رضوان مقدم

مجموعه‌های فازی[1]

منطق کلاسیک شبیه شخصی است که لباس رسمی مشکی ـ بلوز سفید آهاردار کراوات مشکی ـ کفش‌های براق و... به‌یک مهمانی رسمی آمده است. منطق فازی تا اندازه‌ای شبیه به‌فردی است که با لباس غیررسمی، شلوار جین، تی‌شرت و کفش‌های پارچه‌ای آمده است، این لباس‌ها را در گذشته نمی‌پذیرفتند، اما امروزه جور دیگری است»

لطفی عسگری‌زاده

«ارتباطات مشترک برای ماشین‌های محاسب جلد ۲۷، ۱۹۸۴»

همان طور که در مقاله‌ی «نگاهی به‌نظریه‌ی فازی» در شماره‌ی ۲۰ دانش و مردم اشاره رفت نظریه‌ی مجموعه‌های فازی نظریه‌ای است برای اقدام در شرایط عدم اطمینان. این نظریه قادر است بسیاری از مفاهیم و متغیرها و سیستم‌هایی را که نادقیق و مبهم هستند، چنانچه در عالم واقع چنین است، صورت‌بندی ریاضی کند و زمینه را برای استدلال، استنتاج، کنترل و تصمیم‌گیری در شرایط عدم اطمینان فراهم آورد. در منطق کلاسیک (صریح) نظریه‌ی مجموعه‌ها زیربنای ریاضیات مدرن را تشکیل می‌دهد. وقتی با واژه‌های مبهم مانند بزرگ، بلند، و... سر و کار داریم، دیگر منطق صریح کارساز نیست واژه‌هایی مانند کوچک، دور، نزدیک، پیر، جوان و... واژه‌های فازی هستند با این حال در زبان طبیعی بسیار به‌کار می‌بریم از جمله می‌گوییم هوای بیرون خیلی سرد است. تراکم جمعیت در مناطق مرکزی شهر بسیار زیاد است و جمله‌هایی از این قبیل. در قلمرو مجموعه‌های کلاسیک جایی برای این‌گونه مفهوم‌ها نیست و صورت‌بندی مشخصی وجود ندارد تا قابل تجزیه و تحلیل باشند. اگردر زندگی روزمره خود دقیق شویم، متوجه خواهیم شد که اغلب گزاره‌هایی که استفاده می‌کنیم مبهم و فازی

1. Fuzzy sets

هستند و ارزش‌گذاری گزاره‌ها نیز در مغز انسان فازی است. برای نمونه دانش‌آموزی که نمره‌ی ۱۵ کسب می‌کند، تنبل نیست و اطلاق کلمه‌ی زرنگ یا تنبل جالب به‌نظر نمی‌رسد.

هم‌چنین فردی که ۵ دقیقه دیر سر قرار می‌رسد، بدقول نیست. حسن نظریه‌ی فازی در این است که به‌ما اجازه می‌دهد به‌تابع عضویت μ مقداری بین صفر و یک را نسبت دهیم. و ابهام را جایگزین قطعیت کنیم. بنابراین اساسی‌ترین مفهوم نظریه‌ی فازی مفهوم مجموعه‌های فازی است. مجموعه‌ی خانه‌های شهر تهران را در نظر می‌گیریم، در این‌جا کلمه‌ی خانه معرف مجموعه‌ی خانه‌هاست یعنی هر چیزی که بتوان از آن به‌عنوان خانه نام برد. در این مجموعه قرار می‌گیرد. حال در نظر بگیرید که چه ساختمان یا بناهایی را می‌توان خانه نامید. کاخ‌ها، خانه‌های ویلایی، آپارتمان، خانه‌های دوبلکس، چادر، آلونک‌ها، خانه‌های مقوایی، خانه‌های حلبی، کلمه‌ی خانه را درباره‌ی بعضی از این بناها راحت‌تر می‌توان به‌کار برد و بعضی را می‌توان تا حدودی خانه دانست. مغز انسان پر است از مجموعه‌های فازی و ما در فضای فازی فکر می‌کنیم و مجموعه‌های فازی یک قالب جدید برای صورت‌بندی و تجزیه و تحلیل مفهوم‌ها مبهم است.

مجموعه‌های فازی به‌یکی از این صورت‌ها قابل نمایش است:[1]

۱ـ به‌صورت زوج‌های مرتب $\tilde{A}=\{x, \mu_{\tilde{A}}(x) | x \in X\}$

فرض می‌کنیم بنگاه مسکنی میزان راحتی و مناسب بودن منازل موجود را برای فروش، با تعداد اتاق خواب‌های آن می‌سنجد و تعداد اتاق خواب‌های آن یکی از اعضای مجموعه‌ی {۱۰ و.... ۳ و ۲ و ۱}=X باشد. مجموعه‌ی فازی «منازل راحت برای یک خانواده‌ی چهار نفره» به‌این صورت بیان می‌شود:

$\tilde{A}$={(۱ و ۰/۲)،(۲ و ۰/۵)،(۳ و ۰/۸)،(۴ و ۱)،(۵ و ۰/۷)،(۶ و ۰/۳)}

۲ـ نمایش تحلیلی و مشروط به‌شکل تابع

مجموعه اعدادی که خیلی بزرگ‌تر از ۱۰ هستند به‌این صورت قابل نمایش است:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} 0 & x\leq 10 \\ (1+(x-10)^{-2})^{-1} & x>0 \end{cases}$$

۳ـ به‌صورت اجتماع در حالتی که مجموعه گسسته باشد و به‌صورت انتگرال در صورتی که مجموعه پیوسته باشد.

مجموعه‌ی عددهای طبیعی، نزدیک به ۱۰ را به‌این صورت نمایش می‌دهیم:

---

1. Fuzzy set theory, And Its Applications third Edition H. J. zimmermann

$$\tilde{A}=\{\frac{۰/۶}{۶}+\frac{۰/۷}{۷}+\frac{۰/۸}{۸}+\frac{۰/۹}{۹}+\frac{۱}{۱۰}+\frac{۰/۹}{۱۱}+\frac{۰/۸}{۱۲}+\frac{۰/۷}{۱۳}+\frac{۰/۶}{۱۴}+\frac{۰/۵}{۱۵}\}$$

در این‌جا منظور از علامت «+» اجتماع است نه جمع حسابی. در این مجموعه‌ی فازی به‌جای آن‌که بگوییم عدد ۱۴ عضو مجموعه‌ی $\tilde{A}$ است یا نه، می‌گوییم با درجه‌ی عضویت ۰/۶ عدد ۱۴ عضو مجموعه‌ی $\tilde{A}$ است.

هنگامی که X یک مجموعه‌ی پیوسته باشد، این نماد را به‌کار می‌بریم

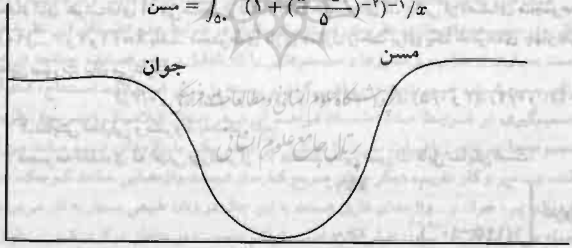
$$\tilde{A}=\int_X \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{X}$$

به‌نمونه‌ی کلاسیک دیگری در حوزه‌ی پیوسته توجه می‌کنیم که از جمله نمونه‌هایی است که لطفی عسگری‌زاده در مقاله‌ی خود در سال ۱۹۶۵ ارایه کرده‌اند.

فرض کنید U بازده [۰,۱۰۰] نشان دهنده‌ی سن طبیعی افراد باشد، مجموعه‌های فازی «جوان و مُسن» را می‌توانیم به‌این صورت تعریف کنیم:

$$\text{جوان}=\int_{۰}^{۲۵}\frac{۱}{x}+\int_{۲۵}^{۱۰۰}(۱+(\frac{x-۲۵}{۵})^{۲})^{-۱}/x$$

$$\text{مسن}=\int_{۵۰}^{۱۰۰}(۱+(\frac{x-۵۰}{۵})^{-۲})^{-۱}/x$$



نمودار تابع عضویت «جوان» و «مُسن»

توجه به‌این نکته ضروریست که اگرچه برای یک مجموعه‌ی فازی می‌توان توابع عضویت مختلف در نظر گرفت لیکن تخصیص تابع عضویت امری تخصصی است و باید مناسب مجموعه‌ی مورد نظر باشد.