

طراحی شبکه: پیچیدگی حل و تأثیر هزینه‌ها

سعیده کتابی*

چکیده

این مقاله مسأله طراحی شبکه و عوامل مؤثر در مدل‌سازی آن را در شرایط مختلف بررسی می‌کند و با ذکر بعضی از عوامل پیچیده‌کننده، توجیهی برای ساده‌سازی آن‌ها به منظور حل مسأله ارائه می‌کند. همچنین هزینه‌های مربوط به شبکه معرفی، خواص آن‌ها بررسی، و نحوه تأثیرشان بر تابع هدف مسأله بیان می‌شود.

مقدمه

امروزه در اغلب زمینه‌های علمی و فنی، مسائل مربوط به برنامه‌ریزی استفاده از منابع به صورت شبکه مطرح می‌شوند. برای مثال می‌توان از مسائل مربوط به ترافیک و حمل و نقل، ارتباطات، آب، برق، بازرگانی، خدمات شهری و حتی زمینه‌های آموزشی، پزشکی و اجتماعی نام برد. علت اصلی مطرح شدن مسائل به صورت شبکه را می‌توان در عدم تطابق توزیع منابع با توزیع نیاز به منابع دانست. زیرا معمولاً در بیش‌تر نقاط، منابع به میزان مورد نیاز یافت نمی‌شوند و برای رفع این نیازها باید مقداری از منابع جابه‌جا گردد. لازمه جابه‌جایی هر نوع کالا در بین دو نقطه، ایجاد تسهیلات مورد نیاز مانند راه، خطوط ارتباطی، کانال آب، کابل فشار قوی و غیره است. از آن‌جا که ایجاد این نوع تسهیلات معمولاً نیاز به صرف هزینه زیاد دارد و میزان هزینه‌ها به ظرفیت و کیفیت تسهیلات وابسته است، تصمیم‌گیری درباره نوع، محل و ظرفیت تسهیلات در شبکه از

- Ahrari, (London: Macmillan Press, 1996).
2. Brigid Starkey, "post-Cold War Security in the GCC Region", *Ibid*.
 3. *Iran and the Arab World*, Edited by Hooshang Amirahmadi and Nader Entessar, (London: Macmillan Press, 1993).
 4. Michael M. Gunter, *The kurds of Iraq*, (New York: Martin Press, 1992)
 5. *The Persian Gulf at the Millennium*; Edited by Gary G.Sick and Lawrence G.Potter (London: The Macmillan Press, 1997).

۴- تمام مطالب این بخش از منبع ذیل تهیه شده است:

<http://www.bbc.News.Uk>

منابع و مآخذ

- 1- J.Ann Tickner, "Hans Morgenthau's Principles of Political Realism" *International Theory*, Edited by James Der Derian (UL: Macmillan Press,LTD, 1995).
- 2- Michael Donelan, *Elements of International Political Theory*, (New York: Oxford University Press, 1990-1992).
- 3- M.E.Ahrari, Brigid Starkey and Nader - Entessar, "Iran, the Persian Gulf and the Post-Cold War Order", *Change and Continuity in the Middle East*, Edited by M.E.Ahrari, (London: Macmillan Press, 1996).
- 4- Brigid Starkey, "Post- Cold War Security in the GCC Region", *Ibid*.
- 5- *Iran and the Arab world*, Edited by Hooshang Amirahmadi and Nader Entessar, (London: Macmillan Press, 1993).
- 6- Michael M.Gunter, *The kurds of Iraq*, (New York: Martin Press, 1992).
- 7- *The Persian Gulf at the Millennium*, Edited by Gary G. Sick and Lawrence G. Potter, (London: The Macmillan Press, 1997).
- 8- [http:// www.bbc.News.Uk](http://www.bbc.News.Uk).

اهمیت خاص و پیچیدگی زیاد برخوردار است. این نوع از تصمیم‌گیری‌ها به مسائل طراحی شبکه معروف هستند.

در این مقاله، ضمن تعریف اجمالی شبکه، و هزینه‌ها و مسائل مربوط به آن‌ها، مواردی که باعث پیچیده شدن مدل از نظر حل می‌شوند به طور مختصر معرفی می‌گردند. سپس چگونگی وابستگی مسائل طراحی شبکه به فرم هزینه‌ها بررسی خواهند شد.

مسئله جریان در شبکه و مدل‌سازی آن

یک شبکه شامل مجموعه‌ای از گره‌ها (Nodes) یا نقاط و مجموعه‌ای از کمان‌ها (Arcs) یا خطوط است، به نحوی که هر کمان آن دو گره از شبکه را به هم متصل می‌کند. برای بعضی از زوج گره‌ها (زوج‌های مبدأ - مقصد (Origin-Destination Pairs) تقاضایی برای انتقال کالایی،^(۱) وجود دارد. برای هر زوج مبدأ - مقصد، تقاضای مورد نیاز گره مقصد از گره مبدأ توسط عبور جریان از مسیرهایی که گره مبدأ را به گره مقصد متصل می‌کنند تأمین می‌گردد. هر مسیر بین یک گره مبدأ و یک گره مقصد دنباله‌ای از کمان‌های شبکه است که آن دو گره را به هم متصل می‌سازد. عبور جریان از هر کمان شبکه مستلزم پرداخت نوعی هزینه - به صورت پولی یا صرف زمان - است و این هزینه، تابعی از مشخصات کمان (مثل ظرفیت آن) و میزان جریان عبوری از آن است. حاصلضرب میزان جریان در هزینه عبور جریان، هزینه عملکرد (Operational Cost) کمان نامیده می‌شود. نحوه توزیع جریان در مسیرهای بین هر زوج مبدأ - مقصد و در نتیجه، چگونگی توزیع جریان روی کمان‌ها در کل شبکه به دو شکل امکان‌پذیر است: یکی به صورت متمرکز در جهت کاهش کل هزینه‌های شبکه که اصطلاحاً «بهینگی سیستم» (System Optimized) نامیده می‌شود و دیگری به صورت غیر متمرکز و در جهت کاهش هزینه هر واحد تقاضا بین هر زوج مبدأ - مقصد (هر استفاده‌کننده سیستم) که به آن «بهینگی استفاده‌کننده» (User Optimized) اطلاق می‌گردد (Leblanc and Abdulaal, 1984) مسئله تعیین جریان در کمان‌های شبکه (Network Flow Problem) معادل یک مسئله بهینه‌سازی با تابع هدف، به صورت می‌نیم کردن کل هزینه شبکه و محدودیت‌هایی به فرم توازن جریان (Flow Conservation) در گره‌های شبکه برای هر زوج مبدأ - مقصد است (Ahuja et al., 1993).

به منظور مدل‌سازی، فرض کنید N ، مجموعه گره‌های شبکه، L ، مجموعه کمان‌های شبکه و K ، مجموعه مبدأ - مقصدها (کالاها) باشند. حال با تعریف متغیرهای تصمیم f_l^k به عنوان میزان جریان کالای k روی کمان l ، مسأله تعیین جریان تعادل سیستم را می‌توان به صورت بهینه سازی زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \text{Min } & \sum_{l \in L} f_l^k D_l(f_l^k, c_l) \\ \text{s.t. } & \quad \quad \quad d^k \quad \quad \quad \text{اگر } i \text{ مبدأ کالای } k \text{ باشد} \\ & \sum_{l \in S_i} f_l^k - \sum_{l \in E_i} f_l^k = -d^k \quad \text{اگر } i \text{ مقصد کالای } k \text{ باشد}, \forall i \in N \\ & \quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad \text{در غیر این صورت} \\ & f_l = \sum_{k \in K} f_l^k, \forall l \in L \\ & f_l^k \geq 0, \forall l \in L, \forall k \in K \end{aligned}$$

که در آن D_l تابع هزینه عبور (هر واحد) جریان، c_l ظرفیت، f_l میزان جریان کل روی کمان l ، S_i و E_i مجموعه‌های کمان‌های خروجی و ورودی به گره i و d^k میزان تقاضای مربوط به کالای k است.

مسأله طراحی شبکه و مدل‌سازی آن

همان‌طور که اشاره شد، هزینه عملکرد شبکه، تابعی از ساختار شبکه و ظرفیت کمان‌های موجود در آن است. یک راه برای کاهش هزینه عملکرد شبکه، تغییر ساختار شبکه از طریق احداث کمان‌های جدید یا افزایش ظرفیت کمان‌های موجود شبکه است. اما لازمه تغییر ساختار شبکه، سرمایه‌گذاری در آن است که «هزینه ساخت» (Construction Cost) شبکه نامیده می‌شود. معمولاً انتظار می‌رود با افزایش حجم سرمایه‌گذاری در شبکه، هزینه عملکرد شبکه کاهش پیدا می‌کند و برعکس. به عبارت دیگر، نوعی بده بستان (Trade Off) بین این دو هزینه وجود دارد. حال سؤالی که مطرح می‌شود این است که چه مقدار حجم سرمایه‌گذاری در شبکه بهینه است که این مسأله، طراحی (Network Design) نامیده می‌شود.

یک مدل ریاضی ساده برای مسأله طراحی شبکه‌های جدید را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\text{Min} \quad \sum_{i \in L} f_i P_i(f_i, c_i) + \sum_{i \in L} X_i(c_i) \quad (2)$$

s.t. یک جریان تعادلی است که توسط محدودیت‌های ۱ تعریف می‌شود:

$$c_i \geq 0, \quad \forall i \in L \quad (2)$$

که در آن X_i تابع هزینه ساخت و c_i ظرفیت طراحی شده مربوط به کمان l است.

به عبارت دقیق‌تر، در مسأله طراحی شبکه، هدف تعیین ظرفیت مورد نیاز برای کمان‌های جدید یا میزان افزایش ظرفیت در کمان‌های موجود شبکه به همراه تعیین میزان جریان روی همه کمان‌های شبکه است، به نحوی که جمع هزینه‌های ساخت و عملکرد شبکه حداقل گردد. البته در بعضی مواقع که بودجه خاصی برای هزینه‌های ساخت شبکه تخصیص داده می‌شود، مسأله طراحی شبکه، به تنهایی، به صورت حداقل کردن هزینه عملکرد شبکه در نظر گرفته می‌شود و هزینه ساخت در قالب یک محدودیت بودجه در مسأله اعمال می‌گردد.

شایان ذکر است که در هر دو مدل ۱ و ۲ فرض شده که هزینه‌های شبکه روی کمان‌ها تفکیک پذیر (*separable*) هستند. بنابراین در مدل ۱ تابع هدف مسأله را می‌توان به صورت مجموع هزینه‌های عملکرد کمان‌ها در نظر گرفت، در حالی که در تابع هدف مدل ۲ علاوه بر هزینه عملکرد، هزینه ساخت کمان‌ها نیز منظور شده است. بنابراین این مسأله طراحی شبکه (مدل ۲) به دلیل در نظر گرفتن امکان ایجاد ظرفیت یا راه‌های جدید نسبت به مسأله جریان در شبکه (مدل ۱) که فقط بر ظرفیت‌های موجود برای جابه‌جایی تکیه دارد، جامع‌تر است.

معمولاً در مسائل طراحی شبکه، متغیرهای تصمیم‌گیری مربوط به ظرفیت کمان‌های جدید یا افزایش ظرفیت کمان‌های موجود، «متغیرهای طراحی» نامیده می‌شوند. در واقع، به خاطر محدودیت‌های تکنولوژیک، امکان ایجاد یا افزایش ظرفیت به هر میزان موجود نیست و تنها ظرفیت‌های خاصی وجود دارد. به همین علت، این متغیرها مقادیر گسسته‌ای را اختیار می‌کنند و در نتیجه، مسأله طراحی شبکه معادل یک برنامه ریزی با اعداد صحیح (*Integer Programming*) و در شمار مسائل پیچیده تحقیق در عملیات مطرح می‌شود (Leblanc, 1975).

عوامل پیچیده کننده مسائل طراحی شبکه

هدف از حل مسأله طراحی شبکه، تعیین ظرفیت کمان‌های شبکه به همراه میزان جریان روی آن‌ها است به نحوی که اولاً تقاضاهای انتقال کالا بین هر جفت مبدأ - مقصد برآورده شود و ثانیاً هزینه کل ساخت و عملکرد کمان‌های شبکه حداقل گردد.

پیچیدگی مسائل طراحی شبکه عمدتاً به دو عامل بستگی دارد که عامل اول، گسسته بودن ماهیت متغیرهای تصمیم مربوط به میزان ظرفیت کمان‌ها است. از آن‌جا که افزایش تنوع در امکانات جابه‌جایی، از یک سو باعث شده که تقریباً دستیابی به هر ظرفیتی امکان‌پذیر باشد و از سوی دیگر، باعث افزایش تعداد حالاتی شده که متغیرهای مربوط به ظرفیت کمان‌ها باید به خود بگیرند، پیوسته در نظر گرفتن این متغیرها یک فرض منطقی برای ساده سازی مسائل طراحی شبکه در مقیاس بزرگ خواهد بود (Marcotte, 1983). به علاوه بدون کاستن از کلیت مسأله، با تغییر فرم تابع هزینه به تابع هزینه ثابت (*Fixed cost function*) یا توابع پله‌ای (*Stepwise functions*)، شرط گسسته بودن متغیرها قابل صرف‌نظر کردن است. برای مثال، در مورد کمانی که امکان ساخت n واحد مجزا ظرفیت هر کدام با هزینه c_0 را دارد، تابع پله‌ای

$$X(c) = ic_0 \quad i-1 < c \leq i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3)$$

(بهمراه $X(0) = 0$)

به راحتی گسسته بودن ظرفیت را بدون در نظر گرفتن صریح آن در مدل، برآورده می‌کند.

عامل پیچیده کننده دیگر، وجود محدودیت تعادل جریان (*Flow*)

(*Equilibrium*) در بیش تر شبکه‌ها است که ناشی از غیر متمرکز بودن تصمیم‌گیری و

تمایل به ایجاد بهینگی استفاده کننده است. محدودیت‌های تعادل جریان در شبکه،

علاوه بر محدودیت‌های توازن جریان، این نکته را تضمین می‌کند که هزینه استفاده از

مسیرهای استفاده شده بین هر زوج مبدأ - مقصد، اولاً برابر با می‌نیم هزینه جابه‌جایی

بین آن دو و ثانیاً کم تر از هزینه استفاده از مسیرهای استفاده نشده بین آن دو باشد. این

عامل با افزودن تعداد زیادی از محدودیت‌های غیر خطی به مدل، مسأله را به شکل یک

بهینه سازی غیر خطی در می‌آورد که حل آن بسیار مشکل است. (Leblanc and

Abdulaal, 1984) با این که در بیش تر مسائل طراحی شبکه فرض بر آن است که هر

استفاده کننده بهترین مسیر را انتخاب می‌کند، ولی فرض برقراری بهینگی سیستم نیز

کاربردهای زیادی، از جمله در طراحی شبکه‌های ارتباطی، حمل و نقل برون شهری،

بزرگراه‌ها و شبکه‌های با تراکم کم ترافیک دارد. در بسیاری از موارد که برنامه ریزی‌های درازمدت مورد نظر است، بهینگی سیستم تقریب خوبی برای بهینگی استفاده‌کننده خواهد بود.

در بیش‌تر تحقیقات انجام شده، با در نظر گرفتن دو عامل ذکر شده در بالا، مدل طراحی شبکه به نحوی پیچیده شده که لاجرم، تابع هزینه باید به فرم ساده و خطی فرض گرفته شود تا مدل قابل حل باشد. ولی در واقع، نه فقط توابع هزینه عملکرد و ساخت کمان‌ها فرم پیچیده‌تری دارند، بلکه به کار گرفتن فرم‌های غیر خطی برای تابع هزینه، قابلیت مدل را برای در نظر گرفتن سایر عوامل، از جمله گسسته بودن متغیرهای طراحی، افزایش می‌دهد (Florian, 1986) و (Magnanti, 1993).

از این رو حل مسائل طراحی شبکه در ابعاد واقعی و با در نظر گرفتن همه جزئیات فوق، حتی به طور تقریبی هم بسیار مشکل است. در عمل، با توجه به سیستم مورد بررسی و عملکرد آن، پیشنهاد می‌شود که در مورد عوامل بالا، ساده سازی‌هایی در مدل مربوط صورت بگیرد و در عوض با انتخاب مدل مناسبی برای تابع هزینه، دقت و نحوه عملکرد شبکه نیز در نظر گرفته شود.

تأثیر هزینه‌ها بر خواص تابع هدف

تابع هدف در مسائل طراحی شبکه ترکیبی از هزینه عملکرد، به صورت تابعی از میزان جریان و ظرفیت، و هزینه ساخت، به صورت تابعی از میزان ظرفیت ایجاد شده، است. پیچیدگی اساسی مسائل طراحی در قیاس با مسائل جریان در شبکه مربوط به تصمیم‌گیری روی متغیرهای طراحی یا ظرفیتی است. برای شفاف کردن این ارتباط، می‌توان این مورد تصمیم‌گیری ترکیبیاتی (Combinatorial decision making) را با یک زیرمسئله جزئی تفکیک و سپس یک مدل جریان در شبکه را که فقط شامل تصمیم‌گیری روی جریان در کمان‌ها باشد، بنا کرد. در این قسمت نشان داده می‌شود که چگونه با حذف متغیرهای طراحی نظیر ساخت ظرفیت، مسئله طراحی شبکه معادل با یک مسئله جریان در شبکه خواهد شد. به علاوه، تأکید بر این است که خواص تحلیلی تابع هدف نهایی، توسط خواص ریاضی تابع هزینه ساخت مشخص می‌شود.

همان‌طور که اشاره شد، محدودیت‌های مربوط به گسسته بودن متغیرهای طراحی

و تعادل جریان در شبکه، با انتخاب صورت مناسبی برای توابع هزینه و با تقریب مناسب، قابل صرف نظر کردن هستند. هر چند هزینه‌های عملکرد و ساخت کمان‌های شبکه می‌توانند توسط هر تابعی بیان شوند، ولی معمولاً دارای چند مشخصه طبیعی‌اند، به این معنا که هر دو توابعی نامنفی، پیوسته و صعودی به شمار می‌روند. تحت این فروض ضعیف، بهینه سازی مربوط به مسأله طراحی شبکه ۲ را می‌توان در دو سطح انجام داد: ابتدا برای هر کمان l میزان بهینه ظرفیت آن را، نظیر هر جریان f_l آروی آن، تعیین کرد، یعنی زیر مسأله تفکیک شده به صورت زیر باشد:

$$H_l(f_l) = \min_{c_l \geq 0} \{f_l P_l(f_l, c_l) + X_l(c_l)\} \quad \forall l \in L.$$

و سپس هدف را فقط تابعی از متغیرهای جریان نوشت و متغیرهای طراحی را به کلی حذف کرد. به عبارت دیگر مسأله ۲ معادل است با:

$$\min H(f) = \sum_{l \in L} H_l(f_l)$$

f.l. یک جریان تعادلی است که توسط محدودیت‌های ۱ تعریف می‌شود.

به این ترتیب، مسأله طراحی شبکه به صورت یک مسأله جریان در شبکه در می‌آید که لزوماً ضابطه ریاضی تابع هدف آن، $H(f)$ را نمی‌توان به طور صریح به دست آورد، اگر چه خواص ریاضی تابع هدف تغییر یافته وابسته به خواص توابع هزینه عملکرد و ساخت است.

هزینه عملکرد که عموماً به زمان سفر مربوط می‌شود، دارای ماهیتی محدب است، به این معنا که میزان افزایش هزینه عملکرد برای جریان‌های کم، نسبتاً کوچک و با نزدیک شدن به ظرفیت عملی کمان، به طور قابل توجه زیاد می‌شود. همچنین در بیش‌تر کاربردها آن را به صورت تابعی از نسبت جریان بر ظرفیت (یعنی $D\lambda(f_l/c_l) = D\lambda(f_l, c_l)$) در نظر گرفته‌اند (Frank and Frisch, 1971). در این صورت، اگر هزینه ساخت یک تابع، خطی یا محدب از ظرفیت فرض شود، تابع هدف تغییر یافته مسأله (H) نیز به صورت خطی یا محدب در می‌آید. در بسیاری از کاربردها، از جمله در شبکه‌های ارتباطی و مخابراتی، تابع هزینه ساخت، پله‌ای یا خطی قطعه بندی شده (Piecewise linear) است. نشان داده شده که تابع هدف تغییر یافته نیز همین شکل را خواهد داشت. برای مثال، اگر تابع هزینه ساخت به صورت زیر باشد:

$$X(c) = a_1 c \quad 0 \leq c \leq c^* \quad \text{برای}$$

$$a_2 c + (a_1 - a_2)c^* \quad c > c^* \quad \text{برای}$$

که در آن $c^* > 0$ نقطه شکست هزینه، و $0 < a_2 < a_1$ و D تابعی مشتق پذیر، صعودی، و اکیداً محدب با $D(0) = 0$ باشد، تابع هدف تبدیل یافته عبارت خواهد بود از:

$$H(f) = (D(y_1) + a_1/y_1)f \quad f \leq f^* \quad \text{برای}$$

$$(D(y_2) + a_2/y_2)f + (a_1 - a_2)c^* \quad f > f^* \quad \text{برای}$$

که در آن y_1 جواب معادله $y^2 D'(y) = a_1$ است و f^* نیز بر حسب پارامترهای داده شده تعریف می شود (کتابی، ۱۳۶۹).

در حالت کلی، به دلیل اصل اقتصاد به مقیاس (*Economies of Scale*)، هزینه ساخت مقعر است. به عبارت دیگر، با افزایش ظرفیت، هزینه ایجاد یک واحد ظرفیت کاهش می یابد. در این مورد نیز هزینه ساخت، تأثیری مستقیم بر تابع هدف تغییر یافته می گذارد و مسأله طراحی شبکه به شکل یک مسأله جریان در شبکه با تابع هدف مقعر تبدیل می شود (کتابی، ۱۳۶۹).

توجه به فرم توابع هزینه و فروض منطقی برای سیستم مورد مطالعه، لازمه کاربرد مناسب روش های حل مسأله، چه دقیق و تحلیلی و چه تقریبی و ابداعی، است. علت آن است که تابع هدف در هر برنامه ریزی ریاضی، نقش اساسی در انتخاب روش حل دارد. همان طور که بیان شد، هر مسأله طراحی شبکه قابل تبدیل به یک مسأله جریان در شبکه است که شکل تابع هدف آن بسته به فرم تابع هزینه ساخت خواهد بود. مسائل جریان در شبکه با تابع هدف خطی به راحتی قابل حل است (Ahuja et al., 1993). همچنین اگر تابع هدف محدب باشد، روش های خوبی وجود دارند که جواب نزدیک به بهینه را به دست می دهند (Frank and Wolfe, 1956). برعکس، اگر تابع هدف مقعر، پله ای یا خطی قطعه بندی شده غیر محدب باشد، حل مسأله مشکل خواهد بود. در این صورت، جواب دقیق مسأله از طریق روش های برنامه ریزی با اعداد صحیح به دست می آید (کتابی، ۱۳۶۹) و روشهای ابداعی فقط یک می نیم محلی را به دست می آورند.

به این ترتیب، مدل سازی صحیح هزینه ها و کاربرد تقریب های مناسب به همراه اطلاع از فرم تابع هدف، زیربنای انتخاب و طرح ریزی روش های حل مسائل طراحی شبکه خواهد بود.

نتیجه‌گیری

در این مقاله مسأله طراحی شبکه، به عنوان یک روش بهینه‌سازی که در بسیاری از زمینه‌های علمی و فنی کاربرد دارد، بررسی شده است. ضمن بیان اجمالی مدل مربوط و جزئیاتی که باید در آن گنجانده شود، عواملی که باعث پیچیدگی مدل و در نتیجه، مشکل شدن حل آن می‌شود، مطرح گردیده‌اند. سپس با ذکر ساده‌سازی‌های منطقی، به بررسی تأثیر هزینه‌ها روی پیچیدگی مسأله پرداخته شده است. دو نوع هزینه در شبکه‌ها وجود دارند: یکی هزینه عملکرد و دیگری هزینه ساخت. نشان داده شد که هر مسأله طراحی شبکه، قابل تبدیل به یک مسأله جریان در شبکه است که شکل تحلیلی تابع هدف آن دقیقاً توسط هزینه ساخت تعیین می‌شود. بنابراین، تخمین مناسب توابع هزینه، و بررسی تحلیلی تابع هدف نهایی یک امر ضروری و راهگشای طراحی و بهینه‌سازی شبکه‌ها به شمار می‌رود. از این رو، ضمن این که با اطلاع از شکل تابع هدف مسأله تبدیل یافته، امکان طراحی روش‌های حل مناسب‌تر امکان‌پذیر خواهد بود، می‌توان تأثیر تخمین هزینه‌ها را در جهت ساده‌سازی مسأله بررسی کرد.

پی‌نوشت:

(۱) بسته به کاربرد مورد نظر، کالا می‌تواند مسافر، محصول، اطلاعات، آب یا غیره باشد.

منابع و مآخذ

کتابی، سعیده. (۱۳۶۹). پایان‌نامه کارشناسی ارشد، مرکز برنامه ریزی سیستمها، دانشگاه صنعتی اصفهان.

-Ahuja R., Magnanti T. and Orlin J. (1993), *Network Flows, theory and applications*, Prentice Hall.

-Dantzig G., Harvey R., Lansdowne Z., Robinsun D. and Maier S. (1979), "Formulating and solving the network design Problem by decomposition", *Transp. Res.* (1313).

- Dionne R. and Florian M. (1979), "Exact and approximate algorithm for Optimal network design", *Networks*(9).
- Florian M.(1986), "Nonlinear cost network models in transportation" *Math. Prog. Study* (26).
- Frank M. and Frisch I.(1971), *Communication. transmission and transportation networks*, Addison-Wesley.
- Frank M. and Wolfe P.(1956), "An algorithm for quadratic programming". *Naval Res. Logistics Quart*(3).
- Leblanc L.(1975), "An algorithm for discrete network design problem", *Transp. Sci.*(9).
- Leblanc L. and Abdulaal M.(1984), "A comparison of user-optimum versus system-optimum traffic assignment in transportation network design". *Transp. Res.* (18B).
- Magnanti T. (1993), "Modeling and solving network design problems", in *Netflow93*.
- Marcotte P.(1983), "Network optimization with continuous control parameters", *Transp. Sci.*(17).