

## مآزاد سرمایه شرکت بیمه بلافاصله قبل و در زمان ورشکستگی در فرآیند ریسک کلاسیک با عامل اغتشاش

دکتر رضا پورطاهری<sup>۱</sup>

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۸۹/۰۴/۲۲

جواد کابوسی<sup>۲</sup>

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۸۹/۰۹/۱۵

### چکیده

هدف این تحقیق در نظر گرفتن مدل ریسک کلاسیک است که با عامل فرآیند وینر، به مدل ریسک کلاسیک با عامل اغتشاش تبدیل می‌شود. در این تحقیق فرمول‌هایی صریح برای تابع چگالی احتمال توأم و حاشیه‌ای مقدار مآزاد سرمایه بلافاصله قبل و در زمان ورشکستگی و همچنین تابع چگالی احتمال برای مقادیر و اندازه خسارت‌هایی که باعث ورشکستگی شده‌اند، به دست می‌آوریم. انجام چنین تحقیقی بدین سبب لازم است که در مدل ریسک کلاسیک، میزان دقیقی از احتمال میزان مآزاد سرمایه با توجه به عواملی چون سود و تورم و ... را به مدیریت ریسک گزارش نمی‌کند و این احتمالات با اطلاعات و داده‌های واقعی بیمه هم‌خوانی چندانی ندارند. اضافه کردن عامل اغتشاش به مدل کلاسیک را می‌توان از دو دیدگاه اضافه شدن عدم اطمینانی جدید در دریافتی‌های حق بیمه و یا کل خسارت تفسیر کرد. در ادامه با توجه به فرمول‌های نظری به دست آمده برای تابع چگالی احتمال‌های محاسبه شده، توزیع احتمال فاز نوع معرفی می‌شود و با استفاده از ویژگی‌های ماتریسی در این توزیع، ارتباطی را بین فرمول‌های تابع چگالی احتمال‌های محاسبه شده و توزیع فاز نوع برقرار و نمودار توزیع احتمال‌های مورد نظر را رسم می‌کنیم.

**واژگان کلیدی:** تنوری ورشکستگی، مآزاد سرمایه قبل و در زمان ورشکستگی، توزیع

فاز نوع

۱. عضو هیئت علمی دانشگاه علامه طباطبایی، دانشکده اقتصاد (Email: Taher121@Yahoo.com)

۲. کارشناس ارشد علوم محاسبات و برنامه‌ریزی بیمه، دانشگاه علامه طباطبایی، دانشکده بیمه اکو (نویسنده مسئول)  
(Email: Javad.actuary@Gmail.com)

## ۱. مقدمه

مدیران شرکت‌های بیمه در بازار رقابتی بیمه همواره سعی در پیدا کردن نرخ مناسبی برای حق بیمه در هر رشته بیمه‌ای برای نیل به اهدافشان از جمله جلب مشتریان بیشتر و سودآوری برای شرکت بیمه دارند. شرکت بیمه‌ای را تصور کنید که سعی در ارائه خدمات بیمه‌ای در رشته بیمه‌ای جدیدی دارد، تصمیم‌گیری در مورد نرخ حق بیمه و سرمایه اولیه مورد نیاز برای این رشته بیمه‌ای باتوجه به اطلاعات تاریخی خسارت برای این رشته بیمه‌ای، اهمیت بسزایی دارد. مدل‌های ریسک، روند میزان سرمایه شرکت بیمه در رشته بیمه‌ای مورد نظر را دنبال کرده و احتمال ورشکستگی را محاسبه می‌کند؛ در این صورت باتوجه به احتمال به دست آمده می‌توان در تخصیص مقداری مناسب برای حق بیمه تصمیم‌گیری کرد.

فرآیند ریسک کلاسیک را در نظر بگیرید:

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

$U(t)$ : میزان سرمایه شرکت در زمان  $t$ ؛

$u \geq 0$ : مقدار سرمایه اولیه‌ای است که شرکت تمایل به سرمایه‌گذاری در یک رشته خاص بیمه‌ای دارد؛

$c$ : مقدار نرخ ثابتی از حق بیمه‌هایی است که شرکت در واحد زمان از بیمه‌گذاران دریافت می‌کند؛

$\{X_i, i \geq 1\}$ : دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی و هم‌توزیع با تابع توزیع  $F_X$  و میانگین  $\mu_X$  است که مقادیر خسارت  $i$ ام را برای شرکت نشان می‌دهد؛

مؤلفه  $\{N(t), t \geq 0\}$ : تعداد خسارت‌هایی است که برای شرکت بیمه تا زمان  $t$  اتفاق می‌افتد.

در این تحقیق فرض می‌کنیم تعداد خسارت‌ها تا زمان  $t$  از یک فرآیند پواسون با شدت وقوع  $\lambda$  در واحد زمان پیروی کند. اگرچه حالات دیگری برای توزیع تعداد خسارت‌ها ممکن است، فرض شود.

همچنین فرض دیگری که برای شرکت‌های بیمه می‌پذیریم این است که هزینه‌های سربار، مثبت در نظر گرفته می‌شوند؛ به عبارت دیگر میزان حق بیمه دریافتی از میزان شدت خسارت در میانگین خسارت بیشتر است یا به صورت ریاضی داریم:

$$q = \frac{c - \lambda \mu}{c} > 0$$

حال مدل ریسک کلاسیک را در نظر بگیرید که یک عامل اغتشاش فرآیند براونی به آن اضافه شود:

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} x_i + \sigma B_t \quad (1)$$

عبارت  $\sigma B_t$  دو ویژگی مهم دارد:

-  $\sigma B_t$  دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس  $\sigma^2 t$  است.

-  $\sigma B_t$  مستقل از خسارت کل،  $\sum_{i=1}^{N(t)} x_i$  است.

عامل اغتشاش در رابطه (۱) یک عدم اطمینان اضافی برای میزان خسارت کل بیان می‌کند یا به عبارت دیگر این عبارت یک عدم اطمینانی را به میزان درآمد از حق بیمه‌ها اضافه می‌کند.

برای مدل معرفی شده این مفاهیم را در نظر می‌گیریم:

$T$  زمان ورشکستگی: اولین زمانی است که مازاد سرمایه به زیر صفر می‌رسد؛ یعنی

$$T = \inf \{t, U(t) \leq 0\}$$

$U(T^-)$  میزان سرمایه بلافاصله قبل از ورشکستگی و  $|U(T)|$  مقدار مازاد سرمایه در

لحظه ورشکستگی است.

احتمالات ورشکستگی و بقای شرکت نیز به این صورت تعریف می‌شوند:

$$\psi(u) = p(U(T) < 0, \forall T < \infty) \quad (2)$$

$$\phi(u) = 1 - \psi(u) \quad (3)$$

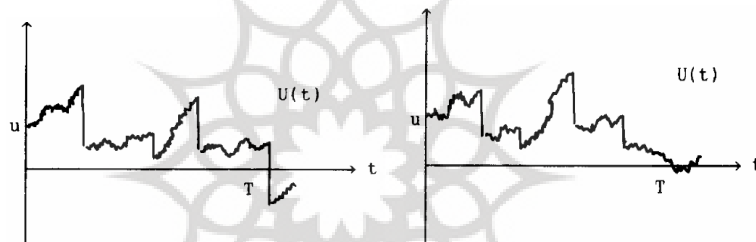
درک بهتری از تفاوت در رخداد ورشکستگی در مدل کلاسیک و مدل با عامل اغتشاش به این صورت است که در مدل ریسک با عامل اغتشاش دو عامل به طور جداگانه باعث رخداد ورشکستگی می شود. بنابراین احتمال ورشکستگی به این صورت تجزیه می شود:

$$\psi(u) = \psi_d(u) + \psi_s(u)$$

که  $\psi_d(u)$  احتمال ورشکستگی به علت نوسانات در مازاد سرمایه را نشان می دهد. در این حالت میزان مازاد سرمایه در زمان ورشکستگی برابر صفر است.  $\psi_s(u)$  احتمال ورشکستگی به علت رخ دادن خسارت را نشان می دهد. در این حالت مازاد سرمایه در زمان ورشکستگی منفی است (نمودار ۱). به علاوه با استفاده از ویژگی عامل اغتشاش در همسایگی نقطه صفر می توان نشان داد:

$$\psi(0) = \psi_s(0) = 0, \quad \psi_d(0) = \psi(0) = 1$$

نمودار ۱. ورشکستگی به علت عامل اغتشاش و رخداد خسارت



(Dufresne & Gerber, 1991)

در این تحقیق به مباحث میزان مازاد سرمایه در فرآیند ریسک کلاسیک و با عامل اغتشاش خواهیم پرداخت. نخستین بار مدل ریسک کلاسیک را فیلیپ لاندبرگ<sup>۱</sup> (۱۹۰۳) معرفی کرد و به طور گسترده کرامر<sup>۲</sup> (۱۹۳۰) مورد مطالعه قرار داد. بنابراین غالباً به نام مدل کرامر-لاندبرگ شناخته می شود. اما مدل ریسک در مازاد سرمایه با

1. Filip Lundberg
2. Cramer

عامل اغتشاش را نخستین بار گربر<sup>۱</sup> (۱۹۷۰) معرفی کرد که عامل اغتشاش یک فرآیند براونی بود. گربر و شیو<sup>۲</sup> به بررسی توزیع احتمال توأم مازاد سرمایه قبل و بعد از ورشکستگی پرداختند. در ادامه این کارها گربر و لندری<sup>۳</sup>، تاسی<sup>۴</sup> و رن<sup>۵</sup>، روش‌هایی متفاوتی را برای محاسبه احتمال ورشکستگی و تابع چگالی‌های احتمال مازاد سرمایه قبل و در زمان ورشکستگی معرفی کردند. در این مقاله پیرو مقاله رن (۲۰۰۷) به بررسی بیشتر و پیدا کردن روش‌هایی آسان‌تری برای دستیابی به هدفمان می‌پردازیم. در این مقاله نخست به بررسی مفهوم کاهش در میزان مازاد سرمایه به‌علت خسارت<sup>۶</sup> می‌پردازیم و با استفاده از تعاریف متغیرهای مربوطه و تابع توزیع آنها فرمول‌هایی تئوری برای تابع چگالی احتمال توأم و حاشیه‌ای مازاد سرمایه قبل و در زمان ورشکستگی به دست می‌آوریم. در پایان نشان می‌دهیم زمانی که توزیع خسارت‌ها از توزیع احتمال فاز نوع<sup>۷</sup> پیروی کند تمامی کمیت‌های احتمالی به آسانی قابل محاسبه است و این بحث را با معرفی یک مثال به پایان می‌رسانیم.

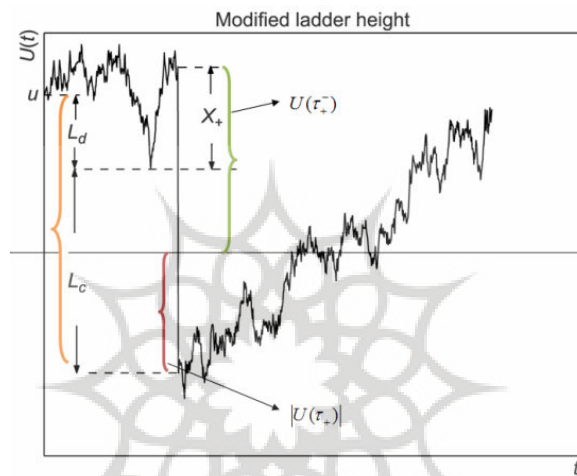
## ۲. بیشترین کاهش در مازاد سرمایه به‌علت خسارت

مقادیر  $\dots < \sigma_4 < \sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1 < 0$  را که دلالت بر زمان وقوع هر خسارت دارد، در نظر بگیرید، به طوری که  $T_i = \sigma_i - \sigma_{i-1}$  و  $i = 1, 2, 3, \dots$  متغیرهای تصادفی مستقل و با توزیع مشترک نمایی باشند.  $\tau_+$  را زمانی از وقوع خسارت‌ها در نظر می‌گیریم که مقدار مازاد سرمایه در آن زمان کمترین مقدار خود را تا آن زمان گرفته است.

- 
1. Gerber
  2. Gerber & Shiu, 1997
  3. Gerber & Landry, 1998
  4. Tsai, 2001
  5. Ren, 2005; 2007
  6. Modified Ladder Height
  7. Phase Type Probability Distribution

متغیر  $L_d = u - \inf_{0 < t < \tau_+} U(t)$  نشان‌دهنده تفاوت بین مقدار سرمایه اولیه و کمترین مقدار مازاد سرمایه تا زمان  $\tau_+$  است. متغیر  $L_c$  تفاوت بین مقدار سرمایه اولیه و مازاد سرمایه در زمان  $\tau_+$  و مقدار  $L_d$  است؛ یعنی  $L_c = u - U(t_+) - L_d$ . متغیر دیگری که معرفی می‌شود به صورت تفاوت میزان مازاد سرمایه و تفاوت سرمایه اولیه با مقدار  $L_d$  است  $X_+ = U(t_+) - u + L_d$ . نمودار ۲ تعبیری شهودی از کاهش سرمایه به علت خسارت را نشان می‌دهد.

نمودار ۲. بیشترین کاهش در مازاد سرمایه به علت خسارت



(Ren, 2007)

رابطه احتمالی (۴) در ارتباط با متغیرهای  $X_+, L_d, L_c$  در رابطه (۱۳.۲.۱۳) کتاب فرآیندهای تصادفی برای بیمه و امور مالی رلسکی<sup>۱</sup>، ثابت شده است.

$$\text{pr}(X_+ \geq x, L_d \geq y, L_c \geq z, t_+ < \infty) = e^{\frac{-\gamma cy}{\delta^2}} \frac{\lambda}{c} \int_{x+y}^{\infty} \overline{F_X}(v) dv \quad (4)$$

با استفاده از رابطه (۴) به آسانی می‌توان ثابت کرد:

1. Rolski et al, 1999

$$H_1(x) = p(L_d \leq x) = 1 - e^{-Bx}, \quad B = \frac{\tau c}{\sigma^2} \quad (5)$$

به طور مشابه از رابطه (۴) به آسانی ثابت می شود:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty, y \rightarrow -\infty} p(X_+ > x, L_d > y, L_c > z, \tau_+ < \infty) = p(L_c > z),$$

$$H_1(z) = p(L_c \leq z) = \frac{\lambda}{c} \int_0^z (1 - F_X(y)) dy \quad (6)$$

همچنین برای به دست آوردن تابع چگالی احتمال توأم  $X_+, L_c$  با میل دادن  $y$  به سمت صفر در رابطه (۴) (کمترین مقدار  $L_d$ )، این رابطه حاصل خواهد شد:

$$\lim_{y \rightarrow 0} p(X_+ > x, L_d > y, L_c > z, \tau_+ < \infty)$$

$$= \frac{\lambda}{c} \int_{x+z}^{\infty} (1 - F_X(\xi)) d\xi \quad x, z > 0 \quad (7)$$

نماد  $f_{+-}(x, z)$  را برای تابع چگالی احتمال توأم ناقص  $X_+, L_c$  به کار می بریم و مقدار آن با مشتق گیری از رابطه (۷) نسبت به  $x, z$  به این صورت حاصل می شود:

$$f_{+-}(x, z) = \frac{\lambda}{c} f_X(x+z) \quad (8)$$

در این بخش مقادیر متغیرهای  $X_+, L_d, L_c$  و توابع چگالی احتمال مورد نیاز معرفی شدند و برخی از ویژگی های مورد نیاز مفهوم بیشترین کاهش سرمایه به علت خسارت بیان شد. حال با استفاده از این مفاهیم و ارتباط نزدیک آنها با احتمالات ورشکستگی به بیان روش هایی برای به دست آوردن احتمالات ورشکستگی می پردازیم.

### ۳. تابع چگالی احتمال توأم مقدار سرمایه بلافاصله قبل و در زمان ورشکستگی

هدف ما در این بخش پیدا کردن تابع چگالی احتمال توأم صریح با استفاده از مفاهیمی است که معرفی شدند و تکنیک هایی است که در ادامه استفاده خواهیم کرد.

بدین منظور ابتدا تابع بقا را به صورت توابعی از متغیرهای  $L_d, L_c$  بیان می‌کنیم. اثبات این رابطه را می‌توان به‌طور خلاصه در مقاله دفرسن و گربر<sup>۱</sup> و به‌طور کامل در پایان‌نامه مربوط به همین مقاله مشاهده کرد:<sup>۲</sup>

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= q \sum_{n=0}^{\infty} (1-q)^n H_1^{*(n+1)} * H_2^{*(n)}(u) \\ &\approx q \left( \sum_{n=0}^{\infty} H_2^{*(n)} \right) * H_1(u) \\ &= q H_2 * H_1(u) \end{aligned} \quad (9)$$

در این رابطه توابع  $H_1$  و  $H_2$  به ترتیب در رابطه‌های (۵) و (۶) معرفی شده‌اند و

$$H_2 = \sum_{n=0}^{\infty} H_2^{*(n)}, H_2 = H_1 * H_2$$

اکنون تابع چگالی احتمال توأم را پیدا می‌کنیم و مسئله را به این صورت شرطی می‌کنیم: آیا نخستین کاهش سرمایه به علت وقوع خسارت باعث وقوع ورشکستگی شده است یا خیر. می‌دانیم باید حداقل یک کاهش سرمایه به علت وقوع خسارت برای وقوع ورشکستگی رخ دهد. اگر نماد  $h_{+-}(x, y, u) dx dy$  نشان‌دهنده احتمال وقوع ورشکستگی در نخستین کاهش سرمایه به علت وقوع خسارت برای مقادیر مازاد ورشکستگی بین  $(x, x+dx)$  و کسری در زمان ورشکستگی بین  $(y, y+dy)$  باشد، سه شرط مهم در این مورد باید در نظر گرفته شود:

$$-L_d < u$$

در غیر این صورت بدین معنی است که ورشکستگی قبلاً رخ داده است.

$$-X_+ \in (x-u+L_d, x-u+L_d+dx)$$

$$-L_c \in (y+u-L_d, y+u-L_d+dy)$$

1. Dufreçene & Gerber, 1991
2. Kabusi, 2010



با استفاده از این سه شرط، این معادله انتگرالی حاصل می‌شود:

$$h_{+-}(x, y, u) = \int_0^u h_1(\xi) f_{+-}(x + \xi - u, y + u - \xi) d\xi \quad (10)$$

با استفاده از تعریفی که برای متغیر  $X_+$  در بخش ۲ بیان شده متغیر  $X_+$  همیشه مقداری مثبت است، بنابراین با توجه به رابطه (۸)، در عبارت داخل انتگرال رابطه (۱۰)، به این شرط نیاز است که داشته باشیم  $\xi - u > x$ . این شرط به خودی خود زمانی که  $x > u$  برقرار است ولی هنگامی که  $x \leq u$  چون متغیر انتگرال‌گیری  $\xi$  است با توجه به شرط  $\xi - u > x$ ، مقدار حد پایینی انتگرال در معادله (۱۰) مقدار  $u - x$  خواهد بود. با توجه به این شرایط، معادله (۱۰) به زیر حاصل خواهد شد:

$$h_{+-}(x, y, u) = \begin{cases} \int_0^u h_1(\xi) f_{+-}(x + \xi - u, y + u - \xi) d\xi & x > u > 0 \\ \int_{u-x}^u h_1(\xi) f_{+-}(x + \xi - u, y + u - \xi) d\xi & 0 < x \leq u \end{cases} \quad (11)$$

حال با در نظر گرفتن شرط اینکه آیا نخستین کاهش سرمایه به علت وقوع خسارت باعث وقوع ورشکستگی شده است یا نه تابع چگالی احتمال توأم مازاد سرمایه قبل و در زمان ورشکستگی به این صورت نتیجه می‌شود:

$$f(x, y, u) = \int_0^u f(x, y, u - \xi) dH_+(\xi) + h_{+-}(x, y, u) \quad (12)$$

که عبارت اول نشان‌دهنده عدم وقوع ورشکستگی است و مانند این است که می‌خواهیم تابع چگالی توأم را برای سرمایه اولیه جدید که مقدار نخستین کاهش سرمایه به علت وقوع خسارت از آن کم می‌شود را محاسبه کنیم. عبارت تابع چگالی احتمال توأم در دو طرف رابطه (۱۲) وجود دارد؛ بنابراین با استفاده از روش تبدیل لاپلاس به حل این معادله می‌پردازیم.

$$\begin{aligned}
 I_f(s) &= I_f(s)I_{H_r}(s) + I_{h_{+-}}(s) \\
 I_f(s) \left[ 1 - I_{H_r}(s) \right] &= I_{h_{+-}}(s) \\
 I_f(s) &= \frac{I_{h_{+-}}(s)}{\left[ 1 - I_{H_r}(s) \right]} \quad (13)
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow f(x, y, u) = L^{-1}(L(h_{+-})) \left[ L^{-1}(1 + L(H_r)) + (L(H_r))^2 + \dots \right]$$

$$f(x, y, u) = \int_0^u h_{+-}(x, y, u-z) dH_r(z)$$

با استفاده از رابطه (۱۱) و ویژگی پیچش در تابع‌های توزیع، می‌توان تابع چگالی احتمال توأم را به این صورت بازنویسی کرد:

$$f(x, y, u) = H_r * H_1(u) - H_r * H_1(u-x) I(u \geq x) \frac{\lambda}{c} f_x(x+y) \quad (14)$$

در نهایت تابع چگالی احتمال توأم مازاد سرمایه قبل و در زمان ورشکستگی بر حسب تابع بقا و تابع چگالی احتمال خسارت‌ها به این صورت حاصل می‌شود:

$$f(x, y, u) = \begin{cases} \frac{\lambda}{cq} \varphi(u) f_x(x+y) & x > u > 0 \\ \left( \varphi(u) - \varphi(u-x) \right) \frac{\lambda}{cq} f_x(x+y) & 0 < x \leq u \end{cases} \quad (15)$$

با داشتن تابع چگالی احتمال توأم مازاد سرمایه قبل و در زمان ورشکستگی، به دست آوردن تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای مازاد سرمایه قبل از ورشکستگی<sup>۱</sup> کار ساده‌ای است و کافی است از رابطه (۱۵) نسبت به  $y$  یا متغیر کسری در زمان ورشکستگی روی مقادیر  $0$  تا  $\infty$  انتگرال‌گیری شود. بنابراین تابع چگالی احتمال مازاد سرمایه قبل از ورشکستگی به این صورت حاصل می‌شود:

## 1. Surplus Prior to Ruin

$$f(x, u) = \begin{cases} \frac{1}{q} \varphi(u) h_r(x) & x > u > 0 \\ \frac{1}{q} (\varphi(u) - \varphi(u-x)) h_r(x) & 0 < x \leq u \end{cases} \quad (16)$$

در اینجا  $h_r$  همان تابع چگالی احتمال متغیر  $L_d$  است. در مدل ریسک با عامل اغتشاش، این تابع در نقطه  $x = u$  تابعی پیوسته است و این در حالی است که در مدل‌های کلاسیک ثابت می‌شود که تابع مورد نظر در نقطه  $x = u$  پیوسته نیست. تابع چگالی احتمال دیگری که به معرفی آن می‌پردازیم، تابع چگالی احتمال کسری سرمایه در زمان ورشکستگی است.

#### ۴. کسری در زمان ورشکستگی<sup>۱</sup>

روشی که برای محاسبه تابع چگالی احتمال کسری استفاده می‌کنیم درست مانند روشی است که برای محاسبه تابع چگالی احتمال توأم در بخش ۳ معرفی شده است. تابع  $h_+(y, u)$  را احتمال ورشکستگی با مقدار کسری بین  $(y, y+dy)$  در نخستین کاهش سرمایه به علت خسارت معرفی می‌کنیم. در اینجا نیز دو شرط برقرار است:

-  $L_d < u$  که در غیر این صورت به معنی این است که ورشکستگی قبلاً روی داده است.

- با توجه به مقدار  $L_c$  متغیر  $L_c$  بین مقادیر  $(y+u-L_d, y+u-L_d+dy)$  قرار می‌گیرد.

بنابراین با توجه به این دو شرط:

$$h_+(y, u) = h_r(u+y) - e^{-Bu} h_r(y) \quad (17)$$

حال با شرطی کردن پیشامد کسری در زمان ورشکستگی روی اینکه آیا نخستین کاهش سرمایه به علت خسارت باعث ورشکستگی شده است یا خیر، به این رابطه دست خواهیم یافت:

$$g(y, u) = \int_0^u g(y, u-z) dH_{\tau}(z) + h_{+}(y, u) \quad (18)$$

که جمله انتگرال در معادله بالا بیانگر این است که نخستین کاهش سرمایه به علت خسارت باعث ورشکستگی نشده و باید میزان تابع چگالی احتمال را با میزان سرمایه جدید که به اندازه نخستین کاهش سرمایه به علت خسارت است، محاسبه نمود. با حل این معادله انتگرالی به روش تبدیل لاپلاس، این فرمول برای تابع چگالی کسری در زمان ورشکستگی حاصل می‌شود:

$$g(y, u) = \int_0^u h_{\tau}(u+y-z) dH_{\tau}(z) - \frac{h_{\tau}(y)}{qB} \phi'(u) \quad (19)$$

### ۵. اندازه خسارت‌هایی که باعث ورشکستگی می‌شود

متغیر مهم دیگری که برای میزان کنترل ریسک حائز اهمیت است، توجه به تابع چگالی احتمال برای اندازه خسارت‌هایی است که باعث ورشکستگی می‌شوند. اندازه خسارت در لحظه ورشکستگی برابر  $U(T^-) + |U(T)|$  است. با داشتن تابع چگالی توأم سرمایه قبل و در زمان ورشکستگی و تعریف متغیرهای  $z = U(T^-) + |U(T)|$  و  $v = |U(T)|$  استفاده از تکنیک تبدیل به آسانی می‌توان به این معادله برای تابع احتمال توأم  $v, z$  دست یافت:

$$f_{z,v}(z, v, u) = (\phi(u) - \phi(u+v-z)) I(u \geq z-v) \frac{\lambda}{cq} f_X(z), \quad z > v > 0$$

با انتگرال‌گیری از رابطه بالا بر حسب متغیر  $v$  تابع چگالی احتمال مطلوب به آسانی و به این صورت نتیجه می‌شود:

$$f_z(z) = \begin{cases} (\phi(u)z - \int_0^u \phi(\xi) d\xi) \frac{\lambda}{cq} f_X(z) & z > u > 0 \\ (\phi(u)z - \int_{u-z}^u \phi(\xi) d\xi) \frac{\lambda}{cq} f_X(z) & 0 < z \leq u \end{cases} \quad (20)$$

## ۶. تئوری ریسک با استفاده از توزیع فاز نوع

در تمامی تابع چگالی احتمال‌های معرفی شده در بخش‌های قبلی نمی‌توان به محاسبه این تابع چگالی احتمال‌ها پرداخت و یا تابع توزیع آنها را برای مقادیر دلخواه محاسبه کرد. یکی از علت‌های اصلی آن وجود جمله تابع بقا در این توابع چگالی احتمال است که برحسب یک پیش‌نمایش  $n$  بعدی تعریف می‌شود و به جز در مواردی خاص مثلاً وقتی توزیع خسارت‌ها، توزیع نمایی است، در موارد دیگر قابل محاسبه نیست.

اما توزیع فاز نوع این مشکل را حل می‌کند و روش عددی مناسبی برحسب جبر ماتریس‌ها برای محاسبه این احتمال‌ها و توابع چگالی احتمال برای ما حاصل می‌کند. توزیع فاز نوع با تابع چگالی احتمال  $f(x) = \alpha \exp(-\lambda x) t$   $x \geq 0$  و با پارامترهای  $E, T, \alpha$  معرفی می‌شود، که در آن  $\alpha$  بردار احتمال نقطه شروع فرآیند،  $T$  زیرماتریس شدت انتقال<sup>۱</sup> استخراج شده از ماتریس انتقال<sup>۲</sup> در فرآیند و  $t = -Te$  و  $e$  بردار ستونی با درایه‌های یک و  $E$  فضای حالت است.

به علت خاصیت چگال بودن توزیع فاز نوع، تقریباً اکثر توزیع‌های آماری که دامنه مقادیر آنها روی خط اعداد حقیقی مثبت است را می‌توان به‌طور دقیق یا به‌صورت تقریبی با توزیع فاز نوع با پارامترهای مربوط نوشت.

مثلاً توزیع نمایی با پارامتر  $\lambda$  یک توزیع فاز نوع با پارامتر  $\alpha = [1]$   $T = (-\lambda)$  است. یا توزیع ارلنگ  $n$  یک توزیع فاز نوع با پارامتر

$$T = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda \end{bmatrix}, \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

1. Sub Intensity Matrix
2. Transition Matrix

باتوجه به این مقدمه فرض کنید توزیع خسارت‌ها یک توزیع فاز نوع با پارامتر  $T, \alpha$  است، باتوجه به قضایای زیر به بیان بقیه مفاهیم می‌پردازیم.

**قضیه ۱:** فرض کنید  $F$  دارای توزیع فاز نوع با پارامترهای  $T_1, \alpha_1$  و فضای حالت  $E_1$ ، تابع  $G$  دارای توزیع فاز نوع با پارامترهای  $T_2, \alpha_2$  و فضای حالت  $E_2$  باشد. پیش از این دو تابع  $F^*G$  دارای توزیع فاز نوع با پارامترهای  $T, \alpha$  و فضای حالت  $E = E_1 \cup E_2$  به این صورت است:

$$\alpha_i = \begin{cases} (\alpha_1)_i & i \in E_1 \\ (\alpha_1)_0 (\alpha_2)_i & i \in E_2 \end{cases}, T = \begin{pmatrix} T_1 & t_1 \alpha_2 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} \quad (21)$$

که  $(\alpha_k)_i$ ،  $i$  امین مؤلفه  $\alpha_k$  است و  $t_k = -T_k e$  و  $k = 1, 2$

**قضیه ۲:** فرض کنید تابع‌های توزیع  $G, F$  روی اعداد حقیقی مثبت تعریف شده باشد و  $G$  دارای توزیع فاز نوع با پارامتر  $T, \alpha$  با  $\alpha_0 = 0$  و  $F$  یک توزیع هندسی ترکیبی با پارامترهای  $(p, G)$  باشد که  $0 < p < 1$  آنگاه توزیع  $F$  دارای توزیع فاز نوع با پارامترهای  $\alpha' = p\alpha$ ،  $T' = T + pt\alpha$  است.

به سادگی و با جایگذاری توزیع فاز نوع برای تابع توزیع خسارت‌ها در تابع توزیع متغیر  $L_c$ ،  $H_p(x) = \frac{\lambda}{c} \int_0^x (1 - F_X(y)) dy$  می‌توان مشاهده کرد شکل تابع توزیع  $H_p(x)$  به صورت یک توزیع فاز نوع با پارامترهای  $\alpha' = -\frac{\lambda}{c} \alpha T^{-1}$ ،  $T' = T$  است.

باتوجه به اینکه توزیع متغیر  $L_d$  یک توزیع نمایی است می‌توان نتیجه گرفت  $L_d$  دارای توزیع فاز نوع با پارامتر  $\alpha = [1]$ ،  $T = [-B]$  است، بنابراین با استفاده از قضیه ۱ به راحتی می‌توان بررسی کرد توزیع  $H_p = H_1 * H_2$  پیش از  $H_1$  و  $H_2$  به این صورت به دست می‌آید:

$$H_p = 1 - \alpha_1 e^{T_1 x}, \quad \alpha_1 = (\alpha', 0), \quad T_1 = \begin{bmatrix} T & t \\ 0 & -\beta \end{bmatrix}, \quad t_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix} \quad (22)$$

با استفاده از رابطه (۲۲) و قضیه ۱ و ۲ می توان اثبات کرد، تابع بقا دارای توزیع فاز نوع با این پارامترهاست:

$$\alpha_r = [1, \infty), T_r = \begin{bmatrix} -\beta & \beta\alpha_r(1-q) \\ 0 & T_r + (1-q)t_r\alpha_r \end{bmatrix}, t_r = -T_r e \quad (23)$$

بنابراین تابع بقا به این صورت حاصل می شود:

$$\varphi(u) = 1 - \alpha_r \exp(T_r u) \quad (24)$$

برای پیدا کردن رابطه ای بر حسب پارامترهای توزیع فاز نوع برای تابع چگالی احتمال توأم  $f(x, y, u)$  با استفاده از رابطه (۱۵) و (۲۴) داریم:

$$f(x, y, u) = \begin{cases} \frac{\lambda}{cq} (1 - \alpha_r e^{(T_r u)}) e^{(ae^{T(x+y)})t} & x > u > 0 \\ \frac{\lambda}{cq} (\alpha_r e^{(T_r(u-x))} e - \alpha_r e^{(T_r u)}) (ae^{(T(x+y))}) t & 0 < x \leq u \end{cases} \quad (25)$$

که در این رابطه توزیع خسارت ها نیز بر مبنای فرض اولیه توزیع فاز نوع در نظر گرفته شده است. تابع چگالی احتمال حاشیه ای  $f(x, u)$  نیز به همین ترتیب و با استفاده از روابط (۱۶) و (۲۵) به این صورت حاصل خواهد شد.

$$f(x, u) = \begin{cases} \frac{1}{q} (1 - \alpha_r e^{T_r u}) (\alpha_r e^{T_r x}) & x > u > 0 \\ \frac{1}{q} (\alpha_r e^{T_r(u-x)} e - \alpha_r e^{T_r u}) (\alpha_r e^{T_r x}) & 0 < x \leq u \end{cases} \quad (26)$$

اما برای تابع چگالی احتمال کسری در زمان ورشکستگی در جمله انتگرالی معادله (۱۹) داریم:

$$\int_0^u h_r(u+y-z) dH_r(z) = \int_0^u \alpha_r e^{T_r y} e^{T_r(u-z)} t_r dH_r(z) \quad (27)$$

که این انتگرال نشان دهنده پیچش دو تابع فاز نوع است و با استفاده مجدد از قضیه ۱ کل این عبارت به صورت تابع چگالی توزیع فاز نوع جدیدی با پارامترهای  $T' = T_r + t_r \alpha_r$  ,  $\alpha' = \alpha_r \exp(T_r y)$  حاصل می شود.

و با تأثیر جمله دوم در معادله (۱۹) تابع چگالی احتمال کسری در زمان ورشکستگی به این صورت به دست می آید:

$$g(y,u) = \alpha_y e^{T_y y} e^{(T_y + t, \alpha_y) u} t_y - \frac{1}{qB} \alpha_y e^{T_y y} t_y \alpha_r e^{T_r u} t_r \quad (28)$$

اما برای تابع چگالی احتمال اندازه خسارت که باعث ورشکستگی می شوند می توان به سادگی، با استفاده از رابطه (۲۰) و مفاهیم بیان شده، این شکل را برای این تابع به دست آورد:

$$f_z(z) = \begin{cases} \left[ (1 - \alpha_r e^{T_r u}) z - [u - \alpha_r T_r^{-1} (e^{T_r u} - 1) e] \right] \frac{\lambda}{cq} \alpha e^{T_z t} & \text{if } z > u > 0 \\ \left[ (1 - \alpha_r e^{T_r u}) z - [z - \alpha_r T_r^{-1} (e^{T_r u} - e^{T_r(u-z)}) e] \right] \frac{\lambda}{cq} \alpha e^{T_z t} & \text{if } 0 < z \leq u \end{cases} \quad (29)$$

تمام موارد فوق برای زمانی بیان شد که مدل در نظر گرفته شده، یک عامل اغتشاش مثبت دارد. برای مدل کلاسیک تنها تفاوت از اینجا ناشی می شود که حالت خاص  $\sigma = 0$  را در مدل با عامل اغتشاش در نظر بگیریم؛ بنابراین برای مدل کلاسیک کافی است تمام فرمول های به دست آمده، برای محاسبه توابع چگالی احتمال با استفاده از توزیع فاز نوع و بر حسب جبر ماتریس ها مقدار  $\sigma$  را معادل صفر قرار دهیم. با طی کردن مراحل مشابه برای مدل ریسک با عامل اغتشاش برای تمام فرمول های بیان شده، این مقادیر جایگزین می شود:

$$H_1(x) = 1 - e^{-\beta x} = 1, \quad \beta = \frac{\gamma c}{\sigma} = \frac{\gamma c}{0} = \infty$$

$$f(x,u) = \begin{cases} \frac{1}{q} \varphi(u) \left[ (1-q) \alpha_+ e^{T_x t} \right] & x > u > 0 \\ \frac{1}{q} [\varphi(u) - \varphi(u-x)] \left[ (1-q) \alpha_+ e^{T_x t} \right] & 0 < x \leq u \end{cases} \quad (30)$$



$$g(y, u) = (1 - q)\alpha_+ e^{Ty} e^{(T+(1-q)\alpha_+)u} t \quad (31)$$

$$f_z(z) = \begin{cases} \left[ \frac{\varphi(u)z - \left[ u - (1-q)\alpha_+(T+(1-q)\alpha_+)^{-1} (e^{(T+(1-q)\alpha_+)u} - 1)e \right]}{\alpha q} \right] \frac{\lambda}{\alpha q} \alpha e^{Tz} t & \text{if } z > u > 0 \\ \left[ \frac{\varphi(u)z - \left[ z - (1-q)\alpha_+(T+(1-q)\alpha_+)^{-1} (e^{(T+(1-q)\alpha_+)u} - e^{(T+(1-q)\alpha_+)(u-z)})e \right]}{\alpha q} \right] \frac{\lambda}{\alpha q} \alpha e^{Tz} t & \text{if } 0 < z \leq u \end{cases} \quad (32)$$

مثال: شرکت بیمه‌ای را در نظر بگیرید که با سرمایه اولیه ۳ واحد در رشته‌ای خاص شروع به کار می‌کند و شدت وقوع خسارت‌ها دارای توزیع پواسون با پارامتر  $\lambda = 1$  است. میزان دریافتی حق بیمه‌های این شرکت در واحد زمان  $c = 1/847$  واحد است،

بنابراین مقدار  $q = \frac{c - \lambda\mu}{c} = 0.25$  است. فرض کنید مقدار عامل اغتشاش را برای مثال

$\sigma^2 = 0.3$  در نظر می‌گیریم و توزیع خسارت‌ها به صورت توزیع فاز نوع با این پارامترها معرفی شده‌اند:

$$\alpha = [0.9731, 0.0152, 0.0106, 0.001]$$

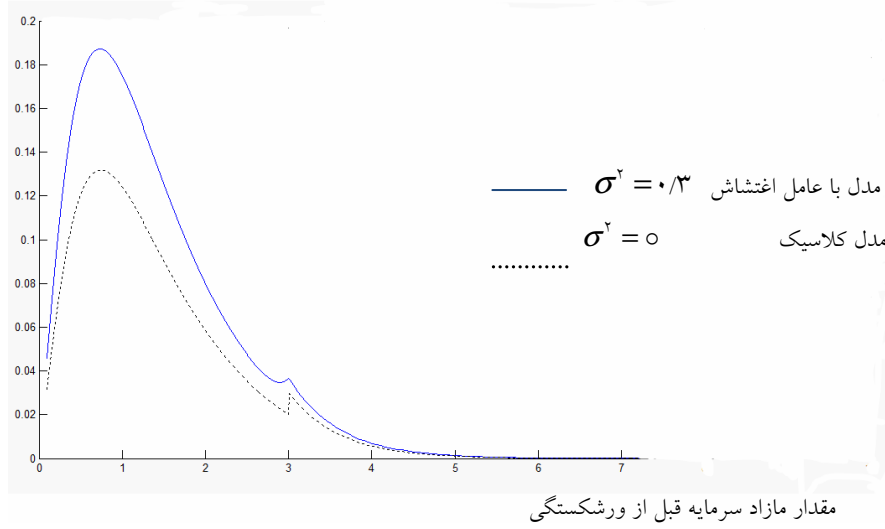
$$T = \begin{bmatrix} -28/648 & 28/532 & 0.089 & 0.027 \\ 0.102 & -8/255 & 8/063 & 0.086 \\ 0.133 & 0.107 & -5/807 & 5/296 \\ 0.1 & 0.102 & 0.111 & -2/176 \end{bmatrix}$$

مقدار تابع احتمال بقا و نمودار تابع چگالی‌های معرفی شده به این صورت است:

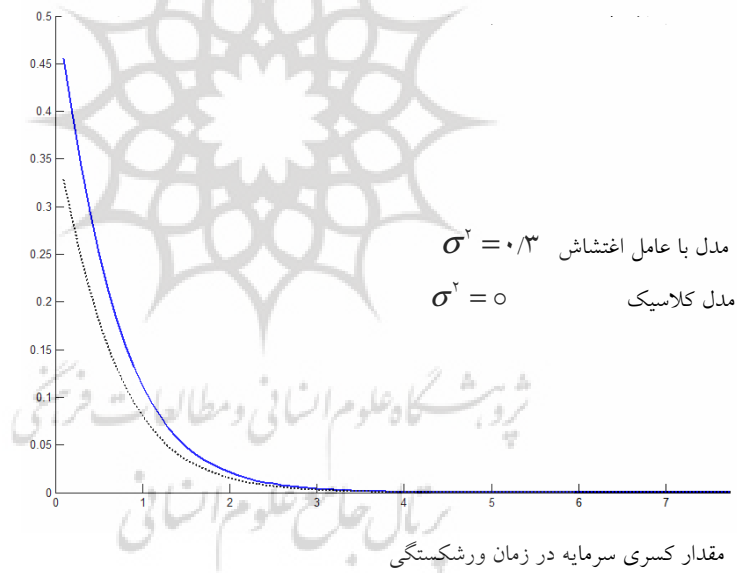
- احتمال بقا یا عدم ورشکستگی در مدل ریسک کلاسیک:  $\varphi(u) = 0.7549$

- احتمال بقا یا عدم ورشکستگی در مدل ریسک با عامل اغتشاش:  $\varphi(u) = 0.6929$

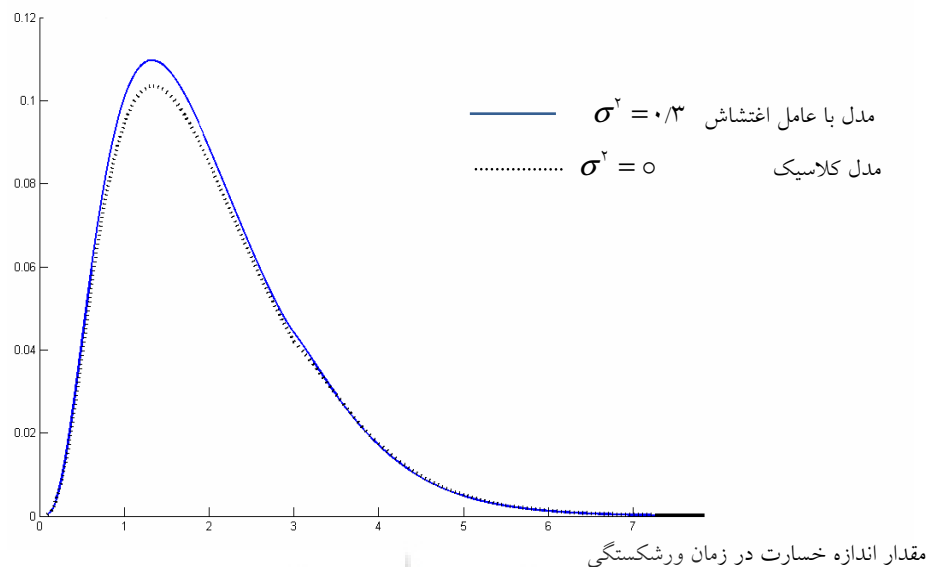
نمودار ۳. مازاد سرمایه قبل از ورشکستگی در حالت مدل ریسک کلاسیک و مدل ریسک با عامل اغتشاش



نمودار ۴. کسری در زمان ورشکستگی در حالت مدل ریسک کلاسیک و مدل ریسک با عامل اغتشاش



نمودار ۵. اندازه خسارت در زمان ورشکستگی در حالت مدل ریسک کلاسیک و مدل ریسک با عامل اغتشاش



مقدار احتمال بقا در مدل کلاسیک بیش از مدل با عامل اغتشاش است؛ این مسئله به علت اضافه کردن یک عدم اطمینان اضافی به مدل بوده است. همچنین باتوجه به نمودارهای رسم شده به جز در مورد اندازه خسارت در نمودار ۵ که تقریباً مساوی اند، انباشتگی احتمال در نقطه‌ای معین در مدل با عامل اغتشاش بیش از مدل کلاسیک است و در صورت نیاز، این احتمالات (مساحت زیر نمودار) به سادگی قابل محاسبه است.

## ۷. نتیجه گیری

مدل ریسک با عامل اغتشاش، ابزاری مناسب در اختیار مدیران ریسک شرکت‌های بیمه قرار می‌دهد تا برای مقادیر مختلف و دلخواهی از سرمایه اولیه و حق بیمه‌ها، احتمال ورشکستگی را شبیه‌سازی نمایند و مناسب‌ترین مقدار حق بیمه را استخراج کنند. مدل ریسک معرفی شده دارای عامل اغتشاشی است که باتوجه به عوامل مختلفی در بازار بیمه تعریف می‌شود و مدل جدید، مقدار واقعی تری از مازاد سرمایه شرکت بیمه را در زمان نشان می‌دهد. در این مقاله مقدار حق بیمه را در واحد زمان

ثابت در نظر گرفته ایم ولی باتوجه به عواملی از قبیل تخفیف‌ها، مالیات‌ها و ... در دریافت حق بیمه‌ها می‌توان آن را نیز متغیر تصادفی در نظر گرفت که البته بر پیچیدگی مدل می‌افزاید و مدل واقعی‌تری را از رفتار مازاد سرمایه شرکت بیمه منعکس می‌کند.

## منابع

1. Asmussen, S 2000, *Ruin probabilities*, World Scientific, Singapore.
2. Bowers, NL, Gerber, HU, Hickman, JC, Jones, DA & Nesbitt, CJ 1987, *Actuarial mathematics*, Society of Actuaries.
3. Dickson, DCM 1992, 'On the distribution of the surplus prior to ruin', *Insurance Mathematics and Economics*, vol. 11, pp. 191-207.
4. Dickson, DCM & Dos Reis, AE 1994, 'Ruin problems and dual events', *Insurance Mathematics and Economics*, vol. 14, pp. 51-60.
5. Dufresne, F & Gerber, HU 1988, 'The surplus immediately before and at ruin, and the amount of the claim causing ruin', *Insurance Mathematics And Economics*, vol. 7, pp. 193-9.
6. Dufresne, F & Gerber, HU 1991, 'Risk theory for the compound poisson process that is perturbed by diffusion', *Insurance Mathematics and Economics*, vol. 10, pp. 51-9.
7. Feller, W 1971, *An introduction to probability theory and its applications*, vol. II, Wiley, New York.
8. Gerber, HU & Landry, B 1998, 'On the discounted penalty at ruin in a jump-diffusion and the perpetual put option', *Insurance Mathematics and Economics*, vol. 22, pp. 263-76.
9. Gerber, HU & Shiu, ESW 1997, 'The joint distribution of the time of ruin, the surplus immediately before ruin, and the deficit at ruin', *Insurance Mathematics and Economics*, vol. 21, pp. 129-37.
10. Kabusi, J 2010, *On the surplus prior to ruin in the perturbed classical risk process*, M.A thesis in Actuarial Science, ECO College of Insurance, Allameh Tabatabai University.
11. Klugman, S, Panjer, H & Willmot, G 2004, *Loss models from data to decisions*, Wiley, New York, Ny.

12. Lin, SX & Willmot, GE 2000, 'The moments of time of ruin, the surplus before ruin, and the deficit at ruin', *Insurance Mathematics and Economics*, vol. 27, pp. 19-44.
13. Ren, J 2005, 'The expected value of the time of ruin and the moments of the discounted deficit at ruin in the perturbed classical risk process', *Insurance Mathematics and Economics*, vol. 37, pp. 505-21.
14. Ren, J 2007, 'On the surplus prior to ruin in the perturbed classical risk process', *Insurance Mathematics and Economics*, vol. 8, no. 2, pp. 186-95.
15. Rolski, T, Schmidli, H, Schmidt, V & Teugels, J 1999, *Stochastic processes for insurance and finance*, Wiley, New York, Ny.
16. Schmidli, H 1999, 'On the distribution of the surplus prior and at ruin', *Astin Bulletin*, vol. 29, no. 2, pp. 227-44.
17. Tsai, CCL 2001, 'On the discounted distribution functions of the surplus process perturbed by diffusion', *Insurance Mathematics and Economics*, vol. 28, pp. 401-19.
18. Tsai, CCL & Willmot, GE 2002, 'A generalized defective renewal equation for the surplus process perturbed by diffusion', *Insurance Mathematics and Economics*, vol. 30, pp. 51-66.





پښتونستان ښار  
پښتونستان ښار  
پښتونستان ښار