

## طراحی مدل ریاضی چند هدفه موازنه زمان و هزینه در شبکه‌های PERT به کمک الگوریتم ژنتیک

مجید اسماعیلیان\*

کامران فیضی\*\*

امیر افسر\*

### چکیده

در این مقاله یک مدل برنامه‌ریزی غیرخطی چند هدفه برای فشرده سازی زمان شبکه‌های PERT ارائه گردیده است که هدف اصلی آن عبارت است از حداقل سازی زمان بدینانه فعالیت‌های بحرانی در شبکه‌های PERT با صرف بودجه بیشتر در فعالیت‌هایی است که در مسیر بحرانی قرار دارند. در واقع، این مدل نشان دهنده نحوه تخصیص بودجه بین فعالیت‌های مسیر بحرانی است که در نهایت نشان می‌دهد، کاهش زمان بدینانه فعالیت‌های بحرانی باعث کاهش زمان تکمیل پروژه و واریانس آن می‌گردد. با توجه به غیرخطی بودن مدل ارائه شده، از الگوریتم ژنتیک برای حل مدل استفاده شده است. نتایج کاربرد مدل ریاضی ارائه شده نشان می‌دهد که این مدل، احتمال تکمیل پروژه تا تاریخ برنامه‌ریزی شده را افزایش می‌دهد. واژگان کلیدی: مدیریت پروژه، شبکه، PERT، برنامه‌ریزی غیرخطی، الگوریتم ژنتیک.

\* عضو هیئت علمی گروه مدیریت صنعتی دانشگاه اصفهان - اصفهان، ایران (نویسنده مسئول) majid\_esmaelian@yahoo.com

\*\* عضو هیئت علمی دانشگاه علامه طباطبائی (ره)

عضو هیئت علمی دانشگاه قم

## مقدمه

پروژه، سازمانی متشکل از چندین فعالیت است که برای سفارش معینی انجام می‌شود. فعالیت‌ها و سفارشی که باید انجام شود را می‌توان با شبکه‌های CPM یا PERT نشان داد. تکنیک‌های CPM و PERT، رویکرد سنتی و مشهوری در علم مدیریت پروژه است (موهوب و همکاران، ۲۰۱۱). در بسیاری از پروژه‌ها ممکن است به دلایل گوناگون، فشردگی زمان پروژه علی‌رغم وجود هزینه‌های اضافی مدنظر قرار گیرد. فشردگی زمان پروژه در اصل با تکنیک CPM برای برنامه‌ریزی و کنترل پروژه‌های بزرگ توسعه یافته است. هدف از فشردگی زمان در شبکه‌های CPM این است که مشخص شود در صورت لزوم، با تخصیص بودجه اضافی زمان کل پروژه کاهش یابد و زمان کدام یک از فعالیتها را باید با استفاده از منابع اضافی فشردگی کرد. فشردگی زمان در شبکه‌های CPM به این منظور است که فعالیت و یا فعالیت‌هایی با کمترین میزان هزینه برای کاهش زمان پروژه انتخاب گردند. این فرایند تا زمانی که پروژه به میزان کافی فشردگی شده و یا اینکه هزینه فشردگی و کاهش زمان پروژه از مزایایی که دست آمده از آن پیشی گیرد، تکرار می‌شود.

فشردگی زمان پروژه در شبکه‌های PERT که در آنها از زمانهای تخمینی استفاده می‌گردد مطرح نمی‌باشد. احتمالی بودن زمان تکمیل پروژه در یک تاریخ مشخص بیان‌کننده مساله و مشکل می‌باشد.

## پیشینه تحقیق

تحقیقات به نسبت کمی در خصوص فشردگی زمان شبکه‌های PERT تا کنون انجام شده است که در این بخش به مهمترین آنها اشاره می‌شود.

فشردگی زمان شبکه‌های PERT توسط برخی از محققین مورد بررسی و تحقیق قرار گرفته است. جانسون و چاو<sup>۱</sup> (۱۹۹۰) یک سری از قواعد و قوانین موثر برای یافتن فعالیت‌هایی که ابتدا باید فشردگی زمان شوند را بیان می‌دارند. سامن<sup>۲</sup> (۱۹۹۱) سعی می‌کند که این مساله را توسط برخی از روشهای ابتکاری حل نماید. کیفر و واردینی<sup>۳</sup>

1- Johnson & Schou  
2- Samman  
3- Keefer & Vardini

(۱۹۹۳) سعی می نمایند که تخمین زمان پارامترهای فعالیتها در شبکه‌های PERT را بهبود و ارتقاء دهند و این بهبود دارای صحت و درستی بیشتری نسبت به قواعد و روشهای فعلی می باشد. هرچند تعدادی از محققین توزیع زمان در شبکه‌های PERT را مورد انتقاد قرار داده اند ولی با این حال این روش به عنوان یک روش و ابزار موثر برای زمان بندی پروژه‌های احتمالی به کار گرفته می شود.

چو و یوم<sup>۱</sup> (۱۹۹۷) یک روش جدید برای ارزیابی "معیار اهمیت عدم اطمینان" ارائه کرده‌اند. این موارد نشان دهنده برخی از تلاشهای محققان برای بیان تعدادی از مسائل و مشکلات توسعه یک روش منطقی برای فشرده سازی زمان در شبکه‌های احتمالی می باشد. یکی از اهداف این مقاله توسعه یک روش برای فشرده سازی زمان بد بینانه در شبکه‌های PERT به وسیله صرف بودجه اضافی به منظور کاهش زمان و واریانس پروژه است که این امر احتمال تکمیل پروژه در یک زمان مشخص را افزایش می دهد. آزرین<sup>۲</sup> و همکاران (۱،۲۰۰۵) یک مدل چند هدفه برای مسایل تخصیص منابع در شبکه های PERT که توزیع زمان فعالیتهای آن نمایی یا ارلنگ می باشد، ارائه کرده‌اند. در این نوع شبکه‌های متوسط زمان هر فعالیت یک تابع غیر افزایشی و هزینه‌های مستقیم هر فعالیت یک تابع غیر کاهشی از میزان منابع تخصیص داده نشده به فعالیت می باشد. متغیر تصمیم این مدل، میزان منابع تخصیص یافته به هر فعالیت بوده و ۴ تابع هدف آن عبارتند از: حداقل کردن کل هزینه های مستقیم پروژه، حداقل کردن متوسط زمان تکمیل پروژه، حداقل کردن واریانس زمان تکمیل پروژه، و حداکثر کردن احتمال اینکه زمان تکمیل پروژه از یک آستانه مشخصی تجاوز نکند.

آزرین و همکاران (۲،۲۰۰۵) یک مدل چندهدفه برای مسایل تبادل هزینه در شبکه‌های PERT با تعمیم توزیع ارلنگ به زمان فعالیتها و استفاده از الگوریتم ژنتیک برای حل آن نموده اند. آنها این مساله را در یک مدل چهار هدفه فرموله کرده‌اند که هدف های آن عبارتند از: حداقل نمودن هزینه های مستقیم پروژه، حداقل کردن متوسط زمان تکمیل پروژه، حداقل کردن واریانس تکمیل پروژه و حداکثر کردن احتمال اینکه زمان تکمیل پروژه از یک آستانه مشخص تجاوز نکند. چون امکان حل تجمیعی مدل و رسیدن به جواب بهینه وجود نداشت، محققین از الگوریتم ژنتیک برای

1- Cho&amp;Yum

2- Azaron

حل این مدل چهار هدفه استفاده کرده‌اند.

یانگ (۲۰۰۷) تحلیل فشرده سازی زمان پروژه ای پیچیده را به کمک الگوریتم بهینه سازی ازدحام ذرات<sup>۱</sup> انجام داد. نتایج بهینه سازی برای منحنی های هزینه مستقیم و پروژه نشان داد که که تحلیل گران می‌توانند از هر دو آنها برای تحلیل های "چه می‌شود اگر" در موعد پروژه و بودجه استفاده کنند. نتایج این تحقیق نشان داد که عملکرد وعده داده شده الگوریتم پیشنهاد شده مناسب است.

مفهوم فشرده سازی زمان در شبکه‌های CPM در شبکه‌های PERT نیز کاربرد دارد. به منظور کاهش مدت زمان تکمیل پروژه در یک تاریخ مشخص باید بودجه اضافی صرف گردد، این امر در زمان بندی پروژه به منظور اجتناب از تاخیر لازم و ضروری است. در ادامه مقاله، یک مدل برنامه ریزی غیر خطی تک هدفه برای فشرده سازی زمان در شبکه‌های PERT ارائه می‌شود و با یک مثال عددی نقاط ضعف این مدل تبیین می‌گردد. در نهایت برای رفع این مشکل یک مدل برنامه ریزی غیر خطی چند هدفه ارائه شده و با حل مثال عددی ارائه شده، احتمال تکمیل پروژه بعد از فشرده سازی محاسبه و کارایی مدل نشان داده می‌شود.

## ساخت مدل

در این بخش مدل ارائه شده توسط عباسی و موکاتاش<sup>۲</sup> مورد بررسی قرار گرفته و با ارائه یک مثال عددی، نقطه ضعف آن نشان داده می‌شود. سپس یک مدل غیر خطی چند هدفه برای رفع مشکل مدل ایشان، ارائه می‌گردد. بر اساس تکنیک PERT کلاسیک احتمال تکمیل پروژه تا زمان برنامه ریزی شده ( $T_s$ ) برابر با  $\phi(z)$  می‌باشد که:

$$z = \frac{T_s - \mu_{TE}}{\sigma_{TE}} \quad 1$$

$$\mu_{TE} = \sum_{i=1}^n te_i \quad 2$$

1- Particle swarm  
2- Abbasi & Mukattash  
3-  $\phi(z) = p(Z \leq z)$

$$\sigma_{TE} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma^2 te_i} \quad ۳$$

$$te_i = \frac{a_i + 4m_i + b_i}{6} \quad ۴$$

$$\sigma^2 te_i = \frac{(b_i - a_i)^2}{36} \quad ۵$$

$n$  تعداد کل فعالیت‌هایی است که روی مسیر بحرانی قرار دارند.  $te_i$ ، زمان مورد انتظار و  $\sigma^2 te_i$ ، واریانس فعالیت  $i$ ام می‌باشد. مقدار پولی که روی هر فعالیت واقع در مسیر بحرانی سرمایه گذاری می‌گردد، منجر به کاهش زمان بدبینانه از  $b$  به  $b$ ، زمان مورد انتظار پروژه از  $\mu_{TE}$  به  $\mu_{TE}$  و انحراف استاندارد از  $\sigma_{TE}$  به  $\sigma_{TE}$  می‌گردد. فرض می‌کنیم که برای یک پروژه مشخص، مسیر بحرانی شامل  $n$  فعالیت بوده و مقدار پولی که می‌توان روی مسیر بحرانی سرمایه گذاری کرد، برابر با  $M$  واحد پولی باشد. بعد از سرمایه گذاری پول اضافی، زمان مورد انتظار و واریانس جدید هر فعالیت واقع بر مسیر بحرانی به صورت زیر خواهد بود:

$$te_i = \frac{a_i + 4m_i + b_i}{6} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad ۶$$

$$\sigma^2 te_i = \frac{(b_i - a_i)^2}{36} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad ۷$$

مقدار پول صرف شده روی تمامی فعالیت‌های واقع بر مسیر بحرانی، برابر است با:

$$r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n = M \quad ۸$$

بعد از صرف بودجه در فعالیت‌های بحرانی، احتمال اتمام پروژه برابر با  $\phi(z)$  بوده

و خواهیم داشت:

$$Z = \frac{T_s - \mu_{TE}}{\sigma_{TE}} \quad ۹$$

$$\mu_{TE} = \sum_{i=1}^n te_i \quad ۱۰$$

$$\sigma_{TE} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma^2 te_i} \quad ۱۱$$

بنابراین احتمال تکمیل پروژه برابر است با:

$$Z = \frac{T_s - \sum_{i=1}^n \left( \frac{a_i + 4m_i + b_i}{6} + \frac{a_2 + 4m_2 + b_2}{6} + \dots + \frac{a_n + 4m_n + b_n}{6} \right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{(b_1 - a_1)^2}{36} + \frac{(b_2 - a_2)^2}{36} + \dots + \frac{(b_n - a_n)^2}{36} \right)}} \quad ۱۲$$

پول صرف شده روی هر فعالیت، زمان مورد انتظار ( $te$ ) را کاهش خواهد داد. این کاهش بستگی به میزان پول صرف شده روی فعالیت دارد، به این مفهوم که کاهش زمان مورد انتظار هر فعالیت از  $te$  به  $te$  تابع  $\phi$  از میزان پول صرف شده خواهد بود. بنابراین زمان مورد انتظار جدید برای یک فعالیت مشخص به صورت زیر خواهد بود:

$$te_i = te_i - \phi(r_i) \quad ۱۳$$

و معادله زمان مورد انتظار جدید به صورت زیر می باشد:

$$te_i = te_i + q_i r_i - \frac{te_i}{r_i} < q_i < 0 \quad ۱۴$$

در صورتی که،  $q_i < 0$ ، برابر با کاهش نهایی در زمان فعالیت به ازاء هر واحد افزایش در بودجه صرف شده روی فعالیت است. به روش مشابه مقدار پول صرف شده ( $r_i$ ) موجب کاهش واریانس شده و این کاهش در واریانس بستگی به مقدار پول صرف شده بر روی فعالیت دارد، به این مفهوم که این میزان کاهش تابع  $\psi$  از ( $r_i$ ) بوده و مقدار واریانس جدید برابر است با:

$$\sigma_i^2 = \sigma_i^2 - \psi(r_i) \quad ۱۵$$

و واریانس جدید را به صورت ذیل می توان نشان داد:

$$\sigma_i^2 = \sigma_i^2 + s_i r_i - \frac{\sigma_i^2}{r_i} < s_i < 0 \quad ۱۶$$

در صورتی که،  $s_i < 0$ ، میزان کاهش نهایی در سطح واریانس فعالیت به ازاء هر واحد افزایش در بودجه صرف شده است. کاهش در واریانس با یک درصد مشخص برابر با کاهش در انحراف معیار با همان درصد مشخص است. برای نشان دادن این موضوع معادله ۱۶ را به صورت زیر می نویسیم:

$$\sigma_i = \sigma_i + s_i r_i - \frac{\sigma_i}{r_i} < s_i < 0 \quad ۱۷$$

که:

$$\sigma_i = \frac{(b_i - a_i)}{6} \text{ و } \sigma_i = \frac{(b_i - a_i)}{6} \quad ۱۸$$

پس:

$$\frac{(b_i - a_i)}{6} = \frac{(b_i - a_i)}{6} + s_i r_i \quad ۱۹$$

همچنین از معادله ۱۴ می توان نتیجه گرفت:

$$b_i = b_i + 6q_i r_i \quad ۲۰$$

بنابراین از معادله های ۱۹ و ۲۰ می توان نتیجه گرفت که  $s_i = q_i$  بوده و بنابراین،  $q_i$  و  $s_i$  برابر می باشند، زیرا میزان پول صرف شده بر روی یک فعالیت، زمان بدینانه آن فعالیت را کاهش داده و این زمان بدینانه به عنوان قسمتی از زمان فعالیت و واریانس آن می باشد. بنابراین کاهش در زمان مورد انتظار هر فعالیت تابعی از  $r_i$  بوده و زمان مورد انتظار فعالیت هایی که بر روی مسیر بحرانی قرار داشته و فشرده شده اند به صورت زیر خواهد بود:

$$te_i = te_i - \phi(r_i) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad ۲۱$$

بعد از تخمین تابع  $\phi$  معادله ۲۱ را به صورت زیر می توان نوشت:

$$te_i = te_i + q_i r_i, \quad -\frac{te_i}{r_i} < q_i < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad ۲۲$$

در صورتی که کاهش در واریانس یک فعالیت تابعی از  $(r_i)$  می باشد، پس واریانس جدید فعالیت های فشرده شده، واقع بر مسیر بحرانی به صورت زیر خواهد بود:

$$\sigma_{te_i}^2 = \sigma_{te_i}^2 - \psi_i(r_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad ۲۳$$

با روش مشابه بعد از تخمین تابع  $\psi$ ، معادله های قبل به صورت زیر خواهند بود:

$$\sigma_{te_i}^2 = \sigma_{te_i}^2 + s_1 r_1 - \frac{\sigma_{te_1}^2}{r_1} < s_1 < 0 \quad ۲۴$$

بعد از سرمایه گذاری مقدار  $(r_i)$  واحد پولی در فعالیت های که بر روی مسیر بحرانی قرار دارند، زمان مورد انتظار و واریانس جدید تابعی از  $(r_i)$  بوده و احتمال اتمام پروژه برابر با  $\phi(z)$  می باشد. بنابراین می توان نوشت:

$$Z = \frac{T_s - \mu_{TE}}{\sigma_{TE}} \quad ۲۵$$

$$\mu_{TE} = \sum_{i=1}^n t_{ei} \quad ۲۶$$

$$\sigma_{TE} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma^2 te_i} \quad ۲۷$$

پس معادله Z را می توان به صورت زیر نوشت:

$$Z = \frac{T_s - \{te_1 + te_2 + \dots + te_n\}}{\sqrt{\{\sigma^2 te_1 + \sigma^2 te_2 + \dots + \sigma^2 te_n\}}} \quad ۲۸$$

$$te_i = te_i + q_i r_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\sigma_{te_i}^2 = \sigma_{te_i}^2 + s_i r_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

پس:

$$Z = \frac{T_s - \{te_1 + q_1 r_1 + te_2 + q_2 r_2 \dots + te_n + q_n r_n\}}{\sqrt{\{\sigma^2 te_1 + s_1 r_1 + \sigma^2 te_2 + s_2 r_2 + \dots + \sigma^2 te_n + s_n r_n\}}} \quad ۲۹$$

بدیهی است که  $\sum_{i=1}^n te_i$  و  $\sum_{i=1}^n \sigma_{te_i}^2$  بعد و قبل از فشرده سازی پروژه برابر می باشند،

بنابراین خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^n te_i = te_1 + te_2 + \dots + te_n = c_1 \quad ۳۰$$

$$\sum_{i=1}^n \sigma_{te_i}^2 = \sigma_{te_1}^2 + \sigma_{te_2}^2 + \dots + \sigma_{te_n}^2 = c_2 \quad ۳۱$$

پس می توان نوشت:

$$Z = \frac{T_s - \left\{ c_1 + \sum_{i=1}^n q_i r_i \right\}}{\sqrt{c_2 + \sum_{i=1}^n s_i r_i}} \quad ۳۲$$

که  $-\frac{\sigma_i^2}{r_i} < s_i < 0$  و  $-\frac{te_i}{r_i} < q_i < 0$  است. اگر  $\bar{r}_i$  برابر با حداکثر میزان پول قابل سرمایه گذاری بر روی فعالیت ( $i$ ) باشد، مدل نهایی را می توان به صورت زیر نشان داد:



$$MaxZ = \frac{T_s - c_1 - \sum_{i=1}^n q_i r_i}{\sqrt{c_2 + \sum_{i=1}^n s_i r_i}}$$

$$0 < r_i < \bar{r}_i$$

$$\sum_{i=1}^n r_i \leq M$$

مقادیر  $q_i$  و  $s_i$  به وسیله افراد متخصصی که دارای دانش و تخصص بالا در زمینه فعالیت‌های پروژه هستند تعیین می‌گردد. اطلاعات زیر باید قبل از بکارگیری مدل معین گردد:

- (۱) مشخص کردن مسیر بحرانی
- (۲) معین کردن فعالیت‌هایی روی مسیر بحرانی که باید فشرده شوند. این کار توسط متخصصین صورت می‌گیرد.
- (۳) مشخص کردن مقدار  $q_i$  و  $s_i$ : این پارامترها توسط متخصصین و افرادی که تسلط کافی به ماهیت فعالیت‌ها و فرایندهای کاری دارند معین می‌گردد.
- (۴) معین کردن مقدار  $T_s$
- (۵) مشخص کردن حداکثر میزان پولی که می‌توان روی فعالیت‌هایی از مسیر بحرانی که قابل فشرده سازی هستند، صرف کرد. حداقل سطحی که فعالیت‌ها می‌توانند فشرده شوند، تعیین کننده حداکثر پول قابل تخصیص به یک فعالیت است.
- (۶) مشخص کردن حداکثر پول قابل دسترس ( $M$ ) برای کاهش زمان پروژه
- (۷) مشخص کردن مقدار  $c_1$  و  $c_2$ :  $c_1$  برابر با مجموع زمان فعالیت‌هایی است که روی مسیر بحرانی قرار داشته و  $c_2$  برابر با مجموع واریانس فعالیت‌هایی است که بر روی مسیر بحرانی قرار دارند.

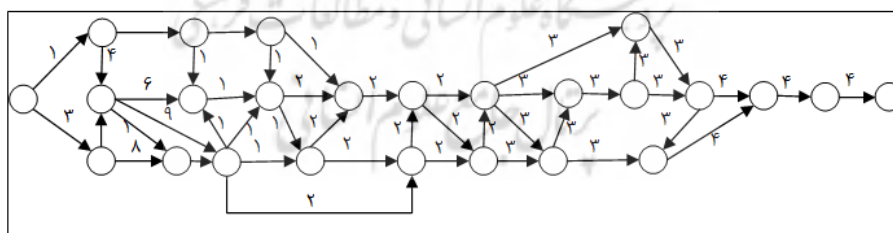
این امکان وجود دارد که در پروژه‌ای یک یا چند مسیر بحرانی وجود داشته باشد. در شبکه‌های PERT، مسیر بحرانی مسیری است که دارای طولانی‌ترین زمان مورد انتظار تکمیل باشد. به عبارت دیگر اگر  $te_i$ ، زمان مورد انتظار تکمیل فعالیت  $i$ ام باشد،

زمان مورد انتظار تکمیل مسیر زام  $(\mu_{TE}^j)$  برابر با مجموع فعالیت‌های واقع بر روی آن مسیر است  $\left(\mu_{TE}^j = \sum_{i \in path(j)} te_i\right)$ . در بین مسیرهای مختلف شبکه پروژه، مسیر بحرانی، مسیری است که دارای بزرگترین  $\mu_{TE}^j$  باشد. در نهایت زمان مورد انتظار تکمیل پروژه  $(\mu_{TE})$  برابر  $\mu_{TE} = \max_{\forall j}(\mu_{TE}^j)$  خواهد بود.

مدل ارائه شده در بخش (۲) تنها یک مسیر با طولانی‌ترین زمان تکمیل (مسیر بحرانی) را در نظر گرفته و با تخصیص بودجه به فعالیت‌ها، زمان تکمیل آن را کاهش می‌دهد، در صورتی که ممکن است با کاهش مدت زمان مسیر بحرانی اولیه، مسیر دیگری در شبکه بحرانی گردد. برای نشان دادن این نکته، مثال عددی زیر ارائه شده است.

### مثال عددی

در این بخش یک مثال شامل ۴۴ فعالیت آورده شده است تا اولاً شیوه عمل مدل در کاهش مدت زمان پروژه و نحوه ارتباط فعالیت‌ها نشان داده شود و دوماً نقطه ضعف مدل تک هدفه ارایه شده در بخش ۲ مشخص می‌گردد. در جدول ۱، سه زمان خوشبینانه، بدبینانه و محتمل برای فعالیت‌های پروژه برآورده شده و در شکل ۱، شبکه پروژه نشان داده شده است. در جدول ۲ مقادیر  $q_i$  و  $s_i$  و  $\bar{t}_i$  برای فعالیت‌های واقع بر روی مسیر بحرانی نشان داده شده است، این ضرایب توسط متخصصینی که تسلط کافی به فرایندها و ماهیت فعالیت‌های پروژه دارند، قابل تخمین است.



شکل ۱. شبکه پروژه

جدول ۱. زمان‌های خوشبینانه، بدبینانه و محتمل برای کلیه فعالیت‌های پروژه

شماره فعالیت	زمان خوشبینانه (a)	محتمل ترین زمان (m)	زمان بدبینانه (b)	شماره فعالیت	زمان خوشبینانه (a)	محتمل ترین زمان (m)	زمان بدبینانه (b)	شماره فعالیت	زمان خوشبینانه (a)	محتمل ترین زمان (m)	زمان بدبینانه (b)
۱	۵	۱۲	۳۵	۱۶	۵	۹	۱۶	۳۱	۱۵	۱۹	۲۱
۲	۵	۸	۹	۱۷	۱۲	۱۴	۱۵	۳۲	۲۳	۲۹	۳۹
۳	۵	۸	۲۵	۱۸	۱۲	۱۳	۱۵	۳۳	۲۵	۲۹	۳۸
۴	۱۰	۱۲	۱۵	۱۹	۱۵	۱۵	۱۹	۳۴	۱۱	۱۶	۱۸
۵	۲	۵	۸	۲۰	۱۵	۱۶	۱۹	۳۵	۲۲	۲۸	۳۵
۶	۵	۸	۹	۲۱	۱۵	۱۸	۱۹	۳۶	۲۳	۲۴	۳۰
۷	۸	۱۱	۱۵	۲۲	۹	۱۰	۱۲	۳۷	۱۲	۱۴	۱۹
۸	۹	۷	۲۵	۲۳	۱۲	۱۵	۱۸	۳۸	۱۲	۱۴	۱۵
۹	۸	۹	۱۶	۲۴	۱۲	۱۴	۱۸	۳۹	۳۰	۳۲	۳۶
۱۰	۷	۸	۱۲	۲۵	۲۱	۲۲	۲۹	۴۰	۳۰	۳۵	۳۶
۱۱	۲	۴	۵	۲۶	۱۲	۱۳	۱۹	۴۱	۱۰	۱۱	۱۵
۱۲	۵	۹	۱۴	۲۷	۱۲	۱۵	۱۷	۴۲	۲۳	۲۳	۲۴
۱۳	۲	۳	۵	۲۸	۱۵	۱۷	۱۹	۴۳	۳۰	۳۰	۳۲
۱۴	۱۳	۱۵	۱۸	۲۹	۲۶	۲۹	۳۱	۴۴	۲۵	۲۶	۲۹
۱۵	۵	۸	۱۱	۳۰	۳۰	۳۲	۳۵				

جدول ۲. مقادیر  $s_i$ ،  $q_i$  و  $\bar{r}_i$  برای فعالیت‌های قابل فشرده سازی بر روی مسیر بحرانی

$\bar{r}_i$	$s_i = q_i$	شماره فعالیت	$\bar{r}_i$	$s_i = q_i$	شماره فعالیت
۷۵۰	-۰/۰۰۰۴۵	۳۰	۵,۰۰۰	-۰/۰۰۰۱	۱
۳,۲۰۰	-۰/۰۰۰۳۶	۳۲	۱,۰۰۰	-۰/۰۰۰۳	۴
۳,۳۰۰	-۰/۰۰۰۵۵	۳۳	۳,۰۰۰	-۰/۰۰۰۱۱	۹
۱,۵۰۰	-۰/۰۰۰۶۶	۳۵	۲,۰۰۰	-۰/۰۰۰۲۳	۱۴
۱,۱۰۰	-۰/۰۰۰۷	۳۶	۱,۰۰۰	-۰/۰۰۰۴۱	۱۹
۲,۲۰۰	-۰/۰۰۰۲	۳۹	۱,۲۰۰	-۰/۰۰۰۳۳	۲۰
۵۰۰	-۰/۰۰۰۲۵	۴۰	۲,۰۰۰	-۰/۰۰۰۰۵	۲۱
۸۵۰	-۰/۰۰۰۳	۴۳	۱,۸۰۰	-۰/۰۰۰۳۶	۲۵
۶,۰۰۰	-۰/۰۰۰۰۴	۴۴	۸۰۰	-۰/۰۰۰۱۸	۲۹

کل بودجه تخصیص یافته برای کاهش زمان پروژه ۳۰,۰۰۰ واحد پولی بوده و هدف افزایش احتمال تکمیل پروژه در ۴۱۰ واحد زمانی است.

### حل مدل

برای حل مدل نهایی در مثال ارائه شده در این مقاله، عملگرهای مختلفی توسعه داده شده‌اند و برای بررسی کارایی عملگرها نیز آزمایش‌های متعددی در مورد مسایل با اندازه‌های مختلف انجام گرفته است. ساختار الگوریتم ژنتیک ارائه شده به شرح زیر می‌باشد.

الف) کروموزوم: رشته یا دنباله‌ای از بیت‌ها که به عنوان شکل کد شده یک جواب ممکن (مناسب یا نامناسب) از مساله مورد نظر می‌باشد. چنانچه از کد گذاری دودویی استفاده شود، هر بیت، یکی از مقادیر صفر و یک را می‌پذیرد. هر چند بیت از کروموزوم مسئله اخیر، یک متغیر مسئله و هر کروموزوم، جواب بالقوه برای متغیرهای مسئله می‌باشد.

ب) تابع هدف و برازندگی: تابع هدف جهت تعیین اینکه افراد چگونه در محدوده مساله ایفای نقش می‌نمایند، مورد استفاده قرار می‌گیرد و تابع برازندگی معمولاً برای تبدیل مقدار تابع هدف به یک مقدار برازندگی وابسته به آن مورد استفاده قرار می‌گیرد. به عبارت دیگر داریم:

$$F(n)=g(f(x))$$

به طوریکه  $f$  تابع هدف بوده و تابع  $g$  مقدار تابع هدف را به یک عدد غیر منفی تبدیل می نماید و  $F$  مقدار برازندگی مربوطه می باشد. مناسب بودن یا نبودن جواب با مقداری که از تابع برازندگی به دست می آید، سنجیده می شود. چون مسئله از نوع بهینه سازی می باشد، تابع برازش با تابع هدف مسئله یکسان است.

ج) اندازه جمعیت و تعداد تولید: تعداد کروموزومها را اندازه جمعیت می گویند. در این تحقیق، اندازه جمعیت در آزمایشهای مختلف مورد بررسی قرار گرفته و جمعیت از یک نسل به نسل دیگر به منظور یافتن جواب بهتر با استفاده از روشهای تولید مثل بهبود یافته است. اندازه جمعیت این تحقیق، ۵۰۰۰ کروموزوم می باشد.

د) عملگرهای ژنتیک: برای پیدا کردن یک نقطه در فضای جستجو باید از عملگرهای ژنتیک استفاده نمود. دو مورد از این عملگرها عبارتند از:

۱- **عملگر تقاطعی:** عملگر اصلی جهت تولید کروموزومهای جدید در الگوریتم ژنتیک، عملگر تقاطع می باشد. این عملگر مشابه همتای خودش در طبیعت، افراد جدیدی تولید می نماید که اجزای (ژنهای) آن از والدینش تشکیل می گردد. در این تحقیق با توجه به اینکه عملگر تقاطع دو نقطه ای<sup>۱</sup> پاسخ مناسب تری را ارائه نموده است، از آن استفاده شده است.

۲- **عملگر جهش:** جهش یک فرآیند تصادفی است که در آن محتوای یک ژن با ژن دیگر جهت تولید یک ساختار ژنتیک جدید جایگزین می گردد.

عملگر جهش استفاده شده در این تحقیق، عملگر Gaussian است که با تغییر نسبت های مختلف آن، نسبت ۱ انتخاب شده است. عملگر جهش Gaussian یک عدد تصادفی از تابع توزیع Gaussian با میانگین صفر به هر ورودی بردار والد اضافه می کند. واریانس این توزیع، به وسیله پارامترهای مقیاس و جمع شوندگی تنظیم می شود که در این تحقیق با تغییرات متوالی این متغیرها، مقیاس ۲ و جمع شوندگی یک انتخاب شده است.

مدل ارائه شده با روش جستجوی الگو<sup>۲</sup> نیز مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج به دست آمده از حل مدل با استفاده از الگوریتم ژنتیک در جدول ۳ آورده شده است.

1- Two Point

2- Pattern Search

جدول ۳. نتایج حل مدل تک هدفه

شماره فعالیت	$te_i$	$r_i$	$\sigma_i$	$te_i$	$\sigma_i$
۱	۱۴,۶۷	۵۰۰۰	۲۵,۰۰	۲۲,۵۰	
۴	۱۲,۱۷	۱۰۰۰	۰,۶۹	۰,۳۹	
۹	۱۰,۰۰	۲۴۱۱	۱,۷۸	۰,۳۳	
۱۴	۱۵,۱۷	۲۰۰۰	۰,۶۹	۰,۲۳	
۱۹	۱۵,۱۷	۱۰۰۰	۱,۳۶	۰,۷۶	
۲۰	۱۶,۳۳	۱۲۰۰	۰,۴۴	۰,۰۵	
۲۱	۱۷,۶۷	۱۶۴	۰,۴۴	۰,۴۴	
۲۵	۲۳,۰۰	۱۸۰۰	۱,۷۸	۱,۱۳	
۲۹	۲۸,۸۳	۸۰۰	۰,۶۹	۰,۵۵	
۳۰	۳۲,۱۷	۷۵۰	۰,۶۹	۰,۳۲	
۳۲	۲۹,۶۷	۳۲۰۰	۷,۱۱	۵,۹۶	
۳۳	۲۹,۸۳	۲۰۰۰	۴,۶۹	۳,۵۹	
۳۵	۲۸,۱۷	۱۵۰۰	۴,۶۹	۳,۷۰	
۳۶	۲۴,۸۳	۱۱۰۰	۱,۳۶	۰,۵۹	
۳۹	۳۲,۳۳	۲۱۰۰	۱,۰۰	۰,۵۸	
۴۰	۳۴,۳۳	۵۰۰	۱,۰۰	۰,۸۸	
۴۳	۳۰,۳۳	۸۱۳	۰,۱۱	۰,۰۳	
۴۴	۲۶,۳۳	۲۶۶۲	۰,۴۴	۰,۳۴	
جمع کل	۴۲۱	۳۰۰۰۰	۵۴	۴۲/۴	۴۰۹/۴

بعد از حل مدل تک هدفه، متوسط طول زمان مسیر بحرانی از ۴۲۱ واحد زمانی به ۴۰۹/۴ واحد زمانی و واریانس آن از ۵۴ به ۴۲/۴ رسیده است بنابراین احتمال تکمیل پروژه از ۶/۶۸٪، به ۵۳/۵۹٪ افزایش یافته است. اما پس از حل مدل تک هدفه و تخصیص بودجه به فعالیت‌های مسیر بحرانی، مسیر دیگری غیر از مسیر اول دارای حداکثر زمان می باشد و بحرانی می گردد. اطلاعات مربوط به این مسیر در جدول ۴ آمده است.

$$1- (z = \frac{410 - 421}{\sqrt{54}} = -1.5, \phi(-1.5) \cong 6.68\%)$$

$$2- (z = \frac{410 - 409.4}{\sqrt{42.4}} = 0.1, \phi(0.1) \cong 53.59\%)$$

جدول ۴. اطلاعات مربوط به مسیر بحرانی جدید

شماره فعالیت	$te_i$	$\sigma_i$	شماره فعالیت	$te_i$	$\sigma_i$
۳	۱۰,۳۳	۱۱,۱۱	۳۰	۳۲,۱۷	۰,۶۹
۷	۱۱,۱۷	۱,۳۶	۳۲	۲۹,۶۷	۷,۱۱
۱۰	۸,۵	۰,۶۹	۳۳	۲۹,۸۳	۴,۶۹
۱۱	۳,۸۳	۰,۲۵	۳۵	۲۸,۱۷	۴,۶۹
۱۴	۱۵,۱۷	۰,۶۹	۳۶	۲۴,۸۳	۱,۳۶
۱۹	۱۵,۱۷	۱,۳۶	۳۹	۳۲,۳۳	۱,۰۰
۲۰	۱۶,۳۳	۰,۴۴	۴۰	۳۴,۳۳	۱,۰۰
۲۱	۱۷,۶۷	۰,۴۴	۴۳	۳۰,۳۳	۰,۱۱
۲۵	۲۳,۰۰	۱,۷۸	۴۴	۲۶,۳۳	۰,۴۴
۲۹	۲۸,۸۳	۰,۶۹	جمع کل	۴۱۰,۶۱	۳۲,۵۷

احتمال تکمیل پروژه با توجه مسیر بحرانی جدید:  $(z = \frac{410 - 410.61}{\sqrt{32.57}} = -0.11, \phi(-0.11) \cong 45.74\%)$

برای رفع این مشکل، از یک مدل چند هدفه استفاده می‌گردد. در تعریف مدل چند هدفه، مسیرهایی که متوسط طول زمانی نزدیک به هم دارند را در نظر می‌گیریم. مسیرهایی در نظر گرفته شده، آنهایی هستند که احتمال دارد، بعد از فشردن مسیری بحرانی پروژه، بحرانی گردند. مدل برنامه‌ریزی ریاضی چند هدفه بصورت زیر است:

$$\text{Max } Z = \text{MIN}(Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n)$$

S.T

$$Z_1 = \frac{T_s - c_{11} - \sum q_{i1}r_{i1}}{\sqrt{c_{21} + \sum s_{i1}r_{i1}}}$$

$$Z_2 = \frac{T_s - c_{12} - \sum q_{i2}r_{i2}}{\sqrt{c_{22} + \sum s_{i2}r_{i2}}}$$

⋮

$$Z_n = \frac{T_s - c_{1n} - \sum q_{in}r_{in}}{\sqrt{c_{2n} + \sum s_{in}r_{in}}}$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^p r_{ij} \leq M$$

$$0 \leq r_i \leq \bar{r}_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

که:

$$c_{11} = \sum_{i \in \text{path}_1} te_i$$

و  $(\text{path}_1)$  مسیر اول

$c_{1n} = \sum_{i \in path_n} te_i$  مجموع زمان مورد انتظار فعالیت‌های واقع بر روی مسیر  $n$ ام ( $path_n$ ) است.

$c_{21} = \sum_{i \in path_1} \sigma_{te_i}$ : مجموع انحراف معیار فعالیت‌های واقع بر روی مسیر اول ( $path_1$ ) و

$c_{2n} = \sum_{i \in path_n} \sigma_{te_i}$  مجموع انحراف معیار زمان فعالیت‌های واقع بر روی مسیر  $n$ ام ( $path_n$ ) است.

مثال عددی قبل را در نظر بگیرید، اطلاعات مربوط به مقادیر  $q_i$  و  $s_i$  و  $\bar{r}_i$  برای فعالیت‌های واقع بر مسیر بحرانی جدید که باید فشرده شوند در جدول ۵ آورده شده است.

جدول ۵. مقادیر  $q_i$  و  $s_i$  و  $\bar{r}_i$  برای فعالیت‌های واقع بر مسیر بحرانی جدید

$\bar{r}_i$	$s_i = q_i$	شماره فعالیت	$\bar{r}_i$	$s_i = q_i$	شماره فعالیت
۵,۰۰۰	-۰/۰۰۰۰۴	۱۰	۳,۰۰۰	-۰/۰۰۰۰۲۸	۳
۳,۰۰۰	-۰/۰۰۰۰۶	۱۱	۲,۵۰۰	-۰/۰۰۰۰۴	۷

نتایج بدست آمده از حل مدل دو هدفه با استفاده از الگوریتم ژنتیک در جدول ۶ آورده شده است.

جدول ۶. نتایج حل مدل دو هدفه

شماره فعالیت	$te_i$	$\sigma_i$	$\bar{r}_i$	$te_i$	$\sigma_i$
۱	۱۴,۶۷	۲۵,۰۰	۲۴۰۰	۱۳,۴۷	۲۳,۸
۳	۱۰,۳۳	۱۱,۱۱	۱۲۵	۱۰,۳	۱۱,۰۸
۴	۱۲,۱۷	۰,۶۹	۹۵۰	۱۱,۸۸	۰,۴۱
۷	۱۱,۱۷	۱,۳۶	۹۵	۱۱,۱۳	۱,۳۲
۹	۱۰,۰۰	۱,۷۸	۲۸۰۰	۸,۳۲	۰,۱
۱۰	۸,۵	۰,۶۹	۵۵۰	۸,۲۸	۰,۴۷
۱۱	۳,۸۳۳	۰,۲۵	۴۰	۳,۸۳۱	۰,۲۴۱
۱۴	۱۵,۱۷	۰,۶۹	۱۸۰۰,۰۰	۱۴,۷۵	۰,۲۸
۱۹	۱۵,۱۷	۱,۳۶	۹۳۰,۰۰	۱۴,۶۱	۰,۸۰
۲۰	۱۶,۳۳	۰,۴۴	۳۲۰,۰۰	۱۷,۶۵	۰,۴۳
۲۱	۱۷,۶۷	۰,۴۴	۱۱۵۰,۰۰	۱۵,۹۵	۰,۰۶
۲۵	۲۳,۰۰	۱,۷۸	۱۸۰۰,۰۰	۲۲,۳۵	۱,۱۳
۲۹	۲۸,۸۳	۰,۶۹	۶۴۰,۰۰	۲۸,۷۲	۰,۵۸
۳۰	۳۲,۱۷	۰,۶۹	۷۳۰,۰۰	۳۱,۸۰	۰,۳۳
۳۲	۲۹,۶۷	۷,۱۱	۳۱۰۰,۰۰	۲۸,۵۵	۶,۰۰
۳۳	۲۹,۸۳	۴,۶۹	۲۰۰۰,۰۰	۲۸,۷۳	۳,۵۹



شماره فعالیت	$te_i$	$I_i$	$\sigma_i$	$te_i$	$\sigma_i$
۳۵	۲۸,۱۷	۱۴۵۰,۰۰	۴,۶۹	۲۷,۲۱	۳,۷۴
۳۶	۲۴,۸۳	۱۱۰۰,۰۰	۱,۳۶	۲۴,۰۶	۰,۵۹
۳۹	۳۲,۳۳	۱۶۰۰,۰۰	۱,۰۰	۳۲,۰۱	۰,۶۸
۴۰	۳۴,۳۳	۴۹۰,۰۰	۱,۰۰	۳۴,۲۱	۰,۸۸
۴۳	۳۰,۳۳	۳۰,۰۰	۰,۱۱	۳۰,۳۳	۰,۱۱
۴۴	۲۶,۳۳	۵۹۰۰,۰۰	۰,۴۴	۲۶,۱۰	۰,۲۱

بعد از حل مدل دو هدفه، متوسط زمان تکمیل و واریانس مسیر بحرانی اول به ترتیب ۴۱۰/۷۱ و ۴۳/۷۱ و متوسط زمان تکمیل و واریانس مسیر بحرانی دوم به ترتیب ۴۱۰/۵۵ و ۳۲/۵۳ می‌باشد، بنابراین احتمال تکمیل پروژه بر اساس مسیر بحرانی اول برابر است با:

$$(z = \frac{410 - 410.71}{\sqrt{43.71}} = -0.11, \phi(-0.11) \cong 45.7\%)$$

و احتمال تکمیل پروژه بر اساس مسیر بحرانی دوم برابر است با:

$$(z = \frac{410 - 410.55}{\sqrt{32.53}} = -0.10, \phi(-0.10) \cong 46.2\%)$$

بنابراین احتمال زمان تکمیل پروژه در ۴۱۰ واحد زمانی از ۶/۶۸٪ به ۴۵/۷٪ افزایش می‌یابد.

### نتیجه گیری

در این مقاله مفهوم فشرده سازی فعالیت‌ها، در شبکه های CPM، در شبکه های PERT به کار گرفته شده و یک مدل برنامه ریزی غیر خطی چند هدفه برای دستیابی به این هدف ارائه گردیده است. هدف از ایجاد این مدل، افزایش احتمال دستیابی به آخرین گره بوسیله حداقل کردن زمان بدینانه فعالیت‌های مسیر بحرانی است که منجر به کاهش در زمان و واریانس تکمیل پروژه می‌گردد. برای استفاده از مدل ارائه شده لازم است مقادیر  $Q_i$  و  $S_i$  و  $\bar{r}_i$  برای فعالیت‌های بحرانی معین گردد. این ضرایب توسط متخصصینی که تسلط کافی به فرایندها و ماهیت فعالیت‌های پروژه دارند، قابل تخمین است. با توجه به اینکه در یک پروژه ممکن است دو یا چند مسیر دارای طول زمانی نزدیک به هم باشند، مدل ارائه شده توسط، عباسی و موکاتاش<sup>۱</sup> برای حل مسائل واقعی قابل استفاده نیست، زیرا استفاده از یک مدل

تک هدفه برای کاهش زمان بدبینانه فعالیت‌های بحرانی ممکن است منجر به بحرانی شدن سایر مسیرها گردد برای رفع این مشکل لازم است که از یک مدل برنامه‌ریزی چندهدفه استفاده شود. توسعه مدل برنامه‌ریزی ریاضی تک هدفه به مدل برنامه‌ریزی ریاضی چند هدفه و حل آن با استفاده از الگوریتم ژنتیک، مهم‌ترین جنبه‌های نوآوری پژوهش حاضر است.

در مثال ارائه شده، با صرف هزینه اضافی روی فعالیت‌های بحرانی و کاهش زمان بدبینانه، احتمال تکمیل پروژه از  $6/68$  درصد به  $45/7$  درصد افزایش یافته است. احتمال تکمیل پروژه با افزایش میزان بودجه صرف شده افزایش می‌یابد، زیرا زمان تکمیل مورد انتظار پروژه و واریانس زمان تکمیل کاهش می‌یابد. روش ارائه شده در این مقاله می‌تواند به برنامه‌ریزان پروژه در درک تبادل زمان - هزینه در شبکه‌های PERT کمک نماید.



## منابع

1. Abbasi, Ghaleb Y., Mukattash, Adnan M., **Crashing PERT networks using mathematical programming**, International Journal of Project Management 19, 181-188, 2001.
2. Azaron, Amir, Katagiri, Hideki, Sakawa, Masatoshi, Kato, Kosuke, and Memariani, Azizollah, **A multi-objective resource allocation problem in PERT networks**, European Journal of Operational Research, 2005.
3. Azaron, Amir, Perkgoz, Cahit, and Sakawa, Masatoshi, **A genetic algorithm approach for the time-cost trade-off in PERT networks**, Applied Mathematics and Computation 168, 1317° 1339, 2005.
4. Bazaraa MS, Shetty CM. **Nonlinear programming theory and algorithms**. New York: Wiley, 1979.
5. Cho JG, Yum BJ. **An uncertainty importance measure of activities in PERT networks**. Int J Prod Res, 35(10):2737-2757, 1997.
6. Feng, C.W., Liu, L., Burns, S.A., **Using genetic algorithms to solve construction time-cost trade-off problems**, Journal of Construction Engineering and Management, ASCE 11 ,184° 189, 1997.
7. Golenkoginzburg D, Gonik A. **A heuristic for network project scheduling with random activity duration's depending on the resource allocation**. International Journal of Production Economics ,55(22):149-162, 1998.
8. Johnson GA, Schou CD. **Expediting projects in PERT with stochastic time estimates**. Project Management Journal, 21(2):29-33, 1990.
9. Keefer DL, Verdini WA. **Better estimation of PERT activity time parameters**. Management Science , 39(9), 1993
10. Lau Ahl, Lau HS, Zhang Y. **A simple and logic alternative for making PERT time estimates**. IIE Transaction ,28(3):183-192, 1996.
11. Pongcharoen, P., Hicks, C., Braiden, P.M., Stewardson, D.J., **Determining optimum genetic algorithm parameters for scheduling the manufacturing and assembly of complex products**, International Journal of Production Economics 78 , 311° 322, 2002.
12. Saman M. **Crashing in PERT Networks**. M.Sc. thesis submitted at the Faculty of Graduate Studies, University of Jordan, Amman-Jordan, August ,1991.
13. Yang, I-Tung **Performing complex project crashing analysis with aid of particle swarm optimization algorithm**, International Journal of Project Management 25 (6), 637° 646, 2007.
14. Mouhoub, Nasser Eddine, Benhocine, Abdelhamid and Belouadah, Hocine **A new method for constructing a minimal PERT network** Applied Mathematical Modelling 35 (9), 4575° 4588, 2011.