در خصوص جداولی که از سازگاری کمتری برخوردار هستند (بویژه جدول ۴)، تجدید نظر کند.

نتیجه گیری و پیشنهاد

برای استفاده از اعداد فازی در روش فرایند تحلیل سلسله مراتبی، روش های مختلفی ارائه گردیده است. در این مقاله نیز از بسط فازی روش تقریبی "میانگین حسابی"، وزن نسبی عناصر جداول مقایسات زوجی و سپس وزن نهایی گزینه ها به صورت اعداد فازی به دست آمده و در نهایت از تکنیکهای رتبه بندی فازی برای تعیین ترجیحات گزینه ها استفاده شد. همچنین روشی نیز برای محاسبه میزان ناسازگاری ماتریس مقایسه زوجی فازی و میزان ناسازگاری سلسله مراتبی فازی از بسط الگوریتم های موجود ارائه گردید. برای روشن شدن این روش ها از یک مثال نیز استفاده شد و ملاحظه گردید که هر چند تمام جداول مقایسات زوجی این مثال از سازگاری تقریبی برخوردار بودند، اما خود سلسله مراتبی فازی، دارای سازگاری قابل قبولی نبود.

به عنوان تحقیقات آتی پیشنهاد می گردد که روش های دیگر تقریبی نیز که عبارتند از روش مجموع سطری، روش مجموع ستونی و روش میانگین هندسی، به منظور استفاده از اعداد فازی بسط داده شوند. سپس میزان ناسازگاری ماتریس های مقایسات زوجی فازی و میزان ناسازگاری سلسله مراتبی فازی در هر یک از این روش ها محاسبه، و نتایج به دست آمده از آنها با یکدیگر مقایسه گردد.

منابع

۱. آذر، عادل و حجت فرجی، "علم مدیریت فازی"، مرکز مطالعات مدیریت و بهره وری ایران، ۱۳۸۱.
۲. اصغریپور، محمد جواد، "تصمیم‌گیری های چند معیاره"، انتشارات دانشگاه تهران، ۱۳۷۷.
۳. قدسی پور، حسن، " فرایند تحلیل سلسله مراتبی"، انتشارات دانشگاه صنعتی امیر کبیر، ۱۳۷۹.
۴. وانگ، لی، "سیستم های فازی و کنترل فازی"، ترجمه محمد تشنه لب و دیگران، انتشارات دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، ۱۳۷۸.
5. Buckley, J.J., "Fuzzy hierarchical analysis", Fuzzy Sets and Systems, Vol. 17, 1985, pp. 233-247.
6. Cebeci, U., "Customer satisfaction of catering service companies in turkey", Proceedings of the 6th International Conference on ISO 9000 and TQM (6th ICIT), Glasgow, April 2001, pp. 519-524.
7. Cebeci, U. and C. Kahraman, "Measuring customer satisfaction of catering service companies using fuzzy AHP: the case of turkey", Proceedings of International Conference on Fuzzy Systems and Soft Computational Intelligence in Management and Industrial Engineering, Istanbul, May 2002, pp. 315-325.
8. Chan, F.T.S., Chan, M.H. and N.K.H. Tang, "Evaluation methodologies for technology selection", Journal Materials Processing Technology, Vol. 107, 2000, pp. 330-337.
9. Chan, F.T.S., Jiang, B. and N.K.H. Tang, "The development of intelligent decision support tools to aid the design of flexible manufacturing systems", International Journal of Production Economics, Vol. 65, No. 1, 2000, pp. 73-84.
10. Chang, D. Y., "Applications of the extent analysis method on fuzzy AHP", European Journal of Operational Research, Vol. 95, 1996, pp. 649-655.
11. Chang, C.W., Wu, C.R. and H.L. Lin, "Applying fuzzy hierarchy multiple attributes to construct an expert decision making process", Expert Systems with Applications, Volume 36, Issue 4, 2009, Pages 7363-7368.
12. Cheng, C.H., Yang, K.L. and C.L. Hwang, "Evaluating attack helicopters by AHP based on linguistic variable weight", European Journal of Operational Research, Vol. 116, No. 2, 1999, pp. 423-443.
13. Ching-Hsue, C., "Evaluating naval tactical missile systems by fuzzy AHP based on the grade value of membership function", European Journal of Operational Research, Vol. 96, No. 2, 1997, pp. 343-350.
14. Da deviren, M. and . Yksel, "Developing a fuzzy analytic hierarchy process (AHP) model for behavior-based safety management", Information Sciences, Volume 178, Issue 6, 2008, Pages 1717-1733.

15. Deng, H., "**Multicriteria analysis with fuzzy pairwise comparison**", International Journal of Approximate Reasoning, Vol. 21, No. 3, 1999, pp. 215-231.
16. Kahraman, Ulukan, Z., and E. Tolga, "**A fuzzy weighted evaluation method using objective and subjective measures**", Proceedings of International ICSC symposium on Engineering of Intelligent systems (EIS,98), Vol. 1, University of La Laguna, Tenerife, 1998, pp. 57-63.
17. Kahraman, C., Cebeci, U. and D. Ruan, "**Multi-attribute comparison of catering service companies using fuzzy AHP: the case of turkey**", Production Economics, 2004, No.87, pp. 171-184.
18. Kuo, R.J., Chi, S.C. and S.S. Kao, "**A decision support system for selecting convenience store location through integration of fuzzy AHP and artificial neural network**", Computers in Industry, 2002, No. 47, pp. 199-214.
19. Laarhoven, V. and W. Pedrycz, "**A fuzzy extension of Saaty's priority theory**", Fuzzy Sets and Systems, vol. 11,1983, pp. 229-241.
20. Lee, M., Pham, H. AND X. Zhang, "**A methodology for priority setting with application to software development process**", European Journal of Operational Research, Vol. 118, 1999, pp. 375-389.
21. Leung, L.C. and D. Cao, "**On consistency and ranking of alternatives in fuzzy AHP**", European Journal of Operational Research, Vol. 124, 2000, pp. 102-113.
22. Liu, F., "**Acceptable consistency analysis of interval reciprocal comparison matrices**", Fuzzy Sets and Systems, Volume 160, Issue 18, 2009, Pages 2686-2700.
23. Mamat N.J.Z. and J.K. Daniel, "**Statistical analyses on time complexity and rank consistency between singular value decomposition and the duality approach in AHP: A case study of faculty member selection**", Mathematical and Computer Modelling, Volume 46, Issues 7-8, 2007, Pages 1099-1106.
24. Stam, A., Minghe, S. and M. Haines, "**Artificial neural network representations for hierarchical preference structures**", Computers & Operations Research, Vol. 23, No. 12, 1996, pp. 1191-1201.
25. Wang, Y.M., Elhag, T.M.S. and Z. Hua, "**A modified fuzzy logarithmic least squares method for fuzzy analytic hierarchy process**", Fuzzy Sets and Systems, Volume 157, Issue 23, 2006, Pages 3055-3071.
26. Weck, M., Klocke, F., Schell, H. and E. Roenauer, "**Evaluating alternative production cycles using the extended fuzzy AHP method**", European Journal of Operational Research, Vol. 100, No. 2, 1997, pp. 351-366
27. Zhu, K.J., Jing, Y. and D.Y. Chang, "**A discussion on extent analysis method and applications of fuzzy AHP**", European Journal of Operational Research, Vol. 116, 1999, pp. 450-456