اقلیدس (سده‌ی چهارم پیش از میلاد)

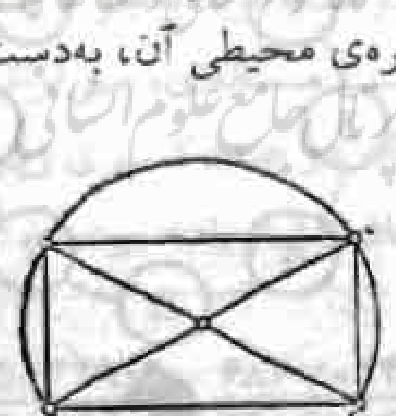
ویلهلم بلاشکه

برگردان: پرویز شهریاری

۱. پیش از اقلیدس

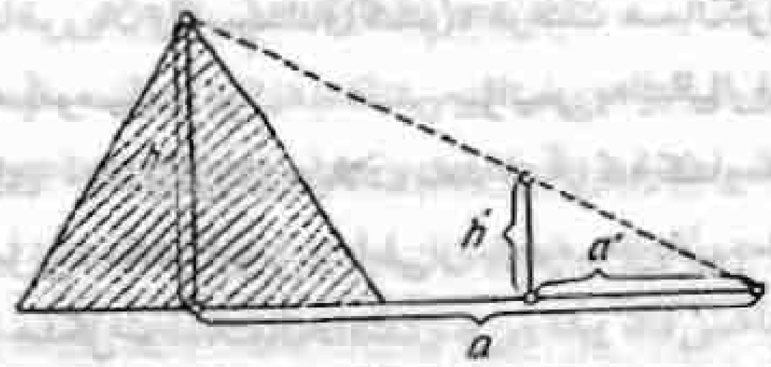
آگاهی ما از هندسه‌ی یونانی پیش از اقلیدس اندک و نارسا است. آسیای صغیر که در سده‌ی هشتم پیش از میلاد، ترانه‌های هومر در آن پدید آمد، درواقع گهواره‌ی دانش‌های پایه در اروپا بود. در سده‌ی ششم پیش از میلاد در شهر بازرگانی و ثروتمند «ملت»، تالسِ افسانه‌ای زندگی و کار می‌کرد که با گرایشی که به‌آب داشت، نقشی جدی در بخش دوم «فاوست» گوته، به‌عهده داشته است (به‌ظاهر، خود گوته که از نسل یک خانواده‌ی شراب‌فروش بود، از این گرایش تالس دور و نسبت به‌ریاضیات هم، سرد و بی‌تفاوت بود.)

تالس (حدود ۶۲۵ تا ۵۴۶ پیش از میلاد) از جزیره‌ی «لسبوس» و هم‌زمان «سولون» قانون‌گذار آتنی و «سافوی» شاعر بود. گمان می‌رود که تالس روی شکل‌هایی مطالعه می‌کرد که از راه رسم قطرهای مستطیل و دایره‌ی محیطی آن، به‌دست می‌آمد (شکل ۱). در ضمن تالس



شکل ۱

باید کشف کرده باشد، اگر زاویه‌ای در یک نیم‌دایره محاط شده باشد، زاویه‌ای قائمه است. امکان دارد برای اثبات، از ویژگی تقارن، استفاده کرده باشد. به‌ظاهر تالس می‌توانست با استفاده از مثلث‌های متشابه، ارتفاع هرم را از روی سایه‌ی آن به‌دست آورد (شکل ۲).



شکل ۲

$$\frac{h}{a} = \frac{h'}{a'} \Rightarrow h = \frac{a}{a'}h'$$

به‌جز این، تالس نشان داد، چگونه می‌توان فاصله‌ی برج دیده‌بانی را تا کشتی، پیدا کرد. موضوع‌های مشابهی را می‌توان در متن‌های میخی جست‌وجو کرد. این کشف‌های هندسه‌دانان یونانی را، مصری‌ها در زمان تالس می‌شناختند و به‌ظاهر تالس این آگاهی‌ها را از آن‌ها گرفته است.

این قضیه را هم که، مجموع زاویه‌های یک مثلث برابر است با دو قائمه، به‌او یا مکتب او نسبت می‌دهند (شکل ۳). این مطلب هم که، زاویه‌ها را می‌توان مانند فاصله‌ها روی هم گذاشت که در دید اول روشن نیست، مربوط به‌تالس است.

شکل ۳

«آناکسی مندرس»، هم زمان کوچک‌تر تالس هم، در پیش‌برد ریاضیات کهن یونان، نقش مهمی داشت. به‌او هم، مانند تالس، کشف‌هایی در زمینه‌ی اخترشناسی نسبت می‌دهند.

ولی مشهورترین ریاضی‌دانِ این دوره‌ی پیش‌رس، فیثاغورس ساموسی بود (تولد در حدود ۵۷۰، مرگ در حدود ۵۰۰ پیش از میلاد). فیثاغورس در حدود ۵۵۰ پیش از میلاد، به‌کورتون آمد که در کناره‌ی خلیج تارنت در جنوب ایتالیا قرار دارد. آن‌جا در «کالابری» و به‌احتمالی در سیسیل، مجمع فلسفی ـ سیاسی فیثاغوریان را بنیان نهاد که آگاهی درباره‌ی آن‌ها از راه ارسطو به‌ما رسیده است و گمان می‌رود، این‌ها نخستین کسانی باشند که ریاضیات را همچون یک دانش ویژه، بررسی کرده باشند (خود من، به‌تازگی از کناره‌های «یونان بزرگ» برگشته‌ام و امید

داشتم، به‌گونه‌ای هوای فیثاغوریان را استنشاق کنم)، درست همان‌گونه که در سال ۱۴۵۳ میلادی، با اشغال قسطنطنیه به‌وسیله‌ی ترک‌ها، دانش بیزانسی به‌ایتالیا رفت، دو هزار سال پیش از آن هم، در حدود سال‌های ۵۵۰ پیش از میلاد، بعد از آن‌که کناره‌های آسیای صغیر را ایرانی‌ها گرفتند، مهاجران ایونی، دانش ایونی و بابلی را به‌غرب یونان، به‌ایتالیای جنوبی، جایی که در آن روزگار پوشیده از جنگل بود، انتقال دادند.

از فیثاغورس، و همان‌گونه بعدها از سقراط، هیچ نوشته‌ای باقی نمانده است. همه چیز در تاریکی رمزآمیزی پنهان است، در حالی که فیثاغوریان، که نوعی بستگی پیامبرانه با هم داشتند و به‌عدد و هم‌آهنگی با دید وجودهای مقدس می‌نگریستند، حتا تا زمان کپلر (۱۶۳۰-۱۵۷۱ میلادی)، بر ریاضی‌دانان پس از خود، تاثیر ژرفی گذاشته بودند.

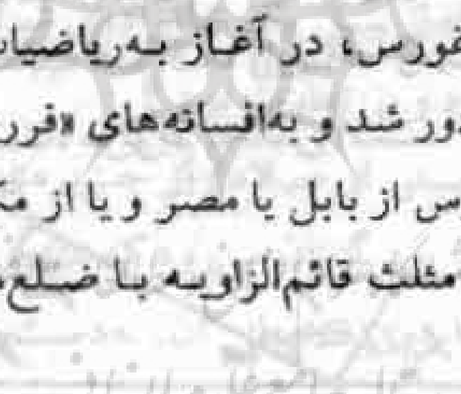
با همه‌ی این‌ها، حتا در همان زمان‌های باستانی هم، این نظریه‌ی عرفانی فیثاغورس، با سرزنش دیگران مواجه بود. از جمله، «هراکلیت» اهل «افه‌سوس»، هم‌زمان فیثاغورس ولی جوان‌تر از او، درباره‌ی او می‌نویسد:

«فیثاغورس، فرزند منه‌زارخ، بیش از هرکس دیگری به‌پژوهش پرداخته است. با این بررسی‌ها، حکمت ویژه‌ی خود را بیرون آورده است که پرمعنی و فریب‌دهنده است».

ارسطو هم نقل می‌کند که فیثاغورس، در آغاز به‌ریاضیات پرداخت و ویژگی عددها را بررسی می‌کرد، ولی بعدها از آن دور شد و به‌افسانه‌های «فرره دیک» نزدیک شد.

از جمله قضیه‌هایی که فیثاغورس از بابل یا مصر و یا از مکتب تالس گرفته است، «قضیه‌ی فیثاغورس» است که می‌گوید: در مثلث قائم‌الزاویه با ضلع‌های به‌طول a، b و c (شکل ۴) همیشه داریم:

$$a^2+b^2=c^2$$



شکل ۴

اثبات این قضیه از شکل ۴ (و از مدت‌ها پیش از آن، در چین، هند و بابل شناخته شده بود) روشن است و ثابت می‌کند:

$$c^2=4\cdot\frac{1}{2}ab+(a-b)^2=a^2+b^2$$

به‌ویژه مدت‌ها پیش از فیثاغورس (دست کم از دو هزار سال پیش از میلاد) مثلث با ضلع‌های به‌طول ۳ و ۴ و ۵ را می‌شناختند و کشاورزان برای ساختن زاویه‌های قائمه به‌یاری ریسمان، از آن استفاده می‌کردند. دورترین یادی که از قضیه‌ی فیثاغورس شده است، در شعرهای «آپولودار» ریاضی‌دان پیدا می‌شود که خیلی شناخته شده نیست. در این شعرها گفته می‌شود:

«وقتی که فیثاغورس توانست شکل مشهور قضیه‌ی خود را پیدا کند، به‌افتخار آن قربانی بزرگی داد...»

کشف عددهای گنگ به‌همین قضیه‌ی فیثاغورس مربوط می‌شود، یعنی کشف این مطلب که معادله‌ی $x^2=2$، جوابی‌گویا به‌صورت $x=\frac{p}{q}$ (p و q عددهایی درست‌اند) ندارد. یکی از هندسه‌دان‌ها را، که این آگاهی نگران‌کننده را به‌دیگران اطلاع داده بود، غرق کردند. احتمال دارد که نظریه‌ی فلسفی فیثاغورس به‌بازماندگان شرقی آن منتقل شده باشد. این امکان هم وجود دارد که خود ـ فیثاغورس، سفری به‌مصر کرده باشد.

کشف چندوجهی‌های منتظم هم، که به‌افتخار افلاتون «چندوجهی‌های افلاتونی» نامیده می‌شود (شکل‌های ۷ تا ۱۱ را ببینید)، به‌احتمال زیاد مربوط به‌فیثاغوریان است.

یکی از آخرین فیثاغوریان، «آرخمید» تارنتی بود که حدود سال ۳۶۰ پیش از میلاد مرد و به‌یاری او و اقلیدس و افلاتون، دانش ریاضیات به‌آتن رسید، شهری که «آکادمی افلاتون» در آن‌جا بنیان گذاشته شده بود. از این مکتب که «تئودیوس»، «اودوکسوس» و «مناخموس»، در سده‌ی چهارم پیش از میلاد، به‌آن منسوب‌اند، بعدها اقلیدس سر بر آورد.

«اتریکس» هندسه‌دان ایتالیایی (۱۸۹۱-۱۹۴۶ میلادی)، عقیده دارد که هندسه‌ی یونانی پیش از اقلیدس، برای پژوهنده‌ی تاریخ، پیش‌تر اهمیت دارد، زیرا اندیشه‌های اقلیدس، به‌ندرت سرچشمه‌ی معتبری پیدا می‌کنند.

۲. دوره‌ی اقلیدس

پیش از آن که به‌خود اقلیدس بپردازیم، نگاهی به‌وضع یونانِ آن زمان می‌اندازیم. از سال ۴۰۱ تا ۴۰۴ پیش از میلاد، جنگ‌های داخلی «پلوپونز» در یونان جریان داشت که شرح آن به‌وسیله‌ی «توسیدید» داده شده است. این جنگ چنان یونانی‌ها را ضعیف کرد که با وجود تهدید از خارج، نتوانستند با هم متحد شوند و قربانی هجوم «فیلیپ» مقدونی شدند (یکبار در «فروته» واقع در «به‌اوسی» در سال ۳۳۸ پیش از میلاد). بعد از آن که فیلیپ در سال ۳۳۶ پیش از

میلاد کشته شد، حکومت به‌پسر بزرگتر او اسکندر، پرورش یافته و شاگرد ارستو، رسید.

اسکندر در سال ۳۳۴ پیش از میلاد به‌طرف ایران لشکر کشید و سرزمین‌هایی از خاور نزدیک را گرفت و در نتیجه، فرهنگ یونانی، به‌سرزمین‌های ایرانی رسوخ کرد. بعد از مرگ اسکندر، (در سال ۳۲۳ پیش از میلاد)، امپراتوری او بین فرماندهانش تقسیم شد و مهم‌ترین بخش این امپراتوری، در مصر به‌وسیله‌ی بطلمیوس اداره می‌شد (با بطلمیوس، اخترشناس سده‌ی دوم میلادی که به‌کلادیوس مشهور و نویسنده‌ی «المجسطی» است، اشتباه نشود) که شهر با شکوه اسکندریه را، که به‌وسیله‌ی اسکندر ساخته شده بود، مرکز خود قرار دارد.

در زمان بطلمیوس دوم معروف به«فیلادلفوس» (یعنی محبوب پدر) که در سال‌های ۲۸۵ تا ۲۴۶ پیش از میلاد بر مصر حکومت می‌کرد، در مصر مرکزی برای الاهه هنر بنیان گذاشته شد. این نخستین مورد دولتی بود که در مصر، شبیه دانشگاه‌ها و فرهنگستان‌های امروزی برای مشاهده‌های اخترشناسی و بررسی‌های کالبدشکافی، امکان‌های کافی به‌وجود آمده بود. این مرکز کتاب‌خانه‌ی بزرگی داشت که شامل تعداد بسیار زیادی دست‌نویس از همه‌ی منطقه‌های جهان و از جمله، فرهنگ یونانی بود. و روشن است که به‌این ترتیب، اسکندریه به‌صورت مرکز سیاست، اقتصاد و فرهنگ جهان متمدن آن روز درآمد.

اسکندریه و موزه‌ی آن، بیش از پانصد سال، و تا زمانی که موزه‌ی آن به‌وسیله‌ی حامیان متعصب مسیحیت نابود شد، مرکز دانش و فرهنگ یونانی ماند. از همان زمان بطلمیوس اول، که از سال ۳۰۶ تا سال ۲۸۳ پیش از میلاد حکومت می‌کرد، فعالیت اقلیدس در اسکندریه آغاز شد و شاه‌کار خود «مقدمات» را در همان جا به‌وجود آورد.

«مقدمات» اقلیدس پر انتشارترین کتاب علمی است که تاثیری شگرف، عمیق و طولانی بر نسل‌های بعد از خود گذاشته است و تا سده‌ی بیست و یکم، به‌عنوان کتاب اصلی در آموزش هندسه‌ی دبیرستانی به‌شمار می‌رود. «مقدمات» در طول سده‌های متوالی، بارها و بارها چاپ شد، تفسیرهای متعدد بر آن نوشته و به‌بسیاری از زبان‌ها ترجمه شده است.

همان قدر که درباره‌ی مقدمات اقلیدس زیاد می‌دانیم، به‌همان اندازه چهره‌ی خود اقلیدس را کم می‌شناسیم؛ حتا گاهی مانند هومر، چهره‌ای افسانه‌ای به‌خود می‌گیرد: اغلب، این اقلیدس ریاضی‌دان را با اقلیدس فیلسوف اهل «مگارا» که در حدود سده‌ی پنجم پیش از میلاد می‌زیسته است، درهم می‌آمیزند.

دو روایت درباره‌ی اقلیدس وجود دارد:

جوانی از اقلیدس پرسید، سود هندسه چیست؟ اقلیدس به‌برده خود گفت، پولی به‌این جوان بدهید، زیرا او انتظار سود عملی و ملموس از هندسه دارد. این روایت نشان می‌دهد که

هندسه‌دانان یونانی تا چه اندازه از دانش‌های عینی و عملی متنفر بودند. البته، این موضوع مانع آن نشد که اقلیدس، کتابی درباره‌ی نور بنویسد. به‌ظاهر سقراط هم از این عقیده دفاع می‌کرد که ریاضیات بر همه‌ی دانش‌هایی که کاربرد عملی دارند، برتری دارد.

روایت دوم مربوط به‌اقلیدس را «پروکلس» دیادوخوس (دیادوخوس، در زبان یونانی، به‌معنی جانشین است. مترجم)، اهل بیزانس (قسطنطنیه - ۴۱۲-۴۸۵ میلادی) برای ما آورده است. بسیاری از آگاهی‌های مربوط به‌هندسه‌ی یونانی را مدیون همین پروکلس هستیم. بطلمیوس اول، پادشاه مصر، از اقلیدس می‌پرسد: آیا راهی ساده‌تر از «مقدمات در هندسه وجود ندارد؟ اقلیدس هندسه‌دان، پاسخ می‌دهد: نه، در هندسه، راه شاهانه وجود ندارد. البته، وقتی که در سده‌ی نوزدهم، هندسه‌ی تصویری کشف شد، معلوم شد که چنین راه شاهانه‌ای را می‌توان پیدا کرد.

بنابر آگاهی پروکلس، مقدمات اقلیدس، براساس کار مشترک گروهی جمعی از هندسه‌دان‌ها تنظیم شده است که از سال‌های ۳۷۰ تا ۳۵۰ پیش از میلاد، در آکادمی افلاتون انجام شده است، به‌این ترتیب «مقدمات» پیش از هر چیز، مجموعه‌ای است از آن چه، پیش از اقلیدس کشف شده بود، با وجود این، شامل چیزهای تازه‌ای هم هست. پروکلس می‌نویسد:

«اقلیدس با تنظیم مقدمات، بسیاری از قضیه‌های «اودوکسوس» را جمع‌آوری کرد، آن‌چه را که «تئودیوس» آغاز کرده بود تمام کرد و برای آن چه پیشینیان او پیدا کرده بودند، استدلال منطقی آورد».

معمول است که اثر اقلیدس را نقطه‌ی آغازی می‌پندارند که پیشرفت هندسه از آن، آغاز شده است. ولی در واقع، بهتر است آن را به‌عنوان جمع‌بندی نتیجه‌هایی دانست که در جریان سیصد سال در زمینه‌ی هندسه به‌دست آمده بود. این دوره‌ی سیصد ساله، از مکتب ایونی در آسیای صغیر (حدود سده‌ی ششم پیش از میلاد) آغاز می‌شود، سپس در ایتالیای جنوبی در سده‌ی پنجم پیش از میلاد، که به‌وسیله‌ی فیثاغوریان اداره می‌شد و سرانجام در آتن (آکادمی افلاتون) در سده‌ی چهارم پیش از میلاد، به‌کمال خود می‌رسد (اگر آغاز ریاضیات جدید را از زمان لایب نیتس (۱۶۴۶-۱۷۱۶ میلادی) بدانیم، هنوز سیصد سال از آن نگذشته است). کهن بودن «مقدمات» و بستگی کامل آن با مکتب فلسفی، دستاویزی برای «مفیستوفل» بوده است که بسراید:

«حال، آغاز کن تا خرد خود را آرام کنی
و آن را زیر اراده‌ی خود درآوری
تا با آرامش، بدون خیال‌بافی

دیدن این که شتاب کنی،
از پلکان اندیشه، بالا بروی،
تا خرد تو، در هر مسیری،
این‌جا و آن‌جا، به‌راه کج نرود».

به‌این ترتیب، هندسه‌ی اقلیدسی، از «اندازه‌گیری زمین» خیلی دورتر می‌رود و «عینی بودن» هم در آن، خیلی اندک است. در «مقدمات» برای نخستین بار «روش اصلی موضوعی» به‌کار رفته است که سرآغازی است برای منطقی کردن دانش‌ها براساس برخی حکم‌های ساده و بنیان غیرقابل اثبات.

فراگرفتن «مقدمات» اقلیدس، از جمله از «هندسه‌ی اصل موضوعی» هیلبرت (۱۸۹۹) از نظر علت‌یابی، پیچیده‌تر است. هیلبرت از این جهت توانست کار خود را ساده‌تر کند که حساب (یعنی عددهای حقیقی) را دانسته گرفته است. در نتیجه، اصل موضوعی کردن هندسه را براساس آموزش درباره‌ی عددها، طرح ریخته است، در حالی که اقلیدس برعکس او، می‌خواهد نظریه‌ی عددهای حقیقی را براساس هندسه، بنیان بگذارد که به‌مراتب کار را دشوارتر می‌کند.

۳. مقدمات

اکنون به‌شرح کوتاهی از مضمون مقدمات می‌پردازیم، این کتاب از ۱۳ بخش تشکیل شده، که بخش‌های دیگری هم به‌وسیله‌ی نویسندگان بعدی به‌آن افزوده شده است. بخش‌های ۱ تا ۶، به‌طور عمده از هندسه‌ی روی صفحه، بخش‌های ۷ تا ۱۰، از آموزش عدد و بخش‌های از ۱۱ تا ۱۳ از هندسه‌ی فضایی صحبت می‌کند.

بخش اول کتاب، شامل ۳ بخش مقدماتی است که عبارت‌اند از تعریف‌ها، پوستولاها و «حکم‌های کلی». در این‌جا، برخی از تعریف‌ها را می‌آوریم:

۱. نقطه چیزی است که هیچ جزیی ندارد؛
۲. خط عبارت است از درازایِ بدون پهنا؛
۳. خط به‌کمک نقطه‌ها، محدود می‌شود؛
۴. خط راست، خطی است که نسبت به‌همه‌ی نقطه‌های خود، به‌طور یکنواخت مرتب شده باشد؛
۵. سطح، تنها درازا و پهنا دارد؛
۶. سطح، به‌وسیله‌ی خط‌ها محدود می‌شود؛

۷. سطحی را صفحه گویند که نسبت به‌همه‌ی خط‌های راست خود، به‌طور یک نواخت مرتب باشد؛

و غیره.

۲۳. دو خط راستی که روی یک صفحه باشند، موازی نامیده می‌شوند که هر قدر آن‌ها را ادامه دهیم، به‌هم نرسند.

به‌این ترتیب، در این‌جا صحبت بر سر چیزی است از نوع هندسه عینی، چنان مفهوم‌هایی برمی‌شمرد که بعدها مورد استفاده قرار می‌گیرند. در آن چه برشمردیم، مفهوم عمیقی وجود دارد. در واقع تعریف‌های ۱، ۲، ۳، ۵ و ۶، مبنایی برای نظریه‌ی عددها شد که به‌وسیله‌ی «ل. براور» (که در ۱۸۸۱ زاده شد) و «ا. شپرنر» (که در ۱۹۰۵ زاده شد) طرح‌ریزی شد.[1] تعریف ۴ ناروشن و همچنین تعریف ۷ مبهم است و هیچ مفهوم دقیقی را نمی‌رسانند. کوشش‌هایی برای تغییر تعریف ۴ شد و خط راست را با این ویژگی که هر دو بخش دلخواه آن، «وضع مشابهی» نسبت به‌هم داشته باشند، معرفی شد. «هه رون» تعریف ۷ را، به‌این صورت تغییر داد: صفحه می‌تواند هر خطی را که از دو نقطه‌ی واقع بر آن می‌گذرد، دربر گیرد. این تعریف، از برخی جهت‌ها، مورد مخالفت «ک. ف. گوس» (۱۸۵۵-۱۷۷۷) قرار گرفت. گرچه این تعریف‌ها، به‌خودی خود سودمند بود، ولی به‌هر حال برای اصل موضوعی کردن هندسه، به‌اندازه‌ی کافی نارسا بودند. تنها هیلبرت (۱۸۶۲ - ۱۹۴۳) است که در «هندسه‌ی اصل موضوعی» خود، راهی را نشان داده بود که از طریق آن بتوان از سد هندسه‌ی اقلیدسی گذشت.

از همه قانع‌کننده‌تر پوستولاها است که بستگی مفهوم‌های خود را با تعریف‌ها نشان می‌دهد. پوستولاها بیان می‌کنند:

۱. از دو نقطه‌ی متفاوت درست یک خط راست می‌گذرد،

۲. هر خط راست را می‌توان به‌دلخواه ادامه داد[2]؛

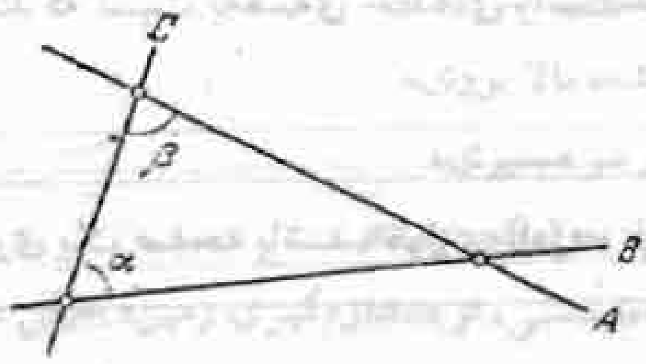
۳. در صفحه، درست یک دایره با مرکز و قطر معلوم، وجود دارد؛

۴. همه‌ی زاویه‌های قائمه، باهم برابرند؛

۵. اگر مجموع دو زاویه‌ی α و β از دو قائمه کوچکتر باشد (شکل ۵)، خط‌های راست A و B، در همان سمت راست خط راست C، به‌یکدیگر برمی‌خورند.

۱. در واقع، تعریف‌های ۱، ۲، ۳، ۵ و ۶ سرآغازی برای نظریه‌ی بعدهای «پ. س. اوریسون» (۱۸۹۸ - ۱۹۲۴) شد. تعریف بُعد به‌وسیله‌ی براور و شپرنر و نادرست‌تر از آن‌ها، به‌وسیله‌ی «آ. لبگ» (۱۸۷۵ - ۱۹۲۴) بر پایه‌ی دیگری قرار دارد. مترجم

۲. اقلیدس، اصطلاح‌های «پاره خط راست» با «نیم‌خط راست» و «خط راست» را از هم جدا نکرده است.



شکل ۵

این حکم آخری، در پیشرفت بعدی هندسه، نقش اساسی و مهمی به‌عهده داشته است. برپایه‌ی این حکم، حکم دیگری وجود دارد، مبنی بر این که خط راست C، صفحه را به‌دو «کناره» می‌برد. اگر به‌جای صفحه، کره را در نظر بگیریم و دو سر یکی از قطرهای آن را مشخص کنیم، و به‌جای خط‌های راست در صفحه، دایره‌های عظیمه‌ی کره را در نظر بگیریم، دیگر مفهوم «کناره‌ها» نیروی خود را از دست می‌دهد.

بسیاری از هندسه‌دان‌ها کوشش کردند تا پوستولای پنجم را از دیگر اصل موضوع‌های اقلیدس نتیجه بگیرند. ناممکن بودن این نتیجه‌گیری به‌وسیله‌ی کارل فردریک گوس (۱۸۵۰-۱۷۷۷)، یانوش بایای مجارستانی (۱۸۶۰-۱۸۰۲) و نیکلای ایوانویچ لباچوسکی (۱۸۵۶-۱۷۹۲) و از راه ساختن هندسه‌ی نااقلیدسی ثابت شد که در آن، همه‌ی بنیان‌های اقلیدسی، به‌جز پوستولای پنجم، وجود دارد. گوس، بایای و لباچوسکی، بدون ارتباط با هم، به‌هندسه‌ی نااقلیدسی رسیدند، ولی اندیشه‌های لباچوسکی بود که برای نخستین بار منتشر شد.

چند جمله از «فرض‌های عمومی» بخش اول کتاب اقلیدس را هم می‌آوریم که با توجه به‌نام‌گذاری اقلیدس و ارسطو، آن‌ها را آکسیوم هم می‌نامند؛ در واقع بین آکسیوم و پوستولا، تفاوت ماهیتی وجود ندارد. آکسیوم‌ها به‌این ترتیب‌اند:

۱. از $a=b$، $b=c$ نتیجه می‌شود: $a=c$؛

۲. از $a=b$ نتیجه می‌شود: $a+c=b+c$؛

۳. از $a=b$ نتیجه می‌شود: $a-c=b-c$؛

....

۷. چیزهایی که یکدیگر را می‌پوشانند، برابرند،

۸. کل از جزء خود بزرگ‌تر است.

همه‌ی این‌ها، تنها از نظر هندسی بررسی می‌شود. اگر از اصطلاح‌های امروزی استفاده

کنیم، در آکسیوم ۷، این اندیشه نهفته است که مفهوم برابری، باید نسبت به‌حرکت بی‌تغییر بماند، یعنی هم‌نهشتی شکل‌ها را باید به‌معنی برابری متری آن‌ها گرفت. درک روشن معنای حرکت در هندسه‌ی مقدماتی، بعد از سال ۱۸۷۰ و به‌یاری بررسی‌های «س. لی» و «ف. کلاین» به‌دست آمد. از جمله، مفهوم‌هایی که مربوط به‌قرارگرفتن و با مفهوم «بین» بیان می‌شود، به کلی در «مقدمات» اقلیدس وجود ندارد. این موضوع، خیلی بعد و به‌وسیله‌ی گوس، پاش، هیلبرت و باز هم بعد از آن‌ها، شپرنر روشن شده است.

سپس، در بخش اول کتاب «مقدمات» حکم‌ها و قضیه‌هایی آمده است که با اصل موضوع توازی بستگی دارند، مانند قضیه‌ی مربوط به‌مجموع زاویه‌های مثلث. در شماره‌ی ۴۷ این کتاب، قضیه‌ی فیثاغورس ثابت شده است. ناروشنی این اثبات، مورد سرزنش «شوپنهاور» قرار گرفته است که کوشش ناموفقی هم در تکمیل آن کرده است.

شوپنهاور، ساختگی بودن اثبات‌های هندسی، به‌ویژه اثبات اقلیدس از قضیه‌ی فیثاغورس را سرزنش می‌کند (در حالی که، اگر به‌مضمون آن دقت شود، به‌اندازه‌ی کافی منطقی است). او معتقد است، چنین استدلالی را می‌توان درباره‌ی هر حرکت فکری، با مراجعه‌ی به‌شکل انجام داد. از این دیدگاه، او حالت خاصی از قضیه‌ی فیثاغورس را (در مثلث متساوی‌الساقین) با دقت، ثابت کرد. به‌این ترتیب که مربعی روی وتر مثلث ساخت و آن را به‌یاری قطرهایش به‌چهار بخش تقسیم کرد و ثابت کرد، این بخش‌ها برابر است با نیمی از مربعی که روی ضلع مجاور به‌زاویه‌ی قائمه ساخته می‌شود.

در بخش دوم کتاب، به‌جز موضوع‌های دیگر، اثبات هندسی اتحاد

$$(a+b)^۲=a^۲+۲ab+b^۲$$

و در رابطه با آن حل معادله‌ی درجه دوم آمده است.

بخش سوم کتاب، به‌دایره مربوط است. در این‌جا قضیه‌ی تالس درباره‌ی زاویه‌ی محاط در نیم‌دایره آمده است.

قسمت عمده‌ی بخش چهارم کتاب «مقدمات» درباره‌ی ساختن چندضلعی‌های منتظم به‌یاری خط‌کش و پرگار است. این بخش، از کارهای فیثاغوریان مایه گرفته است. در این باره، بعدها «هه رون» (عدد یک سده پیش از میلاد) و بعد، ریاضی‌دانان ایرانی و بعدتر ایتالیایی‌ها در دوران رُنسانس، مانند «پیرو فرانچسکا» (۱۴۹۲-۱۴۱۰)، بعد آلمان‌ها، «آلبرخت دیورر» (۱۵۲۸-۱۴۷۱) و کپلر (۱۶۳۰-۱۵۷۱) در کتاب بزرگ خود به‌نام «هم‌آهنگی جهان» (۱۶۱۹) کارهای زیادی کردند. مساله‌ی مربوط به‌تقسیم دایره به‌بخش‌های برابر، به‌وسیله‌ی «کارل فردریک گوس» (۱۸۰۱) حل شد. او ثابت کرد، یک چندضلعی منتظم را تنها وقتی می‌توان

به‌یاری خط‌کش و پرگار رسم کرد که تعداد ضلع‌های آن تنها شامل عددهای فرد اول، به‌این صورت باشند:

$$p=2^{2^n}+1$$

یعنی، تعداد ضلع‌های چند ضلعی به‌صورت $2p_1p_2...p_k$ باشد که در آن P_i، عددهای مختلف اول به‌صورت $2^{2^i}+1$ و i و k عددهایی درست و مثبت‌اند. از جمله ۱۷ ضلعی منتظم را می‌توان ساخت، زیرا عدد ۱۷ به‌صورت $2^{2^2}+1$ است (گوس، این مطلب را در ۳۰ مارس ۱۷۹۶ ثابت کرد). بر آرامگاه گوس در شهر گوتینگن، یک ۱۷ ضلعی ستاره‌ای نقش بسته است.

در بخش‌های پنجم، هفتم و هشتم، از کمیت‌ها به‌صورت هندسی آن‌ها صحبت می‌شود، بختی که برای کشف عددهای گنگ ضروری است. در بخش هفتم کتاب، الگوریتم اقلیدس داده شده است که روش تعیین بزرگ‌ترین بخشیاب مشترک را به‌دست می‌دهد. در بخش ششم از تشابه‌ها و در بخش نهم از استقرای کامل، یعنی نتیجه‌گیری $n+1$ از n، صحبت شده است. در بخش دهم کتاب عددهای گنگ به‌یاری اندازه‌گیری پاره‌خط‌های راست، تفسیر می‌شود. در بخش دهم کتاب، نتیجه‌گیری‌های فیثاغوریان، نکته‌های انتقادی «زنون» (حدود ۴۶۰ پیش از میلاد) و بررسی‌های آکادمی افلاتون هم، گنجانده شده است.

بقیه‌ی بخش‌های یازدهم، دوازدهم و سیزدهم کتاب، به‌روشن کردن هندسه در فضا پرداخته است. این بخش‌ها، کامل نیستند (احتمال دارد که نویسنده نتوانسته است، آن‌ها را تمام کند، زیرا بلافاصله، بعد از نوشتن آن‌ها، از دنیا رفته است) و به‌صورت ناقص به‌ما رسیده است. موضوع اصلی این بخش‌ها، شرح ویژگی‌های جسم‌های منتظمی است که به«جسم‌های افلاتونی» مشهورند. این نام به‌دلیل آن است که در مکالمه‌های افلاتون از آن‌ها نام برده شده است. در بخش یازدهم، تلاشی برای اصل موضوعی کردنِ نقطه، خط راست و صفحه در فضا شده است. بخش دوازدهم، به‌محاسبه‌ی مساحت‌ها و حجم‌ها (به‌ویژه پیدا کردن حجم هرم) پرداخته است. سرانجام در بخش سیزدهم از جسم‌های افلاتونی صحبت می‌شود.

در این‌جا، نمونه‌هایی از روش‌هایی که در این بررسی‌های فضایی به‌کار رفته است، می‌آوریم. در این نمونه‌ها، از روش بیان و شیوه‌ی استدلالی که در زمان ما به‌کار می‌رود، پرهیز نکرده‌ایم.

۴. جسم‌های کوژ

p_1، p_2، ...، p_n را نقطه‌های ثابتی می‌گیریم (در این‌جا، منظور از p_i، شعاع حامل i امین نقطه است). در هر نقطه‌ی p_i، جرم $m_i \geq 0$ را قرار می‌دهیم و گرانیگاه (مرکز ثقل) دستگاه را به‌دست

می‌آوریم:

$$S=\frac{m_1p_1+m_2p_2+...m_np_n}{m_1+m_2+...+m_n}$$

اگر m_i همه‌ی مقدارهای غیرمنفی را اختیار کند، نقطه‌ی s شبکه‌ی محدب (کوژ) H را رسم می‌کند. اگر بین مجموعه‌ی M از نقطه‌های داده شده‌ی p_i، نقطه‌ای وجود داشته باشد که با کنار گذاشتن آن، H تغییر نکند، آن نقطه‌ی p_i را حذف می‌کنیم. بقیه‌ی نقطه‌ها، راس‌های شکل کوژ H خواهند بود.

ما تنها به‌حالتی علاقه‌مندیم که M، و بنابراین H، در یک صفحه واقع نباشند. در چنین حالتی، H یک چندوجهی با m وجه است. هر وجه در صفحه‌ای قرار دارد و قطعه‌ی کوژی را تشکیل می‌دهد که دست کم شامل سه نقطه از M است. بنابراین:

$$m\leq\frac{n(n-1)(n-2)}{1\times2\times3}$$

فرض کنید وجه h از جسم H، دارای r راس در صفحه‌ای مانند e باشد، در این صورت، این وجه در صفحه‌ی e دارای r راس است و به‌وسیله‌ی r یال از جسم H محصور شده است. دو یال مجاور، در یک راس p از وجه h (و خود جسم H) به‌هم می‌رسند و زاویه‌ی داخلی α را در این راس تشکیل می‌دهند ($0<\alpha<\pi$). زاویه‌ی متناظر خارجی در این راس، برابر $\pi-\alpha$ می‌شود که در آن π، طبق معمول برابر با دو قائمه است. مجموع زاویه‌های خارجی برابر است با چهار دو قائمه:

$$S(\pi-\alpha)=2\pi$$

اگر همه‌ی زاویه‌های داخلی با هم برابر باشند، از برابری اخیر نتیجه می‌شود:

$$r\alpha=\pi(r-2)$$

وجه h را منتظم گویند، وقتی که هر r ضلع و همه‌ی r زاویه‌ی داخلی آن برابر باشد. در هر یال k از جسم H، دو وجه جسم H، به‌هم می‌رسند. زاویه‌ی داخلی β ($0<\beta<\pi$) را که صفحه‌های این دو وجه با هم تشکیل می‌دهند، در نظر می‌گیریم. فرض کنید در راس p از جسم H، s یال به‌هم رسیده باشند ($3\leq s\leq n-1$). اگر همه‌ی زاویه‌های β که s یال متقارب در راس p تشکیل می‌دهند، با هم برابر باشند، و اگر همه‌ی زاویه‌های دو سطحی α که وجه‌های متقارب در p تشکیل می‌دهند، برابر یکدیگر باشند، در این صورت گویند در راس p، یک کُنج منتظم وجود دارد.

سرانجام، جسم H را وقتی منتظم گویند که همه‌ی وجه‌ها و همه‌ی کُنج‌های آن منتظم باشد؛ در ضمن عدد r، یعنی تعداد ضلع‌های هر وجه مقداری ثابت و برای همه‌ی وجه‌ها یکی باشد؛ همچنین تعداد s یالی که در هر راس به‌هم رسیده‌اند، برای همه‌ی راس‌ها، یکی باشد. در این

صورت برای هر وجه داریم:

$$s\alpha=\pi(\pi-۲)$$

و برای هر راس

$$s\alpha<۲\pi$$

از این دو رابطه نتیجه می‌شود:

$$\frac{۲+r}{S}>(r-۲)\pi$$

و بنابراین

$$rs<۲(r+s)$$

در ضمن فرض می‌کنیم: $۲<\sigma$ و $s>۲$ برای این که جواب‌های درست سه نابرابری اخیر را پیدا کنیم، فرض می‌کنیم:

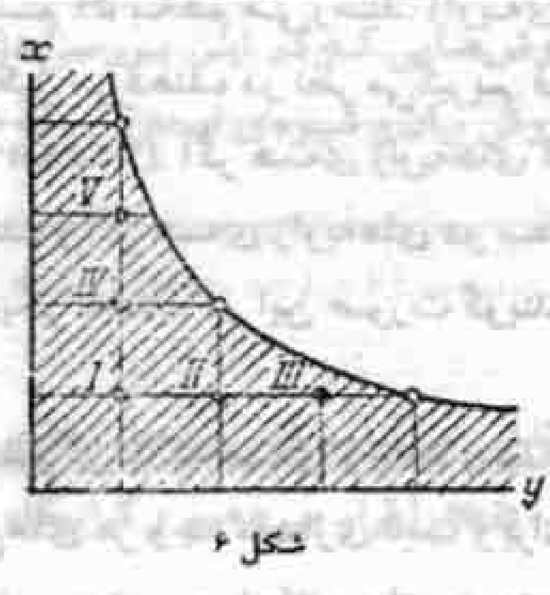
$$r=x+۲ \text{ و } s=y+۲$$

در این صورت، برای x و y به‌دست می‌آید:

$$x>۰,\ y>۰,\ xy<۴$$

این نابرابری‌ها را می‌توان در صفحه‌ی (x,y)، به‌وسیله‌ی مثلثی نشان داد که به‌هر دو محور و یکی از شاخه‌های یک هذلولی محدود شده است (شکل ۶). در این مثلث، پنج نقطه با مختصات درست وجود دارد، یعنی

	I	II	III	IV	V
x	۱	۱	۱	۲	۳
y	۱	۲	۳	۱	۱
r	۳	۳	۳	۴	۵
s	۳	۴	۵	۳	۳



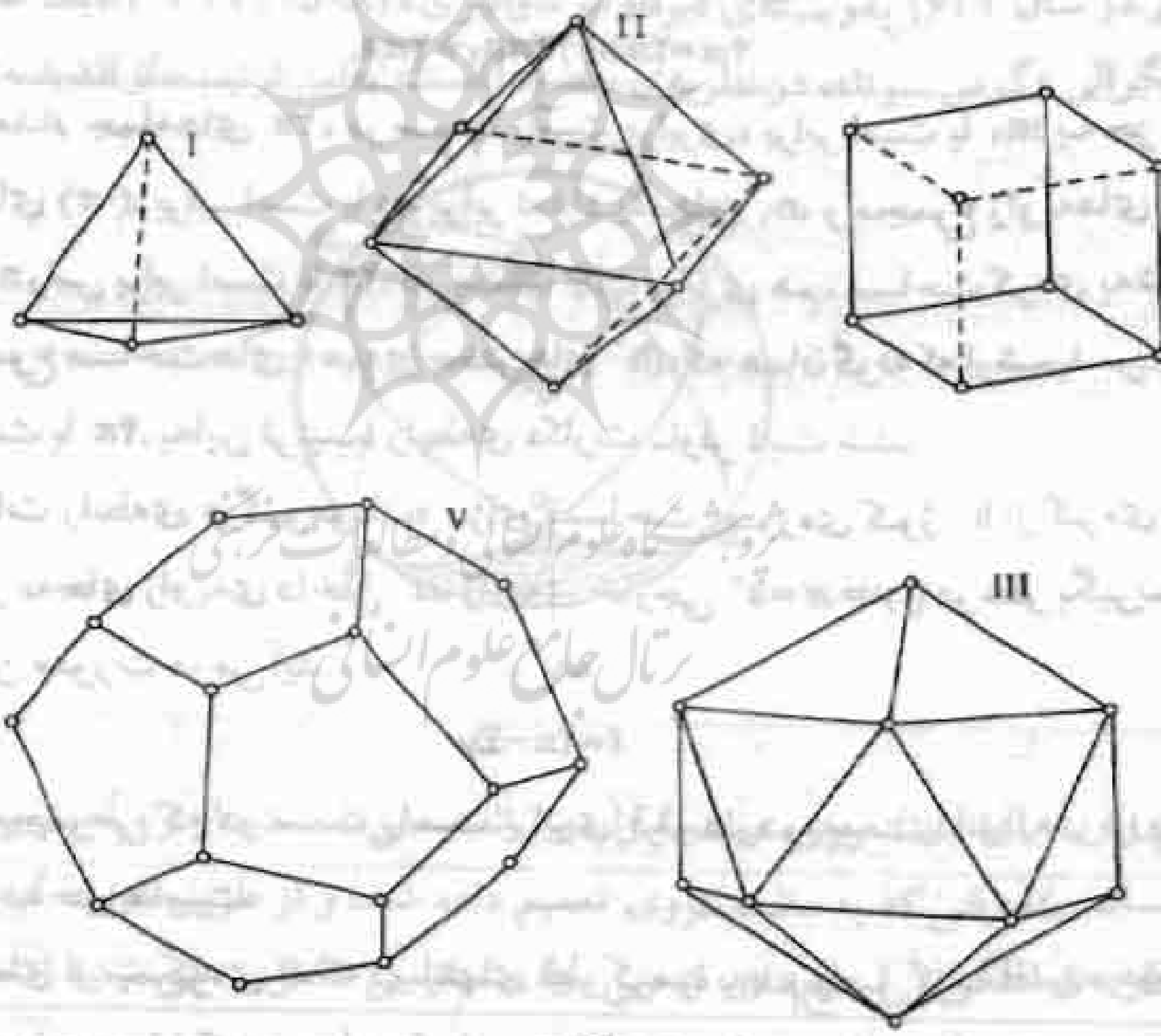
شکل ۶

و متناظر با آن‌ها، می‌توان پنج جسم منتظم افلاتونی را به‌دست آورد. اگر n_0، n_1 و n_2 را به‌ترتیب تعداد راس‌ها، یال‌ها و وجه‌های چندوجهی بگیریم، به‌جدول زیر می‌رسیم.

	I	II	III	IV	V
n_0	۴	۶	۱۲	۸	۲۰
n_1	۶	۱۲	۳۰	۱۲	۳۰
n_2	۴	۸	۲۰	۶	۱۲

که در آن، I با چهاروجهی، II با ۸ وجهی، III با ۲۰ وجهی، IV با ۶وجهی (مکعب) و V با ۱۲ وجهی منتظم متناظر است (شکل ۷). در هر پنج حالت، این رابطه برقرار است:

$$n_0 - n_1 + n_2 = 2$$



شکل ۷

اکنون، با پیروی از رنه دکارت (۱۵۹۶ - ۱۶۵۰) و لئونار اولر (۱۷۰۷-۱۷۸۳) ثابت می‌کنیم،

این رابطه درباره‌ی هرچندوجهی کوژ H درست است، چندوجهی‌هایی که پیش از این، آن‌ها را به‌صورت شبکه‌ی کوژی از n نقطه درنظر گرفتیم. برای این منظور، نقطه‌ی O را در درون جسم H درنظر می‌گیریم. به‌مرکز O و شعاع واحد، کره‌ی S را رسم می‌کنیم و با رسم شعاع‌هایی که در O به‌هم می‌رسند، وجه‌های جسم را بر این کره تصویر می‌کنیم. به‌این ترتیب، روی کره‌ی S، $n_\circ$ «راس» p^*_i (تصویر راس p_i از چندوجهی H روی سطح کره) به‌دست می‌آید که به‌وسیله‌ی n_1 کمان دایره‌ی عظیمه به‌هم مربوط شده‌اند. این کمان‌ها، S را به n_2 بخش کوژ (چندضلعی‌های کروی) تقسیم می‌کنند که همان تصویر وجه‌های H هستند. اگر h^* یکی از این بخش‌ها روی S، و α^* زاویه‌ی راس آن باشد، مساحت f بخش h^* برابر است با:

$$f=2\pi-\Sigma(\pi-\alpha^*)$$

که در آن، باید مجموع را برای همه‌ی راس‌های بخش h^* در نظر گرفت. این رابطه مربوط به «ی. مولیر» (۱۴۷۶-۱۴۳۶) است (که به‌نام «رگیومونتان» مشهور شده است). او در «کینگسبرگ» متولد شد و زمان کوتاهی را در وین، نورنبرگ ورم زندگی کرد. اگر مجموع همه‌ی n_2 بخش کره‌ی S را به‌دست آوریم، با توجه به‌رابطه‌ی اخیر به‌دست می‌آید:

$$4\pi=2\pi n_2-2\pi n_1+2\pi n_\circ$$

در واقع، تعداد جمله‌های 2π، در سمت راست برابری، برابر است با n_2؛ به‌جز آن تعداد همه‌ی جمله‌های $(-\pi)$، برابر است با دو برابر تعداد یال‌های n_1، و مجموع زاویه‌های داخلی α^* در هر یک از $n_\circ$ راس برابر است با 2π. در سمت چپ برابری هم، مساحت کره‌ی به‌شعاع واحد قرار دارد (مجموع مساحت‌های f همه‌ی بخش‌های h^*)، که همان گونه که ارشمیدس ثابت کرده است، برابر است با 4π. به‌این ترتیب، رابطه‌ی دکارت ـ اولر ثابت شد.

اکنون به‌اثبات رابطه‌ی «رگیومونتان» برای مساحت حوزه‌ی کوژ h^* از کره‌ی واحد S، می‌پردازیم. اگر به‌جای زاویه‌ی داخلی α^* زاویه‌ی خارجی $\gamma=\pi-\alpha^*$ را در نظر بگیریم، رابطه‌ی مورد نظر، به‌این صورت درمی‌آید:

$$f=2\pi-\Sigma\gamma$$

در این‌جا، مجموعی که در سمت راست برابری قرار دارد، به‌معنای اندازه‌ی دوران، ضمن دور زدن محدوده حوزه است.

اگر نیم‌دایره‌ای از نیمکره‌ی S، که دو انتهای قطر کره را به‌هم وصل کرده است، دور قطر کره به‌اندازه‌ی زاویه‌ی γ دوران کند، سطح f_γ را می‌پوشاند که با γ متناسب است. چون $f_{2\pi}=4\pi$ بنابراین:

$$f_\gamma=2\gamma$$

اکنون، اگر صفحه‌ی e، بر جسم کوژی که از وصل همه‌ی نقطه‌های h^* به‌نقطه‌ی O، مرکز کره، به‌دست می‌آید، «بغلتد»، دایره‌ی عظیمه‌ای که این صفحه را از S جدا می‌کند، سطحی از S را می‌پوشاند که برابر است با:

$$\Sigma f_{\gamma}=2\Sigma\gamma$$

این مساحت، همه‌ی کره را به‌جز بخش h^* و «بخش مقابل» آن که از قرینه‌ی h^* نسبت به O به‌دست می‌آید، می‌پوشاند (شکل ۸). از این‌جا خواهیم داشت:

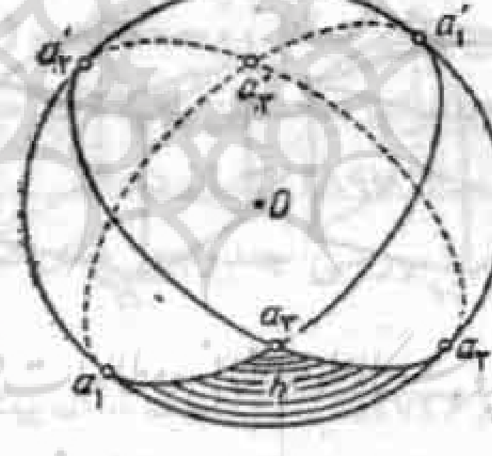
$$4\pi=2f+2\Sigma\gamma$$

که از آن‌جا، درستی حکم ثابت می‌شود.

در حالت خاص، وقتی h^* یک مثلث با زاویه‌های داخلی $\alpha_i=\pi-\gamma$ باشد، به‌دست می‌آید:

$$f=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\pi$$

مقداری را که در سمت راست برابری قرار دارد، زیادتی کروی گویند، زیرا در واقع نشان می‌دهد، مجموع زاویه‌های مثلث، چقدر از π تجاوز کرده است. این رابطه، که به‌ظاهر برای نخستین بار در سال ۱۶۳۲ به‌وسیله‌ی «بوناونتو کاوالیری» (۱۵۹۸-۱۶۴۷) ثابت شد، ساده‌ترین رابطه‌ی انتگرالی «گوس-بونا»، در نظریه‌ی سطح‌ها است. به‌این ترتیب، از اندیشه‌ی فیثاغوری،



شکل ۸

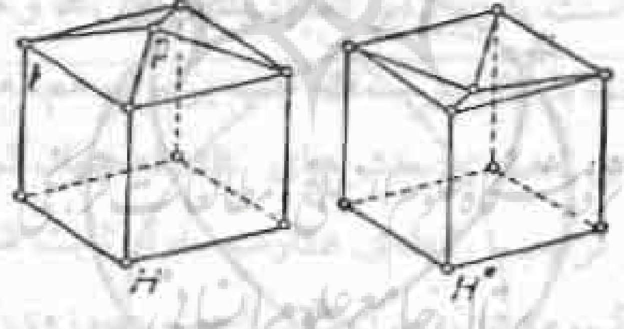
که مجموع زاویه‌های مثلث روی صفحه را دو قائمه می‌دانست، از راه آغاز و پایان دوره‌ی نوزایی (رنسانس)، وقتی که به‌حالت کروی تعمیم داده شد، و از طریق دوران گوس و کشف او درباره‌ی نظریه‌ی انتگرالی سطح‌های منحنی، راه مستقیمی تا امروز طی شده است.

۵. یک حکم اقلیدس درباره‌ی چندوجهی‌ها

در حالت دیگری هم، می‌توانیم چنین رابطه‌ی عمیقی را بین نتیجه‌گیری‌های تازه، با موفقیت‌هایی که در طول دو هزار سال و از زمان اقلیدس به‌دست آمده است، پیدا کنیم. در

تعریف‌های ۹ و ۱۰ از بخش یازدهم کتاب «مقدمات»، به‌تقریب این حکم وجود دارد که، دو سطح وقتی هم‌نهشت‌اند که به‌وجه‌های هم‌نهشت محدود شده باشند. درباره‌ی مفهوم این بیان بیش‌تر دقت کنیم.

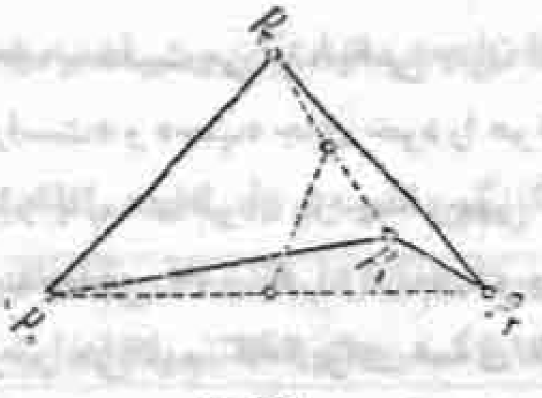
برای نمونه مکعب W را به‌مرکز O در نظر می‌گیریم و نقطه‌ی p را در خارج W، انتخاب می‌کنیم، به‌گونه‌ای که اگر مکعب W را دور op (که از راس مکعب نمی‌گذرد) به‌اندازه‌ی $\frac{\pi}{4}$ دوران دهیم، مکعب W بر خودش قرار گیرد. شبکه‌ی کوژ W و p جسم کوژ H است که یک بنا و شیروانی آن را به‌یاد می‌آورد (شکل ۹). وجه‌های این جسم تشکیل شده است از ۵ مربع و ۴ مثلث که در p به‌هم می‌رسند. به‌کمک H، چندوجهی H^* را درست می‌کنیم که در آن ۵ مربع به‌جای خود باقی باشند و به‌جای ۴ مثلث، قرینه‌ی آن‌ها را نسبت به‌وجه ششم مکعب به‌دست آورده باشیم. اگر فاصله‌ی p از مکعب، کم‌تر از ضلع مکعب باشد، H^*هم جسم بسته‌ای خواهد بود که البته کوژ نیست. این جسم را می‌توان از W با جدا کردن مربعی به‌دست آورد. روشن است H و H^*، وجه‌های هم‌نهشتی دارد، یعنی وجه‌های این دو جسم می‌توانند نظیر به‌نظیر یکدیگر را بپوشانند، در حالی که خود H و H^* هم‌نهشت نیستند.



شکل ۹

با توجه به‌این نمونه‌ی ساده، روشن می‌شود که حکم اقلیدس، اگر دقیق‌تر نشود، درست نیست. به‌سادگی معلوم می‌شود که در این نمونه، نمی‌توان با یک حرکت پیوسته، از H به H^* رسید، به‌گونه‌ای که ردیف وجه‌های هم‌نهشت، حفظ شده باشد. ممکن است با شرط انتقال پیوسته، حکم اقلیدس را از نارسایی نجات داد ولی این شرط اضافی هم دشواری را حل نمی‌کند. به‌این نمونه توجه کنید.

چهار ضلعی فضایی (چهار ضلعی چپ) با راس‌های P_0، P_1، P_2 و P_3 را با ضلع‌هایی که طولی برابر دارند، در نظر می‌گیریم (شکل ۱۰). در این چهارضلعی، قطرهای P_0P_2 و P_1P_3 متنافر و متعامدند.



شکل ۱۰

بنابراین می‌توانیم صفحه‌ی L_{02} را که شامل P_0P_2 است، عمود بر P_1P_3 و همچنین صفحه‌ی e_{13} را که شامل P_1P_3 است، عمود بر P_0P_2 رسم کنیم. در ضمن نقطه‌های P_1 و P_3 نسبت به‌صفحه‌ی e_{02} قرینه‌ی یکدیگر می‌شوند. P_4 را نقطه‌ی دیگری در صفحه‌ی e_{13} و P_5 را نقطه‌ی قرینه‌ی آن نسبت به‌صفحه‌ی L_{02} می‌گیریم. نقطه‌ی P_4 (و هم نقطه‌ی P_5) را، به‌یاری چهار مثلث، به‌ضلع‌های چهارضلعی چپ مفروض، وصل می‌کنیم. ۸ مثلثی که به‌این ترتیب به‌دست می‌آید، با هم چندوجهی A را تشکیل می‌دهند که وجه‌های آن همان وجه‌های هشت‌وجهی منتظم است. این که این چندوجهی خودش را قطع کرده است، نباید ما را ناراحت کند. می‌توان تصور کرد، ۱۲ یال چندوجهی از مفتول‌هایی درست شده است که در راس‌های P به‌هم لولا شده‌اند. به‌سادگی معلوم می‌شود که می‌توان A را، به‌صورت پیوسته تغییر شکل داد، بدون این که طول یال‌های آن تغییر کند، در نتیجه‌ی این تغییر شکل، وجه‌ها هم (که مثلثی شکل‌اند) تغییر نمی‌کنند. این هشت‌وجهی متحرک را، برای نخستین بار، «ک. سته فانوس» یونانی (۱۸۵۷-۱۹۱۷) و «د. بریکار» فرانسوی (در سال ۱۸۹۷) نشان دادند.

پرسشی پیش می‌آید: آیا می‌توان با بررسی چندوجهی‌های کوژ، درستی حکم اقلیدس را تضمین کرد؟

در سال ۱۸۱۲ میلادی، لاگرانژ (۱۸۱۳-۱۷۳۶)، یک سال پیش از مرگ خود، این مساله را در برابر «کوشی» جوان (۱۸۵۷-۱۷۸۹) قرار داد. کوشی اثبات بسیار جالبی برای این فرضیه پیدا کرد که کوتاه شده‌ی آن را در این‌جا می‌آوریم. با این نمونه، یک‌بار دیگر این حقیقت تایید می‌شود که بیش‌تر اندیشه‌های تازه، از ریاضی‌دانان جوان زاییده می‌شود و البته، وجود ریاضی‌دانان کهن‌سال هم، به‌عنوان ماماهایی که این اندیشه‌ها را می‌آفرینند، سودمند و لازم است.

V را یک چندوجهی کوژ، یعنی محدوده‌ای که از یک شبکه‌ی کوژ از مجموعه‌ی محدودی نقطه‌ها، و V^* را چندوجهی کوژ دیگری می‌گیریم، به‌گونه‌ای که نگاشت آن به‌صورت پیوسته و یک به‌یک به‌روی V ممکن باشد و این که هر وجه چندوجهی V، با وجه متناظرش در V^* هم‌نهشت باشد، باید ثابت کنیم که حرکت با انعکاس منحصری وجود دارد که این نگاشت V بر V^* را ممکن سازد. در این‌جا منظور از «انعکاس»، نگاشتی است که در نتیجه‌ی اجرا کردن

به‌تعداد فرد، تقارن نسبت به‌صفحه، به‌دست می‌آید، یعنی چنان انعکاسی که ضمن آن طول‌ها ثابت می‌مانند، ولی مفهوم‌های «راست» و «چپ» جای خود را عوض می‌کنند.

k را یالی از چندوجهی V، k^* را یال متناظر آن در چندوجهی V^*، β را $(0<\beta<\pi)$ زاویه‌ی دووجهی به‌راس یک یال k در چندوجهی V، و β^* را زاویه‌ی دو وجهی آن در چندوجهی V^* می‌گیریم. برای کوتاه شدن کار فرض می‌کنیم $\beta\neq\beta^*$ برای همه‌ی kها در V، و روشن است این وضع تنها در حالتی پیش می‌آید که V راس‌هایی نداشته باشد که در آن‌ها، تنها سه یال به‌هم رسیده باشند. در حالتی که داشته باشیم $\beta<\beta^*$ یال k از چندوجهی V را مثبت و در حالت عکس منفی می‌نامیم.

در این صورت، بنابر اثبات کوشی، این پیش قضیه درست است (که ما اثبات آن را نمی‌آوریم). ضمن دور زدن همه‌ی یال‌هایی که در یک راس V به‌هم رسیده‌اند، دست کم چهار تغییر علامت پیش می‌آید، یعنی دست کم چهار زاویه‌ی مسطحه در این راس پیدا می‌شود که در هر کدام از آن‌ها، ضلع‌ها دارای علامت‌های مختلف هستند.

اکنون با دو روش، این زاویه‌های مسطحه‌ی چند وجهی V را با ضلع‌هایی که دارای علامت‌های مختلف هستند، محاسبه می‌کنیم و آن را به‌تناقض می‌کشانیم. a_3، a_4، a_5،... را تعداد مثلث‌ها، چهارضلعی‌ها، پنج‌ضلعی‌ها،...، در وجه‌های V فرض می‌کنیم. در این صورت، تعداد وجه‌های چندوجهی V (که آن را به n_2 نشان میدهیم) برابر است با:

$$n_2=a_3+a_4+a_5+\dots$$

اگر تعداد یال‌های این چندوجهی را n_1 بگیریم، باید داشته باشیم:

$$2n_1=3a_3+4a_4+5a_5+\dots$$

در ضمن، بنابر دستور دکارت ـ اولر داریم:

$$n_0-n_1+n_2=2$$

از این سه برابری برای n_0 (تعداد راس‌های چندوجهی V) به‌دست می‌آید: $2n_0=4+a_3+2a_4+3a_5+\dots$ با توجه به‌پیش قضیه‌ی کوشی، می‌توان از این نابرابری یک نابرابری برای w (تعداد زاویه‌های مسطحه با ضلع‌هایی که علامت مختلف دارند) پیدا کرد: $w\geq 4n_0=n+2a_3+4a_4+6a_5+\dots$ از طرف دیگر وقتی یک وجه مثلثی شکل از چندوجهی V را دور بزنیم حداکثر دو تغییر علامت پیدا می‌شود، ضمن دور زدن یک چهارضلعی، تعداد تغییر علامت‌ها از ۴ تجاوز نمی‌کند، به‌همین ترتیب می‌توان تعداد زاویه‌های مسطحه را ضمن دور زدن پنج‌ضلعی و غیره تخمین زد. از این‌جا به‌دست می‌آید:

$$W<2a_3+4a_4+5a_5+6a_6+\dots$$

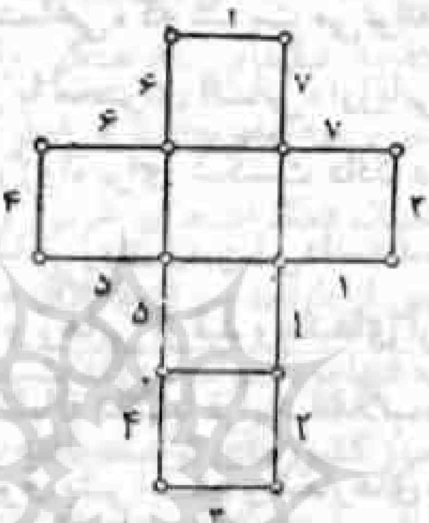
که به‌روشنی نابرابری پیشین را نقض می‌کند.

با توجه به‌همین قضیه بود که کوشی به‌وجود پیش‌قضیه‌ای که آوردیم، پی برد و آن را تنظیم

کرد. همان‌طور که کوشی نشان می‌دهد، اثبات این پیش‌قضیه را می‌توان با روشی عینی به‌دست آورد.

در کنار قضیه‌ی مربوط به‌یگانگی، قضیه‌ی وجودی هم ظاهر می‌شود. برای این که این قضیه را منظم کنیم، به‌موضوعی می‌پردازیم که در هندسه‌ی مقدماتی، گستردن چندوجهی نامیده می‌شود. برای نمونه در شکل ۱۱ گسترده‌ی مکعب را داده‌ایم، یعنی مرزهای آن را مشخص کرده‌ایم و نشان داده‌ایم، این مرزها چگونه به‌هم چسبیده‌اند.

در گسترده به‌هر یال دوبار برخورد می‌کنیم و برای این که چندوجهی کوژ باشد، باید مجموع زاویه‌های داخلی که از وصل راس‌ها به‌یکدیگر به‌دست می‌آید، از چهار قائمه کم‌تر باشد. سرانجام باید این اندیشه را دنبال کرد که گسترده‌ی ما، سطح جهت‌داری را معین کند. جهت‌دار بودن سطح به‌این معنا است که در هر دو وجه سطح می‌توان چنان جهتی را برای حرکت در نظر



شکل ۱۱

گرفت که یال مشترک این دو وجه، با دو جهت مخالف هم، در این دو وجه، باشد.

خود به‌خود این پرسش پیش می‌آید: آیا این قضیه‌ی وجودی درست نیست: برای هرگسترده‌ی بسته‌ی جهت‌دار که درباره‌ی آن، شرط $\sum\alpha < 2\pi$ (برای زاویه‌هایی که در یک راس به‌هم می‌رسند) و قضیه‌ی اولر برقرار است $(n_0 - n_1 + n_2 = 2)$ یک چندوجهی کوژ وجود دارد؟

پیش‌رفت‌ها و قضیه‌های بعدی درباره‌ی این موضوع، به‌ترتیب به‌یاری بررسی‌های گوس (۱۸۲۷)، ف. مین دین گا (۱۸۳۸)، ای. ژله (۱۸۵۴)، گ. لیب‌مان (۱۸۹۹)، ک. مین کووسکی (۱۹۰۰)، د. هیلبرت (۱۹۰۱)، س. کن فومن (۱۹۰۷)، آ. و پوگورلوف (۱۹۴۹)، چه ژن - تیمن شن (۱۹۵۱) و بسیاری دیگر از ریاضی‌دان‌ها، انجام گرفت که از تفصیل درباره‌ی آن می‌گذریم.

و به‌این ترتیب، می‌بینیم، اندیشه‌ای را که اقلیدس مطرح کرده بود، توانست راهی برای پیشرفت هندسه، تا زمان ما، بگشاید.