فصلنامه علمی ـ پژوهشی مطالعات مدیریت صنعتی سال دهم، شماره ۲۶، پاییز ۹۱
صفحات ۲۷ تا٤٦

تصمیم‌گیری گروهی بر پایه یک روش تاپسیس فازی شهودی ذوزنقه‌ای جدید

عماد روغنیان *
فاطمه مجیبان**

چکیده

در این مقاله یک روش تاپسیس جدید مبتنی بر اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای برای تصمیم‌گیری گروهی معرفی می‌گردد که در آن، ارزش گذاری گزینه‌ها نسبت به شاخص‌ها و ارزش‌های وزنی شاخص‌ها با استفاده از اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای تعیین می‌گردد و اوزان نظرات تصمیم گیرندگان نیز نامعلوم هستند. در روش پیشنهادی، برای تعیین ارزش‌های وزنی شاخص‌ها و نظرات تصمیم گیرندگان از ارزش‌های مورد انتظار و عملگر میانگین وزنی اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای استفاده شده، و سپس الگوریتمی برای رتبه‌بندی گزینه‌ها در محیط فازی شهودی ذوزنقه‌ای ارائه می‌گردد. در پایان، با استفاده از یک مثال عددی، کارایی روش پیشنهادی جدید مورد بررسی قرار می گیرد.

واژگان کلیدی: تاپسیس، اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای، تصمیم‌گیری گروهی، عملگر میانگین وزنی.

---

* عضوهیئت‌علمی دانشکده مهندسی صنایع دانشگاه خواجه نصیر طوسی
** کارشناس ارشد رشته مدیریت صنعتی، دانشگاه شهید بهشتی ـ تهران ـ ایران (نویسنده مسئول): Fatemeh.mojibian@gmail.com

تاریخ دریافت: ۹۱/۳/٤ تاریخ پذیرش: ۹۱/۷/۱۵

مقدمه

رویکرد تصمیم‌گیری‌های چند معیاره[1] (MCDM) بخش اصلی علم تصمیم‌گیری مدرن و پژوهش عملیاتی محسوب می شود. به دلیل پیچیدگی محیط اجتماعی ـ اقتصادی، تصمیم گیری گروهی چند معیاره[2] (MCGDM) به یک رویکرد مهم در حل این پیچیدگی تبدیل شده است. روش اولویت بندی بر اساس نزدیکی به راه حل ایده‌آل[3] (TOPSIS)، ارائه شده توسط هوانگ و یون[4] [۱۵] روشی معروف برای مسائل تصمیم‌گیری چند معیاره می‌باشد. در این روش، راه حل ایده آل مثبت[5] (PIS)او راه حل ایده‌آل منفی[6] (NIS) در نظر گرفته شده و مقدار فاصله گزینه‌ها از آنها تعیین می‌گردد. ایده اصلی این روش آن است که گزینه انتخابی باید دارای بیشترین فاصله از NIS و کمترین فاصله از PIS باشد. در روش تاپسیس، داده‌های ماتریس تصمیم‌گیری اعداد قطعی هستند، درحالی که در مسائل تصمیم‌گیری گروهی چند معیاره در دنیای واقعی، اطلاعات در دسترس تصمیم گیرندگان همواره مبهم و غیر دقیق می باشند. از آنجایی که بیان اولویت‌های گزینه‌ها نسبت به شاخص‌ها با مقادیر قطعی، غیر منطقی می باشد، روش تاپسیس کلاسیک برای این مطالعه مفید نمی‌باشد. بنابراین، در مقایسه با مسائل MCDM کلاسیک، مسائل تصمیم گیری گروهی چند معیاره بسیار پیچیده‌تر هستند به طوری که شامل اولویت‌ها و قضاوت‌های ذهنی تصمیم گیرندگان مختلف می باشند، که اغلب هم مبهم و نادقیق می باشند[۲۵]. بنابراین، ضروری است که برخی از ابزارهای ریاضی منطقی برای مسائل تصمیم گیری گروهی چند معیاره در شرایط عدم قطعیت فراهم گردند.

از آنجایی که تئوری مجموعه‌های فازی ارائه شده توسط زاده[7] [۳۳] می‌تواند شرایط مبهم و نادقیق را به‌کارگیرد، بسیاری از تحقیقات، روش تاپسیس را در محیط فازی توسعه دادند [۳،۵،۷،۹،۱۱،۱۲،۱۶،۱۷،۱۸،۲۱،۲۲،۲۵،۲۸،۲۹]. به دلیل پیچیدگی محیط اجتماعی ـ اقتصادی، در بسیاری از مسائل تصمیم گیری کاربردی، امتیازهای

1- Multiple Criteria Decision Making
2- Multi-criteria Group Decision making
3- Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution
4- Hwang and Yoon
5- Positive Ideal Solution
6- Negative Ideal Solution
7- Zadeh

بیان شده به وسیله تصمیم گیرندگان برای گزینه‌ها معمولا نادقیق است به طوریکه ممکن است تردیدی درباره آنها وجود داشته باشد. از طرفی مجموعه‌های فازی شهودی ارائه شده توسط آتاناسو[1] [۴] ابزاری مناسب برای توصیف اطلاعات مبهم و نادقیق تصمیم و مواجهه با عدم قطعیت و ابهام موجود در فرآیند تصمیم‌گیری می‌باشند[۳۰]. از این رو، برخی از محققان روش تاپسیس توسعه یافته با مجموعه‌های فازی شهودی برای مسائل MCDM را مورد ارزیابی قرار دادند [۶،۲۰،۲۳،۳۱]. اعداد فازی شکل خاصی از مجموعه‌های فازی هستند و برای مسائل تصمیم‌گیری چند شاخصه فازی دارای اهمیت هستند [۱،۲،۱۳،۲۶]. نهی و ملکی[2] [۱۹] اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای را به عنوان توسعه یافته اعداد فازی شهودی مثلثی معرفی کرده و برخی عملیات ریاضی را برای آنها به اثبات رسانیدند. اعداد فازی شهودی مثلثی و ذوزنقه ای، توسعه یافته مجموعه‌های فازی شهودی هستند که مجموعه گسسته را به مجموعه پیوسته تعمیم می دهند.

به این ترتیب هدف اصلی این مقاله ارائه یک روش تاپسیس توسعه یافته جدید با اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای توسط گروهی از تصمیم گیرندگان می‌باشد. در روش پیشنهادی، امتیاز یک گزینه نسبت به شاخص‌ها و ارزش‌های وزنی شاخص‌ها از اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای شکل می گیرند و اوزان هر یک از تصمیم گیرندگان نیز نامشخص است. مسئله MCGDM پیشنهادی بر پایه روش تاپسیس فازی ذوزنقه‌ای می تواند به گروهی از تصمیم گیرندگان در تصمیم گیری در محیط غیر قطعی کمک نماید.

ادامه مقاله به این صورت سازماندهی شده است که در بخش۲، ابتدا برخی از تعاریف اولیه اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای ارائه می شود. در بخش۳، مسئله MCGDM پیشنهادی برپایه روش تاپسیس فازی شهودی ذوزنقه‌ای ارائه می گردد. در بخش۴، یک مثال عددی برای بررسی نحوه عملکرد روش پیشنهادی ارائه می‌شود، و در بخش۵ نتیجه گیری صورت می گیرد.

1- Atanassov
2- Nehi and Maleki

تعاریف

در این بخش برخی تعاریف اولیه از مجموعه‌های فازی شهودی [۴] و اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای [۱۹،۱۴] ارائه می گردد.

تعریف ۱. اگر X یک مجموعه مرجع باشد، مجموعه فازی شهودی A به صورت زیر تعریف می گردد[۴]:

$$\mathrm{A} = \{\langle \mathrm{X}, \mu_A(x), \upsilon_A(x) | \mathrm{x} \in \mathrm{X} \rangle\} \tag{۱}$$

به طوری که توابع $\mu_A(x): X \to [0,1]$ و $\upsilon_A(x): X \to [0,1]$ به ترتیب درجه عضویت و درجه عدم عضویت عنصر $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$ می باشند، به نحوی که رابطه $0 \leq \mu_A(x) + \upsilon_A(x) \leq 1$ برای تمامی $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$ برقرار می‌باشد. مقدار $\pi_A = 1 - \mu_A(x) - \upsilon_A(x)$ درجه تردید X را نشان می دهد.

تعریف ۲. اگر A یک عدد فازی شهودی ذوزنقه‌ای با پارامترهای $b_1 \leq a_1 \leq b_2 \leq a_2 \leq a_3 \leq b_3 \leq a_4 \leq b_4$ باشد و به صورت $\mathrm{A} = \langle (a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4) \rangle$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی $\mathcal{R}$ نشان داده شود، توابع درجه عضویت و عدم عضویت آن به صورت زیر می باشد[۱۹]:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x < a_1 \\ \frac{x-a_1}{a_2-a_1} & a_1 \leq x \leq a_2 \\ 1 & a_2 < x \leq a_3 \\ \frac{x-a_4}{a_3-a_4} & a_3 < x \leq a_4 \\ 0 & x > a_4 \end{cases} \tag{۲}$$

و

$$\upsilon_A(x) = \begin{cases} 1 & x < b_1 \\ \frac{x-b_1}{b_1-b_2} & b_1 \leq x \leq b_2 \\ 0 & b_2 < x \leq b_3 \\ \frac{x-b_3}{b_4-b_3} & b_3 < x \leq b_4 \\ 1 & x > b_4 \end{cases} \tag{۳}$$

تعریف ۳. اگر A_1 و A_2 دو عدد فازی شهودی ذوزنقه‌ای باشند.

$$\mathrm{A}_1 = \langle (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}), (b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{14}) \rangle$$
$$\mathrm{A}_2 = \langle (a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}), (b_{21}, b_{22}, b_{23}, b_{24}) \rangle$$

آن‌گاه

$$A_1 \oplus A_2 = \langle (a_{11}+a_{21}, a_{12}+a_{22}, a_{13}+a_{23}, a_{14}+a_{24}), (b_{11}+b_{21}, b_{12}+b_{22}, b_{13}+b_{23}, b_{14}+b_{24}) \rangle \quad (۴)$$

$$\lambda A_1 = \langle (\lambda a_{11}, \lambda a_{12}, \lambda a_{13}, \lambda a_{14}), (\lambda b_{11}, \lambda b_{12}, \lambda b_{13}, \lambda b_{14}) \rangle \quad (۵)$$

مطابق قوانین عملیاتی تعریف ۶، وانگ و ژانگ[1] [۲۷] عملگر میانگین وزنی را برای اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای توسعه داده و عملگر میانگین وزنی فازی شهودی ذوزنقه‌ای را ارائه دادند که به صورت زیر تعریف می شود:

تعریف ٤. اگر $A_i (i = 1,2,\ldots,n)$ مجموعه‌ای از اعداد فازی شهودی ذوزنقه ای، و $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$ برداری وزنی A_i باشد، آنگاه عملگر میانگین وزنی فازی شهودی ذوزنقه ای[2] (TrIFWA) به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathrm{TrIFWA}(A_1, A_2, \ldots, A_n) = w_1 A_1 \oplus w_2 A_2 \oplus \ldots \oplus w_n A_n \quad (۶)$$

حاصل جمع بدست آمده به وسیله عملگر TrIFWA نیز اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای می‌باشد. زمانی که $w_i = \frac{1}{n}$ برای تمامی $i = 1,2,\ldots,n$ باشد، آنگاه عملگر TrIFWA به عملگر میانگین حسابی فازی شهودی ذوزنقه‌ای[3] (TrIFA) ساده می شود:

$$\mathrm{TrIFA}(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \frac{1}{n}(w_1 A_1 \oplus w_2 A_2 \oplus \ldots \oplus w_n A_n) \quad (۷)$$

یکی دیگر از مفاهیم اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای، ارزش‌های مورد انتظار آنها می‌باشد.

بنابر ایده یه[4] [۳۲]، ارزش مورد انتظار عدد فازی شهودی ذوزنقه‌ای $A = \langle (a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4) \rangle$ به وسیله رابطه زیر به دست می‌آید:

$$EV(A) = \frac{1}{8}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4) \quad (۸)$$

تعریف ۵. اگر A و B دو عدد فازی شهودی ذوزنقه‌ای با نشانگر برش آلفا باشند، آنگاه فاصله بین A و B به صورت زیر تعریف می‌شود[۱۴]:

1- Wang and Zhang
2- Trapezoidal Intuitionistic Fuzzy Weighted Averaging operator
3- Trapezoidal Intuitionistic Fuzzy arithmetic Averaging operator
4- Ye

$$\mathrm{D(A,B)} = \sqrt{1/4\int_0^1 \begin{bmatrix} \left(A_L^+(\alpha) - B_L^+(\alpha)\right)^2 + \left(A_R^+(\alpha) - B_R^+(\alpha)\right)^2 \\ +\left(A_L^-(\alpha) - B_L^-(\alpha)\right)^2 + \left(A_R^-(\alpha) - B_R^-(\alpha)\right)^2 \end{bmatrix} d\alpha}$$

(۹)

قضیه ۱. اگر $\mathrm{A}_1 = \langle(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}), (b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{14})\rangle$ و $\mathrm{A}_2 = \langle(a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}), (b_{21}, b_{22}, b_{23}, b_{24})\rangle$ دو عدد فازی شهودی ذوزنقه‌ای باشند، فاصله بین آنها به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mathrm{D}(A_1, A_2) = \sqrt{\frac{1}{12}\left\{\begin{matrix} \sum_{\mathrm{i}=1}^{4}(a_{2\mathrm{i}} - a_{1\mathrm{i}})^2 + \sum_{\mathrm{i}=1}^{4}(\mathrm{b}_{2\mathrm{i}} - \mathrm{b}_{1\mathrm{i}})^2 + \\ \sum_{\mathrm{i}\in\{1,3\}}(a_{2\mathrm{i}} - a_{1\mathrm{i}})(a_{2\mathrm{i}'} - a_{1\mathrm{i}'}) + \sum_{\mathrm{i}\in\{1,3\}}(\mathrm{b}_{2\mathrm{i}} - \mathrm{b}_{1\mathrm{i}})(\mathrm{b}_{2\mathrm{i}'} - \mathrm{b}_{1\mathrm{i}'}) \end{matrix}\right\}}$$

(۱۰)

به طوریکه $i' = i + 1$ برای تمامی $\mathrm{i} \in \{1,3\}$.

TOPSIS تعمیم یافته با اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای برای مسائل MCGDM

در مسائل MCGDM، تصمیم گیرندگان ابتدا باید امتیاز گزینه‌ها را نسبت به شاخص‌ها مشخص کرده و بر پایه این ارزش‌های اولویت‌بندی شده، بهترین گزینه را انتخاب نمایند. به دلیل اطلاعات مبهم و نادقیق در دسترس تصمیم گیرندگان تحت شرایط نامعلوم، تصمیم گیرندگان قادر به ارزیابی دقیق گزینه‌ها نمی‌باشند. از این رو، متغیرهای کلامی اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای می‌توانند در تشکیل ماتریس تصمیم گیری برای هر تصمیم گیرنده مورد استفاده قرار گیرند. فرآیند MCGDM، تصمیم گیرندگان بسیاری را شامل می‌شودکه هر یک دارای دانش و تجربه متفاوتی هستند، و در نتیجه ممکن است آنها در برخی از زمینه‌ها نسبت به زمینه‌های دیگر خبره تر باشند.

حال از آنجایی که تعیین اوزان از قبل برای متخصصان منطقی نمی‌باشد، بنابراین در این بخش یک روش جدید تاپسیس توسعه یافته با اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای برای حل مسائل MCGDM ارائه می گردد که در آن ارزش‌های اولویتی و ارزش‌های وزنی شاخص‌ها به وسیله تصمیم گیرندگان با استفاده از اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای تعیین می گردند.

برای مسائل MCGDM، فرض می شود که $O=\{o_1,o_2,\dots,o_m\}$ مجموعه‌ای از گزینه ها، $C=\{c_1,c_2,\dots,c_n\}$ شاخص‌های تصمیم، $D=\{d_1,d_2,\dots,d_l\}$ مجموعه‌ای از تصمیم گیرندگان، $R^{(k)}=\left({r_{ij}}^{(k)}\right)_{m\times n}$ ماتریس تصمیم گیری تصمیم گیرنده k ام است که در آن ${r_{ij}}^{(k)}$ $(i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n)$ یک عدد فازی شهودی ذوزنقه‌ای ایجاد شده توسط k تصمیم گیرنده برای گزینه o_i نسبت به شاخص c_j می باشد. با این توضیحات، تاپسیس فازی شهودی ذوزنقه‌ای برای مسائل MCGDM به صورت زیر می باشد:

ابتدا باید اوزان تصمیم گیرندگان تعیین شوند. مطابق چن و یانگ[۱] [۱۰]، فرض می‌شود که ${r_{ij}}^{(k)}=\langle\left(a_{ij1}^k,a_{ij2}^k,a_{ij3}^k,a_{ij4}^k\right);\left(b_{ij1}^k,b_{ij2}^k,b_{ij3}^k,b_{ij4}^k\right)\rangle$ اولویت‌های گزینه o_i در شاخص c_j ایجاد شده توسط تصمیم گیرنده k می‌باشد. سپس ارزش میانگین اولویت بندی r'_{ij} از گزینه o_i در شاخص c_j می‌تواند به وسیله عملگر میانگین حسابی فازی شهودی ذوزنقه‌ای (TrIFA) در رابطه (۷) محاسبه گردد.

$$r'_{ij}=TrIFA\left(r_{ij}^{(1)},r_{ij}^{(2)},\dots,r_{ij}^{(l)}\right)=\frac{1}{l}\left(r_{ij}^{(1)}+r_{ij}^{(2)}+,\dots,r_{ij}^{(l)}\right)$$
$$=\left\langle\begin{matrix}\left(\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{l}a_{ij1}^k,\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{l}a_{ij2}^k,\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{l}a_{ij3}^k,\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{l}a_{ij4}^k\right),\\ \left(\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{l}b_{ij1}^k,\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{l}b_{ij2}^k,\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{l}b_{ij3}^k,\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{l}b_{ij4}^k\right)\end{matrix}\right\rangle \qquad (۱۱)$$

سپس می‌توان تشابه ${r_{ij}}^{(k)}$ و میانگین r'_{ij} را با استفاده از درجه تشابه به وسیله رابطه زیر تعریف گردد:

$$S\left({r_{ij}}^{(k)},r'_{ij}\right)=1-\frac{D\left({r_{ij}}^{(k)},r'_{ij}\right)}{\sum_{k=1}^{l}D\left({r_{ij}}^{(k)},r'_{ij}\right)} \qquad (۱۲)$$

1- Chen and Yang

به طوریکه $D\left(r_{ij}{}^{(k)}, r'_{ij}\right)$ فاصله بین $r_{ij}{}^{(k)}$ و میانگین r'_{ij} می باشد که می تواند با استفاده از قضیه ۱ محاسبه گردد.

سپس وزن هر $r_{ij}{}^{(k)}$ می تواند به صورت زیر محاسبه گردد:

$$w_{ij}{}^{(k)} = \frac{S\left(r_{ij}{}^{(k)}, r'_{ij}\right)}{\sum_{k=1}^{l} S\left(r_{ij}{}^{(k)}, r'_{ij}\right)} \qquad (۱۳)$$

در مسائل MCGDM، باید نقطه نظرات تمام افراد گروه نهایتا ادغام گردد. عملگر TrIFWA تعریف شده در تعریف ۴ می‌تواند برای ساختن ماتریس تصمیم فازی شهودی ذوزنقه‌ای تجمیعی $R = \left(r_{ij}\right)_{m\times n}$ به صورت زیر استفاده گردد:

$$r_{ij} = \langle\left(a_{ij1}, a_{ij2}, a_{ij3}, a_{ij4}\right), \left(b_{ij1}, b_{ij2}, b_{ij3}, b_{ij4}\right)\rangle = TrIFWA\left(r_{ij}^{(1)}, r_{ij}^{(2)}, \dots, r_{ij}^{(l)}\right) = w_{ij}^{(1)} r_{ij}^{(1)} + w_{ij}^{(2)} r_{ij}^{(2)} + \cdots + w_{ij}^{(l)} r_{ij}^{(l)} \qquad (۱۴)$$

مسئله مهم بعدی تعیین اوزان شاخص‌ها می‌باشد. به منظور تعیین اوزان شاخص‌ها، تصمیم گیرندگان نظر شخصی خود را برای تعیین اهمیت هر شاخص به وسیله اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای بیان می کنند. اگر فرض شود ${}_{j}^{(k)}$ بیانگر اهمیت شاخص jام تعیین شده به وسیله تصمیم گیرنده k ام است، آن‌گاه ارزش وزنی شاخص c_j برای هر گزینه o_i، که با ${}_{ij}$ نشان داده می شود را می توان با استفاده از عملگر TrIFWA در تعریف ۴، به صورت زیر به دست آورد:

$${}_{ij} = \langle\left(p_{ij1}, p_{ij2}, p_{ij3}, p_{ij4}\right), \left(q_{ij1}, q_{ij2}, q_{ij3}, q_{ij4}\right)\rangle = TrIFWA\left({}_{j}^{(1)}, {}_{j}^{(2)}, \dots, {}_{j}^{(l)}\right) = w_{ij}^{(1)}\,{}_{j}^{(1)} + w_{ij}^{(2)}\,{}_{j}^{(2)} + \cdots + w_{ij}^{(l)}\,{}_{j}^{(l)} \qquad (۱۵)$$

ارزش وزنی مورد انتظار $\mathrm{EV}({}_{ij})$ از اوزان فازی شهودی ذوزنقه‌ای از طریق رابطه (۸) به دست می‌آید. در نتیجه ارزش وزنی مورد انتظار نرمالیزه شده ${}'_{ij}$ را می‌توان از رابطه زیر به دست آورد:

$${}'_{ij} = \frac{EV({}_{ij})}{\sum_{j=1}^{n} EV({}_{ij})} \qquad (۱۶)$$

ایده اولیه تاپسیس این است که گزینه انتخاب شده می‌بایست نزدیک‌ترین به PIS و دورترین از NIS باشد. بنابراین PIS و NIS می‌بایست به صورت زیر تعیین گردند:

$$R^+ = (r_1^+, r_2^+, \dots, r_n^+) \qquad (۱۷)$$

$$R^- = (r_1^-, r_2^-, \dots, r_n^-) \qquad (۱۸)$$

زمانی که j امین شاخص، از نوع سود باشد آنگاه :

$$r_j^+ = \left\langle \begin{matrix} (\max_i a_{ij1}, \max_i a_{ij2}, \max_i a_{ij3}, \max_i a_{ij4}), \\ (\max_i b_{ij1}, \max_i b_{ij2}, \max_i b_{ij3}, \max_i b_{ij4}) \end{matrix} \right\rangle \qquad (۱۹)$$

$$r_j^- = \left\langle \begin{matrix} (\min_i a_{ij1}, \min_i a_{ij2}, \min_i a_{ij3}, \min_i a_{ij4}), \\ (\min_i b_{ij1}, \min_i b_{ij2}, \min_i b_{ij3}, \min_i b_{ij4}) \end{matrix} \right\rangle \qquad (۲۰)$$

زمانی که j امین شاخص، از نوع هزینه باشد آن‌گاه :

$$r_j^+ = \left\langle \begin{matrix} (\min_i a_{ij1}, \min_i a_{ij2}, \min_i a_{ij3}, \min_i a_{ij4}), \\ (\min_i b_{ij1}, \min_i b_{ij2}, \min_i b_{ij3}, \min_i b_{ij4}) \end{matrix} \right\rangle \qquad (۲۱)$$

$$r_j^- = \left\langle \begin{matrix} (\max_i a_{ij1}, \max_i a_{ij2}, \max_i a_{ij3}, \max_i a_{ij4}), \\ (\max_i b_{ij1}, \max_i b_{ij2}, \max_i b_{ij3}, \max_i b_{ij4}) \end{matrix} \right\rangle \qquad (۲۲)$$

سپس مطابق تعریف ۵ اندازه فاصله بین گزینه o_i و PIS و NIS تعیین می گردد.

تعریف ٦. اندازه فاصله وزنی بین گزینه o_i و PIS به صورت زیر تعیین می گردد:

$$D_i^+ = \sum_{j=1}^n {}'_{ij}\, D(r_{ij}, r_j^+) \qquad (۲۳)$$

به طوریکه $D(r_{ij}, r_j^+)$ فاصله r_{ij} و r_j^+ تعریف شده در تعریف ۶ می باشد، ${}'_{ij}$ ارزش وزنی مورد انتظار نرمالیزه شده است که از رابطه (۱۶) بدست آید، و $i = 1,2, \dots, m; j = 1,2, \dots, n$.

تعریف ۷. اندازه فاصله وزنی بین گزینه o_i و NIS به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$D_i^- = \sum_{j=1}^n {}'_{ij}\, D(r_{ij}, r_j^-) \qquad (۲۴)$$

به طوریکه $D(r_{ij}, r_j^-)$ فاصله r_{ij} و r_j^- تعریف شده در تعریف ۶ می‌باشد، ${}'_{ij}$ ارزش وزنی مورد انتظار نرمالیزه شده است که از رابطه (۱۶) به دست آید، و $i = 1,2, \dots, m; j = 1,2, \dots, n$.

بنابراین ضریب نزدیکی نسبی گزینه o_i مربوط به گزینه‌های ایده‌آل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U_{\mathrm{i}}^{-} = \frac{\mathrm{D}_{\mathrm{i}}^{-}}{\mathrm{D}_{\mathrm{i}}^{+} + \mathrm{D}_{\mathrm{i}}^{-}} \quad (۲۵)$$

واضح است که گزینه‌ها بر طبق ضریب نزدیکی نسبی رتبه بندی می شوند. حال رویه مسئله MCGDM بر پایه روش تاپسیس فازی شهودی ذوزنقه‌ای به صورت زیر توسعه داده می شود:

گام اول: بدست آوردن ماتریس اوزان شاخص‌ها توسط تصمیم گیرندگان با استفاده از متغیرهای کلامی اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای.

گام دوم: تعیین اوزان تصمیم گیرندگان با استفاده از روابط (۱۱)، (۱۲) و (۱۳).

گام سوم: تشکیل ماتریس تصمیم فازی شهودی ذوزنقه‌ای ادغامی نظرات تصمیم‌گیرندگان با استفاده از رابطه (۱۴).

گام چهارم: تعیین ارزش وزنی مورد انتظار نرمالیزه به وسیله روابط (۱۵) و (۱۶).

گام پنجم: تعیین PIS و NIS با استفاده از روابط (۱۷) و (۱۸).

گام ششم: محاسبه اندازه‌های فاصله مثبت و منفی با استفاده از روابط (۲۳) و (۲۴).

گام هفتم: محاسبه ضریب نزدیکی نسبی هر گزینه با استفاده از رابطه (۲۵).

گام هشتم: رتبه‌بندی گزینه‌ها مطابق ضرایب نزدیکی نسبی.

مثال عددی

در این بخش، یک مسئله MCGDM در انتخاب نرم افزار برای تشریح روش پیشنهادی استفاده می‌شود.

یک مرکز کامپیوتری می‌خواهد مناسب‌ترین سیستم اطلاعاتی را برای افزایش اثر بخشی کار انتخاب نماید، پس از ارزیابی اولیه، چهار سیستم اطلاعاتی $\{o_1, o_2, o_3, o_4\}$ برای انتخاب‌های بعدی باقی مانده است. چهار گزینه ممکن می‌توانند مطابق سه شاخص مورد ارزیابی قرار بگیرند: c_1: هزینه نرم افزار و سخت‌افزار، c_2: کمک به بهبود عملکرد سازمانی و c_3: قابلیت تولید نرم افزار.

فرآیند انتخاب نرم افزار مناسب به وسیله روش تاپسیس فازی شهودی ذوزنقه‌ای

شامل مراحل زیر است:
گام اول: فرض می شود که k متخصص (در اینجا k=4) برای ارزیابی گزینه‌های ممکن انتخاب شده‌اند. عبارت‌های کلامی استفاده شده برای اولویت‌های تصمیم گیرندگان و شاخص‌ها در جدول ۱ آمده است.

جدول ۱. ارزش‌های کلامی اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای برای عبارت‌های کلامی

متغیرهای کلامی	ارزش‌های کلامی اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای
بسیار پایین	$\langle(0.0,0.0,0.0,0.0), (0.0,0.0,0.0,0.0)\rangle$
پایین	$\langle(0.0,0.1,0.2,0.3), (0.0,0.1,0.2,0.3)\rangle$
نسبتا پایین	$\langle(0.1,0.2,0.3,0.4), (0.0,0.2,0.3,0.5)\rangle$
متوسط	$\langle(0.3,0.4,0.5,0.6), (0.2,0.4,0.5,0.7)\rangle$
نسبتا بالا	$\langle(0.5,0.6,0.7,0.8), (0.4,0.6,0.7,0.9)\rangle$
بالا	$\langle(0.7,0.8,0.9,1.0), (0.7,0.8,0.9,1.0)\rangle$
بسیار بالا	$\langle(1.0,1.0,1.0,1.0), (1.0,1.0,1.0,1.0)\rangle$

هر متخصص ارزش‌های کلامی اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای را به اوزان شاخص‌ها اختصاص می‌دهد. بنابراین ماتریس اوزان شاخص‌ها در جدول ۶ نشان داده شده است.

جدول ۲. ماتریس تصمیم فازی شهودی تصمیم گیرنده یک

	c_1	c_2	c_3
o_1	$\langle(0.1,0.2,0.3,0.4), (0.0,0.2,0.3,0.5)\rangle$	$\langle(0.5,0.6,0.7,0.8), (0.4,0.6,0.7,0.9)\rangle$	$\langle(0.1,0.2,0.3,0.4), (0.0,0.2,0.3,0.5)\rangle$
o_2	$\langle(0.3,0.4,0.5,0.6), (0.2,0.4,0.5,0.7)\rangle$	$\langle(0.5,0.6,0.7,0.8), (0.4,0.6,0.7,0.9)\rangle$	$\langle(0.5,0.6,0.7,0.8), (0.4,0.6,0.7,0.9)\rangle$
o_3	$\langle(0.7,0.8,0.9,1.0), (0.7,0.8,0.9,1.0)\rangle$	$\langle(0.5,0.6,0.7,0.8), (0.4,0.6,0.7,0.9)\rangle$	$\langle(0.0,0.1,0.2,0.3), (0.0,0.1,0.2,0.3)\rangle$
o_4	$\langle(0.5,0.6,0.7,0.8), (0.4,0.6,0.7,0.9)\rangle$	$\langle(0.3,0.4,0.5,0.6), (0.2,0.4,0.5,0.7)\rangle$	$\langle(0.5,0.6,0.7,0.8), (0.4,0.6,0.7,0.9)\rangle$

جدول ۳. ماتریس تصمیم فازی شهودی تصمیم گیرنده دو

	c_1	c_2	c_3
o_1	⟨(0.3,0.4,0.5,0.6), (0.2,0.4,0.5,0.7)⟩	⟨(0.5,0.6,0.7,0.8), (0.4,0.6,0.7,0.9)⟩	⟨(0.1,0.2,0.3,0.4), (0.0,0.2,0.3,0.5)⟩
o_2	⟨(0.7,0.8,0.9,1.0), (0.7,0.8,0.9,1.0)⟩	⟨(0.0,0.1,0.2,0.3), (0.0,0.1,0.2,0.3)⟩	⟨(0.3,0.4,0.5,0.6), (0.2,0.4,0.5,0.7)⟩
o_3	⟨(0.1,0.2,0.3,0.4), (0.0,0.2,0.3,0.5)⟩	⟨(0.7,0.8,0.9,1.0), (0.7,0.8,0.9,1.0)⟩	⟨(0.5,0.6,0.7,0.8), (0.4,0.6,0.7,0.9)⟩
o_4	⟨(0.7,0.8,0.9,1.0), (0.7,0.8,0.9,1.0)⟩	⟨(0.7,0.8,0.9,1.0), (0.7,0.8,0.9,1.0)⟩	⟨(0.3,0.4,0.5,0.6), (0.2,0.4,0.5,0.7)⟩

جدول ٤. ماتریس تصمیم فازی شهودی تصمیم گیرنده سه

	c_1	c_2	c_3
o_1	⟨(0.5,0.6,0.7,0.8), (0.4,0.6,0.7,0.9)⟩	⟨(0.1,0.2,0.3,0.4), (0.0,0.2,0.3,0.5)⟩	⟨(0.5,0.6,0.7,0.8), (0.4,0.6,0.7,0.9)⟩
o_2	⟨(0.1,0.2,0.3,0.4), (0.0,0.2,0.3,0.5)⟩	⟨(0.7,0.8,0.9,1.0), (0.7,0.8,0.9,1.0)⟩	⟨(0.3,0.4,0.5,0.6), (0.2,0.4,0.5,0.7)⟩
o_3	⟨(0.3,0.4,0.5,0.6), (0.2,0.4,0.5,0.7)⟩	⟨(0.7,0.8,0.9,1.0), (0.7,0.8,0.9,1.0)⟩	⟨(0.3,0.4,0.5,0.6), (0.2,0.4,0.5,0.7)⟩
o_4	⟨(0.5,0.6,0.7,0.8), (0.4,0.6,0.7,0.9)⟩	⟨(0.3,0.4,0.5,0.6), (0.2,0.4,0.5,0.7)⟩	⟨(0.5,0.6,0.7,0.8), (0.4,0.6,0.7,0.9)⟩

جدول ۵. ماتریس تصمیم فازی شهودی تصمیم گیرنده چهار

	c_1	c_2	c_3
o_1	$\langle(0.0,0.1,0.2,0.3), (0.0,0.1,0.2,0.3)\rangle$	$\langle(0.7,0.8,0.9,1.0), (0.7,0.8,0.9,1.0)\rangle$	$\langle(0.1,0.2,0.3,0.4), (0.0,0.2,0.3,0.5)\rangle$
o_2	$\langle(0.3,0.4,0.5,0.6), (0.2,0.4,0.5,0.7)\rangle$	$\langle(0.5,0.6,0.7,0.8), (0.4,0.6,0.7,0.9)\rangle$	$\langle(0.3,0.4,0.5,0.6), (0.2,0.4,0.5,0.7)\rangle$
o_3	$\langle(0.1,0.2,0.3,0.4), (0.0,0.2,0.3,0.5)\rangle$	$\langle(0.7,0.8,0.9,1.0), (0.7,0.8,0.9,1.0)\rangle$	$\langle(0.3,0.4,0.5,0.6), (0.2,0.4,0.5,0.7)\rangle$
o_4	$\langle(0.1,0.2,0.3,0.4), (0.0,0.2,0.3,0.5)\rangle$	$\langle(0.1,0.2,0.3,0.4), (0.0,0.2,0.3,0.5)\rangle$	$\langle(0.0,0.1,0.2,0.3), (0.0,0.1,0.2,0.3)\rangle$

جدول ٦. اوزان شاخص‌ها تعیین شده به وسیله تصمیم گیرندگان ($\square_j^{(k)}$)

k	c_1	c_2	c_3
1	$\langle(0.3,0.4,0.5,0.6), (0.2,0.4,0.5,0.7)\rangle$	$\langle(0.3,0.4,0.5,0.6), (0.2,0.4,0.5,0.7)\rangle$	$\langle(0.3,0.4,0.5,0.6), (0.2,0.4,0.5,0.7)\rangle$
2	$\langle(0.5,0.6,0.7,0.8), (0.4,0.6,0.7,0.9)\rangle$	$\langle(0.1,0.2,0.3,0.4), (0.0,0.2,0.3,0.5)\rangle$	$\langle(0.5,0.6,0.7,0.8), (0.4,0.6,0.7,0.9)\rangle$
3	$\langle(0.5,0.6,0.7,0.8), (0.4,0.6,0.7,0.9)\rangle$	$\langle(0.1,0.2,0.3,0.4), (0.0,0.2,0.3,0.5)\rangle$	$\langle(0.3,0.4,0.5,0.6), (0.2,0.4,0.5,0.7)\rangle$
4	$\langle(0.5,0.6,0.7,0.8), (0.4,0.6,0.7,0.9)\rangle$	$\langle(0.3,0.4,0.5,0.6), (0.2,0.4,0.5,0.7)\rangle$	$\langle(0.3,0.4,0.5,0.6), (0.2,0.4,0.5,0.7)\rangle$

گام دوم: تعیین اهمیت نسبی نظرات تصمیم گیرندگان با استفاده از روابط (۱۱)، (۱۲) و (۱۳). اوزان تصمیم گیرندگان در این مسئله MCGDM در جدول ۶ نشان داده شده است.

جدول ۷. اهمیت نسبی نظرات تصمیم گیرندگان

	k	c_1	c_2	c_3		k	c_1	c_2	c_3
o_1	۱	0.274	0.309	0.278	o_3	۱	0.169	0.167	0.167
	۲	0.297	0.309	0.278		۲	0.251	0.278	0.198
	۳	0.203	0.168	0.167		۳	0.329	0.278	0.317
	٤	0.226	0.214	0.278		٤	0.251	0.278	0.317
o_2	۱	0.309	0.303	0.167	o_4	۱	0.309	0.309	0.250
	۲	0.167	0.168	0.278		۲	0.214	0.167	0.321
	۳	0.215	0.226	0.278		۳	0.309	0.309	0.250
	٤	0.309	0.303	0.278		٤	0.168	0.215	0.179

گام سوم: تشکیل ماتریس تصمیم گیری فازی شهودی ذوزنقه‌ای ادغامی برپایه نقطه نظرات هر تصمیم گیرنده با استفاده از رابطه (۱۴) مطابق جدول ۸.

جدول ۸. ماتریس تصمیم فازی شهودی ذوزنقه‌ای ادغامی

k	c_1	c_2	c_3
o_1	$\langle(0.22,0.32,0.42,0.52),(0.14,0.32,0.42,0.60)\rangle$	$\langle(0.48,0.58,0.68,0.78),(0.40,0.58,0.68,0.85)\rangle$	$\langle(0.17,0.27,0.37,0.47),(0.07,0.27,0.37,0.57)\rangle$
o_2	$\langle(0.32,0.42,0.52,0.62),(0.24,0.42,0.52,0.71)\rangle$	$\langle(0.46,0.56,0.66,0.76),(0.40,0.56,0.66,0.82)\rangle$	$\langle(0.33,0.43,0.53,0.63),(0.23,0.43,0.53,0.73)\rangle$
o_3	$\langle(0.27,0.37,0.47,0.57),(0.18,0.37,0.47,0.65)\rangle$	$\langle(0.67,0.77,0.87,0.97),(0.65,0.77,0.87,0.98)\rangle$	$\langle(0.29,0.39,0.49,0.59),(0.21,0.39,0.49,0.67)\rangle$
o_4	$\langle(0.48,0.58,0.68,0.78),(0.40,0.58,0.68,0.85)\rangle$	$\langle(0.32,0.42,0.52,0.62),(0.24,0.42,0.52,0.71)\rangle$	$\langle(0.35,0.45,0.55,0.65),(0.26,0.45,0.55,0.73)\rangle$

گام چهارم: تعیین ارزش وزنی مورد انتظار نرمالیزه شده شاخص‌ها. بر اساس اهمیت شاخص‌ها$\left(_{j}^{(k)}\right)$ تعیین شده به وسیله تصمیم گیرنده k ام، ابتدا $_{ij}$ را محاسبه می‌کنیم که نشان دهنده ارزش وزنی شاخص c_j برای گزینه o_i با استفاده از فرمول (۱۵) می باشد، و سپس ارزش وزنی مورد انتظار نرمالیزه شده $_{ij}^{'}$ می تواند با استفاده از رابطه (۱۶) به صورت زیر به دست آید:

$$\left({}'_{ij} \right) = \begin{bmatrix} 0.409 & 0.244 & 0.347 \\ 0.401 & 0.253 & 0.345 \\ 0.427 & 0.235 & 0.339 \\ 0.404 & 0.243 & 0.353 \end{bmatrix}$$

گام پنجم: تعیین PIS و NIS. هزینه نرم افزار و سخت افزار (c_1) شاخص هزینه، کمک به بهبود عملکرد سازمانی (c_2) و قابلیت توسعه نرم افزار (c_3) شاخص‌های سود هستند. بنابراین PIS و NIS به صورت زیر بدست می آیند:

$$\begin{gathered} R^+ = \{\langle(0.22,0.32,0.42,0.52), (0.14,0.32,0.42,0.60)\rangle, \\ \langle(0.67,0.77,0.87,0.97), (0.65,0.77,0.87,0.98)\rangle, \\ \langle(0.35,0.45,0.55,0.65), (0.26,0.45,0.55,0.73)\rangle\} \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} R^- = \{\langle(0.48,0.58,0.68,0.78), (0.40,0.58,0.68,0.85)\rangle, \\ \langle(0.32,0.42,0.52,0.62), (0.24,0.42,0.52,0.71)\rangle, \\ \langle(0.17,0.27,0.37,0.47), (0.07,0.27,0.37,0.57)\rangle\} \end{gathered}$$

گام ششم: با استفاده از روابط (۲۳) و (۲۴) اندازه‌های فاصله وزنی مثبت و منفی در جدول ۹ نشان داده شده اند.

جدول ۹. اندازه‌های فاصله و ضرایب نزدیکی نسبی هر گزینه

	D^+	D^-	U^-
o_1	0.110	0.142	0.565
o_2	0.100	0.153	0.606
o_3	0.040	0.211	0.839
o_4	0.188	0.064	0.252

گام هفتم: ضرایب نزدیکی نسبی U_i^- هر گزینه o_i بر اساس جدول ۵ به دست می‌آید.
گام هشتم: در حالیکه $U_3^- > U_2^- > U_1^- > U_4^-$ باشد، رتبه بندی گزینه‌ها مطابق $o_3 > o_2 > o_1 > o_4$ می باشد، بنابراین بهترین گزینه o_3 می باشد.

نتیجه گیری

مسائل MCGDM از جمله مسائل حیاتی در پیچیدگی محیط اجتماعی ـ اقتصادی می‌باشند. در مسائل واقعی MCGDM، اطلاعات در دسترس تصمیم گیرندگان همواره مبهم و نادقیق می باشند و بیان اولویت‌های گزینه‌ها نسبت به شاخص‌ها با استفاده از

ارزش‌های قطعی و دقیق منطقی نمی‌باشد، بنابراین روش تاپسیس کلاسیک برای این مسائل مفید نیست. به این ترتیب، در این مقاله یک روش تاپسیس توسعه یافته جدید با اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای برای مسائل MCGDM ارائه گردید و روشی برای تعیین گزینه مناسب تر در میان تمامی گزینه‌های ممکن توسعه داده شد. در مدل تاپسیس توسعه یافته پیشنهادی، ارزش اولویتی یک گزینه نسبت به شاخص‌ها و ارزش وزنی شاخص‌ها با استفاده از اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای شکل می گیرد، و اوزان هر تصمیم گیرنده نیزکاملا نامشخص است. با توسعه اعداد فازی و مجموعه‌های فازی شهودی، اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای می‌توانند اطلاعات انعطاف پذیرتر و بیشتری را نسبت به مجموعه‌های فازی شهودی ارائه کنند. در روش‌های MCGDM موجود، اوزان تصمیم گیرندگان همواره از پیش تعیین می گردید، حال آنکه در مدل پیشنهادی، اندازه فاصله برای اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای بر پایه برش‌های آلفای آنها به منظور توسعه روشی برای تعیین اوزان تصمیم گیرندگان استفاده شده است. از طرفی اوزان شاخص‌ها همواره از اعداد قطعی تشکیل شده است اما در این مقاله این اوزان به وسیله تصمیم‌گیرندگان با استفاده از ارزش‌های کلامی اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای تعیین گردیده است، و ارزش وزنی مورد انتظار با استفاده از عملگر TrIFWA و ارزش مورد انتظار اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای بدست آمده است. بر اساس اندازه‌های فاصله اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای، اندازه‌های مجزای وزنی تعریف شده‌اند. بنابراین بر اساس ضرایب نزدیکی نسبی هر گزینه، گزینه‌ها رتبه بندی می شوند. و درادامه نتایج مثال عددی کارایی و کاربردی بودن روش تاپسیس توسعه یافته جدید را تشریح می‌کند. روش تاپسیس فازی شهودی ذوزنقه‌ای پیشنهادی می تواند با مسائل MCGDM در محیط اطلاعاتی غیر قطعی مواجه گردد و ابزار ریاضی منطقی و ساده‌ای را برای محیط فازی شهودی در مسائل MCGDM فراهم نماید.

منابع

1. S. Abbasbandy, T. Hajjari, **A new approach for ranking of trapezoidal fuzzy number**, Comput. Math. Appl. 57 (2009) 413-419.
2. B. Asady, A. Zendehnam, **Ranking fuzzy numbers by distance minimization**, Appl. Math. Model. 31 (2007) 2589-2598.
3. B. Ashtiani, F. Haghighirad, G.A. **Montazer, Extension of fuzzy TOPSIS method based on interval-valued fuzzy sets.** Appl. Soft Comput. 9 (2009) 457 461.
4. K. Atanassov, **Intuitionistic fuzzy sets**. Fuzzy Sets Syst. 20 (1986) 87 96.
5. A. Awasthi, S.S. Chauhan, S.K. Goyal, **A multi-criteria decision making approach for location planning for urban distribution centers under uncertainty**, Math. Comput. Model. 53 (2011) 98 109.
6. F.E. Boran, S. Genç, M. Kurt, D. Akay, **A multi-criteria intuitionistic fuzzy group decision making for supplier selection** with TOPSIS method, Expert Syst. Appl. 36 (2009) 11363-11368.
7. C.T. Chen, **Extensions of the TOPSIS for group decision-making under fuzzy environment**, Fuzzy Sets Syst. 114 (2000) 1 9.
8. S.M. Chen, L.W. Lee, **Fuzzy multiple attributes group decision-making based on the interval type-2** TOPSIS method, Expert Syst. Appl. 37 (2010) 2790-2798.
9. T.Y. Chen, C.Y. Tsao, **The interval-valued fuzzy TOPSIS method and experimental analysis**, Fuzzy Sets Syst. 159 (2008) 1410 1428.
10. Z. Chen, W. Yang, **A new multiple attribute group decision making method in intuitionistic fuzzy setting**, Appl. Math. Model. (2011) doi: 10. 1016 / j. apm. 2011. 03.015.
11. T-C. Chu, Y-C. Lin, **An interval arithmetic based fuzzy TOPSIS model, Expert** Syst. Appl. 36 (2009) 10870 10876.
12. T-C. Chu, Y-C. Lin, A fuzzy TOPSIS method for robot selection, Int. J. Adv. Manuf. Tech. 21 (2003) 284 290.
13. D. Dubois, H. Prade, **The mean value of a fuzzy number**, Fuzzy Sets Syst. 24 (1978) 279-300.
14. P. Grzegrorzewski, **The hamming distance between intuitionistic fuzzy sets**, In Proceedings of the 10th IFSA world congress, Istanbul, Turkey, 2003.
15. C. L., Hwang, K. Yoon, **Multiple attributes decision making methods and applications**, Springer, Berlin, Heidelberg, 1981.
16. G. R. Jahanshahloo, F. Hosseinzadeh Lotfi, & M. Izadikhah,

Extension of the TOPSIS method for decision-making problems with fuzzy data, Appl. Math. Comput. 181 (2006) 1544 1551.
17. M. S. Kuo, G. H. Tzeng, W. C. Huang, **Group decision-making based on concepts of ideal and anti-ideal points in a fuzzy environment**, Math. Comput. Model. 45 (2007) 324 339.
18. I. Mahdavi, N. Mahdavi-Amiri, A. Heidarzade, R. Nourifar, **Designing a model of fuzzy topsis in multiple criteria decision making**. Appl. Math. Comput. 206 (2008) 607 617.
19. H. M. Nehi, H. R. Maleki, optimization problem, In Proceedings of the 9th WSEAS international conference on systems, Athens, Greece, 2005.
20. J.H. Park, I.Y. Park, Y.C. Kwun, X. Tan, **Extension of the TOPSIS method for decision making problems under interval-valued intuitionistic fuzzy environment**, Appl. Math. Model. 35 (2011) 2544 2556.
21. S. Sadi-Nezhad, K. K. Damghani, **Application of a fuzzy TOPSIS method base on modified preference ratio and fuzzy distance measurement in assessment of traffic police centers performance**, Appl. Soft Comput. 10 (2010) 1028-1039.
22. C.C. Sun, **A performance evaluation model by integrating fuzzy AHP and fuzzy TOPSIS methods**, Expert Syst. Appl. 37 (2010) 7745 7754.
23. C. Tan, **A multi-criteria interval-valued intuitionistic fuzzy group decision making with Choquet integral-based TOPSIS**, Expert Syst. Appl. 38 (2011) 3023-3033.
24. G. Torlak, M. Sevkli, M. Sanal, S. Zaim, **Analyzing business competition by using fuzzy TOPSIS method: An example of Turkish domestic airline industry**, Expert Syst. Appl. 38 (2011) 3396-3406.
25. B. Vahdani et al., **Group decision making based on novel fuzzy modified TOPSIS method**, Appl. Math. Model. (2011) doi:10.1016/j.apm.2011.02.040.
26. A.H. Vencheh, M. Allame, **On the relation between a fuzzy number and its centroid**, Comput. Math. Appl. 59 (2010) 3578-3582.
27. J. Q. Wang, Z. Zhang, **Aggregation operators on intuitionistic trapezoidal fuzzy number and its application to multicriteria decision making problems**, J. Syst. Eng. Electron. 20 (2009) 321 326.
28. T.-C. Wang, H.-D. Lee, **Developing a fuzzy TOPSIS approach based on subjective weights and objective weights**, Expert Syst. Appl. 36 (2009) 8980 8985.

29. Y. J. Wang, H. S. Lee, **Generalizing TOPSIS for fuzzy multiple-criteria group decision-making**, Comput. Math. Appl. 53 (2007) 1762 1772.
30. J.Z. Wu, Q. Zhang, **Multicriteria decision making method based on intuitionistic fuzzy** weighted entropy, Expert Systems with Applications, (2010).
31. F. Ye, **An extended TOPSIS method with interval-valued intuitionistic fuzzy numbers for virtual enterprise partner selection**, Expert Syst. Appl. 37 (2010) 7050-7055.
32. J. Ye, **Expected value method for intuitionistic trapezoidal fuzzy multicriteria decision-making problems**, Expert Syst. Appl. (2011) doi: 10.1016 /j.eswa. 2011.03.059.
33. L. A. Zadeh, **Fuzzy sets**, Inform. Control 8 (1965) 338 356.