عمر خیام و حل معادله‌های درجه سوم

عباس چرخچی

۱- پیش‌گفتار

هیچ ایرانی نیست که حکیم عمر خیام، این شاعر، فیلسوف و دانشمند بزرگ را نشناسد. شهرت خیام در میان ایرانیان به‌ویژه در رابطه با رباعیات ارزنده و پرمحتوای اوست. بسیاری از ایرانیان این سخنان نغز را از بر بوده و آن‌ها را در محاورات روزمره برای اثبات نظر و عقیده‌ی خود به‌کار می‌گیرند. جاذبه‌ی افکاری که خیام در رباعیات خود منعکس کرده و شیوایی بیانی که در این شیوه‌ی سخنوری به‌کار گرفته است، آن‌چنان است که حتا پاره‌ای از شعرهای مشابه دیگر را که ممکن است توسط دیگران سروده شده باشد، به‌خیام نسبت می‌دهند. البته باید توجه داشت که بیش‌تر رباعیات خیام به‌علت حمله‌های پی‌درپی به‌ویژه حمله‌ی مغول‌ها از بین رفته و در نتیجه در رابطه با بسیاری از آن چه که به‌خیام نسبت می‌دهند، تردید موجود است. با این همه غنای فکری و منطق قوی مطرح شده،از این تردیدها می‌کاهد و انتساب آن‌ها را به‌خیام در نزد مردم، حقیقی، قطعی و تردیدناپذیر می‌کند.

نقش خیام همان‌گونه که اشاره شد در خلق رباعیات شناخته شده است. اما آن‌چه که ایرانیان کم‌تر به آن واقف‌اند سهم با اهمیت او در دانش ریاضی و اخترشناسی است. در حقیقت سرودن شعر و شاعری حرفه‌ی اصلی خیام نبوده و او به‌این امر تنها براساس تفنن و علاقه‌ی شخصی مبادرت می‌ورزیده است. در کتاب‌های درسی و در اکثر کتاب‌های تاریخی که در ایران به‌رشته‌ی تحریر درآمده است، بیش از همه نقش ادبی و فلسفی خیام برجسته است و از نقش علمی او تنها به‌اشاره‌هایی مختصر بسنده شده است. در این رابطه البته می‌توان مهم‌ترین دلیل را به‌این صورت توضیح داد:

در میان تاریخ‌نویسان ایرانی، تعداد کسانی که در زمینه‌ی نگارش تاریخ دانش تخصص داشته باشند بسیار محدودند. باید گفت که در این زمینه در ایران کاری که برپایه‌ی ارایه‌ی رساله‌ی تحقیقی استوار باشد، صورت نگرفته است. از این رو نه تنها در رابطه با خیام بلکه در نشان دادن و آثار شخصیت‌هایی چون خوارزمی، بیرونی، رازی، نصیرالدین توسی، کوهی، کرشیار گیلانی

و ده‌ها دانشمند بزرگ دیگر که در بالا بردن پرچم شکوفایی دانش در ایران و سایر کشورها نقش ارزنده‌ای را ایفا کرده‌اند، با وجود کوشش‌های پراکنده کاری شایسته و پیگیر صورت نگرفته است.

جای بسیار تاسف است که این شخصیت‌های ایرانی را تنها به‌این علت که بخش یا تمامی آثارشان به‌عربی نوشته شده است، در غرب به‌عنوان دانشمندان عرب بشناسند و پژوهشگران عرب نیز با اغماض، آن‌ها را در این گمراهی نگه می‌دارند. با این همه، کار علمی این دانشمندان در غرب و در جهان عرب شناخته شده‌تر از ایران است و در این زمینه، در این کشورها پژوهش‌های بیش‌تری صورت گرفته است.

باید گفت این متن تنها اشاره‌ی کوچکی است بر نقش خیام در توسعه و تحول بخشی از علم جبر که مربوط است به‌ارایه‌ی راه‌حل عمومی برای یافتن ریشه‌های معادلات درجه سوم.

پیش از پایان این مقدمه اشاره به‌این امر ضروری است که در نگارش این مقاله از کتاب ارزنده‌ی ادولف یوشکویچ کمک گرفته شده است.

۲ـ شرحی کوتاه بر زندگی خیام

ابوالفتح عمر بن ابراهیم خیام در سال ۴۲۷هـ. ش. در شهر نیشابور خراسان متولد شد. دوران حیات خیام مصادف است با بحران‌های عظیم سیاسی در ایران. او به‌همین خاطر ناچار بود که در سراسر زندگی پرتلاطم خود بارها محل زندگی خود را تغییر دهد و از محل تولد خود ابتدا به‌سمرقند و پس از آن به‌مرو، اصفهان، ری و دیگر شهرهای ایران روی آورد. خیام در سال ۴۵۳هـ. ش. رساله‌ی (کتاب) خود را با نام «برهان‌های مربوط به‌مسایل جبر و مقابله» به‌نگارش درآورد. در سال ۴۵۶هـ. ش. نقدی بر کتاب «مقدمات» اقلیدس نوشت که از ارزش ویژه‌ای برخوردار است. هم‌چنین او کتابی را درباره‌ی استخراج ریشه‌ی اعداد به‌رشته تحریر درآورد. در سال ۴۵۳هـ. ش. خیام به‌دربار جلال‌الدین ملکشاه سلجوقی فراخوانده شد و تحت حمایت این شاه و وزیر او نظام‌الملک، سرپرستی رصدخانه‌ی جدید اصفهان را به‌عهده گرفت[۱] در آن‌جا او جدول نجومی را که در محاسبه‌ی آن دقت بسیار زیادی به‌کار رفته است، تنظیم کرد.

هم‌چنین در این مدت خیام به‌بازسازی تقویمی که به‌تقویم جلالی معروف است، پرداخت ولی این امر هنوز به‌پایان نرسیده بود که نظام الملک کشته شد و اندکی بعد یعنی در سال

---

۱. لازم به‌توضیح است که خیام مدتی نه چندان طولانی این مسوولیت را به‌عهده گرفت. در حقیقت او به‌علت روح آزادمنشی که داشت، علاقه‌ای به‌در خدمت دربار درآمدن، نداشت و زندگی آرام و بی‌دغدغه‌ای را که به‌تحقیق در علم اختصاص داده شود، ترجیح می‌داد.

عرب شروع به‌مطالعه معادله‌های درجه سوم کردند و در این زمینه به‌کشف‌های برجسته‌ای نایل آمدند.

یکی از منابعی که ریاضی‌دانان را به‌حل معادله‌های درجه سوم تشویق کرد مساله‌ای بود که توسط ارشمیدس مطرح شده بود و آن عبارت بود از تقسیم یک کره به‌وسیله‌ی یک صفحه به‌دو بخش به‌گونه‌ای که حجم‌های این دو بخش با یکدیگر از یک نسبت مشخص برخوردار باشند. یک ریاضی‌دان ایرانی به‌نام ماهانی اولین کسی بود که به‌حل این معادله مبادرت ورزید. او بر طبق رسم معمول مساله را با مساوی قرار دادن یک مکعب و یک عدد با یک مربع تعریف کرد. با این وجود او نتوانست ریشه‌ی معادله را به‌دست آورد. در اواخر سده‌ی چهارم هجری، رستم کوهی، یک ریاضی‌دان دیگر ایرانی که از منطقه‌ی تبرستان بود مساله‌ی جدیدی را مطرح کرد. مساله عبارت بود از پیدا کردن بخشی از یک کره که حجمش برابر با حجم یک بخش از یک کره‌ی مشخص بود و مساحتش برابر با مساحت یک بخش دیگر از همان کره‌ی مشخص. کوهی این مساله را به‌صورت یک معادله‌ی درجه سوم درآورد و برای حل آن از یک سهمی و یک هذلولی کمک گرفت و به‌این ترتیب با یافتن ریشه‌های معادله جواب مساله‌ی طرح شده را به‌دست آورد.

از این تاریخ به‌بعد مساله‌هایی که به‌معادله‌های درجه سوم منتهی می‌شود رفته‌رفته بیش‌تر دیده می‌شود. ابوریحان بیرونی، دانشمند بزرگ ایرانی در کتاب «قانون مسعودی» ضلع‌های یک هشت‌ضلعی را از طریق تشکیل معادله‌ی درجه سوم به‌دست می‌آورد. زیاد شدن تعداد مساله‌هایی که به‌معادلات درجه سوم ختم می‌شدند، ضرورت یافتن راه‌حل‌های عمومی برای یافتن ریشه‌های این معادلات را هرچه بیش‌تر ظاهر می‌نمود.

براساس وجود این ضرورت، نقش خیام از اهمیت و ویژگی خاص برخوردار است. او تلاش نمود تا با دسته‌بندی معادلات درجه سوم روش کاملی برای حل آنها ارایه دهد. البته یافتن ریشه این نوع معادلات گرچه از طریق راه حل‌های هندسی صورت گرفته است و اگرچه خیام نتوانست راه حل جبری و عددی برای آن ارایه دهد با این حال او معتقد بود که بعد از او کسانی پیدا خواهند شد که موفق به‌انجام این امر گردند.

باید بدون اغراق گفت که کارهای ارزنده خیام در زمینه ریاضیات یکی از خط‌های اساسی رونق این علم در سده‌ی نوزدهم بوده است.

کتاب خیام در زمینه‌ی جبر تحت عنوان «مقاله‌هایی درباره‌ی جبر و مقابله» یک اثر بسیار ارزشمند است و نقش مهمی در تحول آتی این علم دارد. در این کتاب او به‌دسته‌بندی معادلات از جمله معادلات درجه سوم می‌پردازد و برای یافتن ریشه‌های آن‌ها، راه‌حل‌هایی ارایه می‌دهد.

در این کتاب معادلات تحت یک شکل عمومی، با ضرایب مثبت و با زبان متداول آن روز بیان می‌شود.

طبقه‌بندی مبتنی بود بر عواملی مانند درجه معادله و تعداد جملاتی که در دو طرف معادله وجود داشتند.

در رابطه با معادلات درجه سوم، خیام ۲۵ شکل مختلف معرفی می‌کند. البته از این ۲۵ شکل، ۵ شکل آن با تقسیم معادله بر مجهول یا مربع مجهول، ساده گردیده و به‌یک معادله تبدیل می‌شود. ۶ شکل دیگر نیز پیش از آن توسط خوارزمی مورد مطالعه قرار گرفته بود. خیام برای حل ۱۴ معادله باقی مانده از مقاطع مخروطی کمک می‌گیرد. این ۱۴ شکل عبارتند از:

- یک معادله با دو جمله
- ۶ معادله با ۳ جمله
- ۷ معادله با ۴ جمله که خود به دو دسته تقسیم می‌شوند. دسته‌ی اول عبارتند از: برابر قرار دادن ۳ جمله با یک جمله و بقیه از تساوی دو جمله با دو جمله به‌دست می‌آید.

البته باید توجه داشت که این دسته‌بندی تنها به‌معادله‌های مربوط می‌شود که دارای ریشه مثبت باشند.

۴ـ چند مثال

در حل معادله‌های درجه سوم، خیام از اصل تجانس و همگنی واحدها استفاده می‌کند. به‌طور مثال، برابری یک عدد با یک سطح برای او به‌معنی مستطیلی است که یک ضلع آن دارای طولی به‌اندازه واحد بوده و ضلع دیگر آن دارای طولی برابر عدد یاد شده است. یا چنانچه عددی با حجم جسمی برابر باشد در آن صورت می‌توان مکعب مستطیلی را در نظر گرفت که قاعده آن یک مربع که ضلع آن واحد بوده و نسبت قاعده آن به‌ضلع قاعده برابر با عدد ذکر شده، است.

بر مبنای این اصل خیام قبل از حل یک معادله درجه سوم آن را به‌یک معادله متجانس و همگن مبدل می‌نمود. به‌طور مثال، برای حل معادله‌ی:

$$x^3+ax=b \qquad (1)$$

ابتدا آن را به‌صورت:

$$x^3+p^2x=p^2q \qquad (2)$$ می‌نویسد.

این تبدیل بر مبنای نظریه‌های هندسه مقدماتی قرار دارد.

خیام آنگاه برای یافتن ریشه معادله از دو معادله درجه دوم زیر کمک می‌گرفت

$$x^2+y^2=qx \qquad (۳)$$

$$x^2=py \qquad (۴)$$

او با رسم این دو منحنی (شکل ۱) نقطه تقاطع آن‌ها را (نقطه D) پیدا می‌نمود، آن‌گاه از نقطه D، خطی عمود بر محور xها وارد می‌نمود تا این محور را در نقطه E قطع کند. بدین ترتیب ریشه معادله درجه سومی به‌دست می‌آمد که عبارت بود از فاصله نقطه E تا مبداء (یعنی طول OE). این فاصله یا به‌عبارت دیگر x نقطه تقاطع چنان‌چه در معادله (۱) قرار گیرد، دو طرف آن را برابر خواهد کرد. خیام این مساله را به‌کمک رابطه‌ای که در مورد نسبت‌ها وجود دارد، به‌صورت زیر نشان می‌دهد: در رابطه با معادله سهمی (معادله ۴) می‌توان نوشت:

$$\frac{x}{y}=\frac{p}{x} \qquad (۵)$$

حال آن‌که معادله (۳) می‌تواند به‌صورت زیر نوشته شود:

$$\frac{x}{y}=\frac{y}{q-x} \qquad (۶)$$

از دو معادله (۵) و (۶) می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{p}{x}=\frac{y}{q-x} \qquad (۷)$$

در معادله (۷) به‌جای y چنان چه معادلش را از معادله (۴) قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\frac{p^2}{x^2}=\frac{x}{q-x}$$

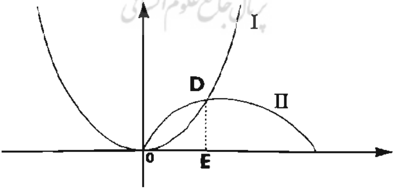
یا

$$x^3=p^2(q-x)$$

حال اگر به‌دو طرف معادله اخیر جمله‌ی p^2x را بیافزاییم معادله (۲) که همان معادله (۱) است به‌دست می‌آید:

$$x^3+p^2x=p^2q$$

خیام چنین نتیجه می‌گیرد که این چنین معادله‌ای همواره تنها یک جواب خواهد داشت. این نتیجه‌گیری در حقیقت همان است که در عمل پس از رسم منحنی‌ها هم‌چنان که در شکل (۱) دیده می‌شود، به‌دست می‌آید.



شکل ۱ـ حل هندسی معادله $x^3+p^2x=p^2q$

I: $x^2=py$ و II: $x^2+y^2=qx$

در این حالت حتا اگر قسمت پایین منحنی II از شکل (۱) رسم شود، این قسمت از منحنی با منحنی سهمی (منحنی II) نقطه تقاطعی نخواهد داشت. اما در حل یک معادله درجه سوم دیگر با فرمول $x^3+a=bx$ که مشابه معادله (۱) است، خیام فایده‌ی ویژه‌ی دیگری را کشف نمود. او این بار، این معادله را به‌کمک یک سهمی ($x^2=y\sqrt{b}$) و قسمت بالای یک هذلولی ($y^2=x^2-\frac{a}{b}x$) بدون درنظر گرفتن اصل تجانس حل نمود.

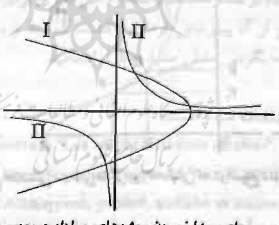
او چنین یادآور می‌شود که در این حالت می‌توان چندین جواب داشت؛ همان‌طور که می‌توان تصور نمود که جوابی وجود نداشته باشد. در حقیقت دو منحنی می‌توانند یا با یکدیگر مماس باشند یا یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند و یا نقطه تقاطعی نداشته باشند. در این صورت معادله به‌ترتیب دارای یک یا دو جواب می‌باشد و یا جوابی ندارد. به‌این ترتیب خیام به‌روشنی اعلام می‌کند که یک معادله درجه سوّم می‌تواند ۲ ریشه داشته باشد.

حال بیاییم یک معادله دیگر را مورد بررسی قرار دهیم. در این معادله در یک طرف، مکعب مجهول به‌اضافه یک عدد قرار می‌گیرد و در طرف دیگر ضریبی از مربع مجهول. معادله به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$x^3+a=cx^2 \qquad (۸)$$

خیام برای حل این معادله از یک سهمی به‌معادله $y^2=\sqrt[3]{a}\,(c-x)$ و یک هذلولی به‌معادله $xy=\sqrt[3]{a^2}$ کمک می‌گیرد (شکل ۲).

خیام مطرح می‌کند که براساس این که شاخه‌های فوقانی سهمی و هذلولی با هم مماس بوده یا یکدیگر را قطع کنند، معادله می‌تواند یک یا دو جواب مثبت داشته باشد.



شکل ۲ـ راه حل هندسی برای پیدا نمودن ریشه‌های معادله درجه سوم به‌فرمول $x^3+a=cx^2$
۱) $y^2=\sqrt[3]{a}\,(c-x)$ و ۲) $xy=\sqrt[3]{a^2}$

در صورتی که آن‌ها یکدیگر را قطع نکنند جوابی نخواهد بود.[1]

خیام نشان می‌دهد زمانی که $c \geq \sqrt[3]{a}$ باشد، هیچ جوابی وجود ندارد زیرا برای $x=\sqrt[3]{a}$، $cx^2 \leq a$ بوده، برای $x>\sqrt[3]{a}$، $cx^2<a$ بوده و برای $x>\sqrt[3]{a}$، $x^3>cx^2$ می‌باشد و این مساله غیر از شرایطی است که در معادله (۸) وجود دارد. او آن‌گاه برای حالت‌هایی که $\sqrt[3]{a}$ بزرگ‌تر، مساوی و یا کوچک‌تر از $\frac{c}{2}$ است مساله را به‌صورت زیر مورد بررسی قرار می‌دهد:

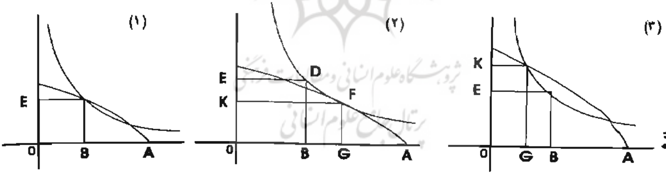
۱ـ اگر $\sqrt[3]{a}=\frac{c}{2}$ باشد، میزان y دو منحنی در $x=\sqrt[3]{a}$ برابر خواهند شد و همان‌طور که می‌توان دید، دو منحنی در یک نقطه دیگر نیز یکدیگر را قطع می‌کنند و در نتیجه معادله دارای دو ریشه خواهد بود (شکل ۱)

۲ـ اگر $\frac{c}{2} < \sqrt[3]{a}$ باشد در آن صورت $x=c-\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{a}$ بوده و در این صورت y هذلولی در $x=o$ (یعنی $y=\frac{\sqrt{a^2}}{c-\sqrt[3]{a}}$) بزرگتر خواهد بود از y سهمی در مبدا (یعنی $y=\sqrt[3]{a}$). در چنین شرایطی، دو منحنی می‌توانند یا با یکدیگر در یک نقطه مماس باشند، یا یکدیگر را در دو نقطه قطع کرده و یا اینکه همدیگر را قطع نکنند. در نتیجه دو حالت زیر موجود است (شکل ۲)

ـ معادله درجه سوم یاد شده (معادله ۸) یک یا دو جواب کوچک‌تر از $c-\sqrt[3]{a}$ دارد.

ـ معادله جوابی دارد.

۳ـ اگر $\frac{c}{2} > \sqrt[3]{a}$ باشد، دو منحنی یکدیگر را در دو نقطه قطع خواهند کرد، در نتیجه دو ریشه موجود است (شکل ـ ۳).



شکل ۳ـ رسم هندسی منحنی‌ها برای ۳ حالتی که توضیح داده شده

۱ـ حالتی که $\sqrt[3]{a}=\frac{c}{2}$ است. ۲ـ حالتی که $\sqrt[3]{a} > \frac{c}{2}$ بوده.
۳ـ حالتی که $\frac{c}{2} > \sqrt[3]{a}$ می‌باشد.

---

۱. البته باید توجه داشت که خیام قسمت چپ هذلولی را در نظر نمی‌گرفت، در نتیجه نقطه برخورد سهمی را با این بخش از هذلولی که جوابی منفی برای معادله بوده به‌حساب نمی‌آورد.

توضیح: باید توجه نمود که $OA=C$، $OB=\sqrt[3]{a}$ و در نتیجه $AB=c-\sqrt[3]{a}$ می‌باشد.

۵- پایان سخن

با این مثال اخیر می‌توان به‌روشنی مشاهده نمود که چگونه ضمن ارایه راه حل هندسی برای یافتن ریشه‌های معادلات درجه سوم، خیام این معادلات را به‌صورتی عمیق مورد مطالعه قرار می‌داد.

در کتاب یادشده‌ی خیام، او تمامی ۲۵ نوع معادله‌ی درجه سوم را که معرفی می‌کند مورد مطالعه قرار داده و برای یافتن ریشه‌های آن‌ها راه حل ارایه می‌دهد. پس از خیام، ریاضی‌دانان در ایران و در سایر کشورها؛ نظریه هندسی حل معادله‌های درجه بالا را به‌کار گرفتند و با استفاده از آثار خیام و دیگر ریاضی‌دانان این نظریه‌ها را عمق بخشیده و توسعه دادند.

در سده‌ی هفدهم میلادی استفاده از راه حل هندسی برای یافتن ریشه‌های معادله‌های درجه بالا مورد توجه بسیاری از ریاضی‌دانان اروپایی قرار گرفت. مثلاً دکارت پایه ریاضی عمومی خود را بر بهره‌گیری از این نوع راه‌حل برای حل معادله‌های جبری می‌گذارد. به‌عبارتی دیگر او برای یافتن ریشه‌های حقیقی این معادله‌ها از منحنی‌هایی که او آن‌ها را به‌شیوه‌ای مناسب برمی‌گزیند، استفاده می‌کند.

به‌تقریب تمامی ریاضی‌دانان سده هفدهم و حتا سده هجدهم از جمله نیوتن به‌این شیوه حل معادلات علاقه‌مند بودند. نیوتن یک فصل کامل از کتاب خود را به‌این مساله اختصاص داد. البته باید توجه داشت که از سده هفدهم به‌بعد راه حل جبری برای حل این معادله‌ها همان‌طور که خیام چند سده قبل از آن پیش‌بینی کرده بود کشف گردید و به‌تدریج جایگزین راه حل هندسی شد ولی این جایگزینی مدتی مدید به‌طول انجامید.

از این سرچشمه‌ها استفاده شده است:

1. Adolf p. Youschkeviteh, "Les mathématiques Arabes", Traduction par M. Cazenaze et K.Jaouiche, librairie philosophique J.Vrin, 90-103 (1976)

2. L´algèbre d' Omar Alkhayyāmi, publieé, traduite et accompagnée d' extraits de manuscrits inédits par F. Woepcke, Paris, 1851.

3. G.H. Mossaheb, Hakim Omar Khayyam algebrist, Téhéran, 1960.