فصلنامه‌صنعت‌بیمه/سال‌بیست‌وپنجم/شماره ۴/زمستان ۱۳۸۹/شماره‌مسلسل ۱۰۰/صفحات ۵۹ تا ۸۵

بازسازی مدل‌های مرگ‌ومیر بر پایه شکنندگی با استفاده از تعمیم توزیع گومپرتز

دکتر محمد ذکایی[1]

مسطوره مقصودی[2]

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۸۹/۱۰/۲۱

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۸۹/۱۲/۰۹

چکیده

مدل‌های مرگ‌ومیر ناهمگن از مهم‌ترین موضوعات مورد بررسی در مطالعات تحلیل بقا هستند. در این مدل‌ها به‌علت تفاوت‌های فردی و ژنتیکی موجود بین افراد که بر طول عمر آنها مؤثر است، با جمعیت‌های ناهمگن مواجه هستیم که برای تبیین این ناهمگنی از کمیت حقیقی مقدار نامنفی و غیرقابل مشاهده‌ای به نام شکنندگی استفاده می‌کنیم. ازآنجاکه متغیر شکنندگی غیرقابل مشاهده است، اندازه‌گیری آن غیرممکن است. برای لحاظ‌کردن این متغیر در مدل مرگ‌ومیر با معرفی توزیع گومپرتز تعمیم‌یافته نشان می‌دهیم که در مدل‌های مرگ‌ومیر ناهمگن با نیروی مرگ‌ومیر پایه گومپرتز و شکنندگی گاما، متغیر تصادفی طول عمر را می‌توان به‌صورت تفاضل دو متغیر تصادفی گومپرتز تعمیم‌یافته درنظرگرفت. در این تفاضل، متغیر تصادفی اول، بیانگر نیروی مرگ‌ومیر جمعیت است که به‌صورت گومپرتز توزیع شده است و متغیر تصادفی دوم، بیانگر شکنندگی است که باتوجه به رابطه بین توزیع گومپرتز تعمیم‌یافته و نسخه عکس آن، می‌توان این متغیر را با توزیع عکس گومپرتز تعمیم‌یافته درنظرگرفت. روش مورد استفاده در این مقاله این امکان را به توزیع تفاضل می‌دهد که توزیع شکنندگی را به‌عنوان توزیع تحویل طول عمر تفسیر کند.

واژگان کلیدی: *نیروی مرگ‌ومیر، مدل شکنندگی، مدل مرگ‌ومیر ناهمگن، توزیع گومپرتز تعمیم‌یافته، توزیع تحویل طول عمر*

۱. عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی، دانشکده علوم ریاضی (Email:Zokaei@Sbu.ac.ir)

۲. کارشناس‌ارشد آماربیمه، دانشگاه شهید بهشتی، دانشکده علوم ریاضی (نویسنده مسئول)
(Email: Mastoureh20@Gmail.com)

۱. مقدمه

هر فرهنگ و ملتی، داستان‌هایی را در مورد دلایل آفرینش و فوت‌کردن دارد. شولارز[۱]، این ایده‌ها را در قالب سؤالاتی در مورد اینکه آیا زنده‌بودن انسان توسط قانون بیان می‌شود یا خیر و اگر چنین است، آن قانون چیست و چگونه علم می‌تواند آن را توضیح دهد، فرمول‌بندی کرد. منبع آشکار اطلاعات دراین‌زمینه، داده‌های تولد و فوت است. در سال ۱۶۹۳، ادموند هالی[۲]، منجم انگلیسی، جدول عمری از تعداد فوت‌های مشاهده‌شده به‌دست‌آورد. کمی بعد، نیکولاس استرویک[۳] در سال ۱۷۴۰، اولین جدول‌های عمر را به تفکیک مردان و زنان منتشر کرد. نزدیک این سال‌ها، ریاضیدان‌ها به مدل‌بندی بقای انسان علاقه‌مند شدند. آبراهام دموآور[۴]، اولین مدل تحلیلی شناخته‌شده را برای احتمال بقا به‌صورت تابع افزایشی از سن کنونی فرد معرفی کرد. ولی چون مدل او احتمال بقای انسان را برای سنین مختلف به‌صورت دقیق ارائه نمی‌داد، جستجو برای مدل بهتر ادامه پیدا کرد تا اینکه بنیامین گومپرتز[۵] در سال ۱۸۲۵ نسخه‌ای از فرمول احتمال بقا را برای اکثر سنین با استفاده از الگوهای نمایی معرفی کرد. نتیجه کار او در آن زمان، بهترین مدل مرگ‌ومیر پارامتری بیان شد. در سال ۱۸۶۰، می‌کام[۶] متذکر شد که مدل گومپرتز را می‌توان با افزودن مقداری ثابت به‌عنوان مخاطره‌های تصادفی و مستقل از سن تصحیح کرد. در اواخر قرن بیستم، مدل‌های مرگ‌ومیر پیچیده‌ای بررسی شدند که اکثر آن‌ها تعدیل‌شده و یا تعمیم‌یافته مدل‌های گومپرتز و می‌کام بودند. از آن جمله می‌توان مدل هلیگمن- پولارد[۷](۱۹۸۰)

---

1. Scholars
2. Edmund Halley
3. Nicholas Struyck
4. Abraham De Moivre
5. Benjamin Gompertz
6. Makeham
7. Heligman - Pollard

را که برای کشور استرالیا تعیین شد و دارای هشت پارامتر بود و یا مدل لی و کارتر[1] (۱۹۹۲) که مدل مرگ‌ومیر را به‌صورت فرآیند تصادفی می‌دانست، نام برد. برخلاف مدل‌های مرگ‌ومیری که از سال ۱۸۶۰ به بعد معرفی شدند، همچنان مدل‌های مرگ‌ومیر گومپرتز و می‌کام به‌عنوان معروف‌ترین انتخاب‌ها برای مدل‌های مرگ‌ومیر استفاده می‌شوند (Carrier, 1992; Melnikov & Romaniuk, 2006).

در بیمه‌آمار، از مهم‌ترین کاربردهای مدل‌های مرگ‌ومیر، استفاده از آنها در تحلیل احتمال‌های بقاست. در این مدل‌ها، از عواملی که روی مرگ‌ومیر افراد و در نتیجه طول عمر آنها تأثیر می‌گذارد، عامل شکنندگی است که اولین بار ووپل و همکارانش[2] معرفی کردند. این کمیت همه عوامل مؤثر در مرگ، علاوه‌بر سن، را درنظرمی‌گیرد. اما به‌دلیل غیرقابل مشاهده‌بودن شکنندگی، این کمیت قابل اندازه‌گیری نیست. ازطرف‌دیگر، حذف شکنندگی از مدل‌های مورد بررسی، اریبی به همراه خواهد داشت. بنابراین، به دنبال استفاده از مدل مرگ‌ومیری هستیم که بتوان شکنندگی را در آن لحاظ کرد. در این مقاله، جمعیتی ناهمگن یعنی جمعیتی که آمیخته‌ای از افراد با مخاطره‌های متفاوت است را با نیروی مرگ‌ومیر پایه گومپرتز و شکنندگی گاما درنظرمی‌گیریم و مدل معادل با آن را به‌صورت تفاضل دو متغیر تصادفی گومپرتز تعمیم‌یافته به‌دست‌می‌آوریم. با به‌دست‌آوردن چنین مدلی، علاوه‌بر درنظرگرفتن شکنندگی در مدل مرگ‌ومیر و به‌دست‌آوردن برازش بهتری برای داده‌های فوت، می‌توان کاربرد آن را در زمینه‌های مختلف پزشکی، جامعه‌شناسی و صنعت بیمه نیز گسترش داد. ازآنجاکه در بیمه آمار، برآورد حق‌بیمه از موضوعات بااهمیت است، با داشتن مدل مرگ‌ومیر متناسب با جمعیت می‌توان در محاسبه حق‌بیمه با دقت بیشتری عمل کرد.

1. Lee & Carter
2. Vaupel et al, 1979

در این مقاله که آن را می‌توان ادامه‌ای از بررسی‌های انجام‌شده روی مدل‌های مرگ‌ومیر دانست، ابتدا با درنظرگرفتن جمعیت ناهمگنی که نیروی مرگ‌ومیر پایه گومپرتز و شکنندگی گاما دارند، با استفاده از جدول عمر ایران به برآورد پارامترهای توزیع‌های گومپرتز و گاما می‌پردازیم و سپس با استفاده از توزیع تفاضل، چولگی مدل مرگ‌ومیر ناهمگن را در جمعیت به‌دست‌می‌آوریم و مقادیر تک حق‌بیمه خالص را برای سنین ۵۰ تا ۷۵ در دو جمعیت همگن (با نیروی مرگ‌ومیر گومپرتز) و جمعیت ناهمگن (با نیروی مرگ‌ومیر گومپرتز و شکنندگی گاما) محاسبه می‌کنیم.

۲. تعاریف پایه

در این بخش، فردی x ساله را درنظربگیرید. سن این فرد در لحظه فوت، X، یک متغیر تصادفی پیوسته است. تعاریف و مفاهیم زیر براین‌اساس بیان می‌شوند:

- تعریف ۱

تابع بقای یک فرد x ساله را با $S_X(x)$ نشان می‌دهیم که احتمال زنده ماندن این فرد را بیش از x سال بیان می‌کند. $S_X(x) = 1 - F_X(x) = p(X > x), \quad x \geq 0$

که در آن $F_X(x) = p(X \leq x)$، تابع توزیع متغیر تصادفی X است.

- تعریف ۲

نیروی مرگ‌ومیر یک فرد x ساله را با $\mu(x)$ نشان می‌دهیم.

$$\mu(x) = \frac{f_X(x)}{1 - F_X(x)} = \frac{f_X(x)}{S_X(x)} = -\frac{S'_X(x)}{S_X(x)} = -\frac{d}{dx}\left[\ln S_X(x)\right] \qquad (1)$$

نیروی مرگ‌ومیر، شانس اینکه فردی در فاصله کوچک $[x, x+dx)$ فوت کند به شرط اینکه تا سن x زنده مانده باشد را محاسبه می‌کند.

رابطه (۱)، ارتباط بین نیروی مرگ‌ومیر و تابع بقا را نشان می‌دهد.

تابع $\mu(x)$ در بیمه آمار و جمعیت‌شناسی، نیروی مرگ‌ومیر و در نظریه قابلیت اعتماد و مطالعات احتمال‌های دوام در صنعت، تابع خطر یا نرخ شکست نامیده می‌شود.

– تعریف ۳

طول عمر آتی یا باقی‌مانده طول عمر یک فرد x ساله را با متغیر تصادفی T (یا $T(x)$) نشان می‌دهیم و برابر است با $T(x) = T = (X - x | X \geq x)$.

تابع توزیع $T(x)$ را با ${}_tq_x$ نشان می‌دهیم و برابر است با ${}_tq_x = F_T(t) = p(T \leq t)$ که احتمال فوت فردی x ساله را در t سال آینده نشان می‌دهد. تابع بقای $T(x)$ را با ${}_tp_x$ نشان می‌دهیم و برابر با ${}_tp_x = ۱ - {}_tq_x = p(T > t) = S_T(t) = \frac{S_X(x+t)}{S_X(x)}$ است که احتمال زنده‌ماندن فردی x ساله را حداقل تا t سال آینده نشان می‌دهد.[۱]

۳. مدل مرگ‌ومیر گومپرتز

بنیامین گومپرتز، بیمه‌آمارشناس انگلیسی، علاقه‌مند به موضوع برآورد حق‌بیمه‌ها برای سالیانه‌های عمر بود. چیزی که گومپرتز را از سایر بیمه‌آمارشناس‌ها جدا کرد، این بود که او یک قانون تصاعد هندسی را از جداول مختلف عمر در طول یک دوره طولانی از زندگی انسان به‌دست‌آورد که فرض قانون مرگ‌ومیر را در این جداول تقریب می‌زد. گومپرتز در سال ۱۸۲۵، پس از مشاهده الگوهای مشابهی از تصاعد هندسی در بقیه جداول عمر به این باور رسید که یک قانون مرگ‌ومیر کلی را کشف کرده که افزایش‌های حسابی در سن را با افزایش‌های هندسی در نرخ‌های فوت مرتبط می‌سازد. در نتیجه، نیروی مرگ‌ومیر در سن x را با Bc^x نشان داد (Gompertz, 1825; Olshansky, 1997).

۴. ناهمگنی

در روش‌های سنتی تحلیل مرگ‌ومیر، جمعیت را همگن فرض می‌کردند. این بدان معنی است که همه افراد مورد مطالعه، مخاطره‌های یکسان دارند؛ یعنی توانایی یکسانی در دلایل ایجاد مرگ یا بیماری، بازگشت بیماری و یا پاسخ به درمان دارند.

۱. برای اطلاعات بیشتر ر.ک: Gerber, 1997; Klugman et al, 2004; Hougaard, 1999

ولی باید به این نکته توجه کرد که در بسیاری از پژوهش‌ها، به‌خصوص پژوهش‌های مرگ‌ومیر، جمعیت را نمی‌توان همگن درنظرگرفت؛ چرا که جمعیت، آمیخته‌ای از افراد با مخاطره‌های متفاوت است و این اختلاف ناشی از تفاوت در سبک زندگی، صفات ژنتیکی، تحصیلات و وضع اقتصادی افراد است. پس یک جمعیت ناهمگن، جمعیتی است که مرگ‌ومیرهای متفاوتی در آن وجود دارد. در تحلیل مرگ‌ومیر انسان، ابعاد برجسته (متغیرهای کمکی) که معمولاً درنظرگرفته‌می‌شوند، سن، جنس، نژاد، ملیت و سطح تحصیلات است.

ازآنجاکه هر فردی ازنظر جسمی و روحی با افراد دیگر متفاوت است، در مطالعاتی که روی انسان انجام می‌گیرد، ممکن است عواملی ناشناخته غیر از متغیرهای کمکی وجود داشته باشند که توزیع زمان بقا و به دنبال آن نیروی مرگ‌ومیر را شدیداً تحت تأثیر قرار دهند. این عوامل که می‌توان آنها را متغیرهای کمکی مشاهده‌نشده نامید، گاهی اوقات به‌دلیل عوامل اقتصادی و گاهی اوقات به خاطر اینکه برخی از این عوامل هنوز ناشناخته هستند و یا به خاطر ناتوانی در اندازه‌گیری آنها از قبیل عوامل ژنتیکی و یا محیطی، قابل محاسبه نیستند (Butt & Haberman, 2004; Hougaard, 1984).

با این توضیحات، اولین شناسایی ناهمگنی در مرگ‌ومیر را می‌توان مربوط‌به فعالیت‌های ووپل و همکارانش[1] دانست. آنها راهی برای توصیف ناهمگنی با استفاده از کمیت غیرقابل مشاهده بیان کردند که شکنندگی نام دارد و از آن در جداول عمر به‌منظور تشریح پیامدهای ناشی از وجود چندین منبع تغییرات برای داده‌های طول عمر استفاده کردند. همچنین با انتخاب توزیع گاما برای متغیر تصادفی شکنندگی، دلیل این انتخاب را انعطاف‌پذیربودن توزیع گاما بیان کردند و کاربردهای مختلف انتخاب این توزیع را توضیح دادند.

1. Vaupel et al, 1979

۵. مدل شکنندگی

شکنندگی یک عامل تصادفی غیرقابل مشاهده است که نیروی مرگ‌ومیر یک فرد یا افراد مرتبط را با این فرض که نیروی مرگ‌ومیر هر فرد به‌صورت حاصل‌ضرب کمیت خاص فردی که شکنندگی نام دارد در یک نیروی مرگ‌ومیر پایه است، تعدیل می‌کند (Gupta & kirmani, 2006).

برای آشنایی با مدل شکنندگی، گروهی از تازه متولدین را (کسانی که دقیقاً سن صفر را دارند) درنظربگیرید به‌طوری‌که توانایی زنده‌ماندن بین افراد گروه متفاوت است. یک فرد تازه متولد استاندارد، کسی است که متغیر تصادفی سن در زمان فوت او یعنی X، دارای نیروی مرگ‌ومیر پایه $\mu_0(x)$ و نیروی مرگ‌ومیر تجمعی $\Lambda_0(x)$ است که نیروی مرگ‌ومیر تجمعی تا زمان x برابر است با:

$$\Lambda_0(x) = \int_0^x \mu_0(u)du \qquad (۲)$$

برای مدل‌بندی ناهمگنی در این گروه، یعنی توصیف عوامل مخاطره نامعلوم هریک از تازه متولدین، متغیر تصادفی شکنندگی Z را برای فردی که به‌صورت تصادفی انتخاب شده است، درنظرمی‌گیریم که دارای تابع چگالی احتمال $g_0(z)$ است.

ازآنجاکه تفاوت افراد با یکدیگر، سطوح متفاوت شکنندگی را به همراه دارد، با درنظرگرفتن شکنندگی برابر با یک برای فرد استاندارد، $(Z=1)$، افراد ضعیف با سطوح بالاتری از شکنندگی، $(Z>1)$، و افراد قوی با سطوح پایین‌تری از شکنندگی، $(Z<1)$، در ارتباط هستند. به‌عبارت‌دیگر، افراد با شکنندگی بالا، تمایل بیشتری به فوت دارند و افراد با شکنندگی پایین، بیشتر از بقیه زنده مانده و در گروه می‌مانند (Valdes & Wong, 2000).

فرض می‌شود که شکنندگی برای طول عمر ثابت می‌ماند. ازآنجاکه شکنندگی، افزایش یا کاهش نسبی را در نیروی مرگ‌ومیر برای هر فرد نشان می‌دهد، می‌توان

برای فردی تازه متولد با شکنندگی $Z=z$، نیروی مرگ‌ومیر را به‌این‌صورت تعریف کرد:

$$\mu(x|Z=z)=z\mu_{\circ}(x), \qquad z>\circ \tag{۳}$$

که در آن، $\mu_{\circ}(x)$، نیروی مرگ‌ومیر پایه، از Z مستقل است.

تابع بقای غیرشرطی برای یک فرد تازه متولد که تا سن x زنده مانده است برابر است با:

$$\begin{aligned} S_X(x)=p(X>x)=\int_{\circ}^{\infty}S(x|Z=z)g_o(z)dz= \\ \int_{\circ}^{\infty}e^{-z\Lambda_o(x)}g_o(z)dz=E_Z\left[e^{-z\Lambda_o(x)}\right]=M_Z\left[-\Lambda_{\circ}(x)\right] \end{aligned} \tag{۴}$$

که $M_Z(t)=E\left[e^{tZ}\right]$ تابع مولد گشتاور توزیع شکنندگی است.

تابع چگالی حاشیه‌ای X برابر است با:

$$f_X(x)=\int_{\circ}^{\infty}Z\mu_{\circ}(x)e^{-z\Lambda_{\circ}}g_{\circ}(z)dz=\mu_{\circ}(x)E_Z\left[e^{\ln Z-Z\Lambda_{\circ}(x)}\right] \tag{۵}$$

نیروی مرگ‌ومیر متناظر با استفاده از روابط (۴) و (۵) برابر است با:

$$\mu(x)=\frac{f_X(x)}{S_X(x)}=\frac{E_Z\left[e^{\ln Z-Z\Lambda_{\circ}(x)}\right]}{M_Z\left[-\Lambda_{\circ}(x)\right]}\mu_{\circ}(x)=R(x,z)\mu_{\circ}(x) \tag{۶}$$

پس نیروی مرگ‌ومیر غیرشرطی، نسبتی از نیروی مرگ‌ومیر پایه است.

اگر Z_x را متغیر تصادفی شکنندگی برای افراد زنده گروه به سن x درنظربگیریم، آنگاه Z_x دارای تابع چگالی احتمال $f(z|X>x)$ به‌این‌صورت خواهد بود که برای راحتی آن را با $g(z)$ نشان می‌دهیم:

$$g(z)=f(z|X>x)=\frac{S(x|Z=z)g_{\circ}(z)}{S(x)}=\frac{e^{-z\Lambda_{\circ}(x)}g_{\circ}(z)}{M_Z\left[-\Lambda_{\circ}(x)\right]} \tag{۷}$$

با استفاده از روابط (۶) و (۷)، میانگین شکنندگی برای افراد زنده گروه در سن x، $\bar{Z}_x$، برابر است با:

$$\overline{Z}_x = E\left[Z \middle| X > x\right] = \frac{\int_{\circ}^{\infty} z e^{-z\Lambda_\circ(x)} g_o(z) dz}{M_Z\left[-\Lambda_\circ(x)\right]} = R(x,z) = \frac{\mu(x)}{\mu_\circ(x)}$$

در نتیجه، نیروی مرگ‌ومیر برای افراد زنده گروه به سن x برابر است با:

$$\mu(x) = \overline{Z}_x \mu_o(x) \tag{۸}$$

یعنی نیروی مرگ‌ومیر برای افراد زنده به سن x برابر با نیروی مرگ‌ومیر پایه ضربدر میانگین شکنندگی در میان افراد زنده به سن x است.

در مقابل افراد زنده گروه به سن x، افرادی هم در سن x فوت می‌کنند یعنی در فاصله $(x, x+dx)$. در این حالت، شکنندگی، Z'_x، دارای چگالی شرطی $f(Z|x)$ است که آن را برای راحتی با $g'(z)$ نشان می‌دهیم[1]:

$$g'(z) = f(z|x = \frac{f_{X,Z}(x,z)}{f_X(x)} = \frac{z e^{-z\Lambda_o(x)} g_o(z)}{E_Z\left[e^{\ln Z - Z\Lambda_\circ(x)}\right]} \tag{۹}$$

۱-۵. مدل شکنندگی گاما

فرض می‌کنیم متغیر تصادفی شکنندگی، Z، در افراد تازه متولد، توزیع گاما دارد. تابع چگالی احتمال آن با پارامتر مکان $\alpha > \circ$ و پارامتر مقیاس $\beta > \circ$ برابر است با:

$$g_\circ(z) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} Z^{\alpha-1} e^{-\beta z}, \qquad z > \circ$$

برای این متغیر تصادفی، میانگین، واریانس و تابع مولد گشتاور به‌ترتیب عبارت‌اند از:

$$M_z(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^\alpha \text{ و } \sigma^2 = \frac{\alpha}{\beta^2} \text{ ،} \overline{Z} = \frac{\alpha}{\beta}$$

در بسیاری از محاسبات، پارامتر مقیاس را با قراردادن $\beta = \alpha$ محدود می‌کنند. این امر موجب می‌شود که شکنندگی دارای میانگین یک شود. ازآنجاکه تغییرات توزیع شکنندگی، درجه ناهمگنی را نشان می‌دهد، مناسب است که از واریانس این توزیع

---

۱. برای اطلاعات بیشتر ر.ک:

Valdes & Wong, 2000; Wang & Brown, 1998

برای سنجش تغییرات استفاده کنیم. زمانی که واریانس Z کوچک است، مقادیر Z اطراف مقدار یک متمرکز شده‌اند و زمانی که واریانس Z بزرگ است، مقادیر Z پراکندگی بیشتری دارند که نشان‌دهنده ناهمگنی بیشتر بین افراد است.

فرض اینکه شکنندگی دارای توزیع $\Gamma(\alpha,\beta)$ است، نتایج مفید دیگری نیز به دنبال دارد که برخی از آنها عبارت‌اند از:

– از معادله (۷) نتیجه می‌شود که شکنندگی میان افراد زنده به سن x، Z_x، دارای توزیع گاما با پارامتر مکان α و پارامتر مقیاس $\beta+\Lambda_\circ(x)$ است.

بنابراین، میانگین شکنندگی افراد زنده به سن x برابر است با:

$$\bar{Z}_x = \frac{\alpha}{\beta+\Lambda_\circ(x)} \tag{۱۰}$$

زمانی که $\alpha=\beta=۱$، داریم $\bar{Z}_x = \frac{۱}{۱+\Lambda_\circ(x)}$ و این معادله به وضوح نشان می‌دهد که چگونه میانگین شکنندگی یک گروه زمانی که نیروی مرگ‌ومیر تجمعی هم‌گروه‌ها افزایش می‌یابد، کاهش پیدا می‌کند. به‌عبارت‌دیگر، با افزایش سن، نیروی مرگ‌ومیر افزایش ولی میانگین شکنندگی کاهش می‌یابد. علت آن، این است که افرادی که دارای شکنندگی بیشتر هستند، زودتر فوت می‌کنند و از گروه خارج می‌شوند. در نتیجه، کسانی که باقی می‌مانند، شکنندگی کمتری دارند و به‌این‌صورت میانگین شکنندگی کاهش می‌یابد (Wienke, 2003).

– اگر در جمعیتی، متغیر تصادفی شکنندگی Z دارای توزیع $\Gamma(\alpha,\beta)$ و نیروی مرگ‌ومیر پایه دارای توزیع گومپرتز یعنی $\mu_\circ(x)=Bc^x$ باشد، آنگاه با استفاده از روابط (۸) و (۱۰) برای نیروی مرگ‌ومیر جمعیت ناهمگن که آن را با $\mu_H(x)$ نشان می‌دهیم، داریم:

$$\mu_H(x) = \frac{\alpha}{\beta+\Lambda_\circ(x)}\mu_\circ(x) = \frac{\alpha B c^x}{\beta+\frac{B}{\ln c}(c^x-۱)}$$

و برای $\alpha=\beta$، داریم:

$$\mu_H(x)=\frac{\alpha Bc^x}{\alpha+\frac{B}{\text{Inc}}(c^x-1)} \tag{11}$$

- از معادله(۹) نتیجه می‌شود که شکنندگی میان افرادی که در سن x فوت کردند، Z'_x، دارای توزیع گاما با پارامتر مکان $\alpha+1$ و پارامتر مقیاس $\beta+\Lambda_0(x)$ است.

با مقایسه نتایج ۱ و ۳ می‌توان نشان داد که میانگین شکنندگی افرادی که فوت می‌کنند، Z'_x، کمی بزرگ‌تر است از میانگین شکنندگی برای افرادی که در سن x زنده هستند، $\bar{Z}'_x=\bar{Z}_x\frac{\alpha+1}{\alpha}\ :\ Z_x$

باتوجه به سادگی نتیجه فوق، استفاده از آن در تصحیح محاسبات شرکت‌های بیمه با تغییر مقدار α مفید خواهد بود[1].

۶. توزیع گومپرتز تعمیم‌یافته

- تعریف ۴

متغیر تصادفی X دارای توزیع گومپرتز تعمیم‌یافته با پارامترهای a، b و c است و آن را با GG(a,b,c) نشان می‌دهیم، هرگاه تابع توزیع آن، $F_x(x)$، به‌این‌صورت باشد:

$$F_x(x)=1-\frac{\Gamma(c,e^{\frac{x-a}{b}})}{\Gamma(c)},\quad x\in R, a\in R, b>0, C>0$$

که در آن $\Gamma(c,z)$، تابع بالای گاما، به‌این‌صورت است:

$$\Gamma(c,z)=\int_z^\infty u^{c-1}\ e^{-u}du,\qquad z>0$$

و برای حالت $z=0$، داریم $\Gamma(c)=\Gamma(c,0)$.

۱. برای اطلاعات بیشتر ر.ک: Vaupel et al, 1979; Vauple & Yashin, 1985

بنابراین، تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X برابر است با:

$$F_x(x)=\frac{1}{b\Gamma(c)}e^{c\frac{x-a}{b}-e^{\frac{x-a}{b}}},\quad x\in R, a\in R, b>0, C>0$$

در توزیع گومپرتز تعمیم‌یافته، اگر $c=1$، آنگاه $GG(a,b,1)$ همان توزیع گومپرتز $G(a,b)$ خواهد بود.

برای متغیر تصادفی X با توزیع گومپرتز تعمیم‌یافته این خواص به‌دست‌می‌آید:

تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X برابر است با:

$$M_x(t)=e^{at}\frac{\Gamma(bt+c)}{\Gamma(c)} \qquad (۱۲)$$

چهار انباشتک اول متغیر تصادفی X برابر هستند با:

$$k_1=a+b\psi(c)\ ,\ k_2=b^2\psi^{(1)}(c)\ ,\ k_3=b^3\psi^{(2)}(c)\ \text{و}\ k_4=b^4\psi^{(3)}(c) \qquad (۱۳)$$

با استفاده از انباشتک‌های دوم و سوم می‌توان چولگی توزیع گومپرتز تعمیم‌یافته را به‌این‌صورت به‌دست‌آورد:

$$\gamma_1=\frac{k_3}{\sigma^3}=\frac{b^3\psi^{(2)}(c)}{\left[b^2\psi^{(1)}(c)\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\psi^{(2)}(c)}{\left[\psi^{(1)}(c)\right]^{\frac{3}{2}}}$$

باید متذکر شد که توزیع گومپرتز تعمیم‌یافته چوله به چپ است.

۷. توزیع عکس گومپرتز تعمیم‌یافته

- تعریف ۵

متغیر تصادفی X دارای توزیع عکس گومپرتز تعمیم‌یافته با پارامترهای a، b و c است و آن را با $RGG(a,b,c)$ نشان می‌دهیم، هرگاه تابع توزیع آن، $F_x(x)$، به‌این‌صورت باشد:

$$F_x(x)=\frac{\Gamma(c,e^{\frac{x-a}{b}})}{\Gamma(c)},\quad x\in R,\ a\in R,\ b>0,\ c>0$$

بنابراین، تابع چگالی احتمال عکس گومپرتز تعمیم یافته، $F_x(x)$، برابر است با:

$$f_x(x)=\frac{1}{b\Gamma(c)}e^{-c\frac{x-a}{b}-e^{-\frac{x-a}{b}}},\qquad x\in R,\quad a\in R,\quad b>0,\ c>0$$

منظور از توزیع عکس گومپرتز تعمیم‌یافته، تصویر آینه‌وار توزیع گومپرتز تعمیم یافته حول خط $x=a$ است.

برای متغیر تصادفی X با توزیع عکس گومپرتز تعمیم‌یافته این خواص به‌دست‌می‌آید:
تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X برابر است با:

$$M_x(t)=e^{at}\frac{\Gamma(c-bt)}{\Gamma(c)} \qquad (۱۴)$$

چهار انباشتک اول متغیر تصادفی X برابر هستند با:

$$k_1=a+b\psi(c),\ k_2=b^2\psi^{(1)}(c)\ ,k_3=-b^3\psi^{(2)}(c)\ \text{و}\ k_4=b^4\psi^{(3)}(c) \qquad (۱۵)$$

چولگی را می‌توان به‌این‌صورت به‌دست‌آورد:

$$\gamma_1=\frac{k_3}{\sigma^3}=\frac{\psi^{(2)}(c)}{\left[\psi^{(1)}(c)\right]^{\frac{3}{2}}}$$

باتوجه به قرینه‌بودن توزیع عکس گومپرتز تعمیم‌یافته نسبت‌به توزیع گومپرتز تعمیم‌یافته، این توزیع چوله به راست است.

۸. تفاضل دو متغیر تصادفی با توزیع گومپرتز تعمیم‌یافته

متغیر تصادفی $Y=X_1-X_2$، که در آن $X_1\sim GG(a_1,b_1,c_1)$ مستقل از $X_2\sim GG(a_2,b_2,c_2)$ است را درنظرمی‌گیریم. در قضیه۱ نشان می‌دهیم که چنین تفاضلی در یک مدل بقای ناهمگن با توزیع شکنندگی گاما اتفاق می‌افتد.

توجه کنید که اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع گومپرتز تعمیم‌یافته باشد، آنگاه متغیر تصادفی $Y=-X$ قرینه توزیع گومپرتز تعمیم‌یافته حول مبدأ است و دارای توزیع عکس گومپرتز تعمیم‌یافته خواهد بود. دراین‌صورت، توزیع X_1-X_2 را می‌توان به‌عنوان مجموعی از یک توزیع گومپرتز و یک توزیع عکس گومپرتز تعمیم‌یافته درنظرگرفت.

زمانی که مجموع (یا تفاضل) توزیع‌های گومپرتز تعمیم‌یافته را مطالعه می‌کنیم، برای

راحتی و بدون ازدست‌دادن کلیت، همه پارامترهای a به جز یکی ممکن است برابر با صفر درنظرگرفته‌شوند. در نتیجه برای دو متغیر تصادفی مستقل X_1 و X_2 با درنظرگرفتن پارامترهای $a_1 = a$، $a_2 = 0$، c_1، c_2 و فرض اضافی $b_1 = b_2 = b$، این نتایج به‌دست‌می‌آید:

– تابع مولد گشتاور $Y = X_1 - X_2$ با استفاده از روابط (۱۲) و (۱۴) به‌این‌صورت خواهد بود:

$$M_Y(t)=M_{X_1-X_2}(t) = M_{x_1}(t)M_{x_2}(-t)=e^{at}\frac{\Gamma(c_1+bt)\Gamma(c_2-bt)}{\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)}$$

– ازآنجاکه انباشتک‌های دو متغیر تصادفی X_1 و $-X_2$ با هم جمع می‌شوند، با استفاده از روابط (۱۳) و (۱۵) و معرفی میانگین μ_2 و واریانس σ_2^2 برای Y داریم:

$$\mu_2 = k_1 = a + b\left[\psi(c_1) - \psi(c_2)\right]$$

$$\sigma_2^2 = k_2 = b^2\left[\psi^{(1)}(c_1) + \psi^{(1)}(c_2)\right]$$

$$k_3 = b^3\left[\psi^{(2)}(c_1) - \psi^{(2)}(c_2)\right]$$

همان‌طور که در رابطه (۳) نشان داده شد، اگر $\mu_0(x)$ نیروی مرگ‌ومیر پایه با شکنندگی استاندارد باشد، آنگاه فردی با شکنندگی $Z = z$ دارای نیروی مرگ‌ومیر $\mu(x|Z = z) = z\mu_0(x)$ خواهد بود. در ادامه (قضیه۱) نشان می‌دهیم که تحت این مدل شرطی، اگر احتمال بقای پایه را با توزیع گومپرتز و شکنندگی را با توزیع گاما درنظربگیریم، آنگاه احتمال بقا در این جمعیت ناهمگن، معادل است با طول عمر $X_1 - X_2$ به‌طوری‌که X_1 دارای توزیع گومپرتز و X_2 دارای توزیع گومپرتز تعمیم یافته است.

– قضیه ۱

فرض کنید به شرط شکنندگی $Z=1$، متغیر تصادفی X دارای توزیع گومپرتز با پارامترهای a و b باشد. همچنین فرض کنید که رابطه (۳) برقرار باشد که در آن Z دارای توزیع $\Gamma(\alpha,\beta)$ است. آنگاه $X=X_1 - X_2$، که در آن $X_1 \sim GG(a,b,1)$

مستقل از $X_2 \sim GG(-b\ln\beta, b, \alpha)$ است. در نتیجه تابع مولد گشتاور جمعیت ناهمگن برابر است با:[1]

$$M_x(t)=M_{X_1}(t)M_{X_2}(-t)=e^{at}\beta^{bt}\frac{\Gamma(1+bt)\Gamma(\alpha-bt)}{\Gamma(\alpha)}$$

همان‌طور که در قضیه۱ نشان داده شد، مدل بقای ناهمگن یعنی مدلی با مرگ‌ومیر پایه گومپرتز و شکنندگی توزیع گاما، در حقیقت، تفاضل بین دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع‌های گومپرتز تعمیم‌یافته است که اولی، متغیر تصادفی گومپرتز است که توزیع بقای پایه را نشان می‌دهد و دومی، متغیر تصادفی گومپرتز تعمیم‌یافته است که اصطلاح شکنندگی را توصیف می‌کند. این مدل تفاضل تفسیر بسیار ساده‌ای دارد: شکنندگی از متغیر تصادفی سن در لحظه فوت کم شده است.

پس، کم‌شدن X_2 می‌تواند به‌عنوان یک تصحیح سن برای سن واقعی یک فرد به‌کاربرود. بنابراین، اگر شکنندگی زیاد باشد، طول عمر کوتاه‌تر خواهد بود. باتوجه به مطلب فوق، تابع بقای ناهمگن، $S_H(x)$، با نیروی مرگ‌ومیر پایه گومپرتز و شکنندگی گاما با تابع بقای تفاضل بین دو متغیر تصادفی مستقل گومپرتز تعمیم‌یافته برابر خواهد بود با:

$$S_H(x)=S_{X-Z}(X)$$

که در آن $X \sim GG(a,b,1)$ و $Z \sim GG(-b\ln\beta, b, \alpha)$ که بدون ازدست‌دادن کلیت، فرض می‌کنیم $\beta=1$. بنابراین، $Z \sim GG(0,b,\alpha)$.

۱-۸. خواص متغیر تصادفی شکنندگی

ازآنجاکه در توزیع تفاضل $H=X-Z$، می‌توان متغیر تصادفی $-Z$ را با توزیع $RGG(0,b,\alpha)$ به‌عنوان متغیر تصادفی شکنندگی درنظرگرفت، بنابراین، می‌توان خواص زیر را برای متغیر تصادفی Z به‌دست‌آورد:

۱. برای اثبات ر.ک: مقصودی، ۱۳۸۹

– تابع مولد گشتاور بنابر رابطه (۱۴) برابر است با: $M_Z(t)=\dfrac{\Gamma(\alpha-bt)}{\Gamma(\alpha)}$

– سه انباشتک اول برابر هستند با: $k_i=(-b)^i\psi^{(i-۱)}(\alpha),\quad i=۱,۲,۳$

– چولگی مثبت توزیع شکنندگی را باتوجه به سه انباشتک اول و تعیین علامت $\psi^{(i-۱)}(\alpha)$ برای ($i=۱,۲,۳$) و توجه به این نکته که مقدار $\psi(\alpha)$ برای عدد $c=۱/۴۶۱۶$ تقریباً برابر صفر است، با استفاده از جدول (۱) توضیح می‌دهیم: برای بازه (۱/۴۶۱۶و۰)، $\psi(\alpha)$ منفی و برای $\alpha>۱/۴۶۱۶$، $\psi(\alpha)$ مثبت است. بنابراین، برای $\alpha<۱/۴۶۱۶$، میانگین شکنندگی مثبت و برای $\alpha>۱/۴۶۱۶$، منفی است. $\psi^{(۱)}(\alpha)$ برای همه $\alpha>۰$ مثبت است. در نتیجه، انحراف استاندارد همیشه افزایش می‌یابد. $\psi^{(۲)}(\alpha)$ برای همه $\alpha>۰$ منفی است. در نتیجه، گشتاور مرکزی سوم $k_۳$ افزایش می‌یابد. بنابراین، چولگی $\dfrac{k_۳}{\sigma_۳}$ برای همه $\alpha>۰$ افزایش می‌یابد.

جدول۱. تعیین علامت $\psi^{(i-۱)}(\alpha)$ برای ($i=۱,۲,۳$)

α	۰	۱/۴۶۱۶ ∞^{+}
$\psi(\alpha)$	-۹	+
میانگین	+	-
$\psi^{(۱)}(\alpha)$	+	+
$\psi^{(۲)}(\alpha)$	-	-
$k_۳$	+	+
$\gamma_۱$	+	+

محدودیت‌های استفاده از توزیع گاما به‌عنوان توزیع شکنندگی را با دو دلیل بیان می‌کنیم:

– اگر گشتاور مرکزی سوم مشاهده‌شده از جمعیت کمتر از گشتاور مرکزی سوم توزیع گومپرتز باشد، آنگاه استفاده از توزیع گاما به‌عنوان توزیع شکنندگی یک

چولگی زیاد را نتیجه می‌دهد که باعث افزایش اختلاف بین چولگی مشاهده‌شده و چولگی مدل‌بندی‌شده خواهد شد و علت آن چولگی مثبت توزیع عکس گومپرتز تعمیم‌یافته است.

– فرض اساسی برای استفاده از مدل این است که پارامتر b در توزیع گومپرتز با پارامتر b در توزیع شکنندگی برابر باشد. ازآنجاکه این پارامتر، انحراف استاندارد توزیع را مشخص می‌کند، پس انحراف استاندارد جمعیت پایه باید با انحراف استاندارد توزیع شکنندگی برابر باشد.

۹. جمع دو متغیر تصادفی با توزیع گومپرتز تعمیم‌یافته

در بخش‌های قبل نشان دادیم که مدل بقای ناهمگن با نیروی مرگ‌ومیر گومپرتز و شکنندگی گاما معادل با توزیع تفاضل بین دو متغیر تصادفی با توزیع گومپرتز تعمیم‌یافته است.

در این بخش، مجموع دو متغیر تصادفی گومپرتز تعمیم‌یافته را به‌دست‌می‌آوریم که در آن همانند حالت تفاضل، توزیع اول را جمعیت پایه و توزیع دوم را توزیع شکنندگی درنظرمی‌گیریم.

– قضیه ۲

فرض کنید $X_1 \sim GG(a,b,1)$ و $X_2 \sim GG(0,b,c)$ متغیرهای تصادفی مستقل با پارامترهای $a \in R$، $b>0$ و $c>0$ که $c \neq k$ برای $k=1,2,...$ باشند. دراین‌صورت، تابع چگالی احتمال $S=X_1+X_2$ را که با $F_S(x)$ نشان می‌دهیم، برابر است با:

$$f_S(x)=\frac{2}{b\Gamma(c)}S^{\frac{c+1}{2}}K_{c-1}(2\sqrt{S}), \quad x \in R$$

که در آن $S=e^{\frac{x-a}{b}}$ و $k_C(S)$، تابع بسل تعدیل‌شده نوع دوم است.

بنابراین، با استفاده از تابع چگالی احتمال، تابع توزیع S به‌این‌صورت به‌دست‌می‌آید: [۱]

$$F_S(x)= ۱-\frac{۲}{\Gamma(c)}S^{\frac{C}{۲}}K_c(۲\sqrt{S}), \qquad x\in R$$

– قضیه ۳

تابع مولد گشتاور $S=X_۱+X_۲$ که در آن $X_۱\sim GG(a,b,۱)$ و $X_۲\sim GG(۰,b,a)$ متغیرهای تصادفی مستقل با پارامترهای $a\in R$، $b>۰$ و $c>۰$ که $c\neq k$ برای $k=۱,۲,...$ هستند، برابر است با: [۲]

$$M_S(t)=e^{at}\frac{\Gamma(bt+۱)T(C+bt)}{\Gamma(c)}$$

اگر چه ساختار تابعی این توزیع به‌نسبت پیچیده است ولی سه انباشتک اول آن به آسانی با استفاده از روابط (۱۳) و (۱۵) و معرفی میانگین $\mu_۳$ و واریانس $\sigma^{\frac{۲}{۳}}$ برای متغیر تصادفی S به‌دست‌می‌آیند: $\mu_۳=k_۱=a+b\left[\psi(c)-\gamma\right]$

حالت خاص در مجموع دو متغیر تصادفی $X_۱$ و $X_۲$، زمانی اتفاق می‌افتد که $c=\frac{۱}{۲}$.
یعنی اگر $X_۱\sim GG(a,\frac{b}{۲},\frac{۱}{۲})$ و $X_۲\sim GG(b\ln ۲,\frac{b}{۲},\frac{۱}{۲})$ که $a\in R$ و $b>۰$، آنگاه $S=X_۱+X_۲$ دارای توزیع گومپرتز با پارامترهای a و b است.

باید متذکر شد که مجموع دو متغیر تصادفی که در این مقاله استفاده شده است هیچ رابطه‌ای با مدل‌های مخاطره رقابتی ندارد که در بیمه‌آمار، مدل‌های ضایعات چندگانه نامیده می‌شوند. در مدل ضایعات چندگانه، فرض می‌شود که فرد در معرض چندین مخاطره مستقل قرار می‌گیرد و سرانجام یکی از مخاطره‌ها، عامل ایجاد فوت خواهد بود. زمانی که احتمال فوت را با وجود هریک از این مخاطره‌ها

---

۱ و ۲. برای اثبات ر.ک: مقصودی، ۱۳۸۹

به‌دست‌می‌آوریم، فرض می‌شود مخاطره‌ای که دارای کمترین زمان بقا بوده، مشاهده شده و باعث ایجاد فوت شده است. درصورتی‌که در مدل‌های مرگ‌ومیر بر پایه شکنندگی فرض می‌شود که تابع بقای ناهمگن براساس مجموع دو متغیر تصادفی مستقل تعریف می‌شود. بنابراین، مقدار تحقق‌یافته متغیر تصادفی ناهمگن، همان مقدار تحقق‌یافته متغیر تصادفی توزیع پایه به‌علاوه مقدار تحقق‌یافته متغیر تصادفی شکنندگی است و نه فقط یکی از آنها (Willemse & Kaas, 2007).

۱۰. برازش مدل مرگ‌ومیر گومپرتز با شکنندگی گاما به جدول عمر ایران

جدول عمری که در ایران استفاده می‌شود، جدول عمر به‌دست‌آمده از کشور فرانسه است. به‌دلیل ناقص‌بودن اطلاعات در ایران، ناگزیر به استفاده از جدول عمر کشور فرانسه هستیم. جدول عمر فرانسه که در این مقاله استفاده شده است مربوط‌به سال ۱۹۹۰– ۱۹۸۹ است.

در جدول ۲، سن افراد، x، را بین ۵۰ تا ۷۵ درنظرگرفته‌ایم و با استفاده از d_x، تعداد افراد فوت‌شده در طول یک سال سنی خاص و l_x ، تعداد افراد زنده ابتدای آن سال، مقدار q_x را که احتمال فوت افرادی به سن x تا یک سال آینده است به‌صورت $q_x = \frac{d_x}{l_x}$ به‌دست‌می‌آوریم.

با استفاده از $\hat{\mu}(x) = -\log(1-q_x)$، نیروی مرگ‌ومیر تجربی را برای سنین ۵۰ تا ۷۵ به‌دست‌می‌آوریم و با درنظرگرفتن رابطه (۱۱) که $\mu_H(X)=\mu(X)$، از مینیمم‌کردن تابع Dist که به‌صورت $\text{Dist} = \sum_{x=50}^{75}\left[\mu(X)-\hat{\mu}(X)\right]^2$ است، پارامترهای B ، c و α را برآورد می‌کنیم.

مقادیر برآوردشده پارامترهای B,α و c عبارت‌اند از: $\hat{B} = 0/49\times10^{-4}$, $\hat{c} = 1/1349$, $\hat{\alpha} = 1/259$, با داشتن مقادیر c, B, α می‌توان مقادیر $\mu(x)$ را برای سنین ۵۰ تا ۷۵ به‌دست‌آورد.

بنابراین، مقدار مینیمم‌شده Dist برابر است با: $\text{Dist}=۰/۲۶۸۸\times ۱۰^{-۵}$

با استفاده از بازپارامتریدنی به‌صورت زیر برای پارامترهای a و b در توزیع گومپرتز داریم:

$$\hat{C}=e^{\frac{۱}{b}} \Rightarrow ۱/۱۳۴۹=e^{\frac{۱}{b}} \Rightarrow \hat{b}=۷/۹۰۲$$

$$\hat{B}=\frac{۱}{\hat{b}}e^{-\frac{a}{b}} \Rightarrow ۰/۴۹\times ۱۰^{-۴}=\frac{۱}{۷/۹۰۲}e^{-\frac{a}{۷/۹۰۲}} \Rightarrow \hat{\alpha}=۶۲/۰۸۳$$

جدول۲. جدول عمر ایران براساس جدول عمر کشور فرانسه در سال ۱۹۹۰–۱۹۸۹

x	d_x	l_x	q_x
۵۰	۶۰۷	۹۰۷۷۸	۰/۰۰۶۶۸۶
۵۱	۶۶۰	۹۰۱۷۱	۰/۰۰۷۳۱۹
۵۲	۷۲۰	۷۹۵۱۱	۰/۰۰۸۰۴۳
۵۳	۷۸۰	۸۸۷۹۱	۰/۰۰۸۷۸۴
۵۴	۸۴۶	۸۸۰۱۱	۰/۰۰۹۶۱۲
۵۵	۹۲۴	۸۷۱۶۵	۰/۰۱۰۶۰۰
۵۶	۹۸۵	۸۶۲۴۱	۰/۰۱۱۴۲۱
۵۷	۱۰۴۵	۸۵۲۵۶	۰/۰۱۲۲۵۷
۵۸	۱۱۲۸	۸۴۲۱۱	۰/۰۱۳۳۹۴
۵۹	۱۱۹۹	۸۳۰۸۳	۰/۰۱۴۴۳۱
۶۰	۱۲۸۲	۸۱۸۸۴	۰/۰۱۵۷۴۱
۶۱	۱۳۵۹	۸۰۶۰۲	۰/۰۱۶۸۶۰
۶۲	۱۴۳۶	۷۹۲۴۳	۰/۰۱۸۱۲۱
۶۳	۱۵۱۲	۷۷۸۰۷	۰/۰۱۹۴۳۲
۶۴	۱۵۷۵	۷۶۰۹۵	۰/۰۲۰۶۴۳
۶۵	۱۶۴۵	۷۴۷۲۰	۰/۰۲۲۰۱۵
۶۶	۱۷۰۹	۷۳۰۷۵	۰/۰۲۳۳۸۶
۶۷	۱۸۰۷	۷۱۳۶۶	۰/۰۲۵۳۲۰
۶۸	۱۹۰۴	۶۹۵۵۹	۰/۰۲۷۳۷۲
۶۹	۲۰۰۶	۶۷۶۵۵	۰/۰۲۹۶۵۰
۷۰	۲۱۰۶	۶۵۶۴۹	۰/۰۳۲۰۷۹
۷۱	۲۲۵۸	۶۳۵۴۳	۰/۰۳۵۵۳۴

x	d_x	l_x	q_x
۷۲	۲۳۷۴	۶۱۲۸۵	۰/۰۳۸۷۳۷
۷۳	۲۴۹۵	۵۸۹۱۱	۰/۰۴۲۳۵۲
۷۴	۲۵۹۸	۵۶۴۱۶	۰/۰۴۶۰۵۰
۷۵	۲۷۳۲	۵۳۸۱۸	۰/۰۵۰۷۶۳

- برای توزیع پایه یعنی $X \sim G(a,b)$ داریم:

$$\mu_X = k_۱ = a - by = ۶۲/۰۸۳ - ۷/۹۰۲(۰/۵۷۷۲) = ۵۷/۵۲۲$$

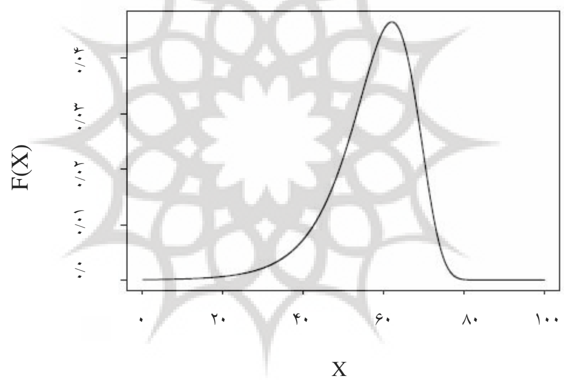
$$\sigma_X^۲ = k_۲ = b^۲\psi^{(۱)}(۱) = (۷/۹۰۲)^۲ \frac{\pi^۲}{۶} = ۱۰۲/۷۱۲ \Rightarrow \sigma_X = ۱۰/۱۳۴۷$$

$$k_{۳X} = -۲/۴۰۴۲b^۳ = -۲/۴۰۴۲(۷/۹۰۲)^۳ = -۱۱۸۶/۲۶۴۹,$$

$$\gamma_{۱X} = \frac{k_۳}{(\sigma X)^۳} = -۱/۱۳۹۵$$

تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X به‌صورت نمودار ۱ رسم شده است:

نمودار۱. تابع چگالی احتمال گومپرتز با پارامترهای $\hat{b}=۷/۹۰۲$ و $\hat{a} = ۶۲/۰۸۳$



- برای توزیع شکنندگی یعنی $Z \sim GG(\circ,b,\alpha)$ داریم:

$$\mu_z = k_۱ = -b\psi(\alpha) = -۷/۹۰۲\psi(۱/۲۵۹) = ۱/۷۱۲,$$

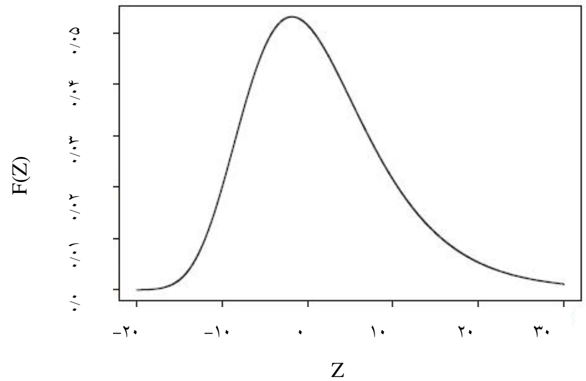
$$\sigma^۲{}_Z k_۲ = b^۲\psi^{(۱)}(\alpha) = (۷/۹۰۲)^۲\psi^{(۱)}(۱/۲۵۹) = ۷۴/۰۲۴ \Rightarrow \sigma_z = ۸/۶۰۳۷$$

$$k_{۳Z} = -b^۳\psi^۲(\alpha) = -(۷/۹۰۲)^۳\psi^۲(۱/۲۵۹) = ۶۴۲/۹۶۷۲$$

$$\gamma_{۱Z} = \frac{k_۳}{(\sigma Z)^۳} = ۱/۰۰۹۶$$

تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی Z به‌صورت نمودار ۲ رسم شده است:

نمودار۲. تابع چگالی احتمال شکنندگی با پارامترهای $\hat{b}=۷/۹۰۲$, $\hat{a}=۰$, $\hat{\alpha}=۱/۲۵۹$



- برای متغیر تصادفی ناهمگن $H=X-Z$ داریم:

$$\mu_H = ۶۲/۰۸۳ + ۷/۹۰۲\left[-۰/۵۷۷۲ - \psi(۱/۲۵۹)\right] = ۵۹/۲۳۴$$

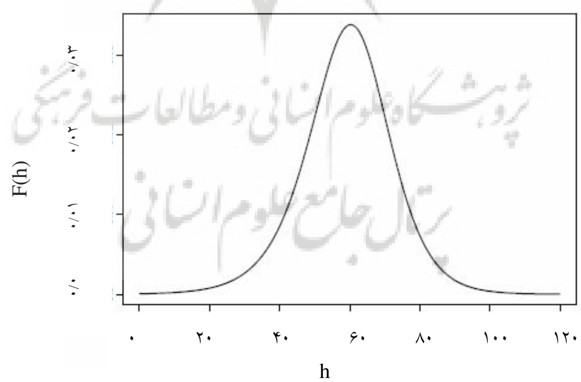
$$\sigma_H^۲ = (۷/۹۰۲)^۲\left[\frac{\pi^۲}{۶} + \psi^{(۱)}(۱/۲۵۹)\right] = ۱۷۶/۷۳۶ \Rightarrow \sigma_H = ۱۳/۲۹۴۲$$

$$k_{۳H} = (۷/۹۰۲)^۳\left[\psi^{(۲)}(۱/۲۵۹) - ۲/۴۰۴۲\right] = -۱۸۲۹/۲۳۲۱$$

$$\gamma_{۱H} = \frac{K_۳H}{(\sigma H)^۳} = -۰/۷۷۸۵$$

تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی H به‌صورت نمودار۳ رسم شده است:

نمودار۳. تابع چگالی احتمال ناهمگن با پارامترهای $\hat{b}=۷/۹۰۲$, $\hat{a}=۶۲/۰۸۳$, $\hat{\alpha}=۱/۲۵۹$



باتوجه به مقادیر به‌دست‌آمده γ_{1x} و γ_{1H} می‌توان نتیجه گرفت که توزیع ناهمگن نسبت‌به توزیع پایه چولگی کمتری دارد.

حال با درنظرگرفتن جمعیت همگن (با نیروی مرگ‌ومیر گومپرتز) و جمعیت ناهمگن (با نیروی مرگ‌ومیر بیان‌شده در رابطه (۱۱)) مقادیر تک حق‌بیمه خالص را تعیین می‌کنیم.

فرض می‌کنیم فردی به سن x پس از انجام آزمایشات پزشکی، تمایل دارد که خود را بیمه عمر کند. در این نوع بیمه، بیمه‌گر مقدار یک واحد را بلافاصله پس از فوت به بیمه‌گذار پرداخت می‌کند.

مقدار تک حق بیمه خالص را به ازای یک واحد پرداخت به‌این‌صورت به‌دست‌می‌آوریم:

$$\text{Net Single Premium} = \int_{0}^{\infty} e^{-\delta t}\, {}_{t}p_{x}\,\mu(x+t)\,dt, \quad t \geq 0$$

که در آن، δ، نیروی سوددهی است.

${}_{t}p_{x}$: احتمال اینکه فردی به سن x حداقل تا t سال دیگر زنده بماند.

$\mu(x+t)$: نیروی مرگ‌ومیر فردی به سن x در زمان $x+t$ است.[1]

مقادیر تک حق‌بیمه خالص برای سنین ۵۰ تا ۷۵ در دو جمعیت همگن و ناهمگن با درنظرگرفتن $\delta = ۰/۰۹$ در جدول ۳ آورده شده‌اند.

۱. برای اطلاعات بیشتر ر.ک: Gerber, 1997

جدول۳. مقادیر تک حق‌بیمه خالص برای سنین ۵۰ تا ۷۵ در دو جمعیت همگن و ناهمگن جدول عمر ایران

سن	جمعیت همگن	جمعیت ناهمگن	درصد کاهش
۵۰	۰/۴۱۴۱	۰/۳۴۰۸	۱۷/۷۰۱۰
۵۱	۰/۴۳۵۵	۰/۳۵۶۰	۱۸/۲۵۴۹
۵۲	۰/۴۵۷۳	۰/۳۷۱۳	۱۸/۸۰۶۰
۵۳	۰/۴۷۹۴	۰/۳۸۶۵	۱۹/۳۷۸۴
۵۴	۰/۵۰۱۸	۰/۴۰۱۵	۱۹/۹۸۸۰
۵۵	۰/۵۲۴۴	۰/۴۱۶۳	۲۰/۶۱۴۰
۵۶	۰/۵۴۷۱	۰/۴۳۰۹	۲۱/۲۳۹۳
۵۷	۰/۵۶۹۸	۰/۴۴۵۱	۲۱/۸۸۴۹
۵۸	۰/۵۹۲۴	۰/۴۵۸۹	۲۲/۵۳۵۵
۵۹	۰/۶۱۴۸	۰/۴۷۲۲	۲۳/۱۹۴۵
۶۰	۰/۶۳۶۹	۰/۴۸۵۰	۲۳/۸۴۹۹
۶۱	۰/۶۵۸۸	۰/۴۹۷۳	۲۴/۵۱۴۳
۶۲	۰/۶۸۰۳	۰/۵۰۸۹	۲۵/۱۹۴۸
۶۳	۰/۷۰۱۲	۰/۵۲۰۱	۲۵/۸۲۷۲
۶۴	۰/۷۲۱۵	۰/۵۳۰۵	۲۶/۴۷۲۶
۶۵	۰/۷۴۱۲	۰/۵۴۰۳	۲۷/۱۰۴۷
۶۶	۰/۷۶۰۲	۰/۵۴۹۴	۲۷/۷۲۹۶
۶۷	۰/۷۷۸۴	۰/۵۵۷۹	۲۸/۳۲۷۳
۶۸	۰/۷۹۵۷	۰/۵۶۵۷	۲۸/۹۰۵۴
۶۹	۰/۸۱۲۳	۰/۵۷۲۹	۲۹/۴۷۱۹
۷۰	۰/۸۲۷۹	۰/۵۷۹۶	۲۹/۹۹۱۵
۷۱	۰/۸۴۲۷	۰/۵۸۵۷	۳۰/۴۹۷۲
۷۲	۰/۸۵۶۶	۰/۵۹۱۳	۳۰/۹۷۱۳
۷۳	۰/۸۶۹۵	۰/۵۹۶۳	۳۱/۴۲۰۴
۷۴	۰/۸۸۱۶	۰/۶۰۰۹	۳۱/۸۳۹۸
۷۵	۰/۸۹۲۸	۰/۶۰۴۹	۳۲/۲۴۶۹

همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش سن، درصد کاهش مقدار حق‌بیمه نیز

افزایش می‌یابد. این بدان معنی است که هرچقدر سن افزایش پیدا می‌کند، با درنظرگرفتن جمعیت همگن، فرد ملزم به پرداخت مقدار حق‌بیمه بیشتری خواهد بود. اما با درنظرگرفتن جمعیت ناهمگن این مقدار، کاهش یافته و به نفع بیمه‌گذار شده است.

۱۱. نتیجه‌گیری و پیشنهادات

در این مقاله، ابتدا با مدل شکنندگی آشنا شدیم و سپس در جمعیت ناهمگن، مدل مرگ‌ومیر با نیروی مرگ‌ومیر گومپرتز و شکنندگی گاما را به‌دست‌آوردیم و بیان کردیم که در مدل مرگ‌ومیر ناهمگن با نیروی مرگ‌ومیر پایه گومپرتز و شکنندگی گاما با وجود محدودیت غیرقابل مشاهده‌بودن متغیر شکنندگی می‌توان از مدلی معادل به‌صورت تفاضل دو متغیر تصادفی با توزیع‌های گومپرتز تعمیم‌یافته استفاده کرد که در آن متغیر تصادفی اول، بیانگر توزیع مرگ‌ومیر پایه است و متغیر تصادفی دوم، مفهوم شکنندگی را به‌عنوان تحویل طول عمر دربردارد. علاوه‌براین، بیان کردیم که می‌توان از مجموع دو متغیر تصادفی گومپرتز تعمیم‌یافته به‌عنوان مدل مرگ‌ومیر ناهمگن نیز استفاده کرد. در این مدل همانند مدل تفاضل، متغیر تصادفی اول، بیانگر توزیع پایه جمعیت است و متغیر تصادفی دوم، مفهوم شکنندگی را دربردارد.

در این مقاله، بررسی مدل مرگ‌ومیر ناهمگن جمعیت را فقط با استفاده از نیروی مرگ‌ومیر پایه گومپرتز و شکنندگی گاما انجام دادیم. ولی با درنظرگرفتن توزیع‌های دیگری برای نیروی مرگ‌ومیر پایه و شکنندگی، همچنان می‌توان برای به‌دست‌آوردن مدل‌های معادل با مدل‌های مرگ‌ومیر ناهمگن دربردارنده شکنندگی امیدوار بود. علاوه‌براین، می‌توان شکنندگی را زمانی که در طول عمر ثابت نیست درنظرگرفت و به نتایج مفیدتری دست یافت.

منابع

۱. مقصودی، مسطوره ۱۳۸۹، *بازسازی مدل‌های مرگ‌ومیر بر پایه شکنندگی با استفاده از*

تعمیم توزیع گومپرتز، پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد، دانشگاه شهید بهشتی، تهران.

2. Butt, Z & Haberman, S 2004, 'Application of frailty-based mortality models using generalised linear models', *Astin Bulletin*, vol. 34, no. 1, pp. 175-97.

3. Carrier, JF 1992, 'Parametric models for life tables', *Transaction of the Society of Actuaries*, vol. 44, pp. 77-99.

4. Gerber, HU 1997, *Life insurance mathematics,* Springer.

5. Gompertz, B 1825, 'On the nature of the function expressive of the law of human mortality and on a new mode of determining the value of life contingencies', *Philosophical Transactions Royal Society*, London, vol. 36, pp.513-83.

6. Gupta, RC & Kirmani, SNUA 2006, 'Stochactic comparisons in frailty models', *Journal of Statistical Planning and Inference*, vol.136, pp. 3647-58.

7. Hougaard, P 1984, 'Life table methods for heterogeneous populations: distributions describing the heterogeneity', *Biometrika*, vol. 71, no. 1, pp. 75-83.

8. Hougaard, P 1999, 'Fundamentals of survival data', *Biometrics*, vol. 55, pp. 13-22.

9. Klugman, SA, Panjer, HH & Willmot, GE 2004, *Loss models from data to decisions*, John Wiley and Sons.

10. Melnikov, A & Romaniuk, Y 2006, 'Evaluating the performance of Gompertz, Makeham and Lee-Carter mortality models for risk anagement with Unit-linked contrast', *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 39, pp. 310-29.

11. Olshansky, SJ & Carnes, BA 1997, 'Ever since Gompertz', *Demography,* vol. 34, no. 1, pp. 1-15.

12. Valdes, EA & Wong, G 2000, 'The distribution of insurance and annuity benefits with frailty', *Actuarial Research Clearing House the American Statistician*, vol. 39, no. 3, pp. 176-85.

13. Vaupel, JW, Manton, KG & Stallard, E 1979, 'The impact of heterogeneity in individual frailty on the dynamics of mortality', *Demography,*vol. 16, no.3, pp. 439-54.

14. Vaupel, JW & Yashin, AI 1985, 'Heterogeneity′s ruses: some surprizing effects of selection on population dynamics', *The American Statistician,* vol. 39, no. 3, pp. 179-85.

15. Wang, SS & Brown, RL 1998, 'A frailty model for projection of human mortality improvement', *Journal of Actuarial Practice*, vol.6, pp. 221-41.

16. Wienke, A 2003, *Frailty models*, MPIDR (Max Planck Institute for Demographic Research) Working Paper Wp 2003-032.

17. Willemse, WJ & Kaas, R 2007, 'Rational reconstruction of frailty-based mortality models by a generalisation of Gompertz' Law of mortality', *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 40, pp. 468-84.