فصلنامه علمی ـ پژوهشی مطالعات مدیریت صنعتی سال هشتم، شماره ۱۹، زمستان ۸۹
صفحات ۱۸۹ تا ۲۱۶

برنامه ریزی احتمالی چند هدفه برای بهینه‌سازی مسئله تعیین تعداد نیروی انسانی در سیستم‌های تولید کارگاهی

مصطفی اختیاری *

چکیده

یکی از متداولترین رویکردهای حل مسائل احتمالی چند هدفه، برنامه‌ریزی مقید شده تصادفی است. براساس این رویکرد، یک مدل معادل قطعی برای مسئله احتمالی چند هدفه ارائه شده و سپس توسط یک مدل بهینه ساز حل می‌شود. در این مقاله از ترکیب رویکرد برنامه‌ریزی مقید شده تصادفی و مدل معیار جهانی (مین ـ ماکس) مدلی تحت عنوان معیار جهانی مقید شده تصادفی (مین ـ ماکس) پیشنهاد می‌شود. مدل پیشنهادی قادر است تا یک مدل معادل قطعی برای مسئله احتمالی چند هدفه ارائه و سپس آن را بهینه‌سازی نماید. یکی از موضوعاتی که همواره مورد توجه برنامه‌ریزان سیستم‌های تولیدی بوده، تعیین تعداد بهینه نیروی انسانی با توجه به اهدافی همچون افزایش خروجی، کاهش هزینه دستمزد و کاهش زمان بیکاری غیر مجاز است. بنابراین برای تشریح مدل پیشنهادی، یک مسئله احتمالی چند هدفه پیرامون تعیین تعداد نیروی انسانی بهینه در یک سیستم تولیدی کارگاهی تحت

---

* کارشناس ارشد مهندسی صنایع ، دانشگاه آزاد قزوین. E.Mail: mostafa.ekhtiari@gmail.com

تاریخ دریافت: ۸۸/۸/۲۹ تاریخ پذیرش: ۸۸/۱۲/۱۱

شرایط عدم قطعیت ارائه می‌شود. نتایج بهینه‌سازی این مسئله با استفاده از مدل پیشنهادی و مدل برنامه‌ریزی سازشی مقید شده تصادفی (با نرم مین ـ ماکس) تحت شرایط یکسان بیانگر آن است که مدل پیشنهادی با وجود تعداد محدودیت‌ها و متغیرهای کمتر در مقایسه با مدل برنامه‌ریزی سازشی مقید شده تصادفی (مین ـ ماکس) نتایج کاملاً مشابهی را در تعداد تکرارهای کمتری ارائه می‌کند.
واژگان کلیدی: برنامه‌ریزی مقید شده تصادفی، مدل معیار جهانی، معیار جهانی مقید شده تصادفی، مسئله نیروی انسانی، زمانبندی کارگاهی.

مقدمه

رویکردهای بهینه‌سازی تحت شرایط قطعیت به‌طور گسترده توسعه یافته‌اند و در بهینه‌سازی فرایندهای صنعتی استفاده می‌شوند. رویکردهای موجود در بهینه‌سازی مسائل پیچیده تحت شرایط عدم قطعیت با چالش‌های متعددی مواجه می‌شوند. داده‌های رخ داده در گذشته ممکن است به دلیل خطاهای اندازه‌گیری یا مشکلات موجود در نمونه‌برداری، کاملاً دقیق نباشند. در این حالت همه و یا برخی پارامترها، تصادفی در نظر گرفته شده و می‌توان به هر پارامتر تصادفی یک توزیع احتمالی مشخص را اختصاص داد. چنین مسائلی که در آنها همه و یا برخی از پارامترها تصادفی می‌باشند را مسائل برنامه‌ریزی احتمالی می‌نامند.

اصولاً برنامه‌ریزی احتمالی طرح‌هایی ارائه می‌کند که غالباً سودمند بوده و علاوه بر قابلیت سازگاری در برابر زیان‌های احتمالی، تصویر روشنی از تصمیم‌گیری‌های آتی را ترسیم می‌کنند. به همین دلیل است که استفاده از برنامه‌ریزی احتمالی در زمینه‌های کاربردی گوناگونی همچون تولید قدرت الکتریکی [۱۰]، برنامه‌ریزی مالی[۳]، مدیریت زنجیره تأمین [۷] و غیره در حال افزایش است. همچنین در کتاب‌هایی همچون [۸]، [۲] و [۱۱]، قابلیت‌های برنامه ریزی احتمالی در سیستم‌های مدیریتی و تحقیق در عملیات بررسی و ارائه شده‌اند.

برای حل مسائل احتمالی چند هدفه رویکردهای متفاوتی ارائه شـده‌اند که

متداول‌ترین آنها رویکرد برنامه‌ریزی مقید شده تصادفی[1] (CCP) [۵ و۶] است. بر اساس رویکرد CCP، مسئله احتمالی چند هدفه به یک مدل معادل قطعی چند هدفه تبدیل و در نهایت توسط یک مدل بهینه ساز قابل حل است. در رویکرد CCP تلاش می‌شود تا ارزش انتظاری اهداف تصادفی ماکزیمم شده، در حالی که سطح اطمینان معینی از برآورده شدن محدودیت‌های تصادفی تضمین گردد.

مدل‌های بهینه ساز معیار جهانی[2] (GC) [۴، ۱۳و ۱۴] و برنامه‌ریزی سازشی[3] (CP) [۱۲، ۱۵و۱۶] از جمله روش‌های موجود در دسته‌بندی "بدون کسب اطلاعات اولیه"[4] هستند که در صورت برخورداری از شرایط لازم، قابلیت بهینه‌سازی مسائل چند هدفه را دارند. از جمله مزایای اینگونه روش‌ها در شرایطی است که هیچگونه دسترسی به فرد تصمیم گیرنده[5] (DM) وجود ندارد.

در هر دو مدل GC و CP، هدف حداقل کردن انحرافات توابع هدف یک مسئله چند هدفه نسبت به حل ایده آل آن است. برای اندازه‌گیری فاصله میان یک نقطه بهینه پارتو و نقطه ایده آل، در مدل‌های GC و CP از معیارهای[6] مختلفی استفاده می‌شود. در این معیارها ارزش P مشخص کننده درجه تأکید بر انحرافات موجود است. به طوری که هر قدر مقدار P بزرگتر باشد، تأکید بیشتری بر بزرگترین انحرافات خواهد بود. از این رو استفاده از یک مقدار بزرگ برای P (به طور مثال $P = \infty$) قابلیت مدل‌های GC و CP را افزایش خواهد داد [۹].

با در نظر گرفتن مزایای معیار $P = \infty$، مدل CP(min-max) در مقایسه با مدل GC(min-max) تعداد محدودیت‌ها و متغیرهای کمتری دارد، به طوری که اختلاف میان تعداد محدودیت‌ها و متغیرهای این دو مدل به اندازه تعداد توابع هدف مسئله اصلی است. عبدالعزیز و دیگران[7] [۱] یک مدل معادل قطعی را برای حل مسائل احتمالی چند هدفه معرفی کردند که برنامه‌ریزی سازشی مقید شده تصادفی[8]

1. Chance Constrained Programming
2. Global Criterion
3. Compromise Programming
4. No-preference
5. Decision Maker
6. Metrics
7. Abdelaziz et al.
8. Chance Constrained Compromise Programming

(CCCP) نامیده می‌شود. مدل CCCP از ترکیب رویکرد CCP و مدل بهینه ساز CP مدلسازی می‌شود.

مدل پیشنهادی در این مقاله با ترکیب رویکرد مشهور CCP و مدل بهینه ساز GC(min-max) مدلسازی می‌شود. این مدل پیشنهادی، معیار جهانی مقید شده تصادفی (مین- ماکس) [1]CCGC(min-max) نامیده می‌شود. در رویکرد پیشنهادی تعداد متغیرها و محدودیت‌های مدل CCGC(min-max) در مقایسه با مدل CCCP(min-max) [۱] به اندازه تعداد توابع هدف مسئله اصلی کاهش یافته و این مزیت می‌تواند در مدلسازی مسائل احتمالی چند هدفه با مشخصات مقیاس بزرگ[2] مورد توجه برنامه‌ریزان قرار گیرد.

ادامه مقاله بدین صورت سازمان می‌یابد که در بخش ۲ مروری بر ساختار کلی مسائل برنامه‌ریزی احتمالی و حل آنها توسط رویکرد برنامه‌ریزی مقید شده تصادفی ارائه خواهد شد. در بخش ۳ روش‌های بهینه‌سازی مسائل چند هدفه از قبیل روش برنامه‌ریزی سازشی و روش معیار جهانی معرفی خواهند شد. در بخش ۴ رویکرد پیشنهادی معیار جهانی مقید شده تصادفی (مین- ماکس) (CCGC(min-max)) مدلسازی و ارائه خواهد شد. در بخش ۵ مدل پیشنهادی CCGC(min-max) توسط یک مثال عددی درباره مسئله احتمالی چند هدفه تعیین تعداد نیروی انسانی در یک سیستم تولیدی کارگاهی[3]، تشریح خواهد شد. نتایج و مشاهدات نیز در بخش ۶ ارائه شده است.

برنامه‌ریزی احتمالی[4]

برنامه‌ریزی احتمالی، دسته‌ای از مدل‌های بهینه ساز را شامل می‌شود که در آن برخی از داده‌ها ممکن است غیر قطعی باشند. اگر پارامترهای c_{kj}، a_{ij} و b_i متغیرهای تصادفی باشند و هدف ماکزیمم‌سازی توابع هدف Z_k (برای $k = 1,2,...,K$) باشد، آنگاه شکل کلی مدل برنامه‌ریزی احتمالی چند هدفه می‌تواند به صورت مدل (۱)

1. Chance Constrained Global Criterion(min-max)
2. Large Scale
3. Job Shop
4. Stochastic Programming

در نظر گرفته شود:

$$\begin{aligned}
&\max \quad Z_k = \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_{kj} x_j, \qquad k = 1,2,\dots,K \\
&\text{subject to:} \\
&\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j \le \tilde{b}_i, \qquad i = 1,2,\dots,m \\
&x \in S,
\end{aligned}$$

مدل (۱)

به طوری که S مجموعه فضای جواب را نمایش می‌دهد که $x \geq 0$ بوده و $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ می‌باشد.

در رویکرد CCP، مدل برنامه ریزی احتمالی چند هدفه (۱) به یک مدل برنامه‌ریزی قطعی به صورت زیر تبدیل می‌شود [۱۱]:

$$\begin{aligned}
&\max \quad f_k = E\left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_{kj} x_j\right), \qquad k = 1,2,\dots,K \\
&\text{subject to:} \\
&P\left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j \le \tilde{b}_i\right) \ge 1 - \alpha_i, \qquad i = 1,2,\dots,m \\
&x \in S,
\end{aligned}$$

مدل (۲)

به طوری که $E\left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_{kj} x_j\right)$ ارزش انتظاری[1] اهداف با توجه شرایط تصادفی بودن $\tilde{c}_{kj}$ها و α_i (برای $i = 1,2,\dots,m$) ارزش آستانه[2] محدودیت‌ها است که توسط DM مشخص می‌شوند.

مدل (۲) می‌تواند توسط یکی از روش‌های بهینه‌سازی حل شود. در بخش بعدی یکی از این روش‌های بهینه‌سازی تحت عنوان روش برنامه‌ریزی سازشی معرفی و در ادامه مدل معیار جهانی مقید شده تصادفی پیشنهاد خواهد شد.

روش برنامه‌ریزی سازشی

روش CP توسط [۱۲، ۱۵و۱۶] معرفی گردید. در این روش چنانچه سطوح در

1. Expected Value
2. Threshold Values

دسترس توسط $f_k(x)$ و مقادیر ایده آل[1] تابع هدف k ام با f_k^* نمایش داده شوند و همین طور چنانچه ماکزیمم کردن اهداف مد نظر باشند، می‌توان مقادیر $f_k^{\max}$ را از مدل (۳) به دست آورد:

$$\begin{aligned} & f_k^{\max} = \max \quad f_k(x), \qquad k = 1, 2, \ldots, K \\ & \text{subject to:} \\ & x \in S, \end{aligned} \qquad \text{مدل (۳)}$$

و در نهایت مدل نهایی CP در صورت وجود اوزان اهمیت اهداف (w_k) می‌تواند به صورت زیر باشد:

$$\begin{aligned} & \min \quad \{\sum_{k=1}^{K} w_k(\delta_k^-)^P\}^{\frac{1}{P}}, \\ & \text{subject to:} \\ & f_k(x) + \delta_k^- = f_k^{\max}, \qquad k = 1, 2, \ldots, K \\ & x \in S, \\ & \delta_k^- \geq 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, K \end{aligned} \qquad \text{مدل (۴)}$$

متغیر δ_k^-، متغیر انحرافی کمبود محدودیت مربوط به تابع هدف k ام است. همچنین اگر در مدل CP، می‌نیمم کردن اهداف مد نظر باشد، آنگاه مقادیر $f_k^{\min}$ می‌توانند از طریق مدل (۵) به دست آیند:

$$\begin{aligned} & f_k^* = f_k^{\min} = \min \quad f_k(x), \qquad k = 1, 2, \ldots, K \\ & \text{subject to:} \\ & x \in S, \end{aligned} \qquad \text{مدل (۵)}$$

که در این صورت مدل نهایی CP در حالت وجود اوزان اهمیت اهداف به صورت زیر خواهد بود:

1. Utopia

مدل (۶)

$$\begin{aligned}&\min \quad \{\textstyle\sum_{k=1}^{K} w_k (\delta_k^+)^P\}^{\frac{1}{P}},\\&\text{subject to}:\\&f_k(x) - \delta_k^+ = f_k^{\min}, \qquad k = 1,2,\dots,K\\&x \in S,\\&\delta_k^+ \ge 0, \qquad k = 1,2,\dots,K\end{aligned}$$

متغیر δ_k^+ نیز، متغیر انحرافی مازاد محدودیت مربوط به تابع هدف k ام است. به طوری که مدل CP، بر اساس انتخاب جواب‌هایی که به نقاط ایده آل ($f_k^{\max}$ یا $f_k^{\min}$) نزدیکتر می‌باشند، مدلسازی می‌شود [۱۷و۱۸].

در مدل CP، P پارامتری از تابع مطلوبیت نهایی است که معیارهای مورد نظر را با فرض $\{\infty\}$ $P = \{1,2,\dots\}\cup\{\infty\}$ به نمایش می‌گذارد. مدل CP با فرض $P = \infty$، که با نماد CP(min-max) نمایش داده می‌شود، به صورت زیر خواهد بود:

مدل (۷)

$$\begin{aligned}&\min \quad y,\\&\text{subject to}:\\&f_k(x) + \delta_k^- = f_k^{\max}, \qquad k = 1,2,\dots,K \ (1)\\&y \ge \textstyle\sum_{k=1}^{K} w_k(\delta_k^-), \qquad k = 1,2,\dots,K \ (2)\\&x \in S,\\&\delta_k^- \ge 0, \qquad k = 1,2,\dots,K\\&y \ge 0.\end{aligned}$$

محدودیت (۱) مدل (۷) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\delta_k^- = f_k^{\max} - f_k(x) \quad (k = 1,2,\dots,K \text{ برای}) \tag{۸}$$

که اگر در محدودیت (۲) مدل (۷) جایگزین شود آنگاه:

$$y \ge \textstyle\sum_{k=1}^{K} w_k(f_k^{\max} - f_k(x)) \quad (k = 1,2,\dots,K \text{ برای}) \tag{۹}$$

رابطه (۹) در واقع رابطه (۸) را نیز در بر می‌گیرد و از آنجایی که مدل (۷) با فرض $P = \infty$ مدلسازی شده است، می‌توان محدودیت (۱) مدل (۷) را از مدل CP(min-max) حذف و نامساوی (۹) را جایگزین محدودیت (۲) مدل (۷) کرد. مدل به دست آمده که همان مدل مشهور GC(min-max) است، به صورت مدل زیر خواهد بود:

$$
\begin{aligned}
& \min \quad y, \\
& \text{subject to}: \\
& y \geq \sum_{k=1}^{K} w_k (f_k^{\max} - f_k(x)), \qquad k = 1, 2, \ldots, K \\
& x \in S, \\
& y \geq 0.
\end{aligned}
\qquad \text{مدل (۱۰)}
$$

تفاوت‌های مدل‌های (۷) و (۱۰) را می‌توان به عنوان مزایای مدل GC(min-max) در مقایسه با مدل CP(min-max) نیز تعبیر نمود. این مزایا عبارتند از:

۱. تعداد متغیرهای کمتر: مدل (۱۰) به تعداد δ_k^- ها، k متغیر کمتر دارد.
۲. تعداد محدودیت‌های کمتر: مدل (۱۰) تعداد k محدودیت کمتر دارد.

هر دو مورد فوق موجب کاهش زمان حل مسائلی با ابعاد بزرگ (مانند مسائل مقیاس بزرگ) و افزایش دقت مدلسازی اینگونه مسائل خواهند شد، به گونه‌ای که مجموع این ویژگی‌ها برنامه‌ریزان را برای تصمیم گیری بهتر یاری خواهند داد.

معیار جهانی مقید شده تصادفی (مین- ماکس) ((CCGC(min-max))

عبدالعزیز و دیگران[1] [۱] رویکرد CCP را بر اساس مدل CP مدلسازی نمودند. آنها مدل برنامه‌ریزی معادل قطعی خود را در مورد یک مسئله احتمالی چند هدفه ارائه و رویکرد به دست آمده را CCCP نامیدند. در این بخش بر اساس مزایای مطرح شده در مورد مدل GC(min-max)، مدل CCGC(min-max) پیشنهاد و نحوه مدلسازی آن به تفصیل ارائه شده است.

1- Abdelaziz et al.

محدودیتهای تصادفی

اگر $\tilde{a}_{ij}$ و $\tilde{b}_i$ متغیرهای تصادفی نرمال باشند، آنگاه محدودیت تصادفی مرتبط با $\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{ij}x_j \le \tilde{b}_i$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\text{Prob}\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{ij}x_j \le \tilde{b}_i\right) \ge 1-\alpha_i, \qquad i=1,2,\dots,m \tag{۱۱}$$

اگر $\tilde{A}_i(x)=\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{ij}x_j-\tilde{b}_i$ باشد، پس بنابراین $\tilde{A}_i(x)$ نیز متغیری تصادفی با توزیع نرمال و میانگین $E(\tilde{A}_i(x))$ و واریانس $\text{Var}(\tilde{A}_i(x))$ خواهد بود. بنابراین:

$$\text{Prob}\left(\tilde{A}_i(x)\le 0\right)\ge 1-\alpha_i, \qquad i=1,2,\dots,m \tag{۱۲}$$

و سپس

$$\text{Prob}\left(\frac{\tilde{A}_i(x)-E(\tilde{A}_i(x))}{\sqrt{\text{Var}(\tilde{A}_i(x))}} \le \frac{-E(\tilde{A}_i(x))}{\sqrt{\text{Var}(\tilde{A}_i(x))}}\right)\ge 1-\alpha_i, \qquad i=1,2,\dots,m \tag{۱۳}$$

به طوری که $\phi(z)=P\left(N(0,1)\le z\right)$ تابع توزیع تجمعی یک توزیع نرمال استاندارد است.

$$\frac{-E(\tilde{A}_i(x))}{\sqrt{\text{Var}(\tilde{A}_i(x))}} \ge \phi^{-1}(1-\alpha_i), \qquad i=1,2,\dots,m \tag{۱۴}$$

$$E(\tilde{A}_i(x))+\phi^{-1}(1-\alpha_i)\sqrt{\text{Var}(\tilde{A}_i(x))}\le 0, \qquad i=1,2,\dots,m \tag{۱۵}$$

همچنین:

$$E\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{ij}x_j-\tilde{b}_i\right)+\phi^{-1}(1-\alpha_i)\sqrt{\text{Var}\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{ij}x_j-\tilde{b}_i\right)}\le 0, \qquad i=1,2,\dots,m. \tag{۱۶}$$

حال اگر هدف می نیمم کردن y ($y\ge 0$) در حالتی باشد که:

$$E\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{ij}x_j-\tilde{b}_i\right)+\phi^{-1}(1-\alpha_i)\sqrt{\text{Var}\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{ij}x_j-\tilde{b}_i\right)}+y\ge 0, \qquad i=1,2,\dots,m \tag{۱۷}$$

برقرار گردد، در نهایت می‌توان گفت:

$$: E(\tilde{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j) - \phi^{-1}(1-\alpha_i)\sqrt{\mathrm{Var}(\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j - \tilde{b}_i)}, \qquad i = 1,2,\ldots,m. \qquad (۱۸)$$

توابع هدف تصادفی

فرض می‌شود که ضرایب سود در توابع هدف ($\tilde{c}_{kj}$ ها) همگی متغیرهای تصادفی مستقل نرمال باشند. اگر c^*_{kj} ماکزیمم مقدار مشاهده شده برای تابع هدف k ام باشد، آنگاه :

$$c^*_{kj} = \max\ \tilde{c}_{kj} \qquad (۱۹)$$

f^*_k بهترین مقدار تابع هدف $\sum_{j=1}^{n} c^*_{kj} x_j$ با توجه به محدودیت‌های سیستم خواهد بود. به طوری که فرض می‌شود همگی k (برای $k = 1,2,\ldots,K$) تابع هدف، از نوع حداکثر سازی می‌باشند:

مدل (۲۰)

$$\begin{aligned} & f^*_k = \max\ \sum_{j=1}^{n} c^*_{kj} x_j, \qquad k = 1,2,\ldots,K \\ & \text{subject to}: \\ & x \in S, \end{aligned}$$

با توجه به مدل (۲۰)، می‌توان گفت که:

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_{kj} x_j \le f^*_k, \qquad k = 1,2,\ldots,K \qquad (۲۱)$$

بر اساس مدل GC(min-max) می‌توان گفت هدف حداقل سازی y ($y \ge 0$)، در صورتی است که:

$$\mathrm{Prob}\left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_{kj} x_j + y \ge f^*_k\right) \ge 1 - \alpha_k, \qquad k = 1,2,\ldots,K \qquad (۲۲)$$

به طوری که α_k، حد آستانه تابع هدف k ام می‌باشد.

$$\mathrm{Prob}\left(f^*_k - \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_{kj} x_j \le y\right) \ge 1 - \alpha_k, \qquad k = 1,2,\ldots,K \qquad (۲۳)$$

اگر $\tilde{B}_k(x) = f_k^* - \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_{kj} x_j$، متغیری تصادفی با توزیع نرمال باشد، آنگاه $\tilde{B}_k(x)$ دارای میانگین $E(\tilde{B}_k(x))$ و واریانس $\mathrm{Var}(\tilde{B}_k(x))$ خواهد بود. لذا می‌توان نوشت:

$$\mathrm{Prob}\left(\tilde{B}_k(x) \le y\right) \ge 1 - \alpha_k, \qquad k = 1,2,\dots,K \tag{۲۴}$$

و با تبدیل به توزیع نرمال استاندارد رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\mathrm{Prob}\left(\frac{\tilde{B}_k(x) - E(\tilde{B}_k(x))}{\sqrt{\mathrm{Var}(\tilde{B}_k(x))}} \le \frac{y - E(\tilde{B}_k(x))}{\sqrt{\mathrm{Var}(\tilde{B}_k(x))}}\right) \ge 1 - \alpha_k, \qquad k = 1,2,\dots,K \tag{۲۵}$$

به طوری که $\phi(z) = P\left(N(0,1) \le z\right)$ تابع توزیع تجمعی یک توزیع نرمال استاندارد است.

$$\frac{y - E(\tilde{B}_k(x))}{\sqrt{\mathrm{Var}(\tilde{B}_k(x))}} \ge \phi^{-1}(1 - \alpha_k), \qquad k = 1,2,\dots,K \tag{۲۶}$$

$$y \ge E(\tilde{B}_k(x)) + \phi^{-1}(1 - \alpha_k)\sqrt{\mathrm{Var}(\tilde{B}_k(x))}, \qquad k = 1,2,\dots,K \tag{۲۷}$$

$$y \ge E(f_k^* - \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_{kj} x_j) + \phi^{-1}(1 - \alpha_k)\sqrt{\mathrm{Var}(f_k^* - \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_{kj} x_j)}, \qquad k = 1,2,\dots,K \tag{۲۸}$$

بنابراین با توجه به دو نامساوی (۱۸) و (۲۸)، رویکرد CCGC(min-max) معادل با مدل (۱) می‌تواند به صورت مدل زیر بیان شود:

$$\begin{aligned}
&\min \quad y,\\
&\text{subject to:}\\
&y \ge w_k \times \left(E(f_k^* - \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_{kj} x_j) + \phi^{-1}(1 - \alpha_k)\sqrt{\mathrm{Var}(f_k^* - \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_{kj} x_j)}\right), \qquad k = 1,2,\dots,K\\
&y \ge w_i \times \left(E(\tilde{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j) - \phi^{-1}(1 - \alpha_i)\sqrt{\mathrm{Var}(\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j - \tilde{b}_i)}\right), \qquad i = 1,2,\dots,m\\
&x \in S,\\
&y \ge 0
\end{aligned} \qquad \text{مدل (۲۹)}$$

به طوری که $\sum_{k=1}^{K} w_k + \sum_{i=1}^{m} w_i = 1$ است.

در بخش بعدی، مدل پیشنهادی از طریق یک مسئله تعیین نیروی انسانی بهینه در یک سیستم تولیدی کارگاهی تشریح شده است همچنین در ادامه، نتایج به دست آمده از حل مسئله چند هدفه توسط مدل پیشنهادی و مدل CCCP(min-max) مورد مقایسه و ارزیابی قرار خواهند گرفت.

مثال عددی

یک سیستم تولید کارگاهی را در نظر بگیرید که در آن دو کارگاه جدا از هم فعال هستند. هدف تعیین تعداد نیروی انسانی بهینه در این سیستم است. فرضیات این مسئله به صورت زیر هستند:

فرضیات مسئله

۱) ظرفیت کاری کلیه واحدها در دو کارگاه نامحدود است.

۲) خروجی واقعی مرتبط با واحد jام از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$(\text{Output})_j = (\text{Input})_j - (\text{Failure})_j$$

۳) قطعات خراب قابلیت دوباره کاری نداشته و باید دورریز شوند.

۴) تعداد قطعات خراب روزانه واحد jام، متغیر تصادفی نرمال با میانگین و واریانس معلوم است.

۵) در این سیستم تولیدی، فرایند دوباره کاری وجود ندارد.

۶) در هر واحد کاری بر اساس نوع فعالیت انجام شده، چندین ایستگاه کاری فعال هستند.

۷) یک ایستگاه کاری در اینجا اینگونه تعریف می‌شود: محلی که توسط یک ماشین یا نیمکت کار، تجهیزات و ابزارآلات لازم و یک کارگر اشغال شده باشد.

۸) هزینه نگهداری هر واحد محصول نهایی در انبار ناچیز است.

۹) محدودیتی از بابت فضای نگهداری محصولات نهایی در انبار وجود ندارد.

۱۰) چنانچه در حل بهینه، تعداد نیروی انسانی واحد jام مقدار اعشاری کمتر از ۰/۵

داشته باشد، آن را رو به پایین گرد کرده و چنانچه دارای اعشاری بیشتر از ۰/۵ باشد، رو به بالا گرد می‌شود.

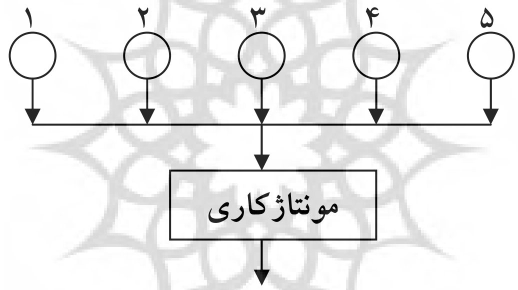
۱۱) میزان تولیدات روزانه سیستم ارتباط مستقیمی با تعداد نیروهای انسانی مشغول به کار در آن دارد.

۱۲) ایستگاه مونتاژکاری به صورت تمام خودکار انجام می‌شود.

۱۳) نوع محصول تولید شده در دو کارگاه متفاوت است.

تعیین تعداد بهینه نیروی انسانی مستقر در کارگاه (۱)

در این سیستم تولیدی، کارگاه (۱) بر اساس روش کارگاهی اداره می‌شود. در این کارگاه، ۵ واحد کاری مستقل به صورت موازی، مطابق شکل ۱ مستقر هستند:



شکل ۱. کارگاه (۱) با ۵ واحد کاری مستقل از هم که براساس سیستم کارگاهی اداره می‌شود.

توابع هدف و محدودیت‌های مورد نظر برای مسئله بهینه‌سازی تعداد نیروی انسانی در این سیستم تولیدی به صورت زیر هستند:

توابع هدف

۱) تابع هدف احتمالی خروجی[1] یا تعداد محصول نهایی تولید شده.

$\tilde{o}_j =$ متغیر تصادفی تعداد واحد خروجی / نفر مستقر در واحد jام.

$x_j =$ متغیر تصمیم تعداد نیروی انسانی مستقر در واحد j ام، به طوری که:

1. Output

$f_1 = \sum_{j=1}^{5} \tilde{o}_j x_j$

به دلیل حداکثر استفاده از ظرفیتهای موجود در سیستم تولیدی، کاهش زمان‌های راه اندازی و جلوگیری از کمبود، هدف ماکزیمم کردن خروجی نهایی روزانه در این سیستم تولیدی است.

۲) تابع هدف هزینه دستمزد[1] روزانه نیروهای انسانی استخدام شده.

w_j= دستمزد روزانه / نفر مستقر در واحد کاری jام. بر اساس درجه تخصصی بودن و مهارت مورد نیاز در واحد j ام، دستمزد روزانه / نفر مستقر در واحدهای مختلف، با یکدیگر تفاوت دارند به طوری که:

$f_2 = \sum_{j=1}^{5} w_j x_j$

هدف حداقل سازی این تابع هدف است.

۳) تابع هدف احتمالی مجموع زمان‌های بیکاری[2] غیر مجاز نیروهای انسانی.

$\tilde{t}_j$ = متغیر تصادفی مدت زمان بیکاری غیر مجاز / نفر نیروی انسانی مستقر در واحد jام برحسب دقیقه، به طوری که:

$f_3 = \sum_{j=1}^{5} \tilde{t}_j x_j$

هدف حداقل سازی مجموع زمان‌های بیکاری غیر مجاز روزانه در این سیستم تولیدی است.

۵-۲-۲. محدودیت‌ها

۱) با توجه به محدودیت فضای استقرار نیروهای انسانی و ماشین آلات مورد نیاز، حداقل تعداد نیروی انسانی واحد jام برابر تعداد نیروی انسانی موجود در واحد jام بوده و حداکثر تعداد نیروی انسانی واحد jام نیز برابر ۹ نفر است. تعداد نیروی انسانی موجود مستقر در واحدهای مختلف کارگاه (۱) ($x_{j\ (present)}$) در جدول ۱ نشان داده شده است:

1. Wage Cost
2. Idle Times

جدول ۱. تعداد نیروی انسانی موجود و مستقر در واحدهای مختلف کارگاه (۱)

واحدکاری (j)	۱	۲	۳	٤	۵
$x_{j\ (present)}$	۳	۳	٤	۲	۳

۲ مجموع کل نیروهای انسانی مستقر در کارگاه (۱) برابر ۳۰ نفر خواهد بود:

$$\sum_{j=1}^{5} x_j = 30$$

از مجموع ۳۰ نفر، تعداد ۱۵ نفر در حال حاضر در کارگاه (۱) مشغول بکار بوده و تعداد ۱۵ نفر نیز به عنوان نیروهای انسانی جدید استخدام خواهند شد. هدف، استقرار نیروهای انسانی بهینه در هر واحد کاری با توجه به دستیابی بهینه به توابع هدف و محدودیت‌های تعریف شده در مسئله است.

مسئله اصلی تعیین تعداد نیروهای انسانی بهینه در واحدهای کاری مستقر در کارگاه (۱) به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} &\max \quad f_1 = \sum_{j=1}^{5} \tilde{o}_j x_j, \\ &\min \quad f_2 = \sum_{j=1}^{5} w_j x_j, \\ &\min \quad f_3 = \sum_{j=1}^{5} \tilde{t}_j x_j, \\ &\text{s.t}: \\ &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30, \\ &3 \le x_1 \le 9, \\ &3 \le x_2 \le 9, \\ &4 \le x_3 \le 9, \\ &2 \le x_4 \le 9, \\ &3 \le x_5 \le 9, \end{aligned}$$	مدل (۳۰)

داده‌های استفاده شده در مسئله احتمالی سه هدفه (۳۰)، بر اساس اطلاعات روزانه مربوط به یک سال کاری این سیستم تولیدی است که در جدول ۲ ارائه شده‌اند.

جدول ۲. اطلاعات مربوط به واحدهای مختلف کارگاه (۱)

واحدکاری (j)	۱	۲	۳	٤	۵
میانگین تعداد واحد خروجی روزانه / نفر	۸	۵	۱۲	٦	۱۰
ماکزیمم تعداد واحد خروجی روزانه / نفر	۱۰	۸	۱۵	۸	۱۳
هزینه دستمزد روزانه / نفر	۲۰	۱۵	۱۷	۱۲	۱۸
میانگین زمان بیکاری غیر مجاز روزانه / نفر	٤۰	٦۰	۳۵	۵۰	٤۵
می نیمم زمان بیکاری غیر مجاز روزانه / نفر	۳۰	٤۸	۳۲	٤٦	۳۹

مقادیر ایده آل هریک از اهداف مدل (۳۰) با توجه به فضای جواب این مدل در جدول ۳ ارائه شده‌اند:

جدول ۳: مقدار ایده آل اهداف در فضای جواب مسأله سه هدفه

اهداف	مقدار ایده آل
$f_{1\ \max}$	۳٦۲
$f_{2\ \min}$	٤۵۹
$f_{3\ \min}$	۱۰٦۷

مسئله احتمالی سه هدفه (۳۰) بر اساس مدل CCGC(min-max) به مدل معادل قطعی زیر تبدیل می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&\min \quad y\\
&\text{s.t}:\\
&y \ge w_1 \times \Big((362-(8x_1+5x_2+12x_3+6x_4+10x_5))+\phi^{-1}(1-\alpha)\\
&\times\sqrt{0/000125x_1^2+0/000324x_2^2+0/000469x_3^2+0/000521x_4^2+0/000324x_5^2}\Big),\\
&y \ge w_2 \times (20x_1+15x_2+17x_3+12x_4+18x_5-459),\\
&y \ge w_3 \times \Big((40x_1+60x_2+35x_3+50x_4+45x_5-1067)+\phi^{-1}(1-\alpha)\\
&\times\sqrt{0/000162x_1^2+0/00021x_2^2+0/000135x_3^2+0/000222x_4^2+0/000198x_5^2}\Big),\\
&x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=30,\\
&3\le x_1\le 9,\\
&3\le x_2\le 9,\\
&4\le x_3\le 9,\\
&2\le x_4\le 9,\\
&3\le x_5\le 9,\\
&y\ge 0.
\end{aligned}
$$

مدل (۳۱)

همچنین مسئله احتمالی (۳۰) بر اساس مدل CCCP(min-max) به مدل معادل قطعی (۳۲) قابل تبدیل است:

$$
\begin{aligned}
&\min \quad y\\
&\text{s.t}:\\
&\Big((362-(8x_1+5x_2+12x_3+6x_4+10x_5))+\phi^{-1}(1-\alpha)\\
&\times\sqrt{0/000125x_1^2+0/000324x_2^2+0/000469x_3^2+0/000521x_4^2+0/000324x_5^2}\Big)-\varepsilon_1+p_1=0,\\
&20x_1+15x_2+17x_3+12x_4+18x_5-n_2=459,\\
&\Big((40x_1+60x_2+35x_3+50x_4+45x_5-1067)+\phi^{-1}(1-\alpha)\\
&\times\sqrt{0/000162x_1^2+0/00021x_2^2+0/000135x_3^2+0/000222x_4^2+0/000198x_5^2}\Big)-\varepsilon_3+p_3=0,\\
&y\ge w_1\times(\varepsilon_1+p_1),\\
&y\ge w_2\times(n_2),\\
&y\ge w_3\times(\varepsilon_3+p_3),\\
&x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=30,\\
&3\le x_1\le 9,\\
&3\le x_2\le 9,\\
&4\le x_3\le 9,\\
&2\le x_4\le 9,\\
&3\le x_5\le 9,\\
&y\ge 0;\varepsilon_1,\varepsilon_3\ge 0, p_1,p_3\ge 0, n_2\ge 0.
\end{aligned}
$$

مدل (۳۲)

در مدل‌های (۳۱) و (۳۲)، $w_1 = w_2 = \frac{4}{10}$ و $w_3 = \frac{2}{10}$ و $\alpha = 0/05$ در نظر گرفته می‌شوند. مدل‌های (۳۱) و (۳۲) با استفاده از بسته نرم افزاری لینگو بهینه‌سازی و نتایج آنها در جدول ۴ ارائه شده‌اند.

جدول ٤. نتایج حل مسأله تعیین تعداد نیروی انسانی بهینه در واحدهای مختلف کارگاه ۱

	وضعیت کنونی سیستم	CCGC(min-max)	CCCP(min-max)
x_1	۳	۹	۹
x_2	۳	۳	۳
x_3	۴	۹	۹
x_4	۲	۲	۲
x_5	۳	۷	۷
f_1 max (برحسب تعداد)	۱۲۹	۲۷۷	۲۷۷
f_2 min (برحسب واحد پولی)	۲۵۱	۵۲۸	۵۲۸
f_3 min (برحسب دقیقه)	۶۷۵	۱۲۷۰	۱۲۷۰
تعداد متغیرها		٦	۱۱
تعداد محدودیتها		۹	۱۲
تعداد تکرارها		۱۵	۱۹

جدول ۴ نتایج حل مسئله احتمالی (۳۰) با مدل‌های CCGC(min-max) و CCCP(min-max) را نشان می‌دهد که علاوه بر موجه بودن، بهینه نیز می‌باشند. در جدول ۴، بردار مقادیر x_j با استفاده از مدل‌های CCGC(min-max) و CCCP(min-max) به صورت $(9,3,9,2,7)$ می‌باشد. سیاست تأمین منابع انسانی مرتبط با حل مسئله دو هدفه بالا بدین گونه خواهد بود:

- واحد کاری شماره (۱): تعداد ۶ نفر نیروی انسانی جدید استخدام شوند.
- واحد کاری شماره (۲): با همین ۳ نفر نیروی انسانی، فعالیت ادامه یابد.
- واحد کاری شماره (۳): تعداد ۵ نفر نیروی انسانی جدید استخدام شوند.
- واحد کاری شماره (۴): با همین ۲ نفر نیروی انسانی، فعالیت ادامه یابد.
- واحد کاری شماره (۵): تعداد ۴ نفر نیروی انسانی جدید استخدام شوند.

بردار مقادیر اهدافی که توسط مدل‌های (۳۱) و (۳۲) به دست آمده‌اند نیز به صورت $(277, 528, 1270)$ می‌باشد، که در مورد همه اهداف، مدل‌های

CCGC(min-max) و CCCP(min-max)، نتایج کاملاً مشابهی را ارائه می‌دهند. این موضوع می‌تواند معادل بودن دو مدل را تحت حالتی نشان دهد که مدل CCGC(min-max) با تعداد محدودیت‌ها و متغیرهای کمتری مدلسازی شده است. در جدول ۴ نتایج حاصل از وضعیت کنونی سیستم در مورد توابع هدف تعریف شده مسئله برابر (۶۷۵، ۲۵۱، ۱۲۹) هستند. تعداد تکرارهای لازم برای دستیابی به حل بهینه مسئله که توسط نرم افزار لینگو و بر اساس مدل‌های (۳۱) و (۳۲) به دست آمده‌اند نیز به ترتیب برابر ۱۵ و ۱۹ تکرار می‌باشند. از این رو به نظر می‌رسد با افزایش ابعاد مسئله (افزایش تعداد متغیرها و محدودیت‌ها)، مدل پیشنهادی قادر است با سرعت و پیچیدگی کمتری به جواب بهینه دست یابد. در این مسئله، توابع هدف احتمالی تعداد خروجی، زمان بیکاری غیر مجاز و تابع هدف قطعی هزینه دستمزد معرفی گردیدند. هدف از طرح این مسئله سه هدفه، توسعه سیستم تولیدی و افزایش سهم قابل کسب در بازار رقابتی است. از سوی دیگر با تعداد نیروی انسانی کمتر (بیشتر)، تعداد تولیدات سیستم کاهش (افزایش) یافته، هزینه جذب و استخدام کمتری (بیشتری) بر عهده مدیریت قرار خواهد گرفت و مجموع زمان‌های پرسنل نیز کاهش (افزایش) می‌یابد.

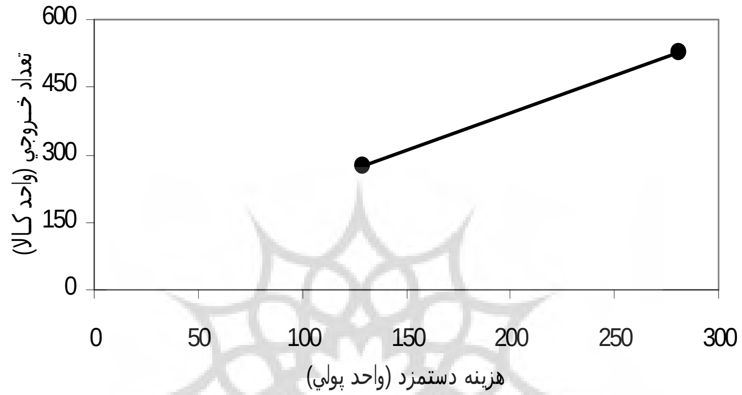
با توجه به اینکه در مورد مسئله احتمالی (۳۰)، $w_1 = w_2 > w_3$ در نظر گرفته شده‌اند، بنابراین در جدول ۵ نتایج اهداف f_1 و f_2 در دو وضعیت قبل و بعد از فرایند بهینه‌سازی ارائه شده‌اند تا بتوان تحلیلی از نتایج حل مسئله در این دو وضعیت داشت:

جدول ۵. مقادیر بهینه اهداف خروجی و هزینه دستمزد در دو حالت قبل و بعد از بهینه‌سازی

تابع هدف	قبل از بهینه‌سازی	پس از بهینه‌سازی	میزان تغییرات
خروجی (f_1)	۱۲۹	۲۷۷	۱٤۸
هزینه دستمزد (f_2)	۲۵۱	۵۲۸	۲۷۷

وضعیت قبل از بهینه‌سازی بیانگر وضعیت کنونی کارگاه (۱) با وجود حداقل

نیروهای انسانی فعال در واحدهای مختلف است و وضعیت پس از بهینه‌سازی نیز گویای نتایج به دست آمده ازجدول ۴ است. میزان تغییرات نتایج به دست آمده نیز بیانگر تفاوت میان نتایج این دو وضعیت است. شکل ۲، مقادیر بهینه توابع هدف f_1 و f_2 در وضعیت‌های قبل و بعد از بهینه‌سازی مسئله توسط مدل‌های (۳۱) و (۳۲) را نشان می‌دهد:



شکل ۲. نمایش تغییرات دو تابع هدف خروجی و هزینه دستمزد براساس وضعیت کنونی و پس از بهینه‌سازی مسئله (۱۵) توسط مدل CCGC(min-max).

همان طور که در شکل ۲ نیز مشاهده می‌شود، در وضعیت قبل از بهینه‌سازی، سیستم در حالت حداقل پرداخت دستمزد و حداقل تعداد تولید قرار دارد که به دنبال آن حداقل درآمد حاصل از فروش محصولات را نیز در پی خواهد داشت. اما در وضعیت پس از بهینه‌سازی، سیستم در حالت حداکثر پرداخت دستمزد و حداکثر تعداد تولید قرار دارد، به طوری که هزینه و درآمد سیستم به طور همزمان افزایش خواهند یافت. نتایج حاصل در دو وضعیت قبل و بعد از بهینه‌سازی، نوعی تبادل[1] میان اهداف f_1 و f_2 را به نمایش می‌گذارند که تصمیم‌گیری مدیران تحت شرایط عدم قطعیت را در دو وضعیت بدون استخدام و با استخدام نیروی انسانی آسان خواهد کرد.

1. Trade-off

تعیین تعداد بهینه نیروی انسانی مستقر در کارگاه‌های (۱) و (۲)

حال به منظور بررسی عملکرد مدل پیشنهادی، مجموع نیروهای انسانی مستقر در دو کارگاه (۱) و (۲) بهینه می‌شوند. داده‌های مربوط به کارگاه اول در جدول ۱ ارائه شده‌اند. در کارگاه (۲)، سه واحد کاری مستقر هستند که برای سهولت در انجام محاسبات شماره این واحدها به ترتیب ۶، ۷ و ۸ در نظر گرفته می‌شود. اطلاعات مربوط به کارگاه (۲) در همان بازه زمانی مطابق جدول ۶ است:

جدول ٦. اطلاعات مربوط به واحدهای مختلف کارگاه (۲)

واحدکاری (j)	٦	٧	٨
$E(\tilde{o}_j)$	١٠	٩	١١
$\mathrm{Var}(\tilde{o}_j)$	٠/٠٠٠٤٣٦	٠/٠٠٠٣٣٩	٠/٠٠٠٢١٥
$\max(\tilde{o}_j)$	١٣	١٢	١٦
w_j	١٨	١٥	١٧
$E(\tilde{t}_j)$	٣٠	٤٠	٤٠
$\mathrm{Var}(\tilde{t}_j)$	٠/٠٠٠٢٣١	٠/٠٠٠٢٢٥	٠/٠٠٠٣٠١
$\min(\tilde{t}_j)$	٢٦	٣٢	٣٦

به طوری که $3 \le x_6, x_7 \le 9$ و $4 \le x_8 \le 9$ بوده و $w_1 = w_2 = \frac{4}{10}$ و $w_3 = \frac{2}{10}$ و $\alpha = 0/05$ در نظر گرفته می‌شوند. محدودیت تعداد نیروهای انسانی مستقر در سیستم تولیدی برابر است با: $\sum_{j=1}^{8} x_j = 40$. بار دیگر مسئله سه هدفه (۳۰) به همراه متغیرهای جدید توسط بسته نرم افزاری لینگو بهینه‌سازی و نتایج در جدول ۷ ارائه شده است.

جدول ۷. حل مسئله تعیین تعداد نیروی انسانی با در نظر گرفتن کارگاه‌های (۱) و (۲)

مدل	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	تعداد متغیرها	تعداد محدودیتها	تعداد تکرارها
CCCP(min-max)	۳	۳	۹	۲	≈ ٤ ٤/١٧	≈ ٧ ٦/٨٣	۳	۹	١٤	١٥	۲۵
CCGC(min-max)	۳	۳	۹	۲	≈ ٤ ٤/١٧	≈ ٧ ٦/٨٣	۳	۹	**۹**	**۱۲**	**۱۵**

به طوری که نتایج بهینه‌سازی مسئله توسط هر دو مدل CCGC(min-max) و CCCP(min-max) کاملاً یکسان بوده $f_1^* = 395$، $f_2^* = 678$ و $f_3^* = 1585$ هستند.

همان طور که مشاهده می‌شود با افزایش تعداد واحدهای کاری از ۵ به ۸ واحد، بر مقادیر اهداف مسئله نیز افزوده می‌شود. به عبارتی با افزایش تعداد واحدهای کاری، علاوه بر افزایش تعداد تولیدات روزانه، هزینه دستمزد پرداختی به پرسنل و زمان بیکاری غیر مجاز پرسنل نیز افزایش می‌یابد. در جدول ۷ با افزایش تعداد واحدهای کاری از ۵ به ۸ واحد، تعداد متغیرها، محدودیت‌ها و تکرارها برای حل مسئله سه هدفه در مدل بهینه‌سازی CCGC(min-max) نسبت به مدل CCCP(min-max) کاهش می‌یابد. این موضوع بیانگر آن است که با وجود کسب نتایج مشابه، مدل پیشنهادی در مدلسازی حل مسئله سه هدفه بر اساس ۵ و ۸ واحد کاری از پیچیدگی کمتر و بهینه‌سازی آن از سرعت بالاتری برخوردار است.

کلی سازی نتایج

برای کلی سازی نتایج برخی فرضیات مدل‌های (۳۱) و (۳۲) را تغییر داده و نتایج مجدداً بر اساس شبیه‌سازی داده‌های ورودی بررسی می‌شوند. در اینجا فرض بر آن است که تعداد متغیرهای x_j به ۵۰ افزایش یابند و به جز حد پایین، حد بالایی برای متغیرهای x_j تعریف نشود. همچنین در فرض جدید $\sum_{j=1}^{50} x_j = 200$ است. جدول ۸ داده‌های مربوط به این فرضیات جدید را ارائه می‌کند:

جدول ۸. داده‌های مربوط به فرضیات جدید برای مسئله شبیه‌سازی شده

واحدکاری (j)	$E(\tilde{o}_j)$	$\mathrm{Var}(\tilde{o}_j)$	w_j	$E(\tilde{t}_j)$	$\mathrm{Var}(\tilde{t}_j)$	حد پایین x_j
۱	۸	۰/۰۰۰۱۲۵	۲۰	۴۰	۰/۰۰۰۱۶۲	۳
۲	۵	۰/۰۰۰۳۲۴	۱۵	۶۰	۰/۰۰۰۲۱	۳
۳	۱۲	۰/۰۰۰۴۶۹	۱۷	۳۵	۰/۰۰۰۱۳۵	۴
۴	۶	۰/۰۰۰۵۲۱	۱۲	۵۰	۰/۰۰۰۲۲۲	۲
۵	۱۰	۰/۰۰۰۳۲۴	۱۸	۴۵	۰/۰۰۰۱۹۸	۳
۶	۱۰	۰/۰۰۰۴۳۶	۱۸	۳۰	۰/۰۰۰۲۳۱	۳
۷	۹	۰/۰۰۰۳۳۹	۱۵	۴۰	۰/۰۰۰۲۲۵	۳
۸	۱۱	۰/۰۰۰۲۱۵	۱۷	۴۰	۰/۰۰۰۳۰۱	۴
۹	۱۳	۰/۰۰۰۳۵۱	۱۶	۳۸	۰/۰۰۰۱۹۹	۴
۱۰	۱۰	۰/۰۰۰۴۰۶	۱۸	۴۲	۰/۰۰۰۲۰۸	۳
۱۱	۱۱	۰/۰۰۰۶۳۸	۱۸	۴۰	۰/۰۰۰۱۶۷	۴
۱۲	۹	۰/۰۰۰۲۲۹	۱۵	۴۳	۰/۰۰۰۲۰۶	۳
۱۳	۱۲	۰/۰۰۰۳۱۹	۱۴	۳۹	۰/۰۰۰۲۴۷	۳
۱۴	۶	۰/۰۰۰۴۴۷	۱۳	۴۶	۰/۰۰۰۱۷۶	۴
۱۵	۷	۰/۰۰۰۵۲۱	۱۶	۴۰	۰/۰۰۰۳۱۱	۳
۱۶	۸	۰/۰۰۰۴۱۹	۱۶	۴۱	۰/۰۰۰۲۰۶	۴
۱۷	۱۰	۰/۰۰۰۵۵۱	۱۹	۴۹	۰/۰۰۰۳۷۷	۴
۱۸	۱۱	۰/۰۰۰۳۳۹	۱۸	۴۸	۰/۰۰۰۲۲۲	۳
۱۹	۱۲	۰/۰۰۰۴۷۶	۲۰	۳۵	۰/۰۰۰۲۷۳	۴
۲۰	۱۰	۰/۰۰۰۲۹۹	۱۷	۳۷	۰/۰۰۰۲۸۱	۲
۲۱	۱۲	۰/۰۰۰۴۳۹	۱۶	۵۲	۰/۰۰۰۳۰۷	۳
۲۲	۸	۰/۰۰۰۳۵۷	۱۰	۴۹	۰/۰۰۰۳۱۱	۴
۲۳	۹	۰/۰۰۰۳۳۳	۱۲	۵۹	۰/۰۰۰۱۴۵	۴
۲۴	۱۲	۰/۰۰۰۲۴۷	۱۴	۴۵	۰/۰۰۰۲۲۲	۳
۲۵	۶	۰/۰۰۰۳۹۴	۱۹	۵۰	۰/۰۰۰۳۱۴	۳
۲۶	۱۰	۰/۰۰۰۴۶۱	۱۱	۴۷	۰/۰۰۰۳۶۴	۴
۲۷	۱۱	۰/۰۰۰۳۹۷	۱۳	۳۹	۰/۰۰۰۲۵۷	۳
۲۸	۷	۰/۰۰۰۴۰۶	۲۰	۴۰	۰/۰۰۰۲۷۷	۲
۲۹	۱۳	۰/۰۰۰۳۷۷	۱۸	۴۱	۰/۰۰۰۳۴۱	۴
۳۰	۱۱	۰/۰۰۰۳۳۷	۱۲	۳۶	۰/۰۰۰۱۸۷	۳
۳۱	۱۲	۰/۰۰۰۳۶۱	۱۹	۳۷	۰/۰۰۰۲۷۳	۴
۳۲	۱۲	۰/۰۰۰۴۶۲	۱۸	۴۹	۰/۰۰۰۳۶۱	۴
۳۳	۱۰	۰/۰۰۰۱۹۷	۱۸	۴۸	۰/۰۰۰۲۹۶	۳
۳۴	۹	۰/۰۰۰۲۳۷	۱۷	۵۴	۰/۰۰۰۲۱۸	۲

واحدکاری (j)	$E(\tilde{o}_j)$	$\mathrm{Var}(\tilde{o}_j)$	w_j	$E(\tilde{t}_j)$	$\mathrm{Var}(\tilde{t}_j)$	x_j حد پایین
٣٥	١٠	٠/٠٠٠٢٤٥	١٩	٣٤	٠/٠٠٠١٦٧	٣
٣٦	١٢	٠/٠٠٠٣٠٧	٢٠	٣٨	٠/٠٠٠٣٧٩	٤
٣٧	١٢	٠/٠٠٠٤٠٣	١٥	٤٠	٠/٠٠٠١٥٤	٢
٣٨	٨	٠/٠٠٠٣٧١	١٦	٥١	٠/٠٠٠٣١٤	٣
٣٩	٧	٠/٠٠٠٣٣٩	١٠	٤٦	٠/٠٠٠٢١٦	٢
٤٠	٩	٠/٠٠٠٢٤٤	١٢	٣٣	٠/٠٠٠١٧٨	٢
٤١	١٤	٠/٠٠٠٤٣١	١٢	٣٦	٠/٠٠٠٣٩٨	٤
٤٢	١٣	٠/٠٠٠٣٨٤	١٣	٣٩	٠/٠٠٠٢٤٩	٣
٤٣	١٣	٠/٠٠٠٢٨٤	١٢	٣٦	٠/٠٠٠١٧١	٢
٤٤	١١	٠/٠٠٠٣١٩	١٢	٥٠	٠/٠٠٠٢٢٩	٤
٤٥	١٠	٠/٠٠٠٢٧٦	١١	٥٥	٠/٠٠٠٣٠٦	٣
٤٦	١٢	٠/٠٠٠٣٧٩	٩	٥٤	٠/٠٠٠٣١١	٢
٤٧	٩	٠/٠٠٠٤١١	١٦	٤٦	٠/٠٠٠٢٤١	٤
٤٨	٩	٠/٠٠٠٣٨١	١٢	٤٢	٠/٠٠٠٣٦٧	٤
٤٩	١٠	٠/٠٠٠٣١١	١٨	٣٩	٠/٠٠٠١١٧	٤
٥٠	٨	٠/٠٠٠٢٦١	٢٠	٥٣	٠/٠٠٠٢٦٤	٣

مدل‌های (٣١) و (٣٢) برای داده‌های جدول ٨ با استفاده از بسته نرم افزاری لینگو اجرا شده‌اند. نتایج شبیه‌سازی بر اساس مجموعه‌ای از اوزان اهمیت اهداف در جدول **٩** ارائه شده‌اند.

جدول ٩. تعداد تکرارهای لازم برای بهینه‌سازی مسئله شبیه‌سازی شده براساس اوزان اهمیت مختلف اهداف

w_1, w_2, w_3	CCGC(min-max)	CCCP(min-max)
$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	١٤	٢٠
0/5,0/2,0/3	١٥	٢١
0/3,0/6,0/1	١٦	٢٦
0/2,0/2,0/6	١٣	٢١
0/05,0/9,0/05	١٦	٦٨
0/7,0/15,0/15	١٤	٧١
0/8,0/15,0/05	١٧	٦٩
0/1,0/2,0/7	١٣	٢١
0/03,0/8,0/17	١٦	٦٧

جدول ۹ تعداد تکرارهای لازم برای بهینه‌سازی مسئله شبیه سازی شده بر اساس مدل‌های CCGC(min-max) و CCCP(min-max) را نشان می‌دهد. همان طور که در جدول ۹ نیز مشاهده می‌شود، در همه اوزان اهمیت اهداف در نظر گرفته شده، تعداد تکرارهای لازم برای بهینه سازی در مدل CCGC(min-max) کمتر از مدل CCCP(min-max) است. حتی در برخی اوزان، اختلاف میان تعداد تکرارهای لازم بهینه‌سازی در دو مدل CCGC(min-max) و CCCP(min-max)، زیاد است (سطرهای پررنگ شده در جدول ۹ را مشاهده کنید). نتایج شبیه‌سازی بیانگر آن است که با وجود تغییر در فرضیات، افزایش ابعاد مسئله و مشابه بودن نتایج بهینه‌سازی در هر بار اجرای مسئله بهینه سازی، مدل CCGC(min-max) از نظر تعداد تکرارهای لازم برای بهینه‌سازی، همچنان از مدل CCCP(min-max) کارآمدتر است و این موضوع می‌تواند در بهینه‌سازی مسائل مقیاس بزرگ مورد توجه قرار گیرد.

نتیجه‌گیری و پیشنهادهای آتی

در این مقاله مدلی از ترکیب رویکرد CCP و GC(min-max) معرفی گردید که CCGC(min-max) نامیده شد. مدل CCGC(min-max)، یک مدل معادل قطعی برای مسائل احتمالی چند هدفه ارائه و آن را بهینه‌سازی می‌کند. مدل پیشنهادی در مورد یک مسئله احتمالی سه هدفه پیرامون تعیین نیروی انسانی بهینه در یک سیستم تولیدی کارگاهی متشکل از دو کارگاه، تشریح و تحلیل گردید. متغیرهای تصادفی مسئله احتمالی، تعداد محصول خروجی تولید شده و مقدار زمان بیکاری مجاز تلف شده توسط پرسنل در نظر گرفته شدند. هدف از این سیستم تولیدی، توسعه و حضور بیشتر در بازار رقابتی تولید عنوان شد.

در بخش اول مسئله احتمالی بر اساس اطلاعات موجود برای کارگاه (۱) مدلسازی و توسط مدل‌های CCGC(min-max) و CCCP(min-max) حل گردید. نتایج به دست آمده بیانگر موجه بودن، بهینه بودن و یکسان بودن حل مسئله سه هدفه توسط دو مدل CCGC(min-max) و CCCP(min-max) بودند. مشاهده

شد که مدل CCGC(min-max) با وجود تعداد متغیرها و محدودیت‌های کمتر، تعداد تکرارهای کمتری را برای یافتن جواب بهینه خواهد داشت. به نظر می‌رسد این موضوع به دلیل کاهش تعداد متغیرها و محدودیت‌ها در مدلسازی مدل پیشنهادی است. مسئله احتمالی بار دیگر برای دو کارگاه (۱) و (۲) مدلسازی گردید. نتایج حاصل از بهینه‌سازی مسئله توسط مدل پیشنهادی مؤید آن بودند که افزایش تعداد متغیرها و محدودیت‌ها تأثیری بر تعداد تکرارها برای یافتن جواب بهینه نداشته و از پیچیدگی مدلسازی نیز کاسته می‌شود. برای اطمینان بیشتر از صحت عملکرد مدل پیشنهادی، مسئله بهینه‌سازی با وجود تغییراتی در فرضیات و شبیه‌سازی داده‌های ورودی با استفاده از دو مدل CCGC(min-max) و CCCP(min-max) چندین بار اجرا گردید که با وجود شباهت نتایج به دست آمده در همه اجراها، تعداد تکرارهای لازم برای بهینه‌سازی در مدل CCGC(min-max) کمتر از مدل CCCP(min-max) است. کاهش زمان حل و افزایش دقت مدلسازی در مسائل احتمالی با مقیاس بزرگ همواره مد نظر برنامه‌ریزان بوده است. از این رو کاهش تعداد متغیرها و محدودیت‌ها در مدل CCGC(min-max) می‌تواند راهکار مناسبی برای دستیابی به این اهداف فراهم آورد.

در این مقاله مدلسازی احتمالی بر اساس فرض نرمال بودن متغیرهای تصادفی صورت گرفت. استفاده از سایر متغیرهای تصادفی همچون توزیع استیودنت و مربع کای می‌توانند به عنوان زمینه‌های بررسی برای تحقیقات آتی پیشنهاد شوند.

منابع و مآخذ

1. Abdelaziz, F.B, Aouni, B., and El Fayedh, R. (2007). **Multi-objective stochastic programming for portfolio selection**. European Journal of Operational Research. 177, 3, 1811–1823.
2. Birge, J.R., and Louveaux, F. (1997). **Introduction to stochastic programming**. New York: Springer.
3. Carino, D.R., Kent, T., Meyers, D.H., Stacy, C., Sylvanus, M., Turner, A.L., Watanabe, K., and Ziemba, W.T.(1994). **The Russell-Yasuda Kasai Model: An asset/liability model for a Japanese insurance company using multistage stochastic programming**. Interfaces. 24, 1, 29–49.
4. Chankong, V., and Haimes, Y.Y. (1983). **Multi-objective decision making theory and methodology**. New York: Elsevier Science Publishing.
5. Charnes, A., and Cooper, W.W. (1959). **Chance-constrained programming**. Management Science. 6, 1, 73–79.
6. Charnes, A., and Cooper, W.W. (1963). **Deterministic equivalents for optimizing and satisfying under chance constraints**. Operations Research. 11, 1, 18–39.
7. Fisher, M.L., Hammond, J., Obermeyer, W., and Raman, A. (1997). **Configuring a supply chain to reduce the cost of demand uncertainty**. Production and Operations Management. 6, 3, pp. 211–225.
8. Kall, P., and Wallace, S.W. (1994). **Stochastic programming**. England: John Wiley and Sons, Chichester.
9. Marler, R.T. (2005). **A study of multi-objective optimization methods for engineering applications**. A thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the Doctor of Philosophy degree in Mechanical Engineering in the Graduate College of the university of Iowa.
10. Murphy, F.H., Sen, S., and Soyster, A.L. (1982). **Electric utility capacity expansion planning with uncertain load forecasts**. AIIE Transaction. 14, 1, 52–59.
11. Prékopa, A. (1995). **Stochastic programming**. London: Kluwer Academic Publishers.
12. Yu, P.L. (1973). **A class of solutions for group decision problems**. Management Science. 19, 936–946.
13. Yu, P.L., and Leitmann, G. (1974). **Compromise solutions, domination structures and salukvadze’s solution**. Journal of Optimization Theory and Applications. 13, 362–378.
14. Yu, P.L. (1985). **Multiple criteria decision making concepts, techniques and extensions**. New York: Plenum Press.
15. Zeleny, M.(1973). **Compromise programming**. In: Cochrane, JL., and Zeleny, M., (eds). Multiple Criteria Decision Making. University of South Carolina Press: Columbia, pp 262–301.
16. Zeleny, M.(1974). **A concept of compromise solutions and the**

method of the displaced ideal. Computers and Operations Research. 1, 3, 479–496.

17. Zeleny, M. (1976). **Multiple criteria decision making**. Berlin: Springer-Verlag.
18. Zeleny, M. (1982). **Multiple criteria decision making**. New York: McGraw-Hill.