از تاریخ دانش و فن

کاربرد گراف‌های کِی‌لی

در بررسی گروه‌های مقدماتی

برگردان: پرویز شهریاری

آرتور کِی‌لی (Cayley: ۱۸۲۱ ریچ موند – ۱۸۹۵ کمبریج)، ریاضی‌دان انگلیسی از سال ۱۸۶۳، به‌عنوان استاد، در دانشگاه کمبریج انگلستان کار می‌کرد. کار اصلی او در زمینه‌ی جبر بود. درباره‌ی بستگی بین نظریه‌ی انواریان‌ها و هندسه‌ی تصویری، برای تعبیر هندسه‌ی لباچوسکی (که به‌تعبیر کی‌لی – کلاین معروف است) پژوهش‌هایی دارد. در نظریه‌ی دترمینان‌ها، معادله‌های دیفرانسیلی و تابع‌های بیضوی و در زمینه‌ی اخترشناسی هم کار کرده است.

آرتور کی‌لی در سال ۱۸۷۸ ضمن بررسی گروه‌های با چند مولد، از گراف‌هایی استفاده کرد که در آن‌ها، مولدهای مختلف به‌شاخه‌های مختلف تقسیم می‌شدند (مفهوم مولد، کمی بعد روشن خواهد شد) ما در این‌جا آن‌ها را گراف‌های گُل‌دار یا «گراف‌های کی‌لی» می‌نامیم که روی مجموعه‌هایی با یک عمل دوتایی است.

وقتی از مفهوم عمل جبری دوتایی در مجموعه‌ی A صحبت می‌شود، تابعی مورد نظر است که از نگاشت A×A در A پدید آید. در این‌جا A×A، مجموعه‌ی همه‌ی زوج‌های مرتب ممکن از عضوهای مجموعه‌ی A است و یا آن‌گونه که معروف است، مجذور دکارتی مجموعه‌ی A. باید به‌این نکته توجه داشت که هر زوج مرتب (a,b) از عضوهای مجموعه‌ی A متناظر است با عضو C از همین مجموعه‌ی A و در ضمن هر زوج مرتب متناظر است با تنها یک عضو برای نشان دادن مجموعه‌ی A در رابطه با عمل، از نماد (A,*) استفاده می‌شود.

از مفهوم رابطه‌ی دوتایی هم اطلاع داریم. گراف

$a. \rightarrow .b$

این حقیقت را بیان می‌کند که عضو a در بستگی R با عضو b است، بستگی R می‌تواند هم‌نهشتی، تشابه، موازی بودن، عمود بودن، یا بستگی ترتیب، تابع و غیر آن را نشان دهد. اندیشه‌ی گراف گل ضمن بررسی این مساله پیش آمد: «آیا به‌یاری گراف می‌توان این حقیقت را بیان کرد: a*b=c یا (a,b) → c (c نتیجه‌ی عمل * روی عضوهای a و b است).

این پرسش هم مطرح می‌شود که چگونه به‌کمک گراف می‌توان سه عضو را در بستگی دوتایی به‌هم مربوط کرد، برای این منظور باید آگاهی مربوط به‌اضافه‌کردن یک عضو را پیدا کرد. فرض کنید، بدانیم که در شاخه‌ای، رأس a به‌طرف رأس c رفته است. هر عضو مجموعه را، که در آن عمل * داده شده است، و اگر a*b=c از رأس a به‌رأس c شاخه‌ی جهت‌دار گُل را رسم می‌کنیم و عضو b را در آن می‌نویسیم. برای بهتر شدن این رسم از گچ رنگی یا مداد رنگی استفاده می‌کنیم. در این مقاله، به‌جای رنگ خط‌های کامل،

خط‌چین و خط موجی به‌کار رفته است.

برای نمونه، اگر عمل * درباره‌ی مجموعه‌ی $A=\{a,b\}$ بنا بر جدول ۱ داده شده باشد، آن وقت گراف مجموعه‌ی $(A,*)$ روی شکل معین شده است.

*	a	b
a	a	b
b	b	a

شکل ۱

گروه G به مجموعه‌ای با یک عمل جبری دوتایی * گفته می‌شود که دارای این ویژگی‌ها باشد:

۱. عمل * شرکت‌پذیر است، یعنی برای هر عضوهای دلخواه a، b، c از مجموعه‌ی G، این برابری برقرار است:

$$(a*b)*c=a*(b*c)$$

۲. در مجموعه‌ی G نسبت به‌عمل G، عضو خنثای e وجود دارد (برای هر عضو a از G):

$$a*e=e*a=a$$

۳. برای هر عضو $a\in G$ عضو قرینه‌ی $a'\in G$ وجود دارد، به‌گونه‌ای که داشته باشیم:

$$a*a'=a'*a=e$$

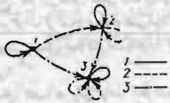
مجموعه‌ی Z از عددهای درست با عمل جمع؛ مجموعه‌ی $Q\backslash\{0\}$ از عددهای گویا بدون صفر با عمل ضرب؛ مجموعه‌ی دوران‌های صفحه دور نقطه‌ی مفروض با عمل ترکیبی آن‌ها؛ مجموعه‌ی انتقال‌هایی که چندضلعی‌های منتظم را به‌خودشان می‌رساند (با عمل ترکیبی آن‌ها) ـ نمونه‌های متفاوتی از گروه‌اند. اگر گروه از تعداد محدودی عضو تشکیل شده باشد، گروه محدوده و تعداد عضوهای آن، مرتبه‌ی گروه نامیده می‌شود.

زیرمجموعه‌ی گروه G، خود یک گروه نسبت به‌عملی است که در گروه G معین شده است و زیرگروه G نامیده می‌شود.

نتیجه‌های آزمایش با گراف‌های رنگی، ضمن بررسی عضوهای نظریه‌ی گروه ثابت می‌کنند که رسم رنگی دیاگرم‌های «کی‌لی» کمک می‌کنند که به‌صورت عمیق‌تری این موضوع انتزاعی را درک کنیم، زیرا روی این دیاگرام، رابطه‌ی بین عضوهای مجموعه به‌سادگی درک می‌شود.

نمونه‌هایی از گراف «کی‌لی» را می‌آوریم. در نمونه‌های ۱ و ۲، با خواندن رنگ‌های گراف آشنا می‌شوید. در نمونه‌های ۳ تا ۵ با عمل‌های جبری و در نمونه‌های ۶ تا ۸ با کار گراف‌ها بیش‌تر آشنا می‌شوید که آیا مجموعه با تعریفی که برای عمل در آن تعریف شده است، گروه نامیده می‌شود، عضو خنثای آن و عضو قرینه‌ی آن کدام است؟

۱. از روی دیاگرام شکل ۲ برای مجموعه‌ی $(M,*)$، جدول تعریف * را رسم کنید.



شکل ۲

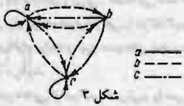
حل. جدول عمل را در جدول ۲ نشان داده‌ایم. می‌توان یادآوری کرد، این عمل قابل مقایسه با هر زوج عضوهای مجموعه‌ی {۳ و ۲ و ۱}=M است که بیش‌ترین این عضوها را داشته باشد.

*	۱	۲	۳
۱	۱	۲	۳
۲	۲	۲	۳
۳	۳	۳	۳

۲. اگر عمل $(A,*)$ با جدول ۳ داده شده باشد. دیاگرام «کی‌لی» مجموعه را پیدا کنید.

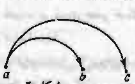
*	a	b	c
a	a	b	c
b	c	a	a
c	c	a	b

حل. در شکل ۳، از a به a یال را رسم می‌کنیم. از a و b به b و غیره. در نتیجه به گراف ۳ می‌رسیم.



شکل ۳

۳. بخشی از گراف «کی‌لی» در شکل ۴ داده شده است. آیا این گراف می‌تواند بخشی از گراف مجموعه‌ای با عمل جبری دوتایی باشد؟

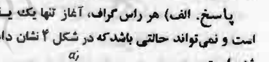


شکل ۴

پاسخ. نه. این شکل، عملی یک ارزشی نیست.

۴. در گراف از کجا معلوم می‌شود: الف) یک ارزشی بودن عمل، ب) شرکت‌پذیری؛ ج) ویژگی جابه‌جایی؟

پاسخ. الف) هر راس گراف، آغاز تنها یک یال است و نمی‌تواند حالتی باشد که در شکل ۴ نشان داده شده است.

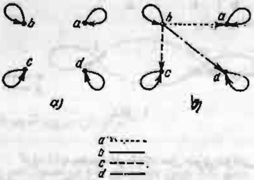


شکل ۵

ب) برای هر زوج متوالی، جهت یال‌های a،b همان یال b*c که آغاز نخستین یال به‌پایان یال دوم پیوند داده است (شکل ۵ ـ a)، یعنی برابری a*(b*c)=(a*b)*c تأمین شده است.

ج) برای هر یال، یال b که از a خارج می‌شود، در گراف یالی وجود دارد که از b خارج شده است؛ در ضمن این دو یال در یک راس پایان یافته‌اند (شکل ۵ ـ b) یعنی a*b=b*a.

۵. روی شکل ٦ـa نتیجه‌ی عمل * روی عضوهای مجموعه‌ی {a,b,c,d} با عضو b نشان داده شده است. اگر b عضو خنثا در عمل * باشد، گرافی را معین کنید که در آن نشان داده شود b*a، b*c، b*d برابر با چیست؟



شکل ۶

حل. گراف به‌شکل ٦ـb درمی‌آید. باید یادآور شد که در این گراف، عمل * تعریف نشده است.

۶. آیا می‌توان گفت، گراف ٦ـb بخشی از گراف هر گروهی است که مرتبه‌ی آن کم‌تر از ۴ نباشد؟

پاسخ. بله. زیرا هر گروه شامل عضو خنثا است و بنابراین در گراف گروه باید گرهی وجود داشته باشد که عضو خنثا را شرح دهد (دور و بر رأس گراف)، و بقیه‌ی یال‌هایی که از رأس‌ها خارج می‌شوند، به‌عضو خنثا اشاره داشته باشند.

۷. بخشی از گراف گروه در شکل ۷ نشان داده شده است. یال دو طرفه‌ای که در دو جهت مختلف بین دو

شکل ۷

رأس وجود دارد، به‌چه معنی است؟

حل. از روی شکل ۷ می‌توان نوشت:

$$(a*c)*c=a$$

از این‌جا، در اساس ویژگی شرکت‌پذیری عمل *، این رابطه وجود دارد:

$$a*(c*c)=a$$

دو طرف برابری را از سمت چپ a^{-1} ضرب می‌کنیم، به‌دست می‌آید.

$$c*c=e \Rightarrow c=e^{-1}$$

بنابراین، گراف این آگاهی را به‌ما می‌دهد: دو عضوی که در ارتباط دو طرفه با یکدیگر هستند، خودشان قرینه‌ی یکدیگراند.

۸. گراف مجموعه‌ی دوران‌های مثلث متساوی‌الاضلاع را دور مرکز O آن بسازید که مثلث را به‌خودش تبدیل کند، با عمل ترکیب این دوران‌ها، ثابت کنید، این مجموعه تشکیل یک گروه می‌دهد؛ یعنی روی گراف عضو خنثا و زوج عضوهای متقارن را معین کنید و عمل شرکت‌پذیری را نشان دهید.

حل. جدول ترکیبی را نشان می‌دهیم (جدول ۴)؛ و قرار می‌گذاریم:

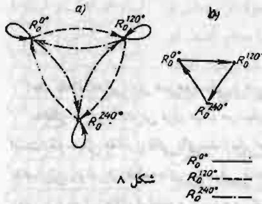
$$R_o^{0^\circ},\ R_o^{120^\circ},\ R_o^{240^\circ}$$

	$R_o^{0^\circ}$	$R_o^{120^\circ}$	$R_o^{240^\circ}$
$R_o^{0^\circ}$	$R_o^{0^\circ}$	$R_o^{120^\circ}$	$R_o^{240^\circ}$
$R_o^{120^\circ}$	$R_o^{120^\circ}$	$R_o^{240^\circ}$	$R_o^{0^\circ}$
$R_o^{240^\circ}$	$R_o^{240^\circ}$	$R_o^{0^\circ}$	$R_o^{120^\circ}$

عضو خنثا متناظر است با مرکز همه‌ی گروه‌ها در گراف، یعنی $R_o^{0^\circ}$

تقسیم زوج‌ها به‌عضوهای متقارن هم‌ارز است، با تقسیم همه‌ی زوج‌های (a,b) که برای آن‌ها داشته باشیم، $a*b=e$ (e عضو خنثا نسبت به‌عمل مفروض است). این، به‌معنای این است که برای هر شاخه‌ای که از $R_o^{0^\circ}$ می‌گذرد، باید آغاز آن و یال‌های متناظر عضوهای آن را نوشت. این‌ها عبارت‌اند از $R_o^{120^\circ}$ و $R_o^{240^\circ}$، عضو خنثای $R_o^{0^\circ}$ با خودش متقارن است. عمل شرکت‌پذیری به‌سادگی و به‌کمک نتیجه‌های مساله‌ی ۴، پ) انجام می‌شود.

در رابطه با این مساله می‌توان درباره‌ی گروه دوری و عضو مولد آن فهمید، روی گراف شکل ۸*a دوره‌های بسته‌ی شاخه‌ها که از همه‌ی راس‌ها گذشته‌اند، دیده می‌شود.



شکل ۸

دور اول تشکیل شده از یال‌هایی که متناظر با عضو $R_o^{120^\circ}$ است، و این به‌معنای این است:

$$R_o^{120^\circ} R_o^{120^\circ} = (R_o^{120^\circ})=R_o^{240^\circ}$$
$$R_o^{240^\circ} R_o^{120^\circ} = (R_o^{120^\circ}) = R_o^{0^\circ}$$

همه‌ی عضوهای گروه؛ به‌صورت توان‌هایی از یک عضو $R_o^{120^\circ}$ درمی‌آیند. چنین گروهی را دوری می‌نامند و عضو $R_o^{120^\circ}$ را عضو مولد آن می‌نامند. عضو مولد دیگر $R_o^{240^\circ}$ است که دور نقطه‌ی o با زاویه‌ی ۲۴۰ درجه می‌گردد.

چون در گروه دوری، همه‌ی عضوها را می‌توان پشت سر هم از یک عضو به‌دست آورد، بنابراین گراف ۸ـa را می‌توان به‌صورت ۸ـb ساده کرد: حرکت در جهت پیکان متناظر با ضرب در عضو مولد $R_o^{120^\circ}$ گروه برای نمونه:

$$R_o^{240^\circ} R_o^{120^\circ} = R_o^{0^\circ}$$

حرکت در جهت عکس پیکان متناظر است با ضرب از طرف راست در عضو معکوس مولد. برای نمونه:

$$R_o^{240^\circ} \circ (R_o^{120^\circ})^{-1} = R_o^{120^\circ} R_o^{120^\circ} \circ (R_o^{120^\circ})^{-1} = R_o^{120^\circ}$$