ماهیت منطق ریاضی

غلامرضا یاسی‌پور

۱.۱ ـ دستگاه‌های اصل موضوعی

منطق، بررسی استدلال است؛ و منطق ریاضی مطالعه‌ی آن نوع از استدلال است که توسط ریاضی‌دان‌ها انجام می‌گیرد. بنابراین، برای کشف ره‌یافت درست به‌منطق ریاضی، باید روش‌های ریاضی‌دان‌ها را مورد بررسی قرار دهیم.

جنبه‌ی متمایز ریاضیات، در مقابل سایر علوم، استفاده از اثبات به‌جای مشاهده است. ممکن است فیزیک‌دان، قوانین فیزیک را از قانون‌های دیگر فیزیک اثبات کند؛ اما به‌عنوان آخرین آزمون یک قانون فیزیک، توجه به‌توافق آن قانون با مشاهده دارد.

ریاضی‌دان نیز ممکن است، گه‌گاه، از مشاهده بهره بَرد. به‌عنوان مثال، ممکن است زوایای مثلث‌های بسیاری را اندازه‌گیری، و این نتیجه را حاصل کند که مجموع زوایای مزبور همواره ۱۸۰ درجه است. اما، وی تنها زمانی این مطلب را به‌عنوان یک قانون ریاضی می‌پذیرد؛ که به‌اثبات رسیده باشد.

با وجود این، به‌طور واضح، به‌اثبات رساندن تمام قانون‌های ریاضی غیرممکن است. قانون‌های نخستین را که در این مورد پذیرفته می‌شود، نمی‌توان اثبات کرد، زیرا قانون‌های قبلی موجود نیستند که بتوان این قانون‌ها را توسط آن‌ها به‌اثبات رساند. در نتیجه قانون‌های نخستین خاصی، موسوم به‌اصل موضوع‌ها یا اکسیوم‌ها داریم که آن‌ها را بدون اثبات می‌پذیریم، قانون‌های باقی‌مانده، موسوم به‌قضیه‌ها را با استفاده از آن‌ها به‌اثبات می‌رسانیم.

اما اصل موضوع‌های مزبور را به‌چه دلیل می‌پذیریم؟ می‌توان در این مورد از مشاهده بهره برد. اما این کار خیلی عملی نیست؛ و به‌سختی با روح ریاضیات سازگاری دارد. بنابراین کوشش در انتخاب قانون‌های خاصی به‌عنوان اصل موضوع داریم که احساس می‌کنیم از ماهیت مفاهیم درگیر، آشکارند.

به‌این ترتیب، تعداد بسیاری از قانون‌ها را به‌تعداد کمی از اصل موضوع‌ها تقلیل می‌دهیم. تقلیل مشابهی در مورد مفاهیم ریاضی شکل می‌گیرد. در این مورد درمی‌یابیم که می‌توان

مفاهیم معینی را برحسب مفاهیم دیگر تعریف کرد. اما باز هم، نخستین مفاهیم به‌کار رفته را نمی‌توان تعریف کرد، زیرا مفاهیم قبلی موجود نیستند که بتوانیم آن‌ها را برحسب این مفاهیم تعریف کنیم. بنابراین مفاهیم معینی، موسوم به *مفاهیم پایه‌ای یا اساسی* "*basic concepts*"، داریم که تعریف نشده "Undefined" می‌باشد، و مفاهیم دیگر، موسوم به *مفاهیم مستخرج*، برحسب آن‌ها تعریف می‌شوند. در مورد مفاهیم پایه‌ای نیز معیاری مشابه مورد اصل موضوع‌ها داریم. این مفاهیم باید آن‌چنان ساده و روشن باشند که بتوانیم آن‌ها را بدون تعریفی دقیق، درک کنیم.

به‌این ترتیب، در هر گزاره، می‌توان به‌جای مفاهیم مستخرج، مفاهیمی پایه‌ای را قرار دهیم که از آن‌ها تعریف شده‌اند. به‌ویژه، می‌توان این کار را در مورد اصل موضوع‌ها انجام داد. در نتیجه می‌توان فرض کرد که همه‌ی مفاهیمی که در اصل موضوع‌ها ظاهر می‌شوند، مفاهیم پایه‌ای هستند.

اکنون می‌توانیم به‌توصیف کار ریاضی‌دان بپردازیم. وی مفاهیم پایه‌ای معین و اصل موضوع‌های خاص در مورد این مفاهیم را ارایه می‌دهد. پس مفاهیم مزبور را تا آن‌جا توضیح می‌دهد که ملاحظه کنیم، اصل موضوع‌های مزبور راست‌اند. آن‌گاه اقدام به‌تعریف مفاهیم مستخرج، اثبات قضیه‌ها در مورد مفاهیم اساسی و مستخرج می‌کند. به‌این ترتیب، کل ساختاری که بنا می‌کند و شامل مفاهیم پایه‌ای، مفاهیم مستخرج، اصل موضوع‌ها و قضایاست، *دستگاه اصل موضوعی* نامیده می‌شود. دستگاه مزبور، می‌تواند دستگاه اصل موضوعی، برای کل ریاضیات، یا بخشی از آن، از قبیل هندسه مسطحه یا نظریه‌ی اعداد حقیقی باشد.

تاکنون فرضمان بر این بوده که مفاهیم را در ذهن تعریف کرده‌ایم. با وجود این، کشف مفاهیم دیگری امکان‌پذیر است که اصل موضوع‌ها را راست می‌سازند. در این حال، جمیع قضایای اثبات شده نیز به‌ازای این مفاهیم جدید راست‌اند. این موضوع، ریاضیدان‌ها را به‌بدنه‌ای از دستگاه‌های اصل موضوعی رهنمون شد. که در متن اصل موضوع‌ها به‌ازای مقدار بسیاری از مفاهیم صادق‌اند. مثالی نمونه از این مورد، مجموعه‌ی اصل موضوع‌های مربوط به‌گروه است. چنین دستگاه‌های اصل موضوعی را، در مقابل دستگاه‌های اصل موضوعی کلاسیک بحث شده در فوق، دستگاه‌های اصل موضوعی مدرن می‌نامیم. تفاوت این دو، البته، به‌واقع نه در دستگاه اصل موضوع مربوطه، بلکه در اهداف بدنه‌سازی دستگاه است.

با رهنمونی بحث فوق، کار مطالعه‌ی منطق ریاضی را با بررسی دستگاه‌های اصل موضوعی آغاز می‌کنیم. این‌کار سرانجام به‌مسایل گوناگونی می‌انجامد که بعضی از آن‌ها به‌گونه‌ای ضعیف با دستگاه‌های اصل موضوعی مرتبط‌اند.

۲.۱- دستگاه‌های صوری

اصل موضوع (یا قضیه) را می‌توان به‌دو طریق در نظر گرفت، هم به‌صورت یک جمله، یعنی، چیزی که چون اصل موضوع مزبور را می‌نویسیم، برکاغذ ظاهر می‌شود، و هم به‌صورت مفهوم یک جمله، یعنی حقیقتی که توسط آن بیان شده است. در نگاه اول، مورد اخیر بسیار مهم‌تر به‌نظر می‌رسد. هدف آشکار یک جمله، انتقال دادن مفهوم آن به‌گونه‌ای روشن و دقیق است. هدف مزبور سودمند است، اما به‌نظر نمی‌رسد که خیلی با بنیان‌های ریاضیات مرتبط باشد.

با وجود این، دو دلیل محکم برای بررسی اصل موضوع‌ها و قضایا به‌عنوان جمله داریم. دلیل نخست این است که اگر زبان را برای بیان مناسب اصل موضوع‌ها اختیار کنیم، ساختار جمله تا اندازه‌ای مفهوم اصل موضوع را منعکس می‌کند. به‌این ترتیب، می‌توانیم مفاهیم دستگاه اصل موضوعی مورد نظر را با بررسی ساختار جمله‌های بیان‌گر اصل موضوع‌ها بررسی کنیم. این کار، به‌خصوص، در مورد دستگاه‌های اصل موضوعی مدرن ارزشمند است، زیرا در مورد آن‌ها درک اولیه‌مان از مفاهیم پایه‌ای آن‌ها ممکن است بسیار ضعیف باشد.

دلیل دوم این است که مفاهیم ریاضیات بسیار مجردند و بنابراین فهمیدنشان مشکل است. از طرف دیگر، جمله چیزهای واقعی یا عینی است؛ بنابراین با بررسی اصل موضوع‌ها به‌عنوان جمله، از طریق واقعیت مزبور به‌مجرد مورد نظر ره می‌یابیم.

در این مورد یک نکته آشکار است که در بررسی اشیای واقعی (به‌جای مجرد) فایده‌ای موجود نیست، مگر این که به‌آن‌ها به‌طریقی عینی یا ساختاری "constructive" نزدیک شویم. برای نمونه زمانی که مایل به‌اثبات این مطلب باشیم که چیزی واقعی با ویژگی خاص موجود است، باید چنین چیزی را بنا کنیم، نه این که نشان دهیم، عدم وجود چنین چیزی به‌تناقض می‌انجامد.

اثبات‌هایی را که با اشیای واقعی به‌گونه‌ای ساختاری سر و کار دارند صرف شدنی می‌گوییم. توصیف دیگری، که توسط کِرِیسِل مطرح شده، این است که اثبات صرف‌شدنی است اگر بتوانیم آن را مجسم کنیم. البته، هیچ یک از این دو توصیف، دقیق نیست؛ اما می‌توان آن‌ها را، در بسیاری حالت‌ها، برای تشخیص این مورد به‌کار برد که با اثباتی خاص صرف شدنی هست یا نه.

زمانی که تفاوت اساسی بین اشیای واقعی و مجرد مشخص شود، پرسش‌های گوناگونی به‌وجود می‌آید که تنها می‌توان با استفاده از بررسی اثبات‌های صرف شدنی به‌آن‌ها پاسخ داد. برای نمونه، هیلبرت، که در ابتدا بنای این بررسی را گذاشته بود، احساس می‌کرد که تنها ریاضیاتی، صرف شدنی است که بلافاصله توسط شهودمان توجیه می‌شود، و ریاضیات مجرد

برای به‌دست آوردن نتایج صرف شدنی به‌گونه‌ای آسان‌تر یا ظریف‌تر مطرح شده است. بنابراین طرحی برای نشان دادن این مطلب پیشنهاد کرد که طبق آن همه (یا بخش قابل توجهی) از ریاضیات مجرد پذیرفته شده را بتوان به‌این طریق درنظر گرفت. این مساله که طرح مزبور را تا چه اندازه می‌توان گسترش داد، حتا مورد توجه کسانی قرار گرفته است که نظریه‌ی ریاضیات مجرد هیلبرت را مطلوب نیافته‌اند.

بررسی اصل موضوع‌ها و قضایا به‌عنوان جمله به‌بررسی *نحوانه‌ی* دستگاه‌های اصل موضوعی موسوم است؛ و بررسی معنای این جمله‌ها را بررسی *معناشناسانه‌ی* دستگاه‌های اصل موضوعی می‌نامیم. به‌این ترتیب و به‌دلایل فوق در تحقیقاتمان اغلب بخش‌های نحوانه و معناشناسانه را جدا در نظر می‌گیریم. و هرگاه ممکن و به‌گونه‌ای معقول مناسب باشد، بررسی‌های نحوانه‌مان را به‌طریقی صرف‌شدنی، انجام می‌دهیم. همواره اصل موضوع‌ها و قضایا را به‌صورت جمله، و در نتیجه اشیایی نحوی بررسی می‌کنیم؛ و زمانی که مایل به‌بررسی معناشناسانه آن‌ها باشیم، از معنای اصل موضوع یا قضیه سخن به‌میان می‌آوریم.

در این مرحله، به‌خاطر راهنمایی در بررسی نحوانه‌مان به‌معرفی مفهوم **دستگاه صوری** می‌پردازیم. به‌طور تقریبی، دستگاه صوری بخش نحوی یک دستگاه اصل موضوعی است. در این مورد تعریفی دقیق به‌دست خواهیم داد.

نخستین جزء یک دستگاه صوری *زبان* آن است. همان‌گونه که از پیش بیان کردیم، این جزء باید، تا حد امکان، چنان انتخاب شود که ساختار جمله‌ها، معنی آن‌ها را منعکس کند. به‌این دلیل، برای دستگاه‌های صوری‌مان بیش‌تر از زبان‌های مصنوعی استفاده می‌کنیم.

برای مشخص کردن یک زبان، باید اول همه‌ی *نمادهای* آن را مشخص کنیم. این نمادها، در حالت زبان فارسی، حروف، ارقام، و نشانه‌های نقطه‌گذاری‌اند. اکثر زبان‌های مصنوعی‌مان بی‌نهایت نماد دارند.

هر دنباله‌ی متناهی از نمادهای یک زبان را *عبارتی* از آن زبان می‌نامیم. باید بدانیم که یک نماد می‌تواند چندین بار در یک عبارت ظاهر شود؛ و هر یک چنین ظهوری را *رخداد* آن نماد در آن عبارت می‌نامیم. تعداد رخدادهای نمادها را در یک عبارت، *طول* آن عبارت نام می‌دهیم. (به‌این ترتیب، عبارت فارسی «نیکی» به‌طول «۴» است.) دنباله‌ی *تهی* از نمادها را نیز به‌عنوان عبارت مجاز می‌کنیم؛ این عبارت، تنها به‌طول «۰» است.

امکان دارد که عبارتی در عبارتی دیگر ظاهر شود. هر یک چنین ظهوری به‌*رخداد* عبارت اول در عبارت دوم موسوم است. به‌این ترتیب عبارت فارسی *لب* دارای دو رخداد در عبارت فارسی *لبالب* است. اما، زمانی که نمادهای عبارت اول به‌ترتیبی متفاوت یا جدا شده توسط

سایر نمادها در عبارت دوم ظاهر شود، آن را رخداد به‌حساب نمی‌آوریم. به‌این ترتیب، «رخ» در «اختیار» یا «خراب» رخداد ندارد.

اغلب عبارت‌های فارسی بی‌معنی‌اند. جمله‌ها(ی خبری) در میان معنی‌دارها قرار دارند، و می‌توان آن‌ها را به‌تقریب به‌عنوان عبارت‌هایی توصیف کرد که واقعیتی را بیان می‌کنند. مایلیم که در هر زبان، عبارت‌های معینی به‌عنوان فرمول‌های آن زبان در نظر گرفته شوند؛ این را نیز می‌خواهیم که این موارد باید عبارت‌هایی باشند که اظهارگر واقعیتی هستند.

زبان را زمانی به‌طور کامل، مشخص در نظر می‌گیریم که نمادها و فرمول‌هایش مشخص شده باشند. این کار، زبان را به‌چیزی نحوی تبدیل می‌کند. البته، غالب زبان‌های ما، دارای معنا (یا چندمعنی)اند؛ اما معنا به‌عنوان قسمتی از آن زبان درنظر گرفته نمی‌شود. زبان دستگاه صوری F را با L(F) نمایش می‌دهیم.

بخش دیگر یک دستگاه صُوری، اصل موضوع‌های آن است. در این مورد تنها خواسته‌مان این است که هر اصل موضوع فرمولی از زبان دستگاه صوری باشد.

به‌بخش سومی از دستگاه صوری نیاز داریم که توان استنتاج قضایا را از اصل موضوع‌ها داشته باشد. این بخش توسط قانون‌های استنتاجی تهیه می‌شود، که اغلب و به‌سادگی به‌قانون‌ها موسوم‌اند. هر قانون استنتاجی بر این است که تحت شرط‌هایی خاص، یک فرمول، موسوم به‌نتیجه‌ی قانون، می‌تواند از فرمول‌های معین دیگری، موسوم به‌فرض‌های آن قانون، نتیجه‌گیری شود.

اما چگونه می‌توان قضیه‌های دستگاه صوری F را تعریف کرد؟ روشن است که قضایا باید در دو قانون زیر صدق کنند:

i) اصل موضوع‌های F قضایای Fاند؛

ii) اگر جمیع فرض‌های قانونی از F، قضایای F باشند، آن‌گاه نتیجه‌ی آن قانون‌ها قضیه‌ای از F است.

گذشته از این، فرمولی را قضیه‌ای از F می‌دانیم که قضیه بودنش، از این قوانین استنتاج شود. بنابراین، قضیه‌ی F را فرمولی از F در نظر می‌گیریم که بتواند برمبنای قوانین (i) و (ii) قضیه باشد.

در این مورد می‌توان توصیفی به‌گونه‌ای روشن‌تر از قضایای F به‌دست داد. فرض می‌کنیم S مجموعه‌ی اصل موضوع‌های دستگاه‌مان باشد؛ آن‌ها فرمول‌هایی هستند، که می‌توانند برمبنای (i) قضیه باشند. فرض می‌کنیم S_1 مجموعه‌ی فرمول‌هایی باشد که نتیجه‌هایی از قوانینی هستند که فرض‌های آن‌ها همه در S_0اند، آن‌ها مواردی از فرمول‌هایی هستند که برمبنای

(ii) قضیه به‌حساب می‌آیند. اکنون فرض می‌کنیم، S_2 مجموعه‌ای از فرمول‌هایی باشد که نتایجی از قانون‌هایی هستند که جمع فرض‌های آن‌ها در S_0 و S_1 قرار دارند؛ این‌ها نیز بر مبنای (ii) قضیه‌اند. به‌این روش می‌توان مجموعه‌های S_2، S_3، ... را نیز بنا کرد. فرض می‌کنیم S_w مجموعه‌ای از فرمول‌هایی باشد که نتایج قانون‌هایی هستند که فرض‌های آن‌ها در مجموع، دست کم یکی از موارد S_0 و S_1، ...اند، باز هم این‌ها بنا به (ii) قضیه به‌حساب می‌آیند.این کار را آنقدر ادامه می‌دهیم که دیگر نتوانیم قضیه‌ی جدیدی با استفاده از (ii) به‌دست آوریم؛ در این صورت جمیع قضایارا خواهیم داشت.

تعریف از نوع داده شده در فوق، به‌تعریف استقرایی تعمیم یافته موسوم است. تعریف استقرایی تعمیم‌یافته از گردایه‌ی c ای از اشیا شامل مجموعه‌ای از قوانین است، که هریک از آن‌ها بر این است که با فرض‌هایی مناسب شیء x ای در c قرار دارد. ممکن است بعضی از این فرض‌ها بر این باشند که اشیای خاصی (به‌طریقی خاص مرتبط با x) در c اند. هنگامی که چنین تعریفی را به‌دست می‌دهیم، همواره در خاطر داریم که یک شیء در c است تنها اگر در c بودنش از قانون‌های مورد بحث نتیجه شود. به‌این ترتیب، می‌توانیم با توجه به‌آن‌چه گفتیم، توصیفی روشن‌تر از c به‌دست دهیم.

به‌عنوان مثالی دیگر، فرض می‌کنیم ۰ و تالی را تعریف کرده‌ایم، و مایل به‌تعریف عدد طبیعی هستیم. (اعداد طبیعی اعداد صحیح نامنفی‌اند: ۰ و ۱ و ۲ و... تالی یک عدد طبیعی، عدد طبیعی بزرگ‌تر بعدی آن است.) در این صورت، می‌توانیم تعریف استقرایی تعمیم‌یافته‌ی زیر را به‌دست دهیم:

i) ۰ عددی طبیعی است.

ii) اگر y عددی طبیعی باشد، تالی y نیز عددی طبیعی است.

برای اثبات این مطلب که هر قضیه‌ی F دارای ویژگی P است، کافی است، ثابت کنیم که فرمول‌های دارای ویژگی P در قانون‌های واقع در تعریف قضیه، صدق می‌کنند. به‌عبارت دیگر، کافی است ثابت کنیم:

i) هر اصل موضوع F دارای ویژگی P است؛

ii) اگر همه‌ی فرض‌های قاعده‌ای از F دارای ویژگی P باشد، آن‌گاه نتیجه‌ی آن قاعده دارای ویژگی P است.

از آن‌جا (i) و (ii) مستلزم این‌اند که هر عضو مجموعه‌ای S_0، S_1، ... ، S_w، ... بنا شده در فوق، دارای ویژگی P است؛ هر قضیه‌ی F دارای ویژگی P است. اثباتی که توسط این روش انجام می‌شود به‌اثبات با استقرا بر قضایا موسوم است، مفروض واقع در (II) که فرض‌های قاعده‌ی

مورد بحث دارای ویژگی P باشد، فرض استقرا نامیده می‌شود.

به‌صورت عمومی‌تر، فرض می‌کنیم گردابه‌ی C توسط تعریف استقرایی تعمیم یافته‌ای تعریف شده باشد. در این صورت، برای اثبات این مطلب که هر شیء در C دارای ویژگی P است، کافی است ثابت کنیم، اشیای دارای ویژگی P قانون‌های تعریف مزبور را برقرار می‌کند. اشیای چنین را اثبات با استقرا بر اشیای واقع در C می‌نامیم. فرض‌های واقع در قانون‌ها که اشیای معینی متعلق به C‌اند، در چنین اثباتی، به‌این فرض‌ها تبدیل می‌شوند که اشیای معینی دارای ویژگی P‌اند. این فرض‌ها را فرض‌های استقرایی نام می‌دهیم. خواننده به‌سادگی ملاحظه می‌کند که اگر C گردابه‌ای از اعداد طبیعی با تعریف استقرایی تعمیم‌یافته‌ی داده شده در فوق باشد؛ آن‌گاه اثبات با استقرا، و فرض استقرا دارای معنای معمول خودشان‌اند.

قاعده در دستگاه صوری F متناهی است. اگر تنها فرض‌هایی به‌تعداد متناهی باشد، به‌تقریب جمیع قاعده‌های مورد بررسی ما متناهی هستند.

فرض می‌کنیم F دستگاهی صوری باشد که در آن جمیع قواعد متناهی‌اند. مقصود از اثبات در F، دنباله‌ای متناهی از فرمول‌هایی است که هر یک از آن‌ها یا اصل موضوع است یا نتیجه‌ی قاعده‌ای که فرض‌های آن مقدم بر آن فرمول واقع در اثبات است. اگر A آخرین فرمول واقع در اثبات P باشد، می‌گوییم P اثباتی از A است.

نشان می‌دهیم که فرمول A از F قضیه است اگر و تنها اگر اثباتی از A موجود باشد. اول از همه، از قاعده‌های (i) و (ii) نتیجه می‌شود که هر فرمول واقع در یک اثبات یک قضیه است؛ بنابراین اگر A اثبات باشد، قضیه است. عکس این مطلب را با استقرا بر قضایا به‌اثبات می‌رسانیم. اگر A اصل موضوع باشد، آن‌گاه A بنا به‌خودش اثباتی از A است؛ بنابراین A دارای اثبات است اکنون فرض می‌کنیم بتوان A را از B_1، ... ، B_n بااستفاده از قاعده‌ای از F استنتاج کرد. بنا به‌فرض استقرا، هر B_i دارای اثبات است. اگر این اثبات‌ها را یکی بعد از دیگری قرار دهیم، و A را به‌انتهای این دنباله بیفزاییم، اثباتی از A به‌دست می‌آوریم.

F_4.... را که به‌عنوان اختصار ... قضیه‌ای از F است می‌نویسیم، و زمانی که وقوع اشتباه در میان نباشد، اندیس F را حذف می‌کنیم.

مفاهیم پایه‌ای یک دستگاه اصل موضوعی نظیر نمادها یا عبارات معین در دستگاه صوری وابسته است مفاهیم مستخرج، از آن‌جا که برحسب مفاهیم پایه‌ای تعریف شده‌اند، عموماً نظیر عبارت‌های پیچیده‌ترند. اگر مفهوم مستخرج مهمی نظیر عبارت پیچیده‌ای باشد، ممکن است معرفی نمادی تازه به‌عنوان اختصاری برای آن عبارت مطلوب‌تر باشد. ممکن است معرفی اختصارهایی برای کوتاه‌تر کردن یا خواندنی‌تر کردن عبارت‌هایی خاص نیز مطلوب باشد.

بنا به‌این دلایل، معرفی نمادهای جدیدی، موسوم به‌نمادهای تعریف شده را در هر زبان مجاز می‌کنیم. هر یک چنین نمادی را باید برای ساختن عبارت‌هایی موسوم به‌فرمول‌های تعریف شده به‌طرقی معین با نمادهای زبان مورد نظر و نمادهای تعریف شده و از پیش معرفی شده ترکیب کرد. هر فرمول تعریف شده باید اختصاری از فرمولی از آن زبان باشد. (در این اصطلاح، اختصار مزبور مجبور نیست کوچک‌تر از عبارتی باشد که آن را اختصار کرده است.) با هر نماد تعریف‌شده باید تعریفی از آن نماد بدهیم؛ و این قاعده‌ای است که می‌گوید چگونه فرمول‌های تعریف شده با فرمول جدید را بسازیم و چگونه، برای چنین فرمول‌های تعریف‌شده‌ای، فرمولی از زبان داده شده‌مان بیابیم که آن را اختصار می‌کند.

تاکید می‌کنیم که نمادهای تعریف‌شده نمادهای زبانمان نیستند، نیز فرمول‌های تعریف شده از فرمول‌های زبانمان به‌شمار نمی‌روند. گذشته از این، زمانی که مطلبی در مورد فرمول تعریف شده‌ای بیان می‌کنیم، در واقع درباره‌ی فرمولی از زبانمان سخن می‌گوییم که آن را اختصار می‌کند (البته به‌شرطی که تقارنی ایجاد کند). به‌این ترتیب، طول یک فرمول تعریف شده تعداد رخدادهای نمادهای واقع در فرمول تعریف‌شده نیست، بلکه تعداد رخدادهای نمادهای واقع در فرمولی است، که فرمول تعریف‌شده‌ی مزبور اختصار کرده است.

۳.۱ـ متغیرهای نحوانه

در بررسی دستگاه‌های صوری‌امان، عبارت‌ها را، درست مانند تحلیل‌گری در نظر می‌گیریم که اعداد حقیقی را بررسی می‌کند. هر دو حالت تحقیق به‌فارسی‌ای که توسط نمادهای مخصوص به‌ویژه مناسب تحقیق تقویت شده انجام می‌گیرد. به‌بررسی بعضی از نمادهای مخصوص به‌کار رفته در کتاب‌های آنالیز می‌پردازیم، و نمادهای مخصوص مشابهی برای بررسی دستگاه‌های صوری معرفی می‌کنیم.

کتاب آنالیز، ابتدا نام‌هایی برای اعداد حقیقی خاصی، به‌عنوان مثال، ۳، $-\frac{1}{2}$، π، به‌کار می‌برد. ما نیز به‌نام‌هایی برای عبارت‌ها نیازمندیم، و در این مورد این بخت و اقبال را داریم که می‌توانیم طبق قرارداد در مقابل هر عبارت نامی به‌دست دهیم. هر عبارت به‌عنوان نامی برای خودش به‌کار می‌رود. این قرارداد در دسترس نویسندگان کتاب‌های آنالیز نیست؛ زیرا نام باید عبارت باشد، و عدد حقیقی عبارت نیست.

اما در مورد این قرارداد، خطری نیز وجود دارد. عبارت مورد نظر ممکن است (در زبان مورد بحث) نام شیئی باشد، در حالی که نامی برای خودش نیز هست. به‌این ترتیب، مشهد نام شهر ی است؛ مطابق قرارداد ما، نام یک کلمه‌ی فارسی هم هست. ولی ما از این خطر به‌این

علت مصونیم که تنها به‌بحث در زبان‌های مصنوعی پرداخته‌ایم و این بحث را به‌فارسی انجام داده‌ایم. به‌این ترتیب هنگامی که عبارتی در زمینه‌ای نوشته شده در زبان مصنوعی رخ دهد، نام شیئی است؛ و زمانی که در زمینه‌ای نوشته شده به‌فارسی روی دهد، نام آن عبارت است.*

متغیرها نوعی نماد مهم دیگری هستند که در متن‌های آنالیز به‌کار می‌روند. متغیر، برخلاف نام، که تنها یک معنی دارد، دارای معانی بسیاری است. در یک متن آنالیز، متغیر می‌تواند به‌معنی هر عدد حقیقی باشد؛ یا چنان که می‌گوییم، متغیر در میان اعداد حقیقی تغییر می‌کند. اما، این متغیر در سراسر یک مبحث یک معنا را نگه می‌دارد. فرمول شامل متغیرها نیز معانی بسیار دارد، هر یک به‌ازای تخصیص عددی حقیقی به‌عنوان معنا هریک از متغیرهای رخ‌دهنده در آن فرمول، به‌عنوان مثال، $x=x$ دارای معانی ۲=۲ و $\pi=\pi$ در میان معانی خود است؛ $x=y$ دارای این معانی، نیز معنای ۵=۲ است. هنگامی که نویسنده‌ی یک متن آنالیز فرمولی شامل متغیرها را مطرح می‌کند، بر این ادعاست که جمیع معانی آن فرمول راست‌اند.

متغیرهای نحوی را به‌همین طریق، با این استثنا، به‌کار می‌بریم که آن‌ها، به‌جای اعداد حقیقی، در میان عبارت‌های زبان مورد بحث تغییر می‌کنند. به‌این ترتیب، متغیر نحوی می‌تواند به‌معنای هر عبارت زبان مورد نظر باشد؛ اما این معنا در سراسر یک مبحث ثابت می‌ماند. فرمول شامل متغیرهای نحوی نیز دارای معانی بسیار است، هر معنی به‌ازای تخصیص عبارتی به‌عنوان معنای هریک از متغیرهای نحوی رخ‌دهنده در آن فرمول. اگر چنین فرمولی را بیان کنیم، بر آنیم که جمیع معانی آن راست‌اند.

برای دادن مثالی از کاربرد متغیرهای نحوی و عبارات به‌عنوان نام‌هایی برای خودمان، فرض می‌کنیم x نمادی از دستگاه صوری F باشد. نیز فرض می‌کنیم چنین باشد که هرگاه نماد را به‌سمت راست فرمولی از F اضافه کنیم، فرمول جدیدی از F را به‌دست بیاوریم. این مطلب را در صورتی که u را به‌عنوان متغیری نحوی به‌کار بریم، می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد: اگر u فرمولی باشد، در این صورت عبارت ما قبل از افزودن x به‌راست u یک فرمول است.

در کتاب‌های آنالیز، بعضی از متغیرها تنها به‌تغییر در میان اعداد حقیقی معینی محدود می‌شوند. به‌عنوان مثال، معمول است که i و j را محدود به‌تغییر در بیان اعداد صحیح می‌کنند. در این‌جا نیز اغلب آن متغیرهای نحوی را به‌کار می‌بریم که تنها در میان عبارت‌های خاصی از زبان مورد بحث تغییر می‌کنند. اگر A را به‌عنوان متغیری نحوی که در میان فرمول‌ها تغییر می‌کند به‌کار بریم، آنگاه گزاره‌ی واقع در پایان بند پیشین را می‌توان به‌این صورت خلاصه کرد: عبارت

* بعضی کتاب‌ها، برای پرهیز از هر امکان اشتباه، به‌جای این قرارداد، قرارداد دیگری را در نظر گرفته‌اند: به‌عنوان نام عبارت، همان عبارت اما محصور در گیومه به‌کار می‌رود.

حاصل از افزودن x به‌سمت راست A فرمول است.

در متن آنالیز، xy به‌جای حاصل ضرب x و y قرار می‌گیرد. اگر u و v متغیرهایی نحوی باشند، uv را به‌جای عبارت حاصل از مجاور بودن یا هم‌نهادگی u و v، یعنی، با نوشتن u و سپس v بلافاصله بعد از آن، به‌کار می‌بریم. همین قرارداد در مورد سایر متغیرهای نحوی به‌کار می‌رود. از این وضع در ترکیب متغیرهای نحوی با نام‌های عبارت‌ها نیز استفاده می‌کنیم. به‌عنوان مثال، می‌توان عبارت واقع در پایان بند پیشین را به‌این صورت خلاصه کرد: Ax فرمول است.

در مورد متغیرهای نحوی از حروف سیاه استفاده می‌کنیم. به‌ویژه، u و v متغیرهایی نحوی هستند که در میان جمیع عبارت‌ها تغییر می‌کنند، و A، B، C، و D متغیرهایی نحوی هستند که در میان فرمول‌ها تغییر می‌کنند. زمانی که حرف سیاهی را به‌عنوان متغیری نحوی معرفی کردیم، این را درمی‌یابیم که می‌توانیم متغیرهای نحوی جدیدی با افزودن پریم‌ها یا اندیس‌ها تشکیل دهیم، و این متغیرهای نحوی جدید در میان همان عبارت‌های متغیرهای نحوی قدیم تغییر می‌کنند. به‌این ترتیب A' و A_1 متغیرهایی نحوی هستند که در میان فرمول‌ها تغییر می‌کنند.

در این جا دو رعایت احتیاط را اضافه می‌کنیم. اول این‌که، اگر دو متغیر نحوی متفاوت در یک مبحث رخ دهند، عبارت‌های متفاوت را نمایش نمی‌دهند (درست همان‌طور که در متن آنالیز، x و y اعداد حقیقی مختلف را ارایه نمی‌دهند). دوم این‌که، متغیرهای نحوی نمادهای زبان مورد بحث نیستند؛ بلکه نمادهایی هستند که به‌زبان فارسی برای کمک در بحث زبان افزوده می‌شوند.

دوستان گرامی!

امروز، ماهنامه‌ی شماره‌ی ۴۵ دانش و مردم را دریافت کردم و مانند همیشه خوشحال شدم. در این شماره‌ی ماهنامه، مقاله‌ای با عنوان: «برندگان دومین نمایشگاه جهانی اختراعات، ۵ دختر و پسر مخترع» به‌امضای بهزاد بزرگمهر به‌چاپ رسیده است. این مقاله را من برای شما فرستاده بودم و تا جایی که به‌خاطر دارم در ایمیل ارسالی نوشته بودم که اصل مقاله از کجاست. متأسفانه هرچه در بایگانی ایمیلم جست‌وجو کردم آن را نیافتم که برایتان بفرستم. به‌هر حال این مقاله از من نیست و من تنها آن را برای شما فرستادم، چون به‌نظرم مطلبی ارزشمند بود و ظاهراً اشتباه نکرده بودم.

برای جلوگیری از هرگونه سوءتفاهمی، خواهشمندم این مطلب را در شماره‌ی آینده ماهنامه قید نمایید. پیشاپیش سپاسگزارم.

بهزاد بزرگمهر