پژوهشنامهٔ بیمه(صنعت بیمه سابق)/سال‌بیست‌وششم/شمارهٔ ۳/پائیز ۱۳۹۰/شماره‌مسلسل۱۰۳/صفحات ۲۹ تا ۵۰

محاسبه احتمال برشکستگی شرکت‌های بیمه به کمک زنجیره‌های مارکوف

محمدرضا صالحی‌راد[1]

سمیه احمدی[2]

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۸۹/۱۰/۲۶

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۰/۰۴/۰۶

چکیده

در این مقاله نشان خواهیم داد که چگونه می‌توان مدل ریسک بیمه‌ای اسپیرر اندرسون را به کمک زنجیره‌های مارکوف تجزیه‌وتحلیل کرد و به کمک آن احتمال برشکستگی در شرکت‌های بیمه را محاسبه کرد. در این مقاله با استفاده از روش‌های آنالیز ماتریسی، احتمال برشکستگی، میزان مازاد در هنگام برشکستگی و میزان کسری بودجه در زمان وقوع برشکستگی را محاسبه می‌کنیم. روش ارائه‌شده در اینجا بسیار محاسباتی و کاربردی‌تر از سایر روش‌های است که پیش از این برای محاسبه این احتمال ارائه شده است.

در ابتدا نشان خواهیم داد که چگونه می‌توان این مدل را به‌صورت یک زنجیرهٔ مارکوف نامتناهی تعریف کرد و سپس به کمک روش‌های ماتریسی به محاسبهٔ احتمال مورد نظر می‌پردازیم. در ادامه شیوهٔ محاسبه و استفاده از این زنجیره را در به‌دست‌آوردن احتمال مورد نظر بیان خواهیم کرد و در انتها به محاسبهٔ احتمال برشکستگی برای داده‌های یک شرکت بیمه به کمک روش مطرح‌شده خواهیم پرداخت.

واژگان کلیدی: *مدل اسپیرر اندرسون، زنجیرهٔ مارکوف، زمان برشکستگی، احتمال برشکستگی، بیمه*

۱. استادیار دانشگاه علامه طباطبائی(نویسنده مسئول) (Email: Salehirad@Atu.ac.ir)

۲. کارشناس‌ارشد اکچوئری، دانشگاه علامه طباطبائی (Email: Somayeahmadi63@Gmail.com)

۱. مقدمه

محاسبهٔ احتمال برشکستگی از ابزارهای مهم مدیریت بیمه است و جهت برنامه‌ریزی‌های آیندهٔ شرکت‌های بیمه از جمله تعیین میزان سرمایه‌گذاری، مشخص‌کردن نرخ حق‌بیمهٔ مناسب و میزان بیمه‌های اتکایی بسیار کاربردی است؛ چرا که بالابودن مقدار این احتمال نشان‌دهندهٔ نوعی تزلزل در شرکت بیمه است و شرکت‌ها باید روش‌هایی از جمله استفاده از بیمه‌های اتکایی، افزایش نرخ حق‌بیمه یا افزایش نرخ سرمایه‌گذاری را جهت کاهش این احتمال اتخاذ نمایند. احتمال برشکستگی میزان پرتفوی یک شرکت را مقایسه می‌کند و نمی‌توان گفت که دقیقاً نشان‌دهنده برشکستگی یک شرکت است. در حقیقت می‌توان به آن به عنوان یک شاخص نگاه کرد که میزان ریسک را به شرکت‌های بیمه نشان می‌دهد.

در مدیریت ریسک اکچوئری محاسبهٔ این احتمال شاخص مهمی جهت برآورد کل پرتفوی شرکت بیمه است. در حقیقت اکچوئرها از این شاخص برای ارائهٔ راهبردهایی به شرکت‌های بیمه استفاده می‌کنند و زمانی که میزان مازاد شرکت[۱] منفی شود به‌عنوان یک علامت هشدار، این موضوع را گوشزد کرده و راهکارهایی را جهت کاهش این احتمال و برگرداندن شرکت به پرتفوی مناسب ارائه می‌کنند.

احتمال برشکستگی به کمک تئوری ریسک محاسبه می‌شود و یکی از زیرشاخه‌های علم اکچوئری[۲] است که به کمک آن میزان ثبات و تزلزل شرکت‌های بیمه به‌دست‌می‌آید.

در اینجا ما میزان مازاد شرکت بیمه را به کمک $U(t)$ نشان می‌دهیم و می‌دانیم که یک فرایند تصادفی است که مرتب به دلیل درآمدهای شرکت بیمه از جمله حق‌بیمه‌ها

---

۱. منظور نویسنده از «میزان مازاد شرکت» در کل متن مقاله، «میزان مازاد سرمایه شرکت» است.

2. Actuaries

افزایش می‌یابد و همچنین مرتب به علت پرداخت‌های خسارت شرکت بیمه کاهش می‌یابد و زمانی که این مازاد منفی شود می‌گوییم برشکستگی[1] رخ داده است.

تئوری برشکستگی را اولین بار کرامر[2] (۱۹۳۰–۱۹۵۵) و هم‌زمان با آن لاندبرگ[3] ۱۹۴۰ مطرح کرد و گربر[4] در سال ۱۹۷۹ روشی را براساس تئوری مارتینگل[5] برای محاسبه این احتمال ارائه نمود.

در سال ۱۹۷۰ بوهلمن[6] تئوری برشکستگی را به عنوان ابزار سنجش ثبات شرکت‌ها معرفی کرد و در سال ۱۹۶۴ بکمن[7] کتابی را منتشر کرد که در آن ارتباط بین فرایندهای وارنر و پواسن را اعلام نمود و می‌توان گفت که یقیناً یکی از کتاب‌های با ارزش در زمینه مدل‌های مالی بیمه‌ای محسوب می‌شود. کتابی نیز با همین مضمون در سال ۱۹۹۷ توسط اینبر کیتز[8] منتشر شده است.

مقالات زیادی نیز در زمینهٔ محاسبهٔ عددی احتمال برشکستگی منتشر شده است که می‌توان گفت آغازگر آنها گوورتز[9] و دویجلد[10] در سال ۱۹۸۴بوده‌اند.

استفاده از فرایندهای تصادفی برای مدل‌سازی مازاد و محاسبهٔ ریسک بیمه‌گر اولین بار توسط لاندبرگ با عنوان «تئوری ریسک» در سال ۱۹۰۹ و در ششمین کنگره بین‌المللی اکچوئری انجام گرفت.

در این مقاله مازاد به کمک فرایند پواسن آمیخته تعریف شده است و این فرایند را

---

1. Ruin
2. Cramér
3. Lundberg
4. Gerber
5. Martingales
6. Buhlmann
7. Beekman
8. Embrechts
9. Gooraerts
10. Devijlde

اولین بار کرامر[1] در سال ۱۹۳۰ بررسی کرده است.

گربر (۱۹۹۸)، مایکل[2] (۱۹۸۹)، شیو[3] (۱۹۸۹)، دیکسون و واترز[4] (۱۹۹۱)، ویلموت[5] (۱۹۹۳)، دیکسون (۱۹۹۴)، ویلدر و مارکو[6] (۱۹۹۶، ۲۰۰۰)، کاردوسو و ایجیدیو داس ریس[7] (۲۰۰۲)، لی و گاردیو[8] (۲۰۰۲) تحقیقاتی را در زمینۀ محاسبۀ احتمال برشکستگی در زمان متناهی یا نامتناهی برای مدل دوجمله‌ای ترکیب‌شده در فضای گسستۀ مشابه مدل ریسک پواسن ترکیبی کلاسیک در حالتی که زمان ادعای خسارت در آن توزیع هندسی دارد، انجام داده‌اند.

در زمینه محاسبۀ احتمال برشکستگی و پیداکردن توزیع حاشیه‌ای و آمیخته برای مازاد و کسری در زمان وقوع برشکستگی برای مدل دوجمله‌ای ترکیبی، دیکسون (۱۹۹۵) روش‌های عددی را در زمینۀ محاسبه این احتمال مطرح کرد. در سال‌های اخیر نیز پاولو[9] و ویلوت (۲۰۰۴)، لی (۲۰۰۵) و کاستی[10] (۲۰۰۶) مدل اسپیرر اندرسون را در زمان گسسته بررسی کرده‌اند که از دستاوردهای آن تحقیقات در این مقاله در زمینۀ محاسبه احتمال برشکستگی و به‌دست‌آوردن تابع توزیع تجمعی و حاشیه‌ای مازاد و کسری در زمان وقوع برشکستگی استفاده خواهد شد. در قسمت مبانی ریاضی و محاسباتی نیز از روش‌شناسی گربر و شیو[11] (۱۹۹۸) کمک خواهیم گرفت.

---

1. Cramer
2. Michel
3. Shiu
4. Dickson & Waters
5. Willmot
6. Vylder & Marceau
7. Cardoso & Egidio dos Reis
8. Li & Garrido
9. Paulova
10. Cossette
11. Gerber & Shiu

۱-۱. تعاریف

محاسبهٔ احتمال برشکستگی از مهم‌ترین مسائل شرکت‌های بیمه است و تاکنون نیز تحقیقات و روش‌های زیادی جهت محاسبهٔ مقدار این احتمال ارائه شد است. در ادامه ما نشان خواهیم داد که چگونه به کمک زنجیره‌های مارکوف و روش‌های ماتریسی این احتمال را برای مدل ریسک بیمه‌ای اسپیرر اندرسون[1] استفاده خواهیم کرد.

در مدل ما میزان مازاد برابر است با:

$$U_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_t$$

که در آن :

u: نشان‌دهنده ذخیرهٔ اولیه است $u \in \{0,1,2,...\}$

c: نشان‌دهنده میزان حق‌بیمه ثابتی است که در هر واحد زمانی دریافت می‌شود.

Y_i: میزان ادعای خسارت iام را نشان می‌دهد.

$N(t)$: نشان‌دهندهٔ تعداد ادعاهای خسارت تا زمان t است.

$Y_i's$ ها یکنواخت و هم توزیع بوده و دارای تابع چگالی $p(Y_i = j) = \alpha_j$ و تابع توزیع $\Lambda_j = 1 - \sum_{k=1}^{j-1} a_k$ هستند.

$j = 1,2,3,...,m_\alpha$

m_α: حداکثر میزان ادعای خسارتی است که از سوی بیمه‌گذار اعلام می‌شود.

بنابراین زمان برشکستگی هنگامی خواهد بود که میزان سرمایهٔ شرکت (u) منفی گردد یا به‌عبارت‌دیگر: $T = min\{t \in Z^+ : U_t < 0\}$

زمان تعریف‌شده در این مقاله زمان گسسته است، ما فرض می‌کنیم که فرایند تعداد دفعات ادعای خسارت $N_t,\ t = 0,1,2,...$ یک فرایند قابل تجدید است که در زمان

1. Sparre Andersen

گسسته رخ داده و زمان ادعای خسارت $\{w_1, w_2, w_3, ...\}$ دارای تابع چگالی برابر با $a_j = Pr(W_i = j)$ است و W_i نشان‌دهنده زمان بین $(i-1)$امین و i امین ادعای خسارت خواهد بود و تابع توزیع آن به‌این‌صورت است:

$$A_j = Pr\{w_i > j\} = 1 - \sum_{k=1}^{j} \alpha_k$$

براساس تعاریف بالا، هدف اصلی محاسبه این احتمال‌هاست:

$$\omega_{n,i}(u) = Pr\left\{\mathrm{T} = n, U_{T^-} = i \,\middle|\, U_\circ = u\right\}, n \in Z^+; i = c, c+1, c+2, ..., m_\alpha - 1$$

و

$$\varphi_{n,i}(u) = Pr\left\{T = n, |U_T| = j \,\middle|\, U_\circ = u\right\}, n \in Z^+; i = 1, 2, 3, ..., m_\alpha - c$$

و همچنین احتمال آمیخته سه‌گانه زیر:

$$\psi_{n,i,j}(u) = Pr\left\{T = n, U_{T^-} = i\ ,\ |U_T| = j \,\middle|\, U_\circ = u\right\},\ n \in Z^+;\ i = c, c+1, c+2, ..., m_\alpha - 1;$$
$$j = 1, 2, 3, ..., m_\alpha - i$$

بنابراین جهت محاسبهٔ احتمال‌های فوق و به‌دست‌آوردن ماتریس احتمال انتقال زنجیرهٔ مارکوف به تعاریف دیگری نیازمندیم که در ادامه به آنها اشاره خواهیم کرد.

۲. فرمول‌بندی مدل

در اینجا نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان این مدل را به‌صورت یک زنجیره مارکوف نامتناهی نشان داد و سپس به کمک روش‌های ماتریسی به محاسبهٔ احتمال مورد نظر می‌پردازیم. در این قسمت در ابتدا مدل را توضیح خواهیم داد و بعضی از تعاریف و علائم به کاربرده‌شده را معرفی می‌کنیم. سپس فضای زنجیرهٔ مارکوف را برای این مدل تعریف می‌کنیم و در آخر مدل اسپیرراندرسون را به کمک زنجیره‌های مارکوف تعریف کرده و احتمال برشکستگی را محاسبه می‌کنیم.

۲-۱. توضیح مدل و تعاریف

در ابتدا به تعریف توزیع زمان ادعای خسارت می‌پردازیم. در اینجا از W به جای W_i برای $i = 2, 3, 4, ...$ استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم:

$$\tau_j = Pr\{W > j \mid W > j-1\} = A_j / A_{j-1}$$

$$A_j = Pr(W_i > j) = 1 - \sum_{k=1}^{j} \alpha_k \quad where \quad j = 1,2,3,\dots,n_a$$

در این مقاله مبانی کار در تعریف کلیه ماتریس‌ها، زمان به تعویق افتاده در ادعای خسارت است، باتوجه به این موضوع ماتریس‌های زیر را تعریف می‌کنیم.

با استفاده از τ_js ماتریس $n_a \times n_a$ زیر را تعریف می‌کنیم:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & \tau_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \tau_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \tau_{n_{a-1}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{۲-۱}$$

و بردار سطری $1\times n_a$، $e_1 = (1,0,0,0,\cdots,0)$

همچنین بردار ستونی $n_a \times 1$، احتمال جذب را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$s = \begin{bmatrix} 1-\tau_1 \\ 1-\tau_2 \\ \vdots \\ 1-\tau_{n_a-1} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{۲-۲}$$

در جایی که $s = 1 - S_1$ و ۱ یک ماتریس ستونی از یک است.

در حالی که $S_{i,j}$، *(i,j)*امین از عنصرهای ماتریس S است که $0 \le S_{i,j} \le 1$ و s_i i امین عنصر از s است.

$\rho = \begin{bmatrix} S & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ یک ماتریس احتمال انتقال برای یک زنجیرهٔ مارکوف است که فضای آن به‌صورت (U_t, L_t) تعریف شده است، U_t را قبلاً تعریف کرده‌ایم و L_t را نیز زمان به تعویق افتاده می‌نامیم $t = k, k+1, k+2, \dots$

حال به کمک ماتریس‌های S و s، a_j's را تعریف می‌کنیم.

۱-۲ نتیجه:

$$a_j = e_1 S^{j-1} s \quad , \quad j = 1,2,3,\dots,n_\alpha \tag{۲-۳}$$

اکنون برای تعریف زنجیرهٔ مارکوف نیاز به فضای ماتریسی داریم لذا مقدار W_1 را به‌صورت عدد ثابت k، $k \in \{1,2,3,\cdots,n_r\}$ تعریف کرده و زمان ازدست‌رفته را با L_t نشان می‌دهیم: $t = k, k+1, k+2, \ldots$

فضای فرایند تصادفی موردنظر را با $\Delta = \{(U_t, L_t) : U_t \in Z; L_t = 1,2,3,\ldots,n_\alpha\}$ نشان می‌دهیم و لذا داریم:

$$(U_{t+1}, L_{t+1}) = \begin{cases} (U_t + c, L_t + 1) & \text{if there is no claim at time } t+1 \\ (U_t + c - Y, 1) & \text{if there is a claim } Y \text{ at time } t+1 \end{cases}$$

و ماتریس احتمال انتقال آن را به این‌صورت نشان می‌دهیم:

$$P = \begin{array}{c|ccccccccccccc|} & \cdots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \cdots & c & c+1 & c+2 & c+3 & \cdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & & & & \\ -3 & \ddots & B_c & B_{c-1} & B_{c-2} & B_{c-3} & & & & & & & & \\ -2 & \ddots & B_{c+1} & B_c & B_{c-1} & B_{c-2} & B_{c-3} & & & & & & & \\ -1 & \ddots & B_{c+2} & B_{c+1} & B_c & B_{c-1} & B_{c-2} & B_{c-3} & & & & & & \\ 0 & \ddots & B_{c+3} & B_{c+2} & B_{c+1} & B_c & B_{c-1} & B_{c-2} & \cdots & B_0 & & & & \\ 1 & \ddots & B_{c+4} & B_{c+3} & B_{c+2} & B_{c+1} & B_c & B_{c-1} & \cdots & B_1 & B_0 & & & \\ 2 & \ddots & B_{c+5} & B_{c+4} & B_{c+3} & B_{c+2} & B_{c+1} & B_c & \cdots & B_2 & B_1 & B_0 & & \\ 3 & \ddots & B_{c+6} & B_{c+5} & B_{c+4} & B_{c+3} & B_{c+2} & B_{c+1} & \cdots & B_3 & B_2 & B_1 & B_0 & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \end{array}$$

که در آن

$$B_i = \begin{cases} S & \text{if } i = 0 \\ (se_1)\alpha_i & \text{if } i = 1,2,3,\ldots \end{cases} \qquad (۲-۴)$$

۲-۲. تقسیم‌بندی فضای احتمال

در این قسمت با استفاده از تعاریف و توضیحات ارائه‌شده در مورد مدل اسپیررساندرسون به محاسبهٔ احتمال‌های تعریف‌شده می‌پردازیم. برای این کار ابتدا نیاز داریم که فضای احتمال Δ را به دو قسمت تقسیم کنیم:

$$\Delta_1 = \{(i, j) : i = 0,1,2,3,\ldots; j = 1,2,\ldots,n_a\}$$

و

$$\Delta_{۲} = \{(i, j) : i = -۱, -۲, -۳, ... ; j = ۱, ۲, ..., n_a\}$$

در اینجا Δ_1 نشان‌دهنده عدم‌برشکستگی("non – ruined") است و $\Delta_{۲}$ نشان‌دهنده برشکستگی("ruined") بنابراین دارم: $\Delta = \Delta_{۱} \cup \Delta_{۲}$

علاوه‌براین دو ماتریس C و D را به‌صورت C: $\Delta_{۱} \to \Delta_{۱}$ و D: $\Delta_{۱} \to \Delta_{۲}$ تعریف می‌کنیم.

$C_{v,w}$ عناصر ماتریس C می‌باشند که تشکیل‌دهندهٔ ماتریس احتمال انتقال هستند و انتقال‌دهنده $U_t = v \in \{۰, ۱, ۲, ...\}$ به $U_{t+۱} = w \in \{۰, ۱, ۲, ...\}$ می‌باشند. عناصر غیرصفر ماتریس به‌این‌صورت محاسبه می‌شود: $C_{v,w} = B_{v-w+c}$ و $w = ۰, ۱, ..., v + c_o$

به‌همین‌طریق عناصر ماتریس D نیز به‌صورت $D_{v,w} = B_{v-w+c}$ محاسبه می‌شود که انتقال آن از $U_t = v \in \{۰, ۱, ۲, ...\}$ به $U_{t+۱} = w \in \{-۱, -۲, -۳...\}$ صورت می‌گیرد. با این تعاریف ماتریس‌ها به‌این‌صورت خواهد بود:

$$C = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} ۰ & ۱ & ۲ & \cdots & c & c+۱ & c+۲ & \cdots \end{matrix} \\ \begin{matrix} ۰ \\ ۱ \\ ۲ \\ \vdots \end{matrix} & \begin{bmatrix} B_c & B_{c-۱} & B_{c-۲} & \cdots & B_۰ & & & \\ B_{c+۱} & B_c & B_{c-۱} & \cdots & B_۱ & B_۰ & & \\ B_{c+۲} & B_{c+۱} & B_c & \cdots & B_۲ & B_۱ & B_۰ & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \end{array} \qquad (۲-۵)$$

و

$$D = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} -۱ & -۲ & -۳ & \cdots \end{matrix} \\ \begin{matrix} ۰ \\ ۱ \\ ۲ \\ \vdots \end{matrix} & \begin{bmatrix} B_{c+۱} & B_{c+۲} & B_{c+۳} & \cdots \\ B_{c+۲} & B_{c+۳} & B_{c+۴} & \cdots \\ B_{c+۳} & B_{c+۴} & B_{c+۵} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \end{array} \qquad (۲-۶)$$

ما می‌دانیم که C یک‌چهارم پایینی سمت راست ماتریس P است و D یک‌چهارم پایینی سمت چپ ماتریس P است.

برای تعریف احتمال برشکستگی به کمک تعاریف ماتریسی قبلی داریم:

$$Pr\left\{U_k = v \mid W_1 = k\ ,\ U_0 = u\right\} = \alpha_{u+ck-v} \qquad (۲-۷)$$
$$v = u+ck-1,\ u+ck-2, u+ck-3\ ,...$$

بنابراین اولین احتمال ماتریس سطری با استفاده از فضای Δ_1 به‌این‌صورت خواهد بود:

$$b^{(k)} = (a_{u+ck}e_1, a_{u+ck-1}e_1, a_{u+ck-2}e_1, ..., a_2e_1, a_2e_1, 0, 0, ...) \qquad (۲-۸)$$

که در آن 0 نشان دهندهٔ ماتریسی سطری $1\times n_a$ از صفر خواهد بود.

iامین عنصر از ماتریس $b^{(k)}$ به‌وسیله ماتریس سطری $1\times n_a$، $\alpha_{u+ck-i}e_1$ برای $i \in \Omega_k = \{0,1,2,...,u+ck-1\}$ به‌دست‌می‌آید از$b^{(k)}$ $u+ck$ به بعد شامل صفر است.

در ادامه برای سهولت محاسبات ما دو ماتریس سطری دیگر را تعریف می‌کنیم:

$$g_n^{(k)} = (\ g_{n,0}^{(k)}\ ,\ g_{n,1}^{(k)}, g_{n,2}^{(k)}, ...) = b^{(k)}C^n \quad , \quad n = 0,1,2,... \qquad (۲-۹)$$

پس داریم:

$$g_{1,i}^{(k)} = \sum_{j=0}^{u+ck-1}\alpha_{u+ck-j}e_1B_{j-i+c}\ , \qquad i = 0\ ,1,2\ ,...,\ c-1$$

و

$$g_{1,i}^{(k)} = \sum_{j=i-c}^{u+ck-1}\alpha_{u+ck-j}e_1B_{j-i+c}\ , \qquad i = c\ ,c+1\ ,c+2\ ,...\ ,u+c(k+1)-1$$

$g_n^{(k)}$ شامل احتمال‌هایی است که در آن برشکستگی رخ نمی‌دهد. فضای آن در زمان k+n تعریف شده که در $n-1$ زمان قبلی برشکستگی رخ نداده است.

ماتریس سطری دیگری که برای فضای احتمال برشکستگی تعریف می‌کنیم به این صورت است:

$$h_n^{(k)} = (\ k_{n,-1}^{(k)}\ ,\ k_{n,-2}^{(k)}, k_{n,-3}^{(k)}, ...) = g_{n-1}^{(k)}D = b^{(k)}C^{n-1}D \quad , \quad n = 1,2,3,... \qquad (۲-۱۰)$$

پس داریم:

$$h_{1,-i}^{(k)} = \sum_{j=0}^{u+ck-1}\alpha_{u+ck+j}e_1B_{j-i+1+c}\ , \qquad i = 1\ ,2\ ,3\ ,...$$

به همین ترتیب $h_n^{(k)}$ شامل احتمال‌هایی می‌شود که در آن برشکستگی رخ داده است. ازآنجایی‌که برشکستگی زمانی رخ می‌دهد که ادعای خسارت رخ داده است می‌توان بلافاصله نوشت که ماتریس $1\times n_a$، $h_{n,\cdot j}^{(k)}$ را به‌صورت $h_{n,\cdot j}^{(k)}=(\Phi_{n,j}^{(k)}(u),0,0,...,0)$ تعریف می‌کند که در آن:

$$\Phi_{n,j}^{(k)}(u)=Pr\{T=k+n\ \ ,\ \ |U_T|=j\quad |\ U_0=u\ \ ,\ U_k\in\Omega_k\}$$

۲-۲ نتیجه:

$$\Phi_{n,j}^{(k)}(u)=h_{n,\cdot j}^{(k)}e' \qquad (۲-۱۱)$$

در اینجا e_1' وارون‌شده ماتریس e_1 است.

به‌همین‌ترتیب می‌توانیم احتمال $\Psi_{n,i,j}^{(k)}(u)$ را به‌این‌صورت ماتریسی تعریف کنیم:

$$\Psi_{n,i,j}^{(k)}(u)=Pr\{T=k+n\,,U_{T^-}=i\ \ ,\ \ |U_T|=j\ \ |\ U=u_0\ ,U_k\in\Omega_k\}$$

برای اینکه برشکستگی در زمان $k+n$ با میزان مازادی قبل در زمان t رخ دهد باید:

- هیچ یک از $n-1$های انتقال قبلی شامل فضای Δ_2 نشوند.
- مازاد در زمان $k+n-1$ باید برابر با i-c باشد.

نکات گفته‌شده در ماتریس $1\times n_a$، $g_{n-1,i-c}^{(k)}$ قرار دارد. نکته قابل توجه اینکه تمامی حق‌بیمه‌ها قبل از پرداخت خسارت جمع می‌شود. ازآنجایی‌که s شامل احتمال‌های جذب از n_a فضای ممکن می‌شود، ادعای خسارت منجربه ruin باید از اندازه $i+j$ بیشتر باشد، که در این زمان میزان کسری بیمه‌گر برابر j خواهد بود که بلافاصله داریم:

۲-۳ نتیجه:

$$\Psi_{n,i,j}^{(k)}(u)=(g_{n-1,i-c}^{(k)}s\ )\ \alpha_{i+j} \qquad (۲-۱۲)$$

۲-۳. محاسبه احتمال برشکستگی

تاکنون برای محاسبات خود فرض کردیم که $W_1=k$ که $k\in\{1,2,3,...,n_r\}$ و $r_j=Pr(W_1=j)$. بنابراین به‌وسیله قانون مجموع احتمال داریم:

$$\Phi_{n,j}(u) = r_1\Phi^{(1)}_{n-1,j}(u) + r_2\Phi^{(2)}_{n-2,j} + \ldots + r_{n_r}\Phi^{(n_r)}_{n-n_r,j} \quad , n = n_r+1 \,,\, n_r+2 \,,\, n_r+3 \,,\, \ldots$$

یا:

$$\Phi_{n,j}(u) = \sum_{k=1}^{n_r} r_k \Phi^{(k)}_{n-k,j}(u) \quad , \quad n = n_r+1 \,,\, n_r+2 \,,\, n_r+3 \,,\, \ldots \quad (۲-۱۳)$$

$$\Psi_{n,i,j}(u) = r_1\Psi^{(1)}_{n-1,i,j}(u) + r_2\Psi^{(2)}_{n-2,i,j} + \ldots + r_{n_r}\Psi^{(n_r)}_{n-n_r,i,j} \quad n = n_r+1 \,,\, n_r+2 \,,\, n_r+3 \,,\, \ldots$$

به همین ترتیب برای $\Psi_{n,i,j}(u)$ داریم:

یا:

$$\Psi_{n,i,j}(u) = \sum_{k=1}^{n_r} r_k \Psi^{(k)}_{n-k,i,j}(u) \quad , \quad n = n_r+1 \,,\, n_r+2 \,,\, n_r+3 \,,\, \ldots \quad (۲-۱۴)$$

اگرچه برای $T=n$ زمانی که $n = 1,2,3,\ldots,n_r$ باید داشته باشیم:

- n اولین زمان ادعای خسارتی است که منجر به برشکستگی می‌شود.

- اولین ادعاهای خسارتی که در زمان $k \in \{1,2,3,\ldots,n-1\}$ رخ می‌دهد منجر به برشکستگی نمی‌شود، اما برشکستگی در $n\text{-}k$ زمان بعدتر می‌تواند رخ دهد.

که به کمک روش‌های ریاضی به‌این‌صورت تعریف می‌شود:

$$\Phi_{n,j}(u) = \sum_{k=1}^{n-1} r_k \Phi^{(k)}_{n-k,j}(\mathrm{u}) + r_n \alpha_{u+cn+j} \quad n = 1,2,3,\ldots,n_r \qquad (۲-۱۵)$$

و

$$\Psi_{n,i,j}(u) = \sum_{k=1}^{n-1} r_k \Psi^{(k)}_{n-k,i,j}(u) + \delta_{i,u+cn} r_n \alpha_{u+cn+j} \quad n = 1,2,3,\ldots,n_r \qquad (۲-۱۶)$$

که در آن $\delta_{i,u+cn}$ نشان‌دهنده دلتا کرونوکر برای i و $u+cn$ است.

ازآنجایی‌که $r_n = 0 \quad \forall \quad n > n_r$، تساوی‌های (۲-۱۳) و (۲-۱۵) با هم ترکیب شده و داریم:

$$\Phi_{n,j}(u) = \sum_{k=1}^{\min\{n-1,n_r\}} r_k \Phi^{(k)}_{n-k,j}(u) + r_k \alpha_{u+cn+j} \quad n \in Z^+ \qquad (۲-۱۷)$$

و

$$\Psi_{n,i,j}(u) = \sum_{k=1}^{\min\{n-1,n_r\}} r_k \Psi^{(k)}_{n-k,i,j}(u) + \delta_{i,u+cn+j} r_n \alpha_{u+cn+j} \quad n \in Z^+ \qquad (۲-۱۸)$$

برای $j \in \{1,2,3,\dots,m_\alpha - c\}$ ما به سادگی می‌نویسیم که مجموع (۱۸-۲) از $i=c$ به $m_\alpha - j$ بر روی (۱۷-۲) به‌همین‌ترتیب برای $i \in \{c, c+1, c+2, \dots, m_\alpha - 1\}$ مجموع (۱۸-۲) از $j=1$ به $m_\alpha - i$ خواهد بود.

۴-۲ نتیجه:

$$\omega_{n,i}(u) = \sum_{k=1}^{\min\{n-1,n\}} r_k \sum_{j=1}^{m_\alpha - i} \Psi^{(k)}_{n-k,i,j} + \delta_{i,u+cn} r_n \sum_{j=1}^{m_\alpha - i} \alpha_{u+cn+j} \quad n \in Z^+ \quad (۲-۱۹)$$

که در آن از تساوی (۱۲-۲) استفاده شده است. اگر $m_\alpha \to \infty$ در تساوی (۱۹-۲) داریم: $\Lambda_{u+cn-i} = 0$.

۳. روش محاسبات

تاکنون نشان دادیم که چگونه می‌توان مدل اسپیرر اندرسون را به‌صورت یک زنجیرهٔ مارکوف نامتناهی نشان داد. در قسمت‌های گذشته ما احتمال $\omega(u)$ را محاسبه کردیم که در تساوی (۱۹-۲) نشان داده شده است. اکنون نشان خواهیم داد که چگونه از این تعاریف برای محاسبهٔ احتمال برشکستگی شرکت‌های بیمه استفاده می‌شود. همچنین ما چند الگوریتم مفید که در محاسبات از آنها استفاده خواهیم کرد را نشان می‌دهیم. باتوجه به تعاریف (۱۲-۲) و (۱۱-۲) درمی‌یابیم که نیاز به محاسبهٔ $g_n^{(k)}$ و $h_n^{(k)}$ داریم. برای این کار از تساوی‌های (۵-۲) و (۶-۲) استفاده می‌کنیم.

۱-۳. الگوریتم محاسبات

در اینجا محاسبات خود را به‌وسیله محاسبهٔ $g_1^{(k)}$ که در تساوی (۹-۲) داده شده است، شروع می‌کنیم و می‌دانیم که C حاصل‌ضرب $b^{(k)}$ و تساوی (۸-۲) است. آنجایی که $b^{(k)}$ از $u+ck$ شامل صفر است، برای $g_1^{(k)}$ داریم:

$$g_1^{(k)} = (\, g_{1,0}^{(k)} \,,\, g_{1,1}^{(k)} \,, g_{1,2}^{(k)} ,\dots, g_{1,u+c(k+1)-2}^{(k)} , g_{1,u+c(k+1)-1}^{(k)} , 0, 0, \dots) \qquad (۳-۱)$$

قبلاً نشان دادیم که:

(۳-۲)

$$g^{(k)}_{1,i}=\sum_{j=0}^{u+ck-1}\alpha_{u+ck-j}e_1B_{j-i+c}\ ,\ i=0,1,2,...,c-1$$

و

(۳-۳)

$$g^{(k)}_{1,i}=\sum_{j=i-c}^{u+ck-1}\alpha_{u+ck-j}e_1B_{j-i+c}\ ,\quad \mathrm{i}=c,c+1,c+2,\dots,u+c(k+1)-1$$

یادآوری می‌کنیم که $g^{(k)}_1$ از $u+c(k+1)$ به بعد شامل صفر است و نشان می‌دهیم که $g^{(k)}_0=b^{(k)}$

$$g^{(k)}_0=(g^{(k)}_{0,0},g^{(k)}_{0,1},g^{(k)}_{0,2},....)=b^{(k)}C^0=b^{(k)}$$

با استفاده از تعریف (۹-۲) $g^{(k)}_n=b^{(k)}C^n=b^{(k)}C^{n-1}C=g^{(k)}_{n-1}C$ برای $n\in Z^+$

ما می‌توانیم این روند را برای $g^{(k)}_n$ ادامه دهیم و باتوجه به اینکه این ماتریس از u+c(k+n) شامل صفر می‌شود داریم:

$$g^{(k)}_n=(\ g^{(k)}_{n,0}\ ,\ g^{(k)}_{n,1}\ ,g^{(k)}_{n,2}\ ,...,g^{(k)}_{n,u+c(k+1)-2}\ ,g^{(k)}_{n,u+c(k+1)-1}\ ,0,0,...)\qquad (۳-۴)$$

که در آن:

$$g^{(k)}_{n.i}=\begin{cases}\sum_{j=0}^{u+c(k+n-1)-1}g^{(k)}_{n-1,j}\ B_{j-i+c}\ ,\quad i=0,1,2,\dots,c-1\\ \sum_{j=i-c}^{u+c(k+n-1)-1}g^{(k)}_{n-1,j}B_{j-i+c}\ ,i=c\ ,c+1,c+2,...,u+c\,(k+n)-1\end{cases}\qquad (۳-۵)$$

۱-۳ نتیجه:

$$g^{(k)}_{n,i}=\left(\sum_{j=0}^{u+c(k+n-1)-1}\alpha_{j-i+c}\ g^{(k)}_{n-1,j}\ s\ ,0,0,...,0\right),\ \ i=0,1,2,...,c-1\ (۳-۶)$$

$$g^{(k)}_{n,i} = g^{(k)}_{n-1,i-c}S + \left(\sum_{j=i-c+1}^{u+c(k+n-1)-1} \alpha_{j-i+c}\ g^{(k)}_{n-1,j}\ s, 0, 0, \ldots, 0 \right), \qquad (3-7)$$

$$i = c, c+1, c+2, \ldots, u + c(k+n) - 1$$

۳-۲ نتیجه:

$$g^{(k)}_{0,j} = \alpha_{u+ck-j}e_1, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, u+ck-1$$

در مجموع ما از تساوی (۷-۳) می‌نویسیم $g^{(k)}_{n,u+c(k+n)-1} = g^{(k)}_{n-1,u+c(k+n-1)-1} S$. اگر ما از روش بازگشتی استفاده کنیم از تساوی (۷-۳) خواهیم داشت:

$$g^{(k)}_{n,u+c(k+n)-1} = g^{(k)}_{0,u+ck-1} S^n$$

که در آن S از تساوی (۱-۲) تعریف شده است.

۳-۳ نتیجه: اگر $n \geq n_\alpha$، S^n ماتریسی برابر با صفر خواهد بود.

زیرا اگر $n \geq n_\alpha$، $g^{(k)}_{n,u+c(k+n)-1} = g^{(k)}_{0,u+ck-1}S^n = 0$

به‌همین‌ترتیب اگر $n \geq jn_\alpha$ and $j \in Z^+$، $g^{(k)}_{n,u+c(k+n)-j} = 0$ زیرا:

$$g^{(k)}_{n,u+c(k+n)-j} = g^{(k)}_{n-1,u+c(k+n-1)-j}S = g^{(k)}_{0,u+ck-j}S^n = 0$$

به کمک همین شیوهٔ بازگشتی ما می‌توانیم تعاریف دیگری برای $g^{(k)}_n$ داشته باشیم:

برای مثال به کمک $e_1 s$ و فرمول (۱۲-۲) داریم:

$$\Psi^{(k)}_{1,i,j}(u) = (g^{(k)}_{1-1,i-c}s)\alpha_{i+j} = (g^{(k)}_{0,i-c}s)\alpha_{i+j} = (\alpha_{u+ck-(i-c)}e_1 s)a_{i+j} = \alpha_1\alpha_{i+j}\alpha_{u+c(k+1)-i}$$

برای اثبات (۸-۳) ما از تساوی‌های (۱۱-۲) و (۷-۳) و (۶-۳) استفاده می‌کنیم.

بنابراین داریم:

$$\Psi^{(k)}_{n,i,j}(u) = (g^{(k)}_{n-1,i-c}s)\,\alpha_{i+j} = \sum_{l=0}^{u+c(k+n-2)-1} (a_{1-(i-c)+c}\, g^{(k)}_{n-2,1}e_1\ s\ )\, a_{i+j}s = \alpha_1\alpha_{i+j} \sum_{l=0}^{u+c(k+n-2)-1} \alpha_{l-i+2c}\, g^{(k)}_{n-2}\, s$$

$$for \qquad i = c, c+1, \ldots, \min\{2c-1, m_\alpha - j\}$$

و

$$\Psi^{(k)}_{n,i,j}(u)=(g^{(k)}_{n-1,i-c}s)\,\alpha_{i+j}=(g^{(k)}_{n-2,i-c-c}S)\,s\,\alpha_{i+j}+\sum_{l=i-2c+1}^{u+c(k+n-2)-1}(\alpha_{l-(i-c)+c}\,g^{(k)}_{n-2,l}e_1\,s\,)\,\alpha_{i+j}s$$

$$=\alpha_{i+j}\,g^{(k)}_{n-2,i-2c}\,Ss+\alpha_1\alpha_{i+j}\sum_{l=o}^{u+c(k+n-2)-1}\alpha_{l-i+2c}\,g^{(k)}_{n-2}\,s$$

$$for\quad i=2c,2c+1,\dots,m_\alpha-j$$

بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\Psi^{(k)}_{n,i,j}(u)=\begin{cases}\alpha_1\alpha_{i+j}\sum_{l=0}^{u+c(k+n-2)-1}\alpha_{l-i+2c}\,g^{(k)}_{n-2,l}\,s & if\quad i=c,c+1,\dots,min\,\{2c-1,m_\alpha-j\}\\[2ex] \alpha_{i+j}\,g^{(k)}_{n-2,i-2c}Ss+\alpha_1\alpha_{i+j}\sum_{l=i+1-2c}^{u+c(k+n-2)-1}\alpha_{l-i+2c}\,g^{(k)}_{n-2,l}s & if\quad i=2c,2c+1,\dots,m_\alpha-j\end{cases}$$

(۳-۹)

به علاوه گفتیم $g^{(k)}_{n,u+ck+1}=0\ ,\ for\ \ \forall\ \ l=cn\,,cn+1,cn+2,\dots$، ما به کمک (۴-۲) و (۶-۲) و (۱۰-۲) تعریف زیر را می‌نویسیم:

$$h^{(k)}_{n,j}=\sum_{l=c}^{u+c(k+n)-1}g^{(k)}_{n-1,l-c}\,B_{j+l}=\left(\sum_{i=c}^{u+c(k+n)-1}\alpha_{j+1}\,g^{(k)}_{n-1,l-c}\,s,0,0,\dots,0\right)\quad(3\text{-}10)$$

بنابرین با جای‌گذاری (۱۰-۳) در(۱۱-۲) داریم:

(۳-۱۱)

$$\Phi^{(k)}_{n,j}(u)=\sum_{l=c}^{u+c(k+n)-1}a_{j+l}\,g^{(k)}_{n-1,i-c}s$$

۴. آنالیز داده‌ها

تا اینجا فرمول مربوطبه محاسبهٔ احتمال برشکستگی را به کمک زنجیره‌های مارکوف به‌دست‌آوردیم و فرض کردیم شرکت بیمه کار خود را با یک اندوختهٔ اولیهٔ u در زمان ۰ شروع می‌کند. همانطور که گفتیم فرض کردیم تمامی حق‌بیمه‌ها با نرخ ثابت c در ابتدای هر واحد زمانی جمع می‌شوند و شرکت بیمه تنها با یک ریسک ادعای خسارت روبروست.

در این مقاله هدف ما محاسبهٔ احتمال برشکستگی به کمک زنجیره‌های مارکوف برای یکی از شرکت‌های بیمه ایرانی بوده است. اما متأسفانه یافتن داده‌هایی که با فرضیات کلی ما هم‌خوانی داشته باشد، مشکل است که یکی از آنها داشتن توزیع w_1 متفاوت از سایر توزیع زمان‌های ادعای خسارت یعنی $w_i \;, \; i = 2,3,4,\ldots$ است. مشکل دیگر یافتن توزیع زمان اولین ادعای خسارت است چرا که حجم داده‌های موجود دراین‌زمینه به اندازه‌ای نبوده که بتوان توزیع آن را برآورد کرد؛ لذا به ناچار قسمتی از داده‌ها را به کمک داده‌های اولیهٔ یک شرکت بیمه در قسمت بدنهٔ اتومبیل شبیه‌سازی کرده و به تحلیل آنها پرداختیم.

۱-۴. فرضیات داده‌های شبیه‌سازی‌شده

همان‌طوری که در ابتدا بیان شد فرض کردیم که مدل ریسک بیمه‌ای در این مقاله به صورت $U_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_t$ است و شرکت بیمه کار خود را با اندوختهٔ اولیهٔ u در زمان صفر شروع می‌کند و فرض کردیم تمامی حق‌بیمه‌ها با نرخ ثابت c در ابتدای هر واحد زمانی جمع می‌شوند و شرکت بیمه تنها با یک ریسک ادعای خسارت روبروست. ما فرض می‌کنیم که فرایند تعداد دفعات ادعای خسارت $N_t , t = 0,1,2,\ldots$ یک فرایند قابل تجدید است که در زمان گسسته رخ داده و زمان ادعای خسارت دارای $\{w_1, w_2, w_3, \ldots\}$ تابع چگالی برابر با $\alpha_j = Pr(W_i = j)$ است و W_i نشان‌دهندهٔ زمان بین $(i-1)$امین و i امین ادعای خسارت خواهد بود و تابع توزیع آن به‌این‌صورت خواهد بود:

$$A_j = Pr\{w_i > j\} = 1 - \sum_{k=1}^{j} \alpha_k$$

بنابراین ما نیاز داریم که زمان و اندازهٔ ادعاهای خسارت را بدانیم. همچنین باتوجه به فرضیات مسئله باید توزیع زمان اولین ادعای خسارت را به‌دست‌آوریم. بنابراین نیاز به داده‌هایی داریم که $\alpha_1(j)$ و $\alpha(j)$ دارای توزیع متفاوت باشند.

بنابراین ما از داده‌های صدور و خسارت بدنهٔ اتومبیل یک شرکت بیمه استفاده کرده و قسمتی از داده‌ها را شبیه‌سازی می‌کنیم. همانطور که می‌دانیم بیمه‌های اتومبیل در ایران به دو شکل بدنه و ثالث رایج است. در بیمه‌های بدنه، بیمه‌نامه یک ساله بوده و زمان ادعای خسارت در همان یک سال است، اما در بیمه‌های ثالث زمان ادعای خسارت تا دو سال می‌تواند به طول انجامد. ما باتوجه به حجم و زمان داده‌های موجود شرکت احتمال مورد نظر را برای واحد زمانی ماه محاسبه می‌کنیم.

همانطور که گفتیم هدف ما محاسبه احتمال زیر است:

$$\varphi_{n,i}(u) = Pr\left\{T = n, \left|U_T\right| = j \,\middle|\, U_\circ = u\right\}, \quad n \in Z^+; i = 1,2,3,\ldots,m_\alpha - c$$

بنابراین آن را به کمک زنجیره‌های مارکوف به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Phi_{n,j}(u) = \sum_{k=1}^{n-1} r_k F_{n-k,j}^{(k)}(u) + r_n a_{u+cn+j} \qquad n = 1,2,3,\ldots,n_r$$

بنابراین ما نیاز داریم که تابع توزیع میزان ادعای خسارت و زمان ادعای خسارت و همچنین زمان اولین ادعای خسارت را به‌دست‌آوریم.

۲-۴. محاسبات

برای محاسبات مقدماتی به‌عنوان‌مثال از داده‌های دی‌ماه سال ۱۳۸۸ یک شرکت بیمه استفاده کرده‌ایم. با استفاده از این داده‌ها می‌توان گفت متوسط درآمد حق‌بیمه ماهانهٔ شرکت $c = 12,000,000,000\ IR$ است و به‌طورمتوسط در یک ماه $Y = 1,000,000,000\ IR$ خسارت پرداخت شده است.

بنابراین فرمول مازاد شرکت بیمه برای هر ماه آن به‌صورت زیر خواهد بود:

$$U_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_t$$

$$U_1 = u + (2,000,000 \times 6000) - 1,000,000,000$$

ما برای توزیع پیشنهادی خود برای میزان ادعای خسارت از مقاله آلفا و دریک[1] و مقاله دیکسون[2] استفاده کرده‌ایم و توزیع آن را به‌صورت زیر درنظرگرفته‌ایم:

$$a_j = G(j-1) - G(j) \quad , \quad j \in z^+$$

و در اینجا برای برآورد پارامتر توزیع پرتو بالا از داده‌های حقیقی موجود استفاده کردیم بنابراین برای داده‌های خود داریم:

$$F(x) = 1-(1+x/30)^{-4} \quad , \quad x \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad G(x) = (1+x/30)^{-4} \quad , \quad x \geq 0$$

در اینجا مقدار n_r و n_α را برابر با ۱۲ درنظرگرفته‌ایم و به کمک مقاله آلفا و دریک توزیعی را برای آنها درنظرگرفته‌ایم بنابراین داریم:

$$\alpha_j = (0/1538)\ (0/8462)^{j-1} \qquad j = 1,2,3,...,12$$

$$\alpha_1 = r_j = 0/08 \ \ j = 1,2,3,...,12$$

باتوجه به این معمولاً توزیع زمان ادعای خسارت، توزیع نمایی است و باتوجه به اینکه فرضیات مسئله را در زمان گسسته درنظرگرفته‌ایم در اینجا توزیع α_j را هندسی درنظرمی‌گیریم.

بنابراین برای برآورد P نیاز داریم که از فرمول $\hat{p} = \frac{1}{\bar{x}}$ استفاده کنیم. در شرکت بیمه مورد بررسی و به کمک داده‌های حقیقی برای $\bar{x}$ میزان ۶/۵ را یافتیم و بنابراین برای P داریم:

$$\hat{p} = \frac{1}{\bar{x}} = 0/1538$$

در اینجا توزیع W_1 را به‌صورت یکنواخت برای همه زمان‌های اول درنظرگرفته‌ایم و توزیع آن را با r_j نشان می‌دهیم. بنابراین داریم:

---

1. Alfa & Drekic
2. Dickson, 2005

$$a_{۱} = r_j = \frac{۱}{۱۲} = ۰/۰۸ \qquad j = ۱,۲,۳,...,۱۲$$

از این فرمول $\alpha_j = (۰/۱۵۳۸)(۰/۸۴۶۲)^{j-۱}$ برای شبیه‌سازی خود استفاده کرده‌ایم و۴۰۰۰ داده را به کمک نرم‌افزار S-Pluse (version 6) ساختیم. علت اینکه تعداد ۴۰۰۰ داده را برای این کار انتخاب کردیم این بود که این شرکت به‌طورمتوسط در یک سال دارای ۴۰۰۰ ادعای خسارت بوده است. در appendix 3 ما ۳۲۰ داده از این ۴۰۰۰ داده را نشان داده‌ایم.

۳-۴. نتایج

در تئوری ریسک، محاسبهٔ احتمال برشکستگی از شاخص‌های مهم است و همان طور که گفتیم کاربرد آن تنها به معنای طرح یک مسئله و مشکل نیست و از آن در دنیای تجارت بیمه‌ای استفاده می‌شود. برای داده‌های شرکت بیمه مورد بررسی، میزان احتمالی که به‌دست‌آوردیم بسیار کم بود و با فرضیات زیر، محاسبات خود را به کمک نرم‌افزار Matlabv۷/۵ انجام دادیم:

برای $u = ۱۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰$ و $j = ۲۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰$ و $n = ۱۲$ داریم:

k	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$\Phi^{(k)}_{۱۲-k,۲۰}(۱۰)$	۰/۰۰۵۸	۰/۰۰۲۳	۰/۰۰۲۴	۰/۰۰۲۵	۰/۰۰۲۶	۰/۰۰۲۷

و

k	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
$\Phi^{(k)}_{۱۲-k,۲۰}(۱۰)$	۰/۰۰۲۸	۰/۰۰۲۹	۰/۰۰۳۰	۰/۰۰۳۵	۰/۰۰۳۵	۹/۲۸۴۱×۱۰$^{-۴}$

$$\Rightarrow \quad \Phi_{n,j}(u) = \sum_{k=۱}^{n-۱} r_k \Phi^{(k)}_{n-k,j}(u) + r_n \alpha_{u+cn+j} \qquad n = ۱,۲,۳,...,n_r$$

$$\Phi_{۱۲,۲۰}(۱۰) = ۰/۰۸(۰/۰۳۴) + ۰/۰۸ \times (۹/۲۸۴۱ \times ۱۰^{-۶}) = ۲/۷۲۰۷ \times ۱۰^{-۳}$$

و برای ۱۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ =u و ۲۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ = j و ۳ = nداریم:

k	۱	۲	۳
$\Phi^{(k)}_{۳-k\,,۲۰}(۱۰)$	۰/۰۰۲۹	۰/۰۰۳۵	$۴/۰۷۸۵۶ \times ۱۰^{-۴}$

$$\Rightarrow \quad \Phi_{n,j}(u) = \sum_{k=۱}^{n-۱} r_k \Phi^{(k)}_{n\text{-}k,j}(u) + r_n \alpha_{u+cn+j} \qquad n = ۱,۲,۳,...,n_r$$

$$\Phi_{۳/۲۰}(۱۰) = ۰/۰۸(۶/۴\times ۱۰^{-۳}) + ۰/۰۸\times(۴/۰۷۸۵۶\times ۱۰^{-۴}) = ۵/۴۴۶۳\times ۱۰^{-۴}$$

۴-۴. نتیجه‌گیری

همان‌طوری که در محاسبات نشان داده شد، میزان احتمال مورد نظر با کاهش زمان n کاهش پیدا کرد. لازم به ذکر است که این نتایج تنها برای توزیع‌های فرض‌شده و شرکت بیمه مورد بررسی است و این احتمال وجود دارد که این نتایج با تغییر توزیع آن و داده‌ها تغییر کند. بنابراین می‌توان بگوییم میزان این احتمال به زمان اولین ادعای خسارت بسیار بستگی دارد و با کاهش میزان اولین ادعای خسارت، میزان آن کاهش می‌یابد. بنابراین زمان اولین ادعای خسارت برای شرکت‌های بیمه بسیار مهم است و به کمک تعیین توزیع آن می‌توان سیاست‌گذاری‌های شرکت را تغییر داد و حق‌بیمه‌ها و نحوه و زمان پرداخت خسارت را تعیین کرد. البته باید یادآوری کرد محاسبهٔ احتمال برشکستگی برای شرکت‌های بیمه بسیار دشوار است، چرا که در دنیایی واقعی داده‌ها معمولاً از توزیع خاصی پیروی نمی‌کنند.

منابع

1. Alfa, AS 2004, *Markov chain representations of discrete distributions applied to queueing model*, Computers & Operations Research 31,2365-2385.

2. Alfa, AS & Drekic, S 2007, 'Algorithmic analysis of the sparre andersen model in discrete time', *Astin Bulletin*, vol.37, no.2, pp. 293-317.

3. Alfa, AS & Neuts, MF 1995, *Modeling vehicular traffic using the discrete time Markovian arrival process*, Transportation Science 29, pp. 109-17.

4. Cossette, H, Landriault, D & Marceau, E 2006, 'Ruin probabilities and ruin in the discrete time renewal risk model', *Insurance: Mathematics & Economics*, 38, vol.4, no.2, pp.309-23.

5. Dickson, DCM 2005, *Insurance risk and run*, Cambridge University Press, eambridge.

6. Li, S 2005a, 'On a class of discrete time renewal risk models', *Scandinavian Actuarial Journal*, pp. 241-60, vol. 4, no, 2.

7. Li, S 2005b, 'Distributions of the surpluse before ruin, the deficit at ruin and the claim causing ruin in a class of discrete time risk models', *Scandinavian Actuarial Journal*, pp. 271-84.

8. Rolski, T, Schmidli, H, Schmidt,V & Teugels, J 1998, *Stochastic processes for insurance and finance*, Wiley.

9. Tijms, HC 2003, *A first course in stochastic models*, Wiley.