از تاریخ دانش و فن

عددهای فیبوناچی

پرویز شهریاری

در سال ۱۲۰۲ میلادی «لئوناردو فیبوناچی»، دنباله‌ی عددهای

۱ , ۱ , ۲ , ۳ , ۵ , ۸ , ۱۳ , ...

را بررسی کرد. در این دنباله، از جمله‌ی سوم به‌بعد، هر جمله برابر است با مجموع دو جمله‌ی پیش از آن:

$$\varphi_1=\varphi_2=1,\ \varphi_{n+2}=\varphi_{n+1}+\varphi_n$$

با کمک این رابطه، می‌توان هرچند جمله از دنباله را پیدا کرد.

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
φ_n	۱	۱	۲	۳	۵	۸	۱۳	۲۱

n	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶
φ_n	۳۴	۵۵	۸۱	۱۴۴	۲۳۳	۳۷۱	۶۱۰	۹۸۷

دنباله‌ی فیبوناچی در بسیاری مسأله‌ها پیدا می‌شود و ویژگی‌های جالبی دارد. برای نمونه به‌این عبارت‌ها توجه کنیم:

$$1,\quad 1+\frac{1}{1}=\frac{2}{1},\quad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}=\frac{3}{2},$$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}=\frac{5}{3},$$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}=\frac{8}{5},$$

هر کسر مسلسل، کسری به‌صورت $\frac{\varphi_n+1}{\varphi_n}$ به‌وجود می‌آورد. این شگفتی ندارد، چراکه:

$$1+\cfrac{1}{\cfrac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}}=1+\frac{\varphi_n}{\varphi_{n+1}}=$$

$$=\frac{\varphi_{n+1}+\varphi_n}{\varphi_{n+1}}=\frac{\varphi_{n+2}}{\varphi_{n+1}}$$

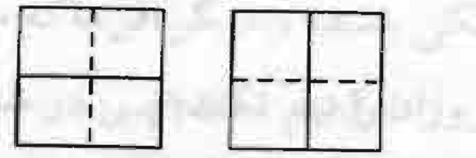
نمونه‌ی دیگر. تلاش کنید، به‌این پرسش پاسخ بدهید: به‌چند راه می‌توان نوار $2\times n$ را به‌نوارهای 1×2 تقسیم کرد؟ وقتی، n عدد کوچکی باشد، می‌توان همه‌ی حالت‌ها را رسم کرد: تعداد روش‌های تقسیم را $f(n)$ می‌گیریم؛ روی شکل‌های ۱ تا ۴ می‌بینیم:

$$f(1)=1,\ f(2)=2,\ f(3)=3,\ f(4)=5$$

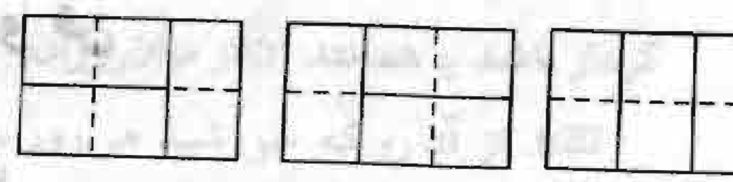
(روی شکل‌ها، خط‌های کامل، نشانه‌ی بُرش و خط‌های راست نقطه‌چین نشانه‌ی عدم بُرش است).

مقدار $f(5)$ را چگونه پیدا کنیم؟ خیلی ساده است: خانه‌ی بالا و سمت چپ که تشکیل مستطیل 1×2 را می‌دهد، یا قائم است (شکل ۵)، یا افقی (شکل ۶)، یعنی حالت‌های

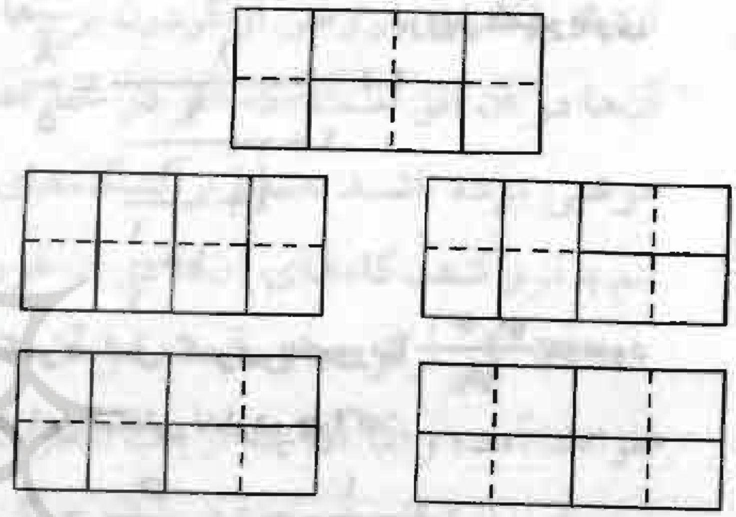
شکل ۱



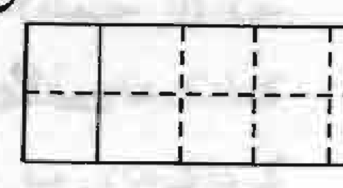
شکل ۲



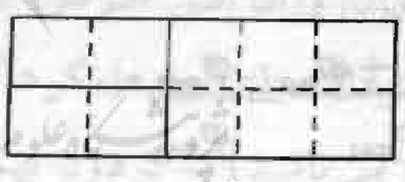
شکل ۳



شکل ۴



شکل ۵



شکل ۶

$f(5)$ از حالت‌های $f(4)$ شکل ۵، و حالت‌های $f(3)$ شکل ۶ تشکیل شده است، بنابراین:

$$f(5)=f(4)+f(3)=5+3=8$$

به‌طور کلی، برای هر $n>1$، این رابطه‌ی بازگشتی درست است:

$$f(n+1)=f(n)+f(n-1)$$

چون $f(1)=\varphi_1$ و $f(2)=\varphi_3$ پس به‌طور کلی

$$f(n)=\varphi_{n+1}$$

اکنون روشن می‌کنیم، چند عدد n رقمی شامل رقم‌های ۲ و ۵ هستند که در آن‌ها، هیچ دو رقم ۲، در کنار هم قرار نگرفته باشند؟ تعداد مجهول را با $g(n)$ نشان می‌دهیم. روشن است $g(1)=2$ و $g(2)=3$ (عددهای ۲۵، ۵۲ و ۵۵). عددهای سه رقمی هم به‌سادگی محاسبه می‌شود: ۲۵۲، ۲۵۵، ۵۲۵، ۵۵۲ و ۵۵۵ یعنی $g(3)=5$. ولی حتا این مقدار لازم نیست. مهم این است که هر عدد $(n+1)$ رقمی مورد علاقه‌ی ما، یا با ۲ و یا با ۵ آغاز شده باشد، در حالت اول، باید بعد از ۲، رقم ۵ آمده باشد و بعد از آن هریک از عددهای $g(n-1)$؛ در حالت دوم، هیچ‌کدام از پنج‌ها تشکیل نمی‌دهند، به‌نحوی که هرکدام از حالت‌های $g(n)$ به‌درد می‌خورند.

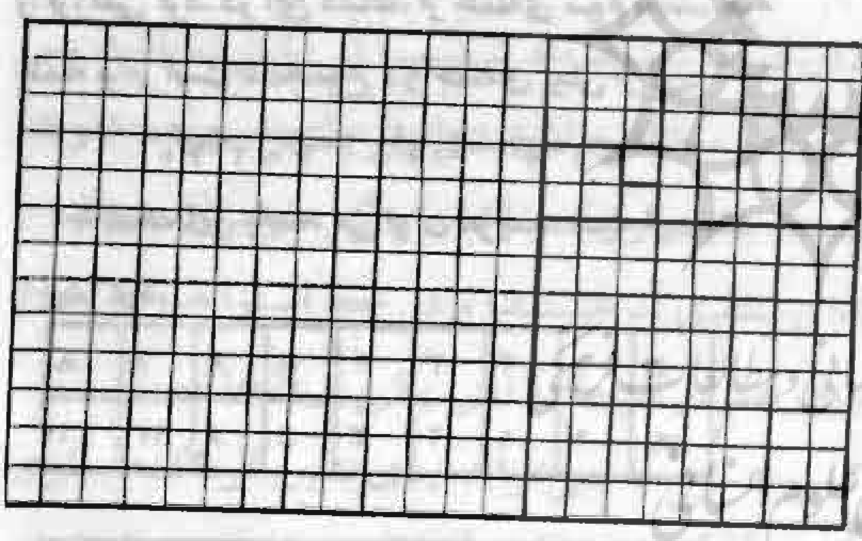
به‌این دستور برگشتی می‌رسیم:

$$g(n+1)=g(n-1)+g(n)$$

که با دستور فیبوناچی سازگار است. چون $g(1)=\varphi_3$ و $g(2)=\varphi_4$، پس

$$g(n)=\varphi_{n+2}$$

و دوباره، دنباله‌ی فیبوناچی.



شکل ۷

در شکل ۷، عددهای فیبوناچی، با طول‌های ضلع‌های دنباله‌ی مربع‌ها روی خانه‌ها نشان داده شده است. از این شکل به‌روشنی دیده می‌شود:

$$\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2+\dots+\varphi_n^2=\varphi_n\cdot\varphi_{n+1}$$

بین عددهای فیبوناچی، این رابطه‌های جالب وجود دارد:

$$\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\dots+\varphi_n=\varphi_{n+2}-1$$

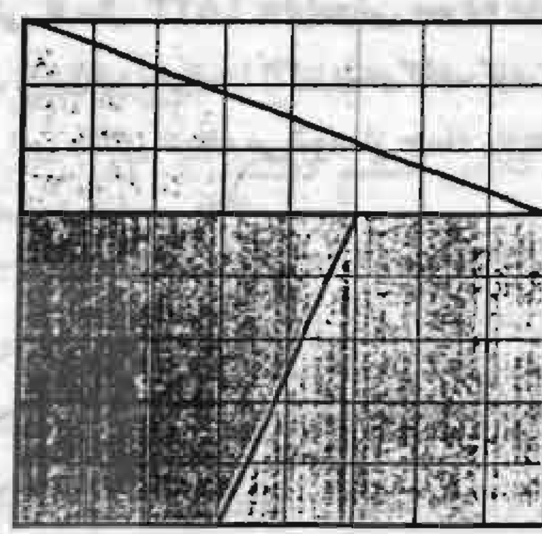
$$\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\dots+\varphi_{2n-1}=\varphi_{2n}$$

$$\varphi_2 + \varphi_4 + \varphi_6 + \ldots + \varphi_{2n} = \varphi_{2n-1} - 1;$$
$$\varphi_n + \varphi_{n-1} - \varphi^2_n = (-1)^n$$
که می‌توان باروش استقرای ریاضی، درستی آن‌ها را ثابت کرد.

آخرین رابطه را، در سال ۱۶۸۰ میلادی، «ژان دُومی نیک کاسینی» اخترشناس فرانسوی ثابت کرد. که به‌ازای $n=6$، به‌برابری عددی

$$13 \times 5 - 8^2 = 1$$

تبدیل می‌شود و در واقع، اساس این معنای هندسی است:



شکل ۸

روی شکل ۸، یک صفحه‌ی شطرنجی، به‌چهار ناحیه تقسیم شده است که با آن‌ها روی شکل ۹، مستطیل ۵×۱۳ درست شده است (شبیه آن، می‌توان مربعی با ضلع برابر φ_n درست کرد که از چهار بخشی که در آن پدید می‌آید. مستطیلی با اندازه‌های $\varphi_{n-1} \times \varphi_{n+1}$ درست کرد که بسته به‌مقدار n ممکن است یک خانه اضافی یا کم داشته باشد).

حل معما ساده است: خط راستی که از گوشه‌ی چپ شکل ۹، به‌گوشه‌ی راست و پایین رسم شده است، یک خط راست نیست. بلکه یک متوازی‌الاضلاع است.

از رابطه‌ی «کاسینی» می‌توان برای عددهای درست دیگر هم استفاده کرد. اگر در آن رابطه، φ_{n-1} را به $\varphi_{n+1} - \varphi_n$ تغییر دهیم، به‌این صورت درمی‌آید.

$$\varphi^2_{n+1} - \varphi_{n-1}\varphi_n - \varphi^2_n = (-1)^n$$

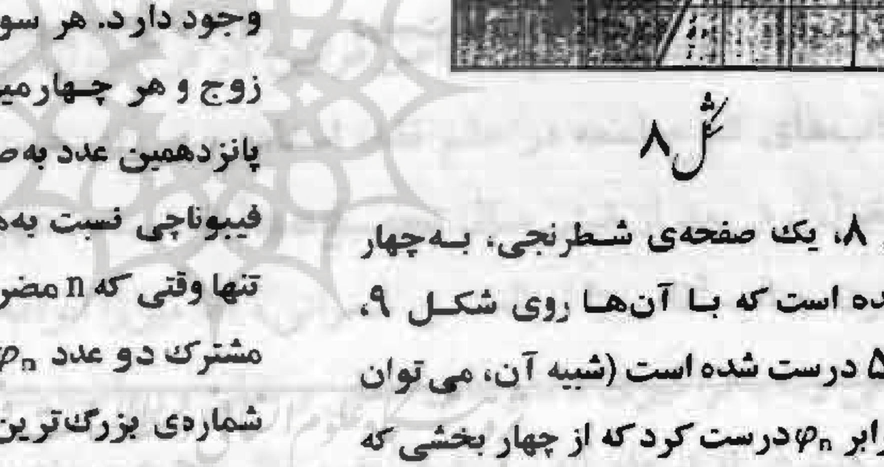
می‌توان ثابت کرد که هیچ جواب دیگری، مجموعه‌ی عددهای طبیعی، معادله‌ی

$$x^2 - xy - y^2 = +1$$

ندارد. در سال ۱۹۷۰ میلادی، از این ویژگی (و ویژگی‌های پیچیده‌تر) برای حل مسأله‌ی دهم هیلبرت درباره‌ی نبودن الگوریتمی که مسأله را حل کند و این که آیا معادله‌ی $P(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$ جواب دارد یا نه (p چند جمله‌ای با ضریب‌های درست است و n، باید جواب‌ها را در مجموعه‌ی عددهای طبیعی پیدا کرد)، به‌وسیله‌ی «یو. و. ماتیاسرویچ» ثابت شد.

ویژگی‌های بسیاری در حساب عددهای فیبوناچی وجود دارد. هر سومین عدد از عددهای فیبوناچی زوج و هر چهارمین عدد، مضربی است از ۳؛ هر پانزدهمین عدد به‌صفر ختم می‌شود؛ هر دو عدد مجاور فیبوناچی نسبت به‌هم اول‌اند؛ φ_n مضربی از φ_m است، تنها وقتی که n مضربی از m باشد؛ بزرگ‌ترین بخشیاب مشترک دو عدد φ_n و φ_m یک عدد فیبوناچی است با شماره‌ی بزرگ‌ترین بخشیاب مشترک m و n؛ برای نمونه $\varphi_6 = 8 =$ (۲۵۱۸۴ و ۱۴۴) بزرگ‌ترین عدد مشترک = (φ_{18} و φ_{12}) بزرگ‌ترین بخش‌یاب مشترک برای اثبات حقیقت بعدی، این اتحاد سودمند است:

$$\varphi_{m+n} = \varphi_m \varphi_{n-1} + \varphi_{m+1} \varphi_n$$



شکل ۹

که می‌توان آن را به‌یاری استقرای ریاضی ثابت کرد. ولی ما در این‌جا اثبات جالب‌تری می‌آوریم که مفهوم ترکیبی این استقرا را روشن می‌کند.

نواری شامل k خانه در نظر می‌گیریم، ببینیم چند روش وجود دارد که از خانه‌ی چپ این نوار به‌خانه‌ی سمت راست برسیم، به‌شرطی که در هر حرکت یک خانه به‌سمت راست برویم یا از روی یک خانه بجهیم. روشن است. به‌ازای $k=1$ به‌جایی نمی‌توان رفت. به‌ازای $k=2$، باید درست یک گام برداشت. یعنی به‌ازای $k=1$ و $k=2$، تعداد روش‌ها برابر است با ۱. برای بررسی تعداد روش‌ها، درست از همان دستور برگشتی استفاده می‌کنیم که برای عددهای فیبوناچی به‌کار می‌بردیم. در واقع، اگر نخستین گام را یک خانه برویم، از نوار $(k-1)$ خانه باقی می‌ماند، و اگر برای نخستین گام ۲ خانه انتخاب کنیم، از نوار $(k-2)$ خانه باقی می‌ماند.

به‌این ترتیب، تعداد روش‌های عبور از این نوار، همان عددهای فیبوناچی را به‌ما می‌دهد. یادآوری می‌کنیم که همه‌ی روش‌های φ_{m+n} را می‌توان به‌دو گونه بخش کرد: می‌توان در $(m+1)$ اولین خانه متوقف شد (این روش‌ها $\varphi_{m+1}\varphi_n$ است)، و می‌توان از آن جهید (این روش‌ها برابر $\varphi_m\varphi_{n-1}$ است).

درسال ۱۷۲۸ میلادی، «دانیل برنولی» این دستور را چاپ کرد:

$$\varphi_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

ولی تا سال ۱۸۴۳ به‌فراموشی سپرده شد تا این که آن را دوباره «فرانسوا ژاک بینه» کشف کرد.

از این دستور نتیجه می‌شود، از جمله φ_n به‌تقریب شبیه تصاعد هندسی با قدر نسبت

$$q=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

صعودی است، و φ_n به‌مقدار $\frac{q^n}{\sqrt{5}}$ بسیار نزدیک به‌عددی درست است.

***

شیر دیگر ترسناک نیست!

همینگوی نویسنده‌ی بزرگ آمریکا شکارچی و ماهیگیر قهاری بود. روزی دربرگشت از آفریقا از او پرسیدند:

- راست است که اگر مشعل روشن دستت باشد، می‌توانی از حمله‌ی شیر آسوده باشی؟

- این مربوط می‌شود به‌سرعتی که با آن بتوانی با مشعل روشن فرار کنی!